В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

РЎЗИМУРАДОВА ДУРДОНА ХАМИДЖОНОВНА

ДИНАМИК СИСТЕМАЛАРНИНГ ЧЕГАРАЛАНМАГАН ЛИМИТ ТЎПЛАМЛАРИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

УДК: 517.91/517.93

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of thesis abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

РЎЗИМУРАДОВА ДУРДОНА ХАМИДЖОНОВНА

ДИНАМИК СИСТЕМАЛАРНИНГ ЧЕГАРАЛАНМАГАН ЛИМИТ ТЎПЛАМЛАРИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.1.PhD/FM558 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Азамов Абдулла** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Жамилов Уйғун Умурович** физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим
	Ахмедов Одилжон Сахибжонович физика-математика фанлари номзоди, катта илмий ходим
Етакчи ташкилот:	**Тошкент шаҳридаги Турин политехника университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил « 12 » ноябр соат 14:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (123 -рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2021 йил « 25 » октябр куни тарқатилди.
(2021 йил « 25 » октябр даги 2 -рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

Р.Р.Ашуров
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раиси ўринбосари,
ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотларда узлуксиз ва дискрет вақтли динамик системалар кенг ўрин эгаллайди. Ахборот-коммуникацион технологиялар даврининг бошланиши динамик системалар назариясининг ривожланишини янги босқичга олиб чиқди. Бир томондан табиат, техника, иқтисодиёт, тирик организмлардаги жараёнларнинг катта қисми динамик системалар кўринишида моделлаштирилади ва шунинг учун динамик системалар математик моделлаштиришнинг самарали воситасига айланди. Иккинчи томондан, компьютер технологияси мураккаб, айниқса чизиқли бўлмаган динамик системаларни ўрганишга кенг татбиқ қилина бошланди. Бу йўналиш ривожланиши натижасида ҳисоблаш динамикаси соҳаси вужудга келди. Дифференциал тенгламалар системаси кўринишида моделлаштирилган муайян жараённи узоқ муддатли прогноз қилишда динамик системалар лимит тўпламларининг хоссалари муҳим роль ўйнайди. Шу сабабдан динамик системаларнинг лимит тўпламлари, хусусан чегараланмаган лимит тўпламлари хоссаларини тадқиқ этиш динамик системалар назариясидаги муҳим ва долзарб вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда олиб борилаётган илмий тадқиқотлар динамик системаларнинг лимит тўпламларини топиш ва уларнинг тузилишини тавсифлаш, бошқарилувчи жараёнларни моделлаштириш ва дифференциал тенгламалар назарияси билан боғлиқ тадқиқотларда муҳим аҳамиятга эга эканлигини кўрсатмоқда. Динамик системалар учун чегараланган лимит тўпламларнинг назарияси етарлича ўрганилганлигига қарамасдан ушбу назариядаги натижалар ҳаётий жараёнларнинг узоқ муддатли табиатини тадқиқ этиш имконини бермайди. Хусусан, уч ўлчовли системалар аттракторларини тавсифлаш масаласи бугунги динамик системалар назариясининг долзарб муаммосидан бири. Аттракторлар лимит тўпламлар оиласи бўлгани учун лимит тўпламларни чуқур тадқиқ этиш бу ўринда муҳим ёндашувни ташкил этади. Бу борада текисликдаги ва фазодаги динамик системалар чегараланмаган лимит тўпламларининг топологик хоссаларини аниқлаш, шу жумладан экологик, физик ва кимёвий жараёнларни моделлаштириш ҳамда оптимал бошқарув назарияси масалаларини ечишда фойдаланиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда сўнгги йилларда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган геология, биология, математика ва физика фанларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, физик, механик, экологик, техник, кимёвий ҳамда иқтисодий жараёнларни узоқ вақт оралиғидаги табиатини ўрганиш имконини берувчи динамик системаларнинг сифат назариясини ривожлантиришга алоҳида аҳамият берилди ва салмоқли натижаларга эришилди.«Дифференциал тенгламалар ва математик физика, динамик системалар назарияси ва математик моделлаштириш» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида динамик системаларнинг сифат назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сон Фармони, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сон Қарори ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялар ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Ушбу тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Динамик системалар назарияси ҳозирги давр математика фанининг жадал ривожланаётган соҳаларидан биридир. Унга буюк француз математиги А.Пуанкаренинг 1881-1886 йилларда нашр этилган тўртта рисоласида асос солинган. У бу тушунчага осмон механикаси муаммоларини, асосан Ойнинг ҳаракатини ўрганиш муносабати билан келган. Динамик системалар назарияси А.М.Ляпунов, И.Бендиксон, Дж.Биркгоф томонидан ривожлантирилган. Бунга А.А.Андронов ва у асос солган илмий мактаб вакилларининг ҳиссаси катта. Улар текисликдаги динамик системалар назариясини чуқур ривожлантирган. В.В.Немицкий, Н.П.Еругин, Ж.Сансоне, Ж.Сонг-ли илмий мактабларининг динамик системалар сифат назарияси бўйича ҳиссасини алоҳида таъкидлаш лозим. Динамик системаларнинг структуравий турғунлик назарияси вужудга келиши ва ривожланиши А.Андронов ва Л.С.Понтрягиннинг 1937 йилдаги мақоласи билан боғлиқ. Ушбу йўналиш Д.В.Аносов, С.Смейл, В.А.Плисс, М.М.Пейхото, Ф.Хартман ва бошқалар томонидан янада ривожлантирилди. Ҳозирги вақтда Барселона (Ж.Ллибре), Калифорния (Л.Чуа), Минск (Л.А.Черкас), Москва (И.В.Ильяшенко), Нижный Новгород (Л.П.Шильников), Рио-де-Жанейро (Ж.Палис), Ханчжоу

[1]Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

(С.М.Хуан), ва бошқа шаҳарларда динамик системалар бўйича илмий мактаблар фаолият юритмоқда. 1950-80 йилларда Самарқанд шаҳрида халқаро миқёсда тан олинган И.С.Куклес раҳбарлигида илмий мактаб фаолият кўрсатган.

Динамик системалар назариясининг чуқур ривожланганига қарамасдан, тайин мисолларнинг сифат таҳлили мураккаб вазифалигича қолмоқда. Ҳаттоки текисликдаги динамик системалар учун ҳам кўплаб ҳал қилинмаган муаммолар мавжуд (уларнинг бир нечаси А.Азамовнинг "Замонавий математиканинг долзарб муаммолари" 2019 номли қўлланмадаги мақоласида санаб ўтилган). Бошқа томондан ҳатто уч ўлчовли динамик системалар учун махсус нуқталар атрофида системанинг локал табиати тўла тавсифланмаган. Шу каби ҳолат лимит тўпламлар учун ҳам ўринли. Пуанкаре-Бендиксон теоремасига кўра текисликдаги системалар учун ихтиёрий лимит тўплам критик нуқта, лимит цикл, бир ёки бир неча махсус нуқта ҳамда уларни туташтирувчи сепаратрисаларниниг бирлашмасидан иборат бўлади. Лимит тўплам тушунчаси автоном бўлмаган системалар учун ҳам киритилган. Бу йўналишда Занг Ху текисликдаги уч турдаги системалар учун натижалар олган, Э.Д'Аниелло, С.Элайди дискрет динамик системалар учун лимит тўпламларни тадқиқ этган. Ж.Биркгоф томонидан киритилган абстракт динамик системалар учун лимит тўпламлар назарияси К.С.Сибирский томонидан ривожлантирилган.

