В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ХУСАИНОВА БИКАЖОН БАХРАМБОЕВНА

БОҒЛИҚСИЗ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ЙИҒИНДИСИ ТАҚСИМОТИНИ НОРМАЛ, ПУАССОН ВА БИРЛИК ТАҚСИМОТ ҚОНУНЛАРИГА ЯҚИНЛАШИШИ

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Ташкент 2021

УДК: 519.21

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of thesis abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Хусаинова Бикажон Бахрамбоевна
Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини нормал, Пуассон ва бирлик тақсимот қонунларига яқинлашиши. 3

Хусаинова Бикажон Бахрамбоевна
Сходимость распределений сумм независимых случайных величин к нормальному, пуассоновскому и единичному законам распределения . . . 17

Khusainova Bikajon Bakhramboyevna
Convergence of distributions of sums of independent random variables to normal, Poisson and unit distribution laws. 29

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works 32

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ХУСАИНОВА БИКАЖОН БАХРАМБОЕВНА

БОҒЛИҚСИЗ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ЙИҒИНДИСИ ТАҚСИМОТИНИ НОРМАЛ, ПУАССОН ВА БИРЛИК ТАҚСИМОТ ҚОНУНЛАРИГА ЯҚИНЛАШИШИ

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.4.PhD/FM312 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Форманов Шакир Касимович** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Шарипов Олимжон Шукурович** физика-математика фанлари доктори, профессор **Сагидуллаев Калмурза Сапарбаевич** физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Қарши давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил « 7 » январ соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (129-раками билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2021 йил « 21 » декабр куни тарқатилди.
(2021 йил « 21 » декабрдаги 2 -рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

Я.М. Хусанбаев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раиси муовини,
ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Бугунги кунга келиб жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий–амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг асосларини тадқиқ қилиш масалаларига келтирилади. Бунда тасодифий миқдорлар йиғиндиси назариясини тадқиқ этиш муҳим аҳамиятга эга. Кўпгина иқтисод, физика, техника, суғурта ва бошқа йўналишларда олиб борилаётган илмий-амалий тадқиқотларда, стохастик ҳолатларнинг характеристик қийматларини ифодалаш учун боғлиқсиз тасодифи миқдорлар йиғиндиси қулай ва осон қўлланиладиган математик модел ҳисобланади. У кўплаб амалий ва назарий масалалларнинг пайдо бўлишига олиб келади. Шунинг учун, боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини тадқиқ қилиш замонавий эҳтимоллар назарияси ва математик статистикада долзарб ва муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини ўрганиш замонавий эҳтимоллар назариясида асосий масалалардан бири бўлиб қолмоқда. Марказий лимит теоремаларнинг баъзи классик ва ноклассик вариантлари ва Пуассон ва бирлик тақсимот қонунларига яқинлашишга доир лимит теоремалар исботланган. Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси учун лимит теоремалар бўйича зарурий ва етарли шартларни топиш масаласи тўлиқ ҳал этилмаган. Бу борада, Ибрагимов-Осипов сонли характеритикаси терминида тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотининг нормал, Пуассон ва бирлик тақсимот қонунларига яқинлашиши учун зарурий ва етарли шартларни топиш ва Линдеберг ва Линдеберг-Феллер теоремаларининг классик вариантларини исботлаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда амалий тадбиқига эга бўлган фундаментал фанларга, жумладан амалий тадбиқига эга бўлган эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг долзарб йўналишларига, хусусан боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини аниқ бир лимит тақсимот қонунига яқинлашишини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Бунинг натижасида боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини аппроксимациясини тадқиқ қилиш бўйича салмоқли натижаларга эришилди. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар натижасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Мазкур қарор ижросини таъминлашда боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси назарияси соҳасида илмий тадқиқот ишларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси назарияси замонавий эҳтимоллар назариясининг асосий йўналишларидан бири ҳисобланади. XX асрнинг ўрталарида боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси назарияси П.Леви, А.Я.Хинчин, А.Н.Колмогоров, Б.В.Гнеденко, Г.Крамер, К.Г.Эссеенларнинг саъй-ҳаракати туфайли яратилди. Бу соҳадаги йирик натижалар В.Феллер, Г.Бергстрем, А.А.Боровков, В.М. Золоторев ва бошқа эҳтимоллар назарияси ва математик статистика соҳасидаги мутахассисларга тегишли. Эҳтимоллар назариясининг замонавий босқичида боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси назарияси алоҳида бир йўналишни ташкил қилади ва унинг натижалари математик статистика, молия математикаси, қарорлар кабул қилиш назарияси ва математиканинг бошқа йўналишларида кўплаб татбиқларини топмоқда.

Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси назарияси масалаларида, марказий лимит теорема ўринли бўлиши (нормал тақсимот қонунига яқинлашиш) билан боғлиқ муаммолар асосий ўрин эгаллайди. Маълумки, марказий лимит теореманинг энг кенг тарқалган варианти финландиялик математик Я.В.Линдеберг (1922й.) томонидан исботланган бўлиб, у иҳтиёрий ε $(\varepsilon > 0)$сатҳдаги қўшилувчилар учун «колдиқ дисперсиялар» йиғиндиси чексиз кичик бўлиш шартидан фойдаланган. Кейинчалик бу шарт Линдеберг шарти номини олди ва у боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси назариясида салмоқли рол ўйнади. Одий мисоллар шуни кўрсатадики, Линдеберг шарти марказий лимит теорема ўринли бўлиши учун зарурий шарт бўлмайди. 1935 йилда америкалик математик В.Феллер (W.Feller) қўшилувчилар дисперсиясини текис чексиз кичиклик шарти бажарилиши (Феллер шарти), Линдеберг шартини марказий лимит теорема ўринли бўлиши учун зарурий ва етарли шарт бўлишини исботлади. Бу тасдиқ, кейинчалик Линдеберг-Феллер теоремаси деб атала бошланди.Кўриш мумкинки, Линдеберг шарти қўшимча параметр $\varepsilon > 0$ га боғлиқ бўлади ва уни ўринли бўлишини ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун текшириш зарур. Охирги мулоҳаза айрим ҳолларда тасодифий миқдорлар йиғиндиси, марказий лимит теорема

ўринли бўлиши хақидаги масалалар билан боғлиқ бўлмаган қўшимча қийинчиликлар яратади.

И.А.Ибрагимов, Ш.К.Форманов, Э.Л.Пресманларнинг (2020) ишида Линдеберг шартини умумлаштирувчи ва ҳеч қандай параметрга боғлиқ бўлмаган, Ибрагимов-Осипов сонли характеристикаси киритилган. Диссертацияда Ибрагимов-Осипов сонли характеристикаси терминида боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиндиси тақсимотини нормал, Пуассон ва бирлик тақсимот қонунларига яқинлашиши масаласига Линдеберг-Феллер теоремасининг аналоглари келтирилган. Келтирилган мулоҳазалар диссертация ишида ўтказилган тадқиқотлар, боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси назарияси ривожланишининг замонавий босқичларида актуал ҳисобланади.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги ОТ-Ф4-83 “Эҳтимолликлар тақсимоти учун лимит теоремалар ва функционал маълумотларнинг статистик таҳлили” (2017-2020 йиллар) мавзусидаги фундаментал лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотининг нормал, Пуассон ва бирлик тақсимот қонунларига яқинлашиши учун зарурий ва етарли шартларни топиш, ҳамда Линдеберг ва Линдеберг-Феллер теоремаларининг аналогларини исботлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Стейн тенгламаси ва Ибрагимов-Осипов сонли характеристикаси термини ёрдамида катта сонлар қонуни учун Линдеберг теоремаларининг аналогларини исботлаш;

Стейн-Тихомиров методи ёрдамида катта сонлар қонуни ҳақидаги Боровков теоремасини ва Леви-Хинчин формуласи асосида Хинчин теоремасини содда исботларини келтириш;

Ибрагимов-Осипов характеристикаси асосида боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини Пуассон тақсимотига яқинлашиши учун Линдеберг-Феллер теоремаси исботлаш;

Ибрагимов-Осипов характеристикаси асосида Линдеберг-Феллер теоремаларининг классик вариантларини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси, нормал тақсимот, Пуассон тақсимоти, бирлик тақсимот қонуни.

Тадқиқотнинг предмети тақсимот функциялар, характеристик функциялар, суст яқинлашиш ва эхтимоллик бўйича яқинлашиш шартлари, Линдеберг характеристикаси ва шарти ва Ибрагимов-Осипов характеристикаси назариялари.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда эҳтимолий ва аналитик методлар каторида Стейн, Стейн-Тихомиров методлари ва тасодифий миқдорларнинг кесимлари методларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Стейн тенгламаси ва Ибрагимов-Осипов сонли характеристикаси термини ёрдамида катта сонлар қонуни учун Линдеберг теоремаларининг аналоглари исботланган;

Стейн-Тихомиров методи ёрдамида катта сонлар қонуни ҳақидаги Боровков теоремаси ва Леви-Хинчин формуласи асосида Хинчин теоремалари исботланган;

Ибрагимов-Осипов характеристикаси асосида боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини Пуассон тақсимотига яқинлашиши учун Линдеберг-Феллер теоремаси исботланган;

Ибрагимов-Осипов характеристикаси асосида Линдеберг-Феллер теоремаларининг классик вариантлари исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Диссертацияда қўлланилган усуллар ва олинган натижаларни Ўзбекистон Республикаси олий ўқув юртлари магистрлари ва докторантларига ўтиладиган боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси учун лимит теоремалар бўйича махсус курсларда фойдаланиш мумкин. Бундан ташқари Ибрагимов-Осипов характеристикасига асосланиб исботланган Линдеберг-Феллер теоремаларининг классик вариантларининг исботлари, ушбу теоремаларнинг Линдеберг характеристикасидан фойдаланиб исботланадиган мос лимит теоремаларга нисбатан, анча содда кўринишга эга исботларини олиш имконини беради.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси назариясининг замонавий методларидан фойдаланиш, математик мулоҳазалар ва исботларнинг қатъийлигига асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти олинган натижалардан кейинчалик эҳтимолликлар назарияси ва математик статистиканинг замонавий босқичларида лимит теоремаларни ўрганишда қўллаш мумкинлиги, ва бу натижалар умумлашган ҳолда стохастик систематик моделларни тадқиқ қилувчилар учун маълум маънода қизиқиш уйғотиши билан изоҳланади.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти олинган натижалардан иқтисод, актуар математика, қарор қабул қилиш назарияларидаги кўпгина назарий ва амалий масалаларда қўлланилиши мумкинлиги ва уларнинг ечимлари бевосита боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси билан боғлиқ эканлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини нормал, Пуассон ва бирлик тақсимот қонунларига яқинлашиши бўйича олинган натижалар асосида:

Ибрагимов-Осипов характеристикаси асосида Линдеберг-Феллер теоремаларининг классик вариантларидан ОТ-Ф4-40 рақамли «Ўлчовли функциялар синфи билан индексланган, интеграл эмпирик процессларнинг асимптотик хоссаларини ўрганиш» мавзудаги фундаментал илмий лойиҳада Пуассон ва бирлик тақсимот қонунларига яқинлашишга доир лимит теоремалар ва марказий лимит теоремаларни классик ва ноклассик вариантларини қуришда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университетининг 2021 йил 6-ноябрдаги №04/11-7087-сонли

маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши лимит теоремаларни классик ва ноклассик вариантларини исботлаш имконини берган;

Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотининг Пуассон тақсимот қонунига яқинлашишини тасдиқловчи Линдеберг-Феллер теоремаси исботи учун таклиф этган усулдан ОТ-Ф4-03 рақамли «Дискрет ва узлуксиз вақтли динамик системалар ва қисмий интеграл операторларнинг спектрлари» мавзудаги фундаментал илмий лойиҳада стохастик жараёнлар траекторияларини таҳлил этишда фойдаланилган (Қарши давлат университетининг 2021 йил 15 ноябрдаги №04/5729-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши дискрет вақтли популяцион тизимлар эволюциясини баҳоловчи асимптотик хулосалар олиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 7 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида, шунингдек, 10 та маъруза тезислари илмий конференция материалларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг умумий ҳажми 108 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Биринчи боб **«Бирлик тақсимот қонунига якинлашиш»** боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини бирлик тақсимот қонунига яқинлашишига бағишланган. Биринчи бобнинг биринчи параграфи марказий лимит теорема (CLT) ва катта сонлар қонуни тушунчаларининг (к.с.қ) мавжуд боғлиқликларига бағишланган. Бу параграфда к.с.қ «дисперсияси нол» бўлган нормал тақсимот қонунига яқинлашиш ҳолатида CLT сифатида қаралиши мумкинлиги исботланган.

Айтайлик боғлиқсиз тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги серияси берилган бўлсин

$$X_{n1}, X_{n2}, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Белгилаш киритамиз

$$E\left|X_{nj}\right| < \infty, \; j = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

(1) га кўра, қуйидагини ёзишимиз мумкин $EX_{nj} = 0, \; j = 1, 2, \ldots, \quad n \geq 1.$

Кейинчалик қўйидаги белгилашлардан фойдаланамиз:

$$S_n = X_{n1} + \ldots X_{nn}, \quad F_{nj}(x) = P(X_{nj} < x), \; f_{nj}(t) = Ee^{itX_{nj}}, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$F_n(x) = P(S_n < x), \quad f_n(t) = \prod_{j=1}^{n} f_{nj}(t) = Ee^{itS_n},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \; x \in (-\infty, \infty), \quad E_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

(1) шарт бажарилишидан қуйидаги катталикларни киритамиз

$$L_n^*(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon} |x| dF_{nj}(x), \; \varepsilon > 0,$$

$$D_n^*(\alpha, \varepsilon) = M_n^*(\alpha, \varepsilon) + L_n^*(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\leq\varepsilon} |x|^{1+\alpha} dF_{nj}(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon} |x| dF_{nj}(x), \; \alpha > 0.$$

$D_n^*(\alpha, \varepsilon)$ катталик Ибрагимов-Осипов сонли характеристикасининг универсал кўриниши ўзида ифодалайди. Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида қуйидаги теоремалар исботланган.

1-теорема. Агар кандайдир α_0, ε_0 қийматларда $D_n^*(\alpha_0, \varepsilon_0) \to 0, \; n \to \infty$ бўлса, у ҳолда иҳтиёрий α ва ε ларда $D_n^*(\alpha, \varepsilon) \to 0, \; n \to \infty.$

Бу теоремага асосланиб

$$D_n^* = D_n^*(1,1) = M_n^* + L_n^* = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\leq 1} |x|^2 dF_{nj}(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>1} |x| dF_{nj}(x).$$

Агар $n \to \infty$ да

$$L_n^*(\varepsilon) \to 0, \; \forall \varepsilon > 0, \tag{2}$$

$$D_n^* = M_n^* + L_n^* \to 0. \tag{3}$$

шартлар бажарилса, мос равишда (2) ва (3) шартлар ўринли бўлади дейилади.

2- теорема. Агар

$$\sup_n \sum_{j=1}^{n} E\left|X_{nj}\right| \le m < \infty, \tag{4}$$

шарт бажарилса, у ҳолда (2) ва (3) шартлар эквивалент бўлади.

Яхши маълумки, $S_n \xrightarrow{P} 0$ к.с.қ. ўринли бўлиши, S_n йиғиндининг тақсимоти F_n бўлганда $F_n \Rightarrow E_0$ суст яқинлашишга тенг кучли бўлади, бу ерда $\xrightarrow{P}, \Rightarrow$ белгилашлар мос равишда эҳтимоллик бўйича яқинлашиш ва суст яқинлашишни билдиради. А.А.Боровковнинг (Теория вероятностей, 1999, Изд. Третье, М.Изд-во «Эдоториал УРСС», С.157.) китобида қуйидаги теорема келтирилган.