Динамик системалар назариясининг энг долзарб муаммоларидан бири – Д.Гилбертнинг ўн олтинчи масаласининг иккинчи қисми ҳамон очиқлигича қолмоқда. Сўнги йилларда Ю.С.Иляшенко лимит цикллар сони чекли бўлиши билан боғлиқ натижалар олди, аммо юқоридан баҳолаш масаласи ҳали ҳал қилинмаган. Кўп ўлчовли системаларнинг лимит тўпламларига оид эса ҳозирги кунга қадар фақат саноқли натижалар мавжуд. Охирги пайтларда В.Ж.Лопез, Ж.Ллибре ва Ж.Э.Буэндиа томонидан юзаларда узлуксиз оқимлар ва аналитик вектор майдонларнинг лимит тўпламларининг топологик характеристикаси эълон қилинди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номидаги Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги ОТ-F4-84 «Полиномиал системалар учун дискрет-сонли метод ҳамда унинг циклик ва бошқарилувчи жараёнларни моделлаштиришга татбиқлари» (2017-2020 йиллар) ва Тошкент молия институтида фундаментал-тадқиқот дастури доирасидаги ОТ-Ф4-16 “Оптимал бошқарув масалалари ва графларда дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар назариясини ишлаб чиқиш” (2017-2020 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади текислик ва фазодаги динамик системаларнинг чегараланмаган лимит тўпламлари хоссаларини тавсифлаш ҳамда лимит тўплами берилган хоссаларга эга бўлган икки ва уч ўлчовли динамик системалар қуришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

динамик системаларнинг чегараланмаган лимит тўпламлари хоссаларини ўрнатиш;

текисликдаги аналитик динамик системалар лимит тўпламлари қуввати (боғлиқлик компоненталари сони)ни баҳолаш;

текисликда лимит тўплами боғлиқлик компоненталари сони чексиз кўп бўлган аналитик динамик система қуриш масаласини ечиш усулини ишлаб чиқиш;

уч ўлчовли фазода лимит тўплами тайин табиатга эга бўлган динамик системалар учун тескари масалани ҳал этиш;

Тадқиқотнинг объекти. Чегараланмаган лимит тўпламли рационал, аналитик ва полиномиал динамик системалар.

Тадқиқотнинг предмети. Узлуксиз вақтли динамик системалар назарияси, динамик системаларнинг сифат назарияси, тескари математик масалалар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида динамик системалар назарияси, топология, дифференциал тенгламаларни ечишнинг сонли усуллари, шунингдек, компьютерли моделлаштириш фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

динамик системанинг лимит тўплами боғлиқли бўлмаса, у ҳолда унинг ҳар бир компонентаси чегараланмаган бўлиши исботланган;

текисликдаги аналитик системаларнинг лимит тўпламлари боғлиқлик компоненталари сони чекли ёки саноқли бўлиши исботланган;

текисликда лимит тўпламининг боғлиқлик компоненталари сони чексиз кўп бўлган аналитик динамик система мавжудлиги исботланган;

лимит тўплами ихтиёрий жуфт сондаги параллел тўғри чизиқдан иборат бўлган уч ўлчовли динамик система қуриш тескари масаласи ечилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси лимит тўплами чегараланмаган ва компоненталари сони билан боғлиқ хоссаларга эга динамик системалар қуриш методикаси ишлаб чиқилган ва конкрет мисолларга татбиқ этилган. Уч ўлчовли фазода лимит тўплами чегараланмаган динамик системалар фазовий портретини ясашга компьютер графикасини қўллаш усули ривожлантирилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги динамик системалар назарияси, топология, дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси ва ечишнинг сонли усулларидан фойдаланилгани, шу жумладан, теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботлангани билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти улар динамик системаларнинг сифат назариясига янги ҳисса қўшиши билан изоҳланади.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти эса магистрларни тайёрлашда ҳамда динамик жараёнларни уларнинг узоқ вақт оралиғидаги табиати муҳим бўлган ҳолларда математик моделлаштиришда қўллаш имкони билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Динамик системаларнинг чегараланмаган лимит тўпламлари бўйича олинган натижалар асосида:

динамик системанинг лимит тўплами боғлиқсиз бўлган ҳолда унинг ҳар бир компонентаси чегараланмаган бўлишидан №Г00003440 рақамли «Кечикувчи дифференциал тенгламаларнинг сифат ва миқдорий хоссаларининг динамик системаларга қўлланилиши» мавзусидаги хорижий лойиҳада кечикувчи дифференциал тенгламаларнинг сифат табиатини аниқлашда фойдаланилган (Бирлашган Араб Амирликлари университетининг 2021 йил 14 сентябрьдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши кечикувчи дифференциал тенламаларнинг сифат хоссаларини топиш имконини берган.

текисликдаги аналитик системаларнинг лимит тўпламлари боғлиқлик компоненталари сони саноқли бўлишидан №ОТ-Ф4-02 рақамли «Математик физиканинг ҳолатлар тўплами чексиз бўлган моделлари термодинамикаси» мавзусидаги фундаментал лойиҳада физика ва биологиядаги эволюцион системалар характеристикаларининг катта вақт оралиқлари давомидаги асимптотикасини қуришда фойдаланилган (Бухоро давлат университетининг 2021 йил 22-июндаги №04-04/01-168-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши физик, механик ва экологик системаларнинг табиатини узоқ муддатли прогноз қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 4 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 12 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 4 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 76 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси ёритилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти кўрсатилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Лимит тўпламларнинг чегараланганлик ва чегараланмаганлиги»** деб номланган биринчи бобида диссертация мавзусини тўла ёритиш учун зарур бўлган асосий таърифлар ва муҳим тушунчалар келтирилган. Шунингдек, динамик системалар лимит тўпламларининг бир нечта хоссаси баён қилинган.

Ушбу

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in E \tag{1}$$

динамик системани қараймиз, бу ерда $f \in C^r(E)$ ва E тўплам $\mathbb{R}^n$ фазонинг очиқ соҳаси $(n \in \mathrm{N}^+, r \geq 1)$. Динамик системалар назариясида t ўзгарувчи вақт, E эса ҳолатлар фазоси сифатида қаралади.

Агар $x(t)$, $\alpha < t < \beta$, (1) системанинг ечими бўлса, у ҳолда $x(\cdot):(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n$ акслантириш $\mathbb{R}^n$ фазода ориентацияланган эгри чизиқни аниқлайди. Бу эгри чизиқ ҳолатлар траекторияси ва E соҳа эса ҳолатлар фазоси деб аталади. (1) система E фазода берилган вектор майдон оқими сифатида ҳам қаралиши мумкин.

$\varphi(t, x_0)$ функция

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

Коши масаласининг ечими ва Γ эгри чизиқ (1) системанинг шу ечимга мос тректорияси бўлсин.

1-таъриф. Агар (1) системанинг Γ траекторияси вақтга боғлиқ бўлмаса, яъни $\varphi(t, x_0) \equiv x_0 = const$ бўлса, у мувозанат ҳолати дейилади.

2-таъриф. Агар шундай $\{t_k\}$, $t_k \to +\infty$ кетма-кетлик топилиб, қуйидаги тенглик ўринли бўлса:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k, x_0) = p,$$

у ҳолда $p \in E$ нуқта Γ траекториянинг ω-лимит нуқтаси дейилади.

Шу каби, агар $t_k \to -\infty$ да $\varphi(t_k, x_0) \to p$ бўлса, у ҳолда p нуқта Γ траекториянинг α-лимит нуқтаси дейилади.

3-таъриф. Γ траекториянинг барча ω-лимит нуқталари тўплами Γ нинг ω-лимит тўплами дейилади ва $\omega(\Gamma)$ каби белгиланади. Γ траекториянинг барча α-лимит нуқталари тўплами Γ нинг α-лимит тўплами дейилади ва $\alpha(\Gamma)$ каби белгиланади.

1-теорема. (1) система Γ траекториясининг α ва ω-лимит тўпламлари, $\alpha(\Gamma)$ ва $\omega(\Gamma)$, E ҳолатлар фазосининг ёпиқ қисм тўпламларидир. Агар Γ траектория $\mathbb{R}^n$ нинг компакт қисм-тўпламида ётса, у ҳолда $\alpha(\Gamma)$ ва $\omega(\Gamma)$ тўпламлар бўш бўлмаган, боғлиқ ва компакт қисм-тўпламлар бўлади.

2-теорема. Агар p нуқта Γ тректориянинг ω-лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда (1) системанинг p нуқтадан ўтувчи Γ_p траекториясининг барча нуқталари ҳам Γ нинг ω-лимит нуқталари бўлади, яъни $p \in \omega(\Gamma)$ дан $\Gamma_{\boldsymbol{p}} \subset \omega(\Gamma)$ келиб чиқади. Шу каби $p \in \alpha(\Gamma)$ дан $\Gamma_{\boldsymbol{p}} \subset \alpha(\Gamma)$ келиб чиқади.