3- теорема. Агар (1) ва (2) шартлар бажарилса, к.с.қ.ўринли бўлади

$$F_n \Rightarrow E_0 \left(S_n \xrightarrow{P} 0\right).$$

Диссертацияда бу теорема характеристик функциялар терминидаги Стейн-Тихомиров методи ва Ибрагимов-Осипов сонли характеристикасидан фойдаланиб исботланган.

3-теорема к.с.қ.да машҳур Линдеберг теоремасининг аналогини ифодалайди.

(2) ва (3) шартларнинг ҳеч бири зарурий шарт бўлмайди. Қуйида келтирилган теорема шуни кўрсатадики, агар X_{nj} қўшилувчилар қуйидан чегараланган ҳолда бу шартлар зарурий бўлади.

4-теорема. Айтайлик $\left\{\varepsilon_{nj}; 1 \le j \le n\right\}$ шундай сонли кетма-кетлик берилган бўлиб, бу ерда

$$P\left(X_{nj} \ge -\varepsilon_{nj}\right) = 1,\ \varepsilon_{nj} \ge 0,\ j = 1,\dots,n,$$

$$\max_{1 \le j \le n} \varepsilon_{nj} \to 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{nj} \le C < \infty.$$

У ҳолда (3) Ибрагимов-Осипов шарти ёки (2) Линдеберг шарти катта сонлар қонуни бажарилиши учун зарур бўлади.

Диссертацияда бу теорема Стейн методи ва характеристик функциялар методи умумлашмаси ёрдамида исботланган.

Биринчи бобнинг тўртинчи ва бешинчи параграфлари боғлиқсиз тасодифий миқдорлар учун к.с.қ.ни исботлашда Стейн-Тихомиров методини тавсифлашга бағишланган. Бу холатда Стейн-Тихомиров оператори

дифференциаллаш оператори билан мос тушади. Биринчи бобнинг олтинчи параграфида к.с.қ. ҳақидаги теоремалар исботларида «т.м.кесимлари» методини қўлланилиши кўрсатилган.

Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси назариясида боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси учун лимит теоремаларда нормал тақсимотнинг алоҳида роли ҳақида Хинчин теоремаси яхши маълум.

Биринчи бобнинг еттинчи параграфида бу теорема тасодифий миқдорлар «схема сериясида» йиғинди учун бўлган ҳолат учун умумлаштирилган.

Иккинчи боб **«Пуассон таксимот қонунига яқинлашиш»** боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини Пуассон тақсимот қонунига якинлашишига доир масалаларга бағишланади. Фараз қилайлик қандайдир эхтимоллик фазосида (ҳар бир серияда) боғлиқсиз тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги серияси аниқланган бўлсин

$$X_{n1},...,X_{nn},\ \ n=1,\,2,\,\ldots,\quad F_{nj}(x)=P(X_{nj}<x),$$

$$F_n(x)=P(X_{n1}+...+X_{nn}<x).$$

Қуйидаги белгилашни киритамиз,

$$\pi_\lambda(x)=\sum_{j<x+\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}=P(\xi-\lambda<x),\ \lambda>0,$$

бу ерда $\xi-$ $\lambda=E\xi=D\xi$ параметрли Пуассон тақсимотга эга бўлган манфий бўлмаган бутун қийматли тасодифий миқдор.

Пуассон тақсимоти чексиз бўлинувчи тақсмот сифатида ягона $x=1$ нуқтадан ташкил топган спектрга эга бўлиб, бу ҳолда Ибрагимов-Осипов сонли характеристикаси қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$\overline{D}_n=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x-1|\le 1}|x|^3\,dF_{nj}(x)+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x-1|>1}x^2dF_{nj}(x),$$

ва

$$\left\{\bar{D}_n\to 0,\ n\to\infty\right\} \tag{5}$$

шарт Линдеберг шартига тенг кучли бўлади

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x-1|>\varepsilon}x^2dF_{nj}\left(x\right)\to 0,\ \forall\varepsilon>0\right\}. \tag{6}$$

Кейинчалик дисперсия мавжуд деб фараз қиламиз

$$\sigma_{nj}^2 = DX_{nj} < \infty,\ j = 1, 2, \ldots .$$

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида қуйидаги теоремаларнинг исботи келтирилган.

5- теорема. Айтайлик куйидаги шартлар бажарилсин:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} DX_{nj} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{nj}^2 = \lambda > 0,$

2) (5).

У ҳолда $n \to \infty$ да

$$F_n(x) \Rightarrow \pi_\lambda(x) = \sum_{k<x+\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

бу ерда $\Rightarrow$ суст яқинлашишни билдиради.

Иккинчи бобнинг иккинчи ва учинчи параграфларида мос равишда Ибрагимов-Осипов ва Линдеберг сонли характеристикалари хоссалари ҳақида теоремалар келтирилган. Бу теоремалардан 5-теоремани исботида фойдаланилган.