Диссертациянинг **«Динамик системалар лимит тўпламларининг чегараланмаганлик хоссалари»** деб номланган иккинчи бобида динамик системаларнинг чегараланмаган лимит тўпламларининг топологик хоссаларини ифодаловчи теоремалар берилган.

Қуйидаги динамик система берилган бўлсин

$$\dot{z} = f(z), \tag{2}$$

бу ерда $z \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

Кейинги ўринларда (2) системанинг бирор $z(0) = \xi$ бошлағич нуқтадан ўтувчи тректориясининг ω-лимит тўпламини учун Ω каби белгилашдан фойдаланамиз. Лимит тўплами чегараланмаган ва боғлиқсиз динамик системалар учун қуйидаги натижа олинган.

3-теорема. Агар Ω тўплам боғлиқ бўлмаса, у ҳолда унинг ҳар бир боғлиқлик компоненталари чегараланмаган бўлади.

Бундан ташқари, текисликдаги аналитик системаларнинг Ω тўпламининг боғлиқлик компоненталари сонининг қуввати учун қуйидаги теорема олинган.

4-теорема. Ω тўплам боғлиқ бўлмасин. Агар Ω тўпламнинг ҳар бир боғлиқлик компонентаси камида битта сингуляр бўлмаган нуқтани ўз ичига олса, у ҳолда Ω нинг компоненталари сони кўпи билан саноқли бўлади.

5-теорема. C^∞ синфга тегишли ва Ω тўплами боғлиқлик компоненталари сони қуввати континиум бўлган динамик система мавжуд.

Цилиндр устида Ω тўпламининг компоненталари Кантор тўпламининг ҳар бир чегаравий нуқтасига мос кесишмайдиган нурлар бирлашмасидан иборат динамик система қуриш ёрдамида 5-теорема исботланган.

Диссертациянинг **«Чегараланмаган лимит тўпламли динамик системлар учун тескари масала»** деб номланган учинчи бобида Гамильтон функциясидан фойдаланиб, ω-лимит тўплами чегараланмаган ва берилган хоссаларни қаноатлантирувчи икки ва уч ўлчовли динамик системалар қуриш методлари баён қилинган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида олдиндан берилган ихтиёрий натурал n сони учун текисликда ω-лимит тўплами $4n$ та боғлиқлик компонентадан иборат рационал динамик система қурилган.

Қуйидаги рационал функцияни қарайлик:

$$f^0(x,y) = \frac{\left(R^2k^2 + x^2(y^2 - k^2)\right)\left(R^2k^2 + y^2(x^2 - k^2)\right)}{(x^6 + R^2)(y^6 + R^2)},$$

бу ерда R ва $k -$ мусбат параметрлар.

Берилган R ва $k = R\sin\dfrac{\pi}{4n}$ сонлари учун юқоридаги функция ёрдамида қуйидаги функцияни аниқлайлик:

$$F(x,y)=f^{0}(x,y)\cdot f^{1}(x,y)\cdot\ldots\cdot f^{n-1}(x,y),$$

бу ерда $f^{m}(x,y)=f^{0}\left(x\cos\frac{\pi m}{2n}-y\sin\frac{\pi m}{2n},\ x\sin\frac{\pi m}{2n}+y\cos\frac{\pi m}{2n}\right),\ m=1,2,\ldots n-1.$

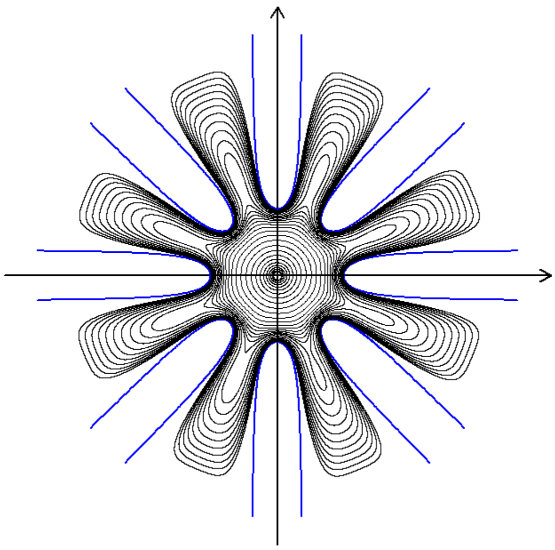
Таъкидлаб ўтиш керакки, $F(x,y)=0$ тенгламанинг ечимлари ўзаро кесишмайдиган $4n$ та чизиқдан иборат бўлади.

$F(x,y)$ функциядан фойдаланиб, қуйидаги система

$$\begin{aligned}\dot{x}&=F_y(x,y)+\lambda F(x,y)F_x(x,y),\\ \dot{y}&=-F_x(x,y)+\lambda F(x,y)F_y(x,y),\end{aligned}\tag{3}$$

қурилган, бу ерда λ етарлича кичкина мусбат сон.

6-теорема. (3) системанинг $F(x,y)>0$ соҳада ётувчи траекторияларининг ω-лимит тўплами $F(x,y)=0$ чизиқдан иборат ва шунинг учун у $4n$ та боғлиқлик компонентасига эга бўлади (1-расм).



1-расм. $n=2$ учун (3) системанинг траекторияларидан бири ва унинг ω-лимит тўплами.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида мос равишда ω-лимит тўплами чексиз кўп боғлиқлик компонентасидан иборат ва 4 та тўғри чизиқдан иборат бўлган икки ва уч ўлчовли аналитик динамик системалар қурилган.

Текисликда Гамильтон системасини қўзғатиш усули орқали қуйидаги

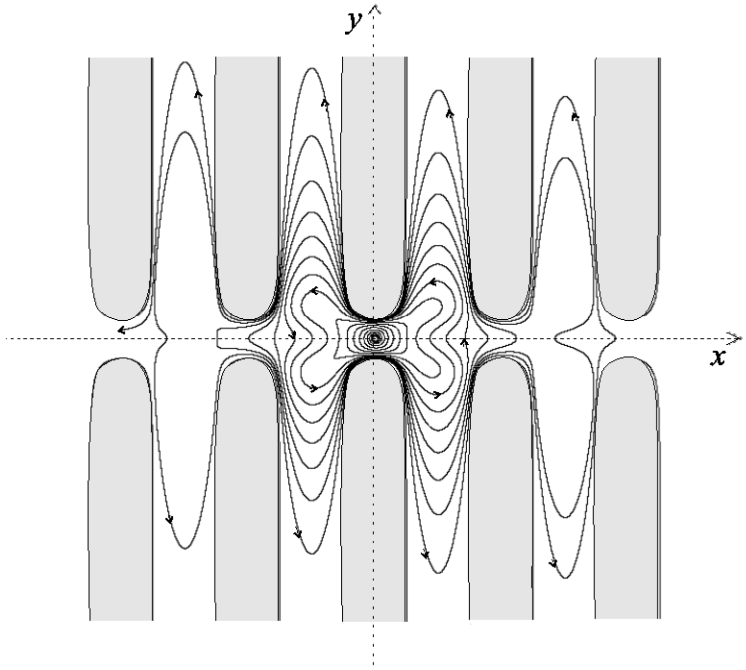
$$\begin{aligned}\dot{x}&=F_y(x,y)-\lambda F(x,y)F_x(x,y),\\ \dot{y}&=-F_x(x,y)-\lambda F(x,y)F_y(x,y),\end{aligned}\tag{4}$$

система қурилган, бу ерда $F(x,y)=\psi(x,y)(1-y^2\cos x)$, $\psi(x,y)=(1+x^2+y^4)^{-1}$, $\lambda>0$.

(4) системанинг $Z=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<F(x,y)<1\right\}$ соҳанинг ихтиёрий (x_0,y_0) бошланғич нуқтасидан ўтувчи траекторияси $z\left(t\right)=\left(x(t),\, y(t)\right)$ бўлсин.

7-теорема. $z(t)$ траекториянинг ω-лимит тўплами $F\left(x,y\right)=0$ чизиқдан иборат бўлиб, у чексиз кўп боғлиқлик компоненталарига эга.