Учинчи боб **«Нормал тақсимот қонунига яқинлашиш»** деб номланиб учта параграфдан ташкил топган. Бу бобнинг аввалида боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини яқинлашиш масалаларини, янада умумийроқ иккита тақсимот композициялари яқинлашиши масалалари сифатида қараш мумкинлигини таъкидлайди: фараз қилайлик

$$F_n = \prod_{j=1}^{\infty} {*} F_{nj} = F_{n1} * F_{n2} *, \ldots *, \ldots$$

$$G_n = \prod_{j=1}^{\infty} {*} G_{nj} = G_{n1} * G_{n2} *, \ldots *, \ldots .$$

Агар иҳтиёрий узлуксиз ва чегараланган $u(x)$ функция учун, қуйидаги шарт бажарилса

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, d\left(F_n - G_n\right)(x) \to 0,\ n \to \infty, \tag{7}$$

Р.И.Ротар бўйича F_n ва G_n тақсимотлар композицияларини асимптотик суст яқинлашади деймиз.

Берилган боғлиқсиз тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги серияси $\left\{X_{nj}; 1 \le j \le n\right\}$ $\left(\sigma_{nj}^2 = EX_{nj}^2,\ j \le n\right)$ учун,

$$EX_{nj}=0,\ \ j=1,2,...,n\ ,\ \ \sum_{j=1}^{n}\sigma_{nj}^{2}=1,$$

деб оламиз.

6-теорема. Айтайлик F_n ва G_n композициялар учун $j=1,2,...$, бўлганда қуйидаги шарт ўринли бўлсин:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xdF_{nj}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xdG_{nj}(x),\ \ \sigma_{nj}^{2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2dF_{nj}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2dG_{nj}(x),\ \ \sum_{j=1}^{n}\sigma_{nj}^{2}=1.$

2) Ибрагимов-Осипов сонли характеристикаси

$$D_n=M_n+L_n\to 0,\ n\to\infty. \tag{8}$$

У ҳолда $n\to\infty$да F_n ва G_n асимптотик суст яқинлашувчи бўлади, яъни (7) муносабат ўринли.

Агар Феллер шарти

$$\max_{1\le j\le n}\sigma_{nj}^{2}\to 0,\ n\to\infty,$$

бажарилса, у ҳолда (8) шарт (7) муносабат бажарилиши учун зарур ва етарли бўлади.

Хусусан, агар

$$G_{nj}(x)=\Phi_{nj}(x)*E_{0j}(x)=\Phi\left(x/\sigma_{nj}\right)*E_{0j}=\Phi\left(x/\sigma_{nj}\right)$$

$\left(\text{буерда, } E_{0j}(x)=E_0(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ 1,\ x>0\end{cases}\right)$, деб белгиласак, у ҳолда

$$G_n(x)=\prod_{j=1}^{n}*\Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nj}}\right)=\Phi(x).$$

Натижада 6-теоремага кўра, ихтиёрий узлуксиз ва чегараланган $u(x)$ учун

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)d\left(F_n-\Phi_n\right)(x)\to 0,\ n\to\infty,$$

ўринли бўлади.

Охирги мулоҳаза қуйидаги муносабатга тенг кучли ҳисобланади

$$\sup_x\left|F_n(x)-\Phi_n(x)\right|\to 0,\ n\to\infty.$$

Шундай қилиб 6-теорема Линдеберг-Феллер классик теоремасини умумлаштиради.

ХУЛОСА

Мазкур диссертация боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини нормал, Пуассон ва бирлик тақсимот қонунларига яқинлашишини тадқиқ этишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Стейн тенгламаси ва Ибрагимов-Осипов сонли характеристикаси термини ёрдамида катта сонлар қонуни учун Линдеберг теоремаларининг аналоглари исботланган;
2. Стейн-Тихомиров методи ёрдамида катта сонлар қонуни ҳақидаги Боровков теоремасини ва Леви-Хинчин формуласи асосида Хинчин теоремасини содда исботлари келтирилган;
3. Ибрагимов-Осипов характеристикаси асосида боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотини Пуассон тақсимотига яқинлашиши учун Линдеберг-Феллер теоремаси исботланган;
4. Ибрагимов-Осипов характеристикаси асосида Линдеберг-Феллер теоремаларининг классик вариантлари исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ХУСАИНОВА БИКАЖОН БАХРАМБОЕВНА

СХОДИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К НОРМАЛЬНОМУ, ПУАССОНОВСКОМУ И ЕДИНИЧНОМУ ЗАКОНАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

01.01.05 –Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент–2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.4.PhD/FM312.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовкого.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Форманов Шакир Касимович** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Шарипов Олимжон Шукурович** доктор физико-математических наук, профессор
	Сагидуллаев Калмурза Сапарбаевич кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 7 » января 2022 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 129). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 21 » декабря 2021 года.
(протокол рассылки № 2 от « 21 » декабря 2021 года).

У.А.Розиков
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Я.М.Хусанбаев
Заместитель председателя Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. На сегодняшний день большая часть научных и практических исследований, проводимых во всём мире, в основном сосредоточена на изучении основ теории вероятностей и математической статистики. В этом исследования теории сумм независимых случайных величин имеет важное значение. Многочисленные научно-практические исследования в области экономики, физики, техники, страхования и другие, в большинстве случаев приводятся к задачам изучения сумм независимых случайных величин, где суммы независимых случайных величин оказываются удобными и легко интерпретируемыми математическими моделями для описания количественных характеристик стохастических ситуаций. Это приводит к появлению многих теоретических и практических задач. Поэтому изучение распределений сумм независимых случайных величин является одной из актуальных и важных задач современной теории вероятностей и математической статистики.