2-расмда $F(x,y)=0$ чизиқ ва $z(t)$ траектория тасвирланган.



2-расм. Чексиз кўп боғлиқлик компоненталарига эга аналитик система.

Навбатдаги натижа $\mathbb{R}^3$ фазода берилган

$$\begin{aligned}
&\dot{x}=-\sin y+\varepsilon\sin x(\cos x+\cos y),\\
&\dot{y}=\sin x+\varepsilon\sin y(\cos x+\cos y),\\
&\dot{z}=\left(1+\frac{z^2}{z^2+1}\right)\left(\sin^2\frac{y}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}\tag{5}$$

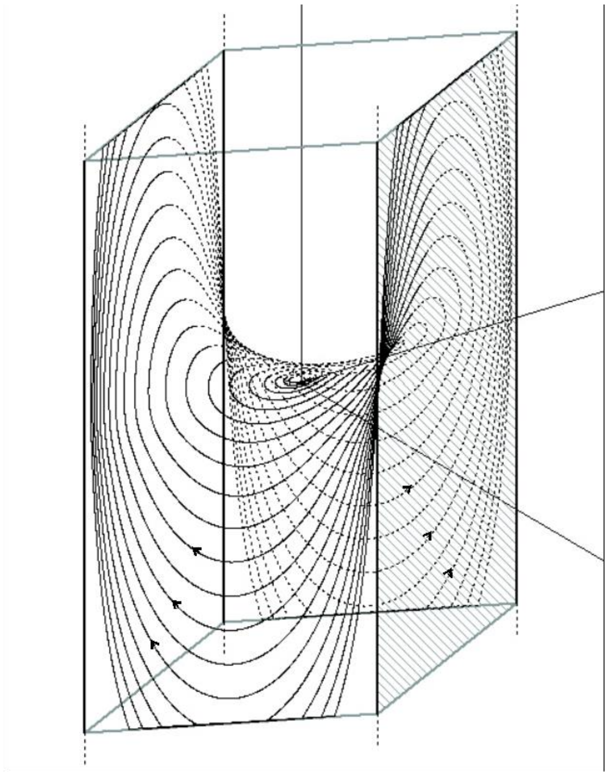
аналитик система билан боғлиқ, бу ерда ε етарлича кичкина мусбат сон. Унинг траекториялари қуйидаги чегараланмаган соҳада ўрганилади:

$$\Pi=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\Big|\, \left|y+x\right|<\pi,\ \ \left|y-x\right|<\pi\right\}.$$

$(x_0,y_0,z_0)\in\Pi/\left(0,\,0,\,0\right)$ нуқтадан ўтувчи траекторияни $\xi(t)=\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)$ каби белгилаймиз.

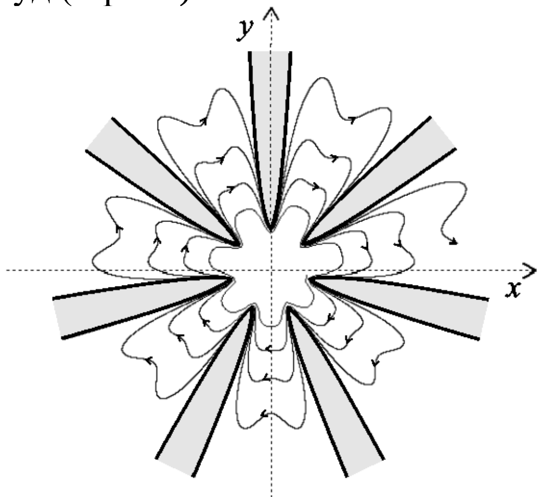
8-теорема. $\xi(t)$ траекториянинг ω-лимит тўплами Oz ўқига параллел ва $(\pm\pi,\,0,\,0),\,(0,\,\pm\pi,\,0)$ нуқталардан ўтувчи тўртта тўғри чизиқдан иборат бўлади (3-расм).

Учинчи бобнинг учинчи параграфида чегараланмаган лимит тўпламли икки ва уч ўлчовли полиномиал системалар учун тескари масалалар қаралган.



3-расм. (5) системанинг фазавий портрети

9-теорема. Ихтиёрий мусбат бутун N сони учун траекториясининг ω-лимит тўплами N та боғлиқлик компонентадан иборат бўлган полиномиал динамик система мавжуд (4-расм).



4-расм. 7 та боғлиқлик компонентасига эга бўлган полиномиал система

Текисликда ω-лимит тўплами N та боғлиқлик компонентадан иборат бўлган полиномиал динамик система қуриш орқали 9-теорема исботланаган.

Параграфнинг иккинчи қисмида уч ўлчовли фазода лимит тўплами ихтиёрий жуфт сондаги компоненталардан иборат бўлган полиномиал динамик система қурилган.

Бу мақсадда берилган ихтиёрий $m \in \mathbb{N}$ сони учун

$$F(x,y) = G(x,y) / H(x,y)$$

функция киритилади, бу ерда

$$G(x,y)=\prod_{k=1}^{2m}\left(xCos\frac{\pi(2k-1)}{2m}+y\sin\frac{\pi(2k-1)}{2m}-\cos\frac{\pi}{2m}\right),$$

$$H(x,y)=(x^2+y^2+1)^{m+1}\cos^{2m}\frac{\pi}{2m},\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Сўнг $F(x,y)$ функцияси ёрдамида

$$\begin{aligned}&\dot{x}=-F_y-\lambda FF_x,\\&\dot{y}=F_x-\lambda FF_y,\\&\dot{z}=\left(1+\frac{z^2}{1+z^2}\right)\prod_{i=1}^{m}\left(y\cos\frac{\pi(2i-1)}{2m}-x\sin\frac{\pi(2i-1)}{2m}\right)\end{aligned}\tag{6}$$

система қурилган, бу ерда λ етарлича кичкина мусбат сон.

(6) система траекторияларининг табиати чегараланмаган $D=G\times\mathbb{R}$ соҳада ўрганилган, бунда $G=\mathrm{Int}\Gamma\setminus(0,0)$,

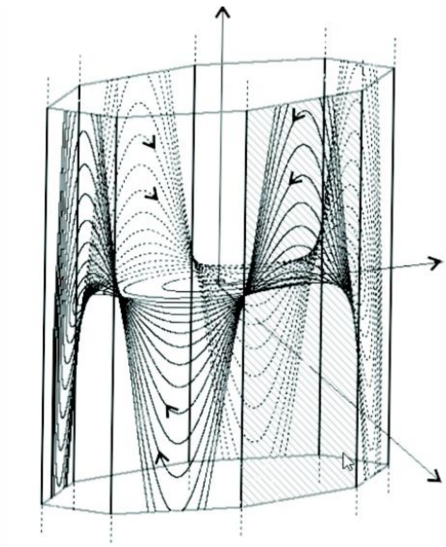
$$\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x\cos\frac{\pi(2i-1)}{2m}+y\sin\frac{\pi(2i-1)}{2m}\le\cos\frac{\pi}{2m},\quad i=1,2,\dots,2m\right\}$$

– мунтазам кўпбурчак.

(6) системанинг бирор $\big(x(0),\ y(0),\ z(0)\big)\in D$ бошланғич нуқтадан ўтувчи траекторияси $\zeta(t)=\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$ бўлсин.

10-теорема. $\zeta(t)$ траекториянинг ω-лимит тўплами Oz ўқига параллел, $\left(\cos\frac{\pi k}{m},\ \sin\frac{\pi k}{m},\ 0\right)$, $k=1,2,\dots,2m$ нуқталардан ўтувчи $2m$ та тўғри чизиқдан иборат.

5-расмда $m=4$ ҳоли учун $\zeta(t)$ траектория ва уни ω-лимит тўплами тасвирланган.



5-расм. Лимит тўплами саккизта тўғри чизиқдан иборат бўлган уч ўлчовли полиномиал система

ХУЛОСА

Диссертация иши динамик системаларнинг чегараланмаган лимит тўпламларининг топологик хоссаларини тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Динамик системанинг лимит тўплами боғлиқли бўлмаса, у ҳолда унинг ҳар бир компонентаси чегараланмаган бўлиши исботланган.

2. Текисликдаги аналитик системаларнинг лимит тўпламлари боғлиқлик компоненталари сони чекли ёки саноқли бўлиши исботланган.

3. Силлиқ функциялар синфига тегишли, боғлиқлик компоненталари сони континиум бўлган динамик система мавжудлиги исботланган.

4. Гамильтон функцияси усули билан текисликда ва уч ўлчовли фазода лимит тўплами берилган хоссаларга эга бўлган рационал, аналитик ва полиномиал системалар қуриш масалалари ечилган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

RUZIMURADOVA DURDONA XAMIDJONOVNA

UNBOUNDED LIMIT SETS OF DYNAMICAL SYSTEMS

01.01.02-Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2021

The theme of thesis of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.1.PhD/FM558.

Thesis has been prepared at National university of Uzbekistan.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Azamov Abdulla** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician
Official opponents:	**Jamilov Uygun Umurovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
	Axmedov Odiljon Saxibjonovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
Leading organization:	**Turin Polytechnic University in Tashkent**

Defense will take place "12" November 2021 at 14:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered №123). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on «25» October 2021 year
(Mailing report № 2 on «25» October 2021 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
C.F.-M.S., Senior researcher

R.R.Ashurov
Deputy Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION

Actuality and demand of the theme of the thesis. Continuous and discrete time dynamical systems play an important role in many scientific and practical researches around the world. The beginning of the era of information and communication technologies has brought the development of the theory of dynamical systems to a new level. On the one hand, most of the processes in nature, technology, economics, living organisms are modeled in the form of dynamical systems, and therefore dynamical systems have become an effective tool of mathematical modeling. On the other hand, computer technology has begun to be widely applied to the study of complex, especially nonlinear dynamical systems. As a result of the development of this direction, the field of Computational Dynamics has emerged. The properties of the limit sets of dynamical systems play an important role in the long-term forecasting of a particular process modeled in the form of a system of differential equations. For this reason, the study of the properties of limit sets of dynamical systems, in particular unbounded limit sets, remains one of the most important and urgent tasks in the theory of dynamical systems.

Current research around the world shows that finding limit sets of dynamical systems and describing their structure is important in research related to the modeling of controlled processes and the theory of differential equations. Although the theory of bounded limit sets of dynamical systems has been sufficiently studied, the results in this theory do not allow us to study the long-term behavior of natural processes. In particular, the problem of describing attractors of three-dimensional systems is one of the current problems of the theory of dynamical systems. Since attractors are a family of limit sets, an in-depth study of limit sets is an important approach here. In this regard, to determine the topological properties of limit sets of two- and three-dimensional dynamical systems, including using in modeling of environmental, physical, chemical processes and solving problems in the theory of optimal management is a targeted scientific research.

In recent years, in our country, more and more attention is paid to geology, biology, mathematics and physics, which have scientific and practical application to the fundamental sciences. In particular, special attention is paid to the development of the qualitative theory of dynamical systems, which makes it possible to study the long-term nature of physical, mechanical, ecological, technical, chemical and economic processes, and significant results have been achieved. Investigations on the international level in such important areas Differential Equations and Mathematical Physics, Theory of Dynamical Systems and Mathematical Modeling has been considered the main task of fundamental research[1]. In order to ensure the implementation of this decree, it is important to develop the qualitative theory of dynamical systems and use scientific results in related fields of science.

[1] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017 year 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February 7, 2017, PF-4947 , «On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan», PQ-4387 dated July 9, 2019 «On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan», PQ-4708 of May 7, 2020 «On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics» as well as in other regulations related to basic sciences.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of theRepublic of Uzbekistan IV, «Mathematics, Mechanics and Computer Science».

The degree of scrutiny of the problem. The theory of dynamical systems is one of the fastest growing areas of modern mathematical science. It is based on the four treatises of the great French mathematician A. Poincaré, published in 1881-1886. He came to this understanding in connection with the study of the problems of celestial mechanics, mainly the motion of the Moon. The theory of dynamical systems was developed by A.M.Lyapunov, I.Bendixon, D.Birkhoff. The contribution of A.A.Andronov and the representatives of his scientific school is significant. They deeply developed the theory of dynamical systems in the plane. The contribution of the scientific schools of V.V.Nemitsky, N.P.Erugin, J.Sansone, J.Song-li to the qualitative theory of dynamical systems should be noted. The emergence and development of the theory of structural stability of dynamical systems is associated with an article by A.Andronov and L.S.Pontryagin in 1937. This direction was further developed by D.V.Anosov, S.Smail, V.A.Pliss, M.M.Peykhoto, P.Hartman and others. Currently there are scientific schools on dynamical systems in Barcelona (J.Llibre), California (L.Chua), Minsk (L.A.Cherkas), Moscow (I.V.Ilyashenko), Nizhny Novgorod (L.P.Shilnikov), Rio de Janeiro (J.Palis), Hangzhou (S.M.Juan), and other cities. In 1950-80 there was an internationally recognized scientific school in Samarkand under the leadership of I.S. Kukles.

Despite the deep development of the theory of dynamical systems, qualitative analysis of specific examples remains a complex task. Even for planar dynamical systems, there are many unsolved problems (several of them are listed in A.Azamov's article in the manual "Actual Problems of Modern Mathematics" 2019). Furthermore, even for three-dimensional dynamical systems, the local nature of the system around critical points is not fully described. A similar situation is appropriate for limit sets. A sufficiently complete theory of limit sets for planar systems was developed in the middle of twentieth century. However, even for such systems, the construction of a limit set in each case is a complex problem. According to the Poincaré-Bendixon theorem, for planar systems, any ω-limit set is either a critical point, or a limit cycle, or singular points and separatrices connecting them. The concept of limit set is also included for non-autonomous systems. In this direction, Zang Xu has obtained results for three classes of planar systems, E.D'Aniello, S.Elaydi studied limit sets for discrete dynamical systems. The theory of limit sets for abstract dynamic systems introduced by J. Birkhoff was developed by K.S.Sibirsky.

One of the most pressing problems of the theory of dynamical systems, the second part of D. Gilbert's sixteenth problem, remains still open. In recent years, Yu.S.Ilyashenko has obtained results related to the finiteness of limit cycles, but the issue of upper estimation has not yet been solved. As for the limit sets of multidimensional systems, so far only a few results are available. Recently, V.J.Lopez, J.Llibre and J.E.Buendía presented a topological characterization of limit sets for continuous flows and analytic vector fields on surfaces.

The connection of the theme of the thesis with the research plans of the higher education institute, where the research on the thesis is carried out. The dissertation research is done in accordance with the planned theme of scientific research OT-F4-84 «A discrete-numerical method for polynomial systems and its applications to modeling cyclic and controlled processes» (2017-2020) at the Institute of Mathematics after named V.I. Romanovskiy and fundamental research OT-F4-16 «Development of the theory of boundary value problems for optimal control problems and differential equations in graphs» (2017-2020) at the Tashkent Financial Institute.

The aim of the research work is to describe the properties of unbounded limit sets of dynamical systems on the plane and space and to construct two and three dimensional dynamical systems with the limit set possessing given properties.

Research problems:

to establish properties of dynamical systems with unbounded limit sets;

to estimate the cardinality (number of connectivity components) of the limit sets of analytical dynamical systems on the plane;

to develop a method for solving the problem of constructing an analytical dynamical system with the limit set consisting of infinite number of connectivity components;

to solve the inverse problem for three-dimensional dynamical systems with the limit set possessing given properties.

The research object. Analytical, polynomial and rational dynamical systems with unbounded limit sets.

The research subject. Theory of continuous time dynamical systems, qualitative theory of dynamical systems, theory of inverse mathematical problems.

Research methods. In the research the methods of dynamical systems, topology and numerical methods for solving differential equations, as well as computer modeling are used.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

it is proved that if the limit set of dynamical system is disconnected, then each of its connectivity components is unbounded;

the number of connectivity components of the limit sets of planar analytical systems is proved to be finite or countable;

the existence of a planar analytical system with the limit set possessing infinite number of connectivity components is proved;

the inverse problem of constructing a three-dimensional dynamical system with the limit set consisting of an arbitrary even number of parallel straight lines is solved.