В настоящее время исследование распределений сумм независимых случайных величин является одним из актуальных задач современной теории суммирования независимых случайных величин. Доказаны некоторые классические и неклассические варианты центральной предельной теоремы и предельные теоремы о сходимости к пуассоновскому и единичному законам распределения. Проблема нахождения необходимых и достаточных условий по предельным теоремам для распределений сумм независимых случайных величин полностью не решена. В связи с этим, в целевом научном исследовании основными являются следующие направления: изучение сходимости распределений сумм независимых случайных величин к конкретным предельным законам распределения, нахождение необходимых и достаточных условий для сходимости распределения сумм независимых случайных величин к нормальному, пуассоновскому и единичному законам распределения в терминах числовой характеристики Ибрагимова-Осипова и доказательство классических вариантов теорем Линдеберга и Линдеберга-Феллера.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим прикладное применение, таким как теория вероятностей и математическая статистика, в частности, к изучению сходимости распределений сумм независимых случайных величин к конкретным предельным законам распределения. Вследствие этого, актуальным становится достижение значимых результатов в исследовании аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин. Проведение научных исследований с высокой математической строгостью по важным направлениям специальности «Теория вероятностей и математической статистики» рассматривается как основная задача

фундаментальных исследований[2]. Исследования сходимости распределений сумм независимых случайных величин к нормальному, пуассоновскому и единичному законам распределения относятся к фундаментальным задачам на современном этапе развития теории вероятностей и математической статистики.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», и Постановлении Президента Республики Узбекистан ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данная диссертация выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Теория суммирования независимых случайных величин является одним из главных направлений современной теории вероятностей. Благодаря усилиям П.Леви, А.Я.Хинчина, А.Н.Колмогорова, Б.В.Гнеденко, Г. Крамера, К.-Г.Эссеена в середине XX века создана теория суммирования независимых случайных величин. Наиболее крупные достижения в этом направлении принадлежат В.Феллеру, Г.Бергстрему, А.А.Боровкову, В.М.Золотареву и другим известным специалистам по теории вероятностей и математической статистики. Теория суммирования случайных величин превратилась в одну из самых развитых областей современной теории вероятностей и математической статистики. На современном этапе развития теории вероятностей, теория суммирования независимых случайных величин является одним из самостоятельных направлений, и ее результаты находят все большее применение в математической статистике, финансовой математике, теории принятия решений и других разделах математики.

В задачах теории суммирования независимых случайных величин главное место занимают проблемы, связанные со справедливостью центральной предельной теоремы (сходимость к нормальному закону распределения). Хорошо известно, что наиболее общий вариант центральной предельной теоремы доказан финским математиком Я.В.Линдебергам (1922г.), который использовал условие, состоящее в

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистана от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

бесконечной малости суммы «хвостов дисперсий» слагаемых любого ε уровня $(\varepsilon > 0)$. В последующем приведенное условие получило название условия Линдеберга и оно сыграло существенную роль в теории суммирования независимых случайных величин. Простые примеры показывают, что условие Линдеберга не является необходимым для справедливости центральной предельной теоремы. В 1935 году американский математик В.Феллер (W.Feller) доказал, что при выполнении условия равномерной бесконечной малости дисперсий слагаемых (условия Феллера), условие Линдеберга является необходимым и достаточным для справедливости центральной предельной теоремы. Это утверждение, в последующем, стало называться теоремой Линдеберга-Феллера. Следует заметить, что условие Линдеберга зависит от дополнительного параметра $\varepsilon > 0$ и справедливость его необходимо проверить при любом $\varepsilon > 0$. Последнее в некоторых случаях суммирования случайных величин создает дополнительные трудности, никак не связанные с задачами о справедливости центральной предельной теоремы.

В работе И.А.Ибрагимова, Ш.К.Форманова, Э.Л.Пресмана (Теор. вер. и ее применен. 55т, 2020, вып. 2, с.3-8) введена числовая характеристика Ибрагимова-Осипова, которая обобщает характеристику Линдеберга и не зависит от какого-либо параметра. В диссертации установлены аналоги теоремы Линдеберга-Феллера в терминах числовой характеристики Ибрагимова-Осипова в задачах сходимости распределения сумм независимых случайных величин к нормальному, пуассоновскому и единичному законам распределения. Приведенные рассуждения позволяют считать, что исследования, проведенные в настоящей диссертационной работе являются актуальными на современном этапе развития теории суммирования независимых случайных величин.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательской работы ОТ-Ф4-83 «Предельные теоремы для вероятностных распределений и статистический анализ функциональных данных» Института Математики АН Узбекистана (2017-2020).

Целью исследования является нахождение необходимых и достаточных условий для сходимости распределения сумм независимых случайных величин к нормальному, пуассоновскому и единичному законам распределения и доказательство классических вариантов теорем Линдеберга и Линдеберга-Феллера.

Задачи исследования:

доказать аналоги теоремы Линдеберга в законе больших чисел, с помощью уравнения Стейна и в терминах числовой характеристики Ибрагимова-Осипова;

привести упрощенные варианты доказательств теорему Боровкова о законе больших чисел, с помощью метода Стейна-Тихомирова и теорему Хинчина, основываясь на формуле Леви-Хинчина;

в терминах характеристики Ибрагимова-Осипова доказать теоремы Линдеберга-Феллера для сходимости распределения сумм независимых случайных величин к пуассоновскому распределению;

в терминах характеристики Ибрагимова-Осипова доказать классические варианты теоремы Линдеберга-Феллера.