Practical results of the research are that the methodology for constructing dynamical systems with the limit set, that is unbounded and possesses properties related to the number of components, has been developed and applied to concrete examples. In three-dimensional space the method of applying computer graphics to create a phase portrait of dynamical systems with an unbounded limit set has been developed.

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using methods of theory of dynamical systems, topology, qualitative theory of differential equations and numerical methods for solving differential equations. The obtained results are mathematically strongly and completely proved.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the research results is explained by the fact that they make a new contribution to the qualitative theory of dynamical systems.

The practical significance of the research is determined by the possibility of using it in the preparation of masters and in mathematical modeling of dynamic processes in those cases when their long-term behavior is important.

Implementation of the research results. The results of the dissertation, concerning unbounded limit sets of dynamical systems have been introduced into practice in the following areas:

the results that if the limit set of dynamical system is disconnected, then each of its connectivity components is unbounded have been used for investigating the qualitative behaviors of delay differential equations in the foreign project №G00003440 (Reference of University of the United Arab Emirates dated September 14, 2021). The implementation of the scientific results made it possible to find qualitative features of delay differential equations;

the results on the countability of the cardinality of connectivity components of limit sets of planar analytical systems have been used to construct asymptotics of the long term characteristics of evolutionary systems in physics and biology in the research project №OT-F4-02 (Reference №04-04/01-168 of Bukhara State University dated June 22, 2021). The implementation of the scientific results allows long-term forecasting of the nature of physical, mechanical, ecological systems.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 4 international and 4 national scientific and practical conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 12 research papers have been published in the scientific journals, 4 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the PhD thesis, in addition 1 of them were published in international journals and 3 papers published in national mathematical journals.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The general volume of the thesis is 76 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE THESIS

The **introduction** of the thesis includes the motivation of the research, the relevance of the research to the priorities of science and technology, the review of foreign research on the topic, the degree of scrutiny of the problem, the aim, research problems, object and subject of research, scientific novelty and practical results, theoretical and practical significance of the results obtained, the statement of research results, published works and information on the structure of the thesis.

In the first chapter of the thesis, titled **«Boundedness and unboundedness of limit sets»** we give main definitions and important notions that are necessary to cover the dissertation. Moreover, some properties of limit sets of dynamical systems are explained.

Consider a dynamical system

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in E, \tag{1}$$

where $f \in C^r(E)$ and E is an open subset of space $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathrm{N}^+, r \geq 1)$. In the theory of dynamical systems, variable t is considered as time, and the region E as phase space.

If $x(t)$ is the solution of the system (1), $\alpha < t < \beta$, then the map $x(\cdot) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ defines an orientated curve in $\mathbb{R}^n$. This curve is called the phase trajectory, and the space $\mathbb{R}^n$ (or the region E) itself is called the phase space. The system (1.1) can also be interpreted as a vector field.

Let $\varphi(t, x_0)$ be the solution of the initial value problem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

and Γ be the trajectory of the system (1) corresponding to this solution.

Definition 1. The trajectory Γ of the system (1) is called equilibrium position, if it does not depend on time, i.e. $\varphi(t, x_0) \equiv x_0 = const$.

Definition 2. A point $p \in E$ is called an ω-limit point of the trajectory Γ of the system (1) if there is a sequence $\{t_k\}$, $t_k \to +\infty$, such that

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k, x_0) = p.$$

Similarly, if $\varphi(t_k, x_0) \to p$ when $t_k \to -\infty$, then the point p is called an α-limit point of the trajectory Γ of (1).

Definition 3. The set of all ω-limit points of a trajectory Γ is called the ω-limit set of Γ and it is denoted by $\omega(\Gamma)$. The set of all α-limit points of a trajectory Γ is called α-limit set of Γ and it is denoted by $\alpha(\Gamma)$.

Theorem 1. The α and ω-limit sets of a trajectory Γ of (1), $\alpha(\Gamma)$ and $\omega(\Gamma)$, are closed subsets of E. If Γ is contained in a compact subset of $\mathbb{R}^n$, then $\alpha(\Gamma)$ and $\omega(\Gamma)$, are non-empty, connected, compact subsets of E.

Theorem 2. If p is an ω-limit point of a trajectory Γ of (1), then all other points of the trajectory Γ_p of (1) through the point p are also ω-limit points of Γ; i.e., if $p \in \omega(\Gamma)$ then $\Gamma_p \subset \omega(\Gamma)$ and similarly if $p \in \alpha(\Gamma)$ then $\Gamma_p \subset \alpha(\Gamma)$.

In the second chapter of the thesis, titled **«Unboundedness properties of limit sets of dynamical systems»** theorems that represent the topological properties of unbounded limit sets of dynamical systems are given.

Consider a dynamical system

$$\dot{z} = f(z), \tag{2}$$

where $z \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

Further, we will denote the ω-limit set of a trajectory of the system (2) passing through some initial point $z(0) = \xi$ by Ω. Following results are taken for the dynamical systems with unbounded and disconnected limit sets.

Theorem 3. If Ω is not connected, then every its connectivity component is unbounded.

In addition, following theorem is proved for the cardinality of the number of connectivity components of set Ω of planar analytical systems.

Theorem 4. Let Ω be disconnected. If each connectivity component of Ω contains at least one non-singular point, then the number of components of Ω is not more than countable.

Theorem 5. It exists a dynamical system of the class $\mathbf{C}^\infty$ with Ω consisting of continuum components of connectivity.

In order to prove theorem 5 it is constructed a dynamical system on the surface of cylinder with the Ω consisting of a union of non-intersecting rays corresponding to each boundary point of the Cantor set.

In the third chapter of the thesis, titled **«An inverse problem for dynamical systems with unbounded limit sets»** the methods for constructing two- and three-dimensional dynamical systems with unbounded limit sets possessing given properties using Hamiltonian system are explaned.

In the first section of the third chapter the rational planar dynamical system with the ω-limit set consisting $4n$ connectivity components is constructed, for a given arbitrary natural number n.

Consider following rational function:

$$f^0(x,y) = \frac{\left(R^2k^2 + x^2(y^2 - k^2)\right)\left(R^2k^2 + y^2(x^2 - k^2)\right)}{(x^6 + R^2)(y^6 + R^2)},$$

where R and k are positive parameters.

Using the above function define the following function for the given numbers R and $k = R\sin\frac{\pi}{4n}$:

$$F(x,y) = f^0(x,y)\cdot f^1(x,y)\cdot\ldots\cdot f^{n-1}(x,y)$$

where $f^m(x,y) = f^0\left(x\cos\frac{\pi m}{2n} - y\sin\frac{\pi m}{2n},\ x\sin\frac{\pi m}{2n} + y\cos\frac{\pi m}{2n}\right)$, $m=1,2,\ldots n-1$.

Note that the solution of the equation $F(x,y)=0$ consists of $4n$ non-intersecting lines.

Using the function $F(x,y)$ following dynamical system is constructed:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_y(x,y) + \lambda F(x,y)F_x(x,y) \\ \dot{y} &= -F_x(x,y) + \lambda F(x,y)F_y(x,y) \end{aligned} \tag{3}$$

where λ is a small enough positive number.

Theorem 6. The ω-limit set of trajectories of the system (3), lying in the region $F(x,y)>0$, consists of the line $F(x,y)=0$ and therefore, has $4n$ connectivity components (see Figure 1).

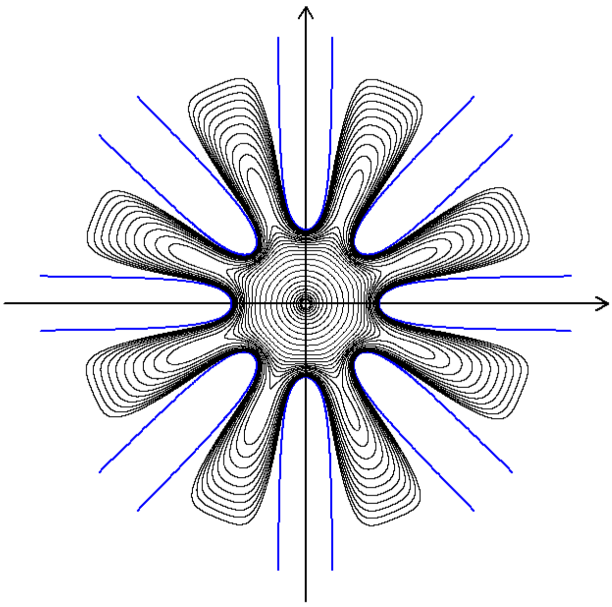


Figure 1. The level line $F(x,y)=0$ and one of the trajectories when $n=2$.