Объектом исследования являются суммы независимых случайных величин, нормальное распределение, пуассоновское распределение, единичный закон распределения.

Предмет исследования – функция распределения, характеристическая функция, условия слабой сходимости и сходимость по вероятности, условия и характеристика Линдеберга, числовая характеристика Ибрагимова-Осипова.

Методы исследования. В диссертации использованы вероятностные и аналитические методы такие, как метод Стейна, метод Стейна-Тихомирова, метод срезки случайных величин.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказаны аналоги теоремы Линдеберга в законе больших чисел, с помощью уравнения Стейна и в терминах числовой характеристики Ибрагимова-Осипова;

приведены упрощенные варианты доказательств теорему Боровкова о законе больших чисел, с помощью метода Стейна-Тихомирова и теорему Хинчина, основываясь на формуле Леви-Хинчина;

в терминах характеристики Ибрагимова-Осипова доказана теоремы Линдеберга-Феллера для сходимости распределения сумм независимых случайных величин к пуассоновскому распределению;

в терминах характеристики Ибрагимова-Осипова доказаны классические варианты теоремы Линдеберга-Феллера.

Практические результаты исследования. Использованные в диссертации методы и полученные результаты могут быть применены в спецкурсах по предельным теоремам для сумм независимых случайных величин для магистров и докторантов высших учебных заведений Республики Узбекистан. Кроме того, результаты диссертации позволяют получить элементарные доказательства классических вариантов теоремы Линдеберга-Феллера в терминах характеристики Ибрагимова-Осипова, по сравнению с доказательствами соответствующей предельной теоремы, где используется характеристика Линдеберга.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием современных методов теории суммирования независимых случайных величин.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что результаты могут быть использованы при дальнейших исследованиях

предельных теорем современной теории вероятностей и математической статистики и, в совокупности, эти результаты представляют определенный интерес для исследователей стохастических систематических моделей.

Практическая значимость исследования объясняется тем, что полученные результаты могут быть использованы для многих теоретических и практических задач экономики, актуарной математики, теории принятия решений, и решения этих задач непосредственно связаны с суммами независимых случайных величин.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с предельными теоремами для сумм независимых случайных величин, были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Аналоги теоремы Линдеберга и Линдеберга-Феллера в терминах характеристики Ибрагимова–Осипова были использованы при исследовании классических и неклассических вариантов центральной предельной теоремы, а также в предельных теоремах о сходимости к пуассоновскому и единичному законам распределения в фундаментальном научном проекте ОТ-Ф4-40 «Исследования асимптотических свойств интегральных эмпирических процессов, индексированных классом измеримых функций» (Справка Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека № 04/11-7087 от 06.11.2021г.) Применение научного результата позволило исследовать некоторые классические и неклассические варианты предельных теорем;

Аналоги теоремы Линдеберга и предложенный метод при доказательстве теореме Линдеберга-Феллера были использованы при исследовании траектории стохастических процессов в фундаментальном научном проекте № ОТ-Ф-4-03 «Непрерывные и дискретные точные динамические системы, спектры частных интегральных операторов» (Справка Каршинского государственного университета № 04/5729 от 15 ноября 2021г.). Применение научного результата позволило получить асимптотические заключения, оценивающие эволюцию дискретно-временных популяционных систем.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 7 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 3 опубликованы в зарубежных журналах, 2 в республиканских научных изданиях и 10 тезисов докладов в материалах научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 108 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава **«Сходимость к единичному закону распределения»** посвящена сходимости распределений сумм независимых случайных величин к единичному (вырожденному) закону распределения. Первой параграф первой главы посвящен связи, существующей между понятиями центральной предельной теоремы (CLT) и закон больших чисел (з.б.ч.). В этом параграфе доказано, что з.б.ч. может рассматриваться как CLT, в случае сходимости к нормальному закону распределения с «дисперсией равной нулю».

Пусть задана последовательность серий независимых случайных величин (с.в.)

$$X_{n1}, X_{n2}, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Предположим, что

$$E\left|X_{nj}\right| < \infty, \; j = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

С учетом (1), не ограничивая общности, положим $EX_{nj} = 0, \; j = 1, 2, \ldots, \; n \geq 1.$

Здесь и в дальнейшем будем пользоваться обозначениями:

$$S_n = X_{n1} + \ldots X_{nn}, \quad F_{nj}(x) = P(X_{nj} < x), \; f_{nj}(t) = Ee^{itX_{nj}}, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$F_n(x) = P(S_n < x), \quad f_n(t) = \prod_{j=1}^{n} f_{nj}(t) = Ee^{itS_n},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \; x \in (-\infty, \infty), \quad E_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

При выполнении условия (1) введем следующие величины

$$L_n^*(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon} |x| dF_{nj}(x), \; \varepsilon > 0,$$

$$D_n^*(\alpha, \varepsilon) = M_n^*(\alpha, \varepsilon) + L_n^*(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^{1+\alpha} dF_{nj}(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon} |x| dF_{nj}(x), \; \alpha > 0.$$