In the second section of the third chapter we construct the planar and three-dimensional analytic dynamical systems with the limit set consisting of infinite number of components and four straight lines, respectively.

Using the method of perturbing the Hamiltonian system following planar system

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_y(x,y) - \lambda F(x,y)F_x(x,y)\\ \dot{y} &= -F_x(x,y) - \lambda F(x,y)F_y(x,y)\end{aligned} \tag{4}$$

is constructed, where $F(x,y) = \psi(x,y)(1 - y^2 \cos x), \psi(x,y) = (1 + x^2 + y^4)^{-1},\ \lambda > 0.$

Let $z(t) = (x(t), y(t))$ be a trajectory of the system (4) passing through an initial point (x_0, y_0) of the region $\mathrm{Z} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < F(x,y) < 1\}$.

Theorem 7. The ω-limit set of the trajectory $z(t)$ consists of the line $F(x,y) = 0$ and therefore, has an infinite number of components.

The level line $F(x,y) = 0$ and the trajectory $z(t)$ are shown in Figure 2.

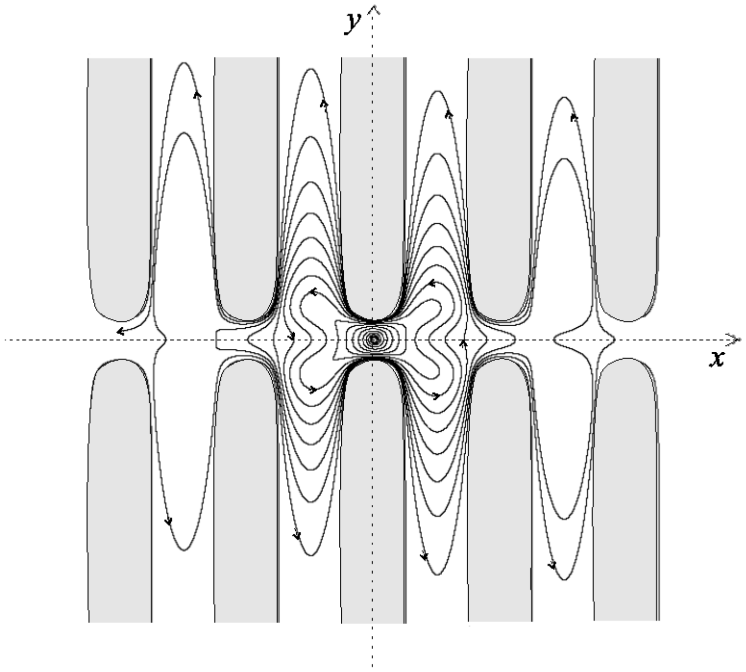


Figure 2. An analytic system with infinite number of connectivity components

The next result is connected with the three-dimensional analytical system

$$\begin{aligned}&\dot{x} = -\sin y + \varepsilon \sin x(\cos x + \cos y),\\ &\dot{y} = \sin x + \varepsilon \sin y(\cos x + \cos y),\\ &\dot{z} = \left(1 + \frac{z^2}{z^2+1}\right)\left(\sin^2\frac{y}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right),\end{aligned} \tag{5}$$

where ε is a small enough positive number. The trajectories of the system (5) are studied in the following unbounded region:

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, |y + x| < \pi,\ \ |y - x| < \pi\right\}.$$

Let $\xi(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ be a trajectory of the system (5) passing through $(x_0, y_0, z_0) \in \Pi / (0,0,0)$.

Theorem 8. The ω-limit set of the trajectory $\xi(t)$ consists of four straight lines parallel to the Oz axes and passing through the points $(\pm\pi,\ 0,\ 0), (0,\ \pm\pi,\ 0)$ (see Figure 3).

In the third section of the third chapter the problems of constructing two- and three-dimensional polynomial systems with unbounded limit set are investigated.

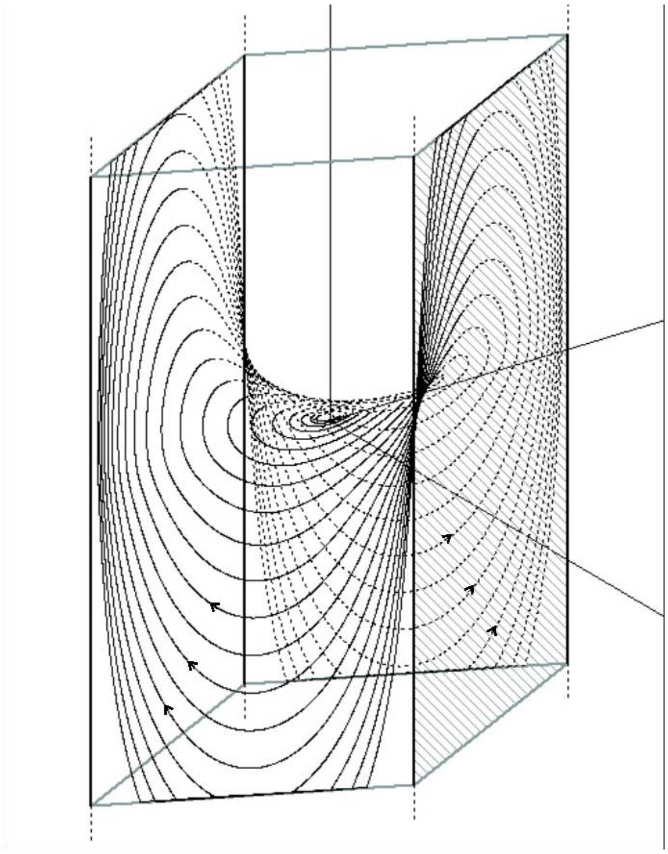


Figure 3. A part of the phase portrait of the system (5)

Theorem 9. For every positive integer N there exists a polynomial dynamical system, with a trajectory that its limit set consists of N connectivity components (see Figure 4).

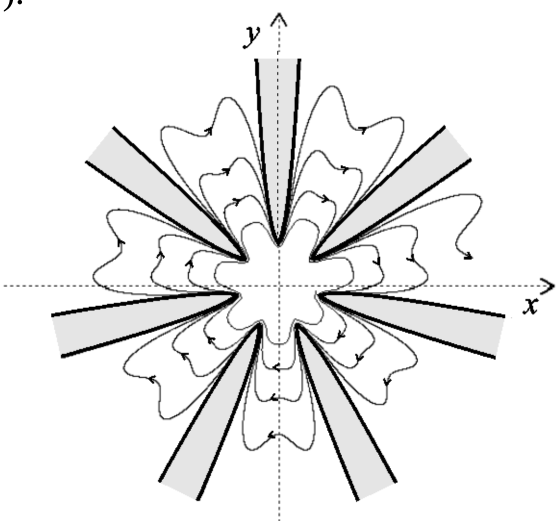


Figure 4. A polynomial system with 7 connectivity components

Theorem 9 is proved by constructing a polynomial dynamical system in the plane with the ω-limit set consisting of N connectivity components.

In the second subsection of the section a polynomial dynamical system with the limit set consisting of an arbitrary even number of connectivity components is constructed in space in $\mathbb{R}^3$.

For this purpose, consider the function $F(x,y) = G(x,y) / H(x,y)$ for the given fixed number $m \in \mathbb{N}$, where

$$G(x,y) = \prod_{k=1}^{2m} \left(xCos \frac{\pi(2k-1)}{2m} + y \sin \frac{\pi(2k-1)}{2m} - \cos \frac{\pi}{2m} \right),$$

$$H(x,y) = (x^2 + y^2 + 1)^{m+1} \cos^{2m} \frac{\pi}{2m}, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Further, using the function $F(x,y)$ following three-dimensional system is constructed:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -F_y - \lambda F F_x, \\ \dot{y} &= F_x - \lambda F F_y, \\ \dot{z} &= \left(1 + \frac{z^2}{1+z^2} \right) \prod_{i=1}^{m} \left(y \cos \frac{\pi(2i-1)}{2m} - x \sin \frac{\pi(2i-1)}{2m} \right), \end{aligned} \tag{6}$$

where λ is a small enough positive number.

Consider the behavior of the trajectories of the system (6) in the unbounded region $D = G \times \mathbb{R}$, where $G = \operatorname{Int}\Gamma \setminus (0,0)$ and

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cos \frac{\pi(2i-1)}{2m} + y \sin \frac{\pi(2i-1)}{2m} \le \cos \frac{\pi}{2m}, \quad i = 1,2,\ldots,2m \right\}$$

is a regular polygon.

Let $\zeta(t) = \big(x(t),\ y(t),\ z(t) \big)$ be a trajectory of the system (6) passing through some point $\big(x(0),\ y(0),\ z(0) \big) \in D$.

Theorem 10. The ω-limit set of the trajectory $\zeta(t)$ consists of $2m$ straight lines parallel to the Oz axis and passing through the points $\left(\cos \frac{\pi k}{m},\ \sin \frac{\pi k}{m},\ 0 \right)$, $k = 1,2,\ldots,2m.$

The trajectory $\zeta(t)$ and its ω-limit set are depicted in the Figure 5 for $m = 4$.

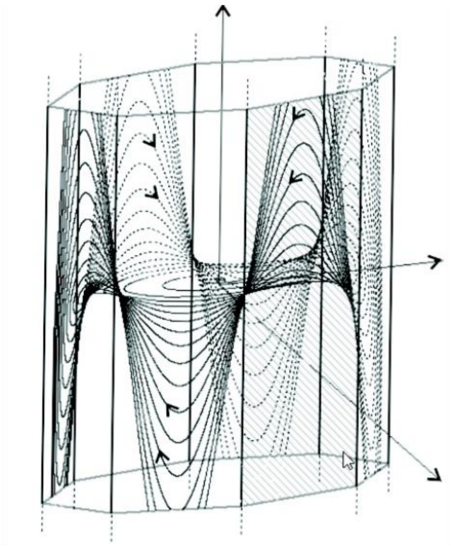


Figure 5. A polynomial three-dimensional with the limit set consisting of eight straight lines

CONCLUSION

The thesis is devoted to investigation of the study of topological properties of unbounded limit sets of dynamical systems.

Basic results of the research are as follows:

1. It is proved that if the limit set of the dynamical system is not connected, then each of its components is unbounded.

2. It is established that the family of connectivity componenets of the limit set of a planar analytical system can be finite or countable.

3. The existence of a dynamical system of the class of smooth functions with the limit set consisting of continuum component of connectivity is proved.

4. Using the method of Hamiltonian function, the inverse problems of constructing rational, analytical and polynomial systems with the limit set possessing given properties in the plane and in three-dimensional space are solved.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

РУЗИМУРАДОВА ДУРДОНА ХАМИДЖОНОВНА

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.01.02 –Дифференциалные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПОФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.1.PhD/FM558.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский, (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uzи на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Азамов Абдулла** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Жамилов Уйгун Умурович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
	Ахмедов Одилжон Сахибжонович кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Туринский политехнический университет в городе Ташкента**

Защита диссертации состоится «12» ноября 2021 года в 14:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz,Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за №123). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «25» октября 2021 года.
(протокол рассылки № 2 от «25» октября 2021 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Р.Р.Ашуров
Заместитель председателя Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Целью исследования является описание свойств неограниченных предельных множеств динамических систем на плоскости и в пространстве, а также построение двумерных и трехмерных динамических систем с предельным множеством, обладающим заданными свойствами.

Объект исследования: Аналитические, полиномиальные и рациональные динамические системы с неограниченными предельными множествами.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказано, что каждая компонента связности предельного множества динамической системы является неограниченным множеством, когда предельное множество несвязно;

доказано, что число компонентов связности предельных множеств плоских аналитических систем конечно или счетно;

доказано существование плоской аналитической системы с предельным множеством, обладающей бесконечным числом компонент связности;

решена обратная задача построения трехмерной динамической системы с предельным множеством, состоящим из произвольного четного числа параллельных прямых.

Внедрение результатов исследования. Результаты диссертации, касающиеся неограниченных предельных множеств динамических систем, внедрены в практику в следующих областях:

результаты о неограниченности компонентов связности несвязанного предельного множества динамических систем были использованы для исследования качественного поведения дифференциальных уравнений с запаздыванием в научном проекте G00003440 (Справка Университета Объединенных Арабских Эмиратов от 14 сентября 2021 года). Применения научных результатов позволила выявить качествееные свойства дифференциальных уравнений с запаздыванием.

результаты о счености мощности предельных множеств аналитических систем на плоскости использованы для анализа асимптотических свойств характеристик эволюционных систем в физике и биологии, исследуюмых в научном проекте OT-F4-02 (Справка Бухарского государственного университета №04-04/01-168 от 22 июня 2021 года). Применения результатов позволила долгосрочно прогнозировать характеры физических, механических и экологических систем.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 76 страниц.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (part I; I часть)

1. Рузимурадова Д.Х. Тилавов А.М. Рациональная динамическая система с предельным множеством, состоящим из 4n компонент связности. // ДАН РУз 2018. № 1, −С. 2-6. (01.00.00; № 7).
2. Azamov A., Ruzimuradova D.H. On Unbounded Limit Sets of Dynamical Systems. // Lecture Notes in Control and Information Sciences − 2020. №.1. −P. 1-11. (3. Scopus, IF=0.173)
3. Ruzimuradova D.H., Azamova N.A. The analytic 3D- system with the limit set consisting of four straight lines. // Bulletin of the Institute of Mathematics − 2020. Vol. 3(1), −P. 37-40. (01.00.00; № 17).
4. Ruzimuradova D.H. On a polynomial 3D-system with the unconnected limit set. // Uzbek Mathematical Journal − 2020. №.3, −P. 126-132. (01.00.00; № 6).

II бўлим (part II; II часть)

5. Рузимуродова Д. Х. Построение динамической системы с предельным множеством, состоящей из произвольного конечного числа компонентов. // Научно-практическая конференция «Новые теоремы молодых математиков – 2013», Наманган, 15-16 апреля, −2013, −С. 169.
6. Рузимурадова Д.Х. Рациональная динамическая система с предельным множеством, состоящим из 2^{n+1} компонент связности. // Республиканская научная конференция «Современные методы математической физики и их приложения», Ташкент, 15-17 апреля, − 2015. −С. 157-158.
7. AzamovA., Ruzimuradova D.H. On dynamical systems with unbounded limit sets. // Uzbek-Israel joint international conference “STEMM-2019”, Tashkent, May 13-17, − 2019. − P. 26-27.
8. Азамов А., Рузимурадова Д.Х. О динамических системах с неограниченными предельными множествами. // Международная научная конференция «Устойчивость, управление, дифференциальные игры», Екатеринбург, 16-20 сентября, − 2019 . − С. 26-28.
9. AzamovA., Ruzimuradova D.H. Topological properties of unbounded limit sets of dynamical systems. // International scientific conference “Modern problems of geometry and topology and its applications”, Tashkent, November 21-23, − 2019. − P. 25-26.
10. Ruzimuradova D.H., Kuchkarova S.A. The polynomial dynamical system with the limit set, consisting of n connectivity components. // Scientific conference “Control, optimization and dynamical systems – CODS-2019”, Andijan, October 17-19 , −2019. −P. 66-67.
11. Ruzimuradova D.H., Azamova N.A. The analytic 3D- system with the limit set consisting of four straight lines. // International conference “Modern problems

of differential equations and related branches of mathematics”, Fergana, March 12-13 , −2020. −P. 385-386.

12. Ruzimuradova D.H. An example of analytic 3D-systems with the limit set consisting of 2m straight lines. // Scientific online-conference “Modern problems of Mathematics”, Nukus, May 20, −2020. −P. 133-135.