Величина $D_n^*(\alpha, \varepsilon)$ представляет собой универсальную запись числовой характеристики Ибрагимова-Осипова. Во втором параграфе второй главы доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если $D_n^*(\alpha_0,\varepsilon_0)\to 0,\ n\to\infty$ при некоторых значениях α_0,ε_0, то $D_n^*(\alpha,\varepsilon)\to 0,\ n\to\infty$ при всех значениях α и ε.
С учетом этой теоремы положим

$$D_n^* = D_n^*(1,1) = M_n^* + L_n^* = \sum_{j=1}^{n}\int_{|x|\le 1}|x|^2 dF_{nj}(x) + \sum_{j=1}^{n}\int_{|x|>1}|x| dF_{nj}(x).$$

Будем говорить, что имеют места условия (2) и (3), если соответственно при $n\to\infty$

$$L_n^*(\varepsilon)\to 0,\ \forall\varepsilon>0, \tag{2}$$

$$D_n^* = M_n^* + L_n^* \to 0. \tag{3}$$

Теорема 2. Если выполнено условие

$$\sup_n \sum_{j=1}^{n} E\left|X_{nj}\right| \le m < \infty, \tag{4}$$

то условия (2) и (3) эквивалентны.

Как хорошо известно, справедливость з.б.ч. $S_n \xrightarrow{P} 0$ равносильно слабой сходимости $F_n \Rightarrow E_0$, где F_n распределение суммы S_n, символы $\xrightarrow{P}, \Rightarrow$ обозначают, сходимости по вероятности и слабую сходимость соответственно. В книге А.А.Боровкова (Теория вероятностей, 1999, Изд. Третье, М. Изд-во «Эдоториал УРСС», С.157.) приведена следующая теорема.

Теорема 3. При выполнении условий (1) и (L^*) имеет место з.б.ч.

$$F_n \Rightarrow E_0\ \left(S_n \xrightarrow{P} 0\right).$$

В диссертации эта теорема доказана методом Стейна-Тихомирова в терминах характеристических функций и с использованием числовой характеристики Ибрагимова-Осипова.
Теорема 3. представляет собой аналог известной теоремы Линдеберга в з.б.ч.

Ни одно условие из условий (2) и (3) не является необходимым. Как показывает следующая теорема, в случае когда слагаемые X_{nj} ограниченны снизу эти условия являются необходимыми.

Теорема 4. Пусть числовая последовательность $\left\{\varepsilon_{nj}; 1\le j\le n\right\}$ такова, что

$$P\left(X_{nj}\ge -\varepsilon_{nj}\right)=1,\ \varepsilon_{nj}\ge 0,\ j=1,\dots,n,$$

$$\max_{1\le j\le n}\varepsilon_{nj}\to 0, \qquad \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{nj}\le C<\infty.$$

Тогда условие (3) Ибрагимова-Осипова или условие (2) Линдеберга необходимо для выполнения з.б.ч.

В диссертации эта теорема доказана сочетанием метода Стейна и метода характеристических функций.

Параграфы четыре и пять первой главы посвящены к описанию метода Стейна-Тихомирова в доказательствах з.б.ч. для сумме независимых с.в. В этом случае оператор Стейна-Тихомирова совпадает с оператором дифференцирования. В шестом параграфе главы один продемонстрировано применение метода «срезки с.в.» в доказательствах теорем о з.б.ч.

В теории суммирования независимых с.в. хорошо известна теорема Хинчина об особой роли нормального распределения в предельных теоремах для сумм независимых с.в.

В седьмом параграфе главы один эта теорема обобщена для случая для сумм «в схеме серий» с.в.

Вторая глава **«Сходимость к пуассоновскому закону распределения»** посвящена к задачам сходимости распределения сумм независимых с.в. к предельному пуассоновскому распределению. Пусть в некотором вероятностном пространстве определена последовательность серий независимых (в каждой серии) с.в.

$$X_{n1},...,X_{nn},\ \ n=1,\,2,\,\ldots,\quad F_{nj}(x)=P(X_{nj}<x),$$

$$F_n(x)=P(X_{n1}+...+X_{nn}<x).$$

Далее положим

$$\pi_\lambda(x)=\sum_{j<x+\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}=P(\xi-\lambda<x),\ \lambda>0,$$

где $\xi-$неотрицательная целочисленная с.в. имеющая пуассоновское распределение с параметром

$$\lambda=E\xi=D\xi.$$

Поскольку пуассоновское распределение как безгранично делимое распределение имеет спектр (множество точек разрыва спектральной функции), состоящий из единственной точки $x=1$, то числовая характеристика Ибрагимова-Осипова в этом случае имеет вид

$$\overline{D}_n=\sum_{j=1}^{n}\int_{|x-1|\le 1}|x|^3\,dF_{nj}(x)+\sum_{j=1}^{n}\int_{|x-1|>1}x^2dF_{nj}(x)$$

и условие

$$\left\{\bar{D}_n\to 0,\ n\to\infty\right\} \tag{5}$$

равносильно условию Линдеберга

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_{|x-1|>\varepsilon}x^2dF_{nj}\left(x\right)\to 0,\ \forall\varepsilon>0\right\}. \tag{6}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\sigma_{nj}^2=DX_{nj}<\infty,\ j=1,2,\ldots.$$

В первом параграфе второй главы доказано следующая теорема.

Теорема 5. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n} DX_{nj} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{nj}^2 = \lambda > 0,$

2) (5).

Тогда при $n\to\infty$

$$F_n(x) \Rightarrow \pi_\lambda(x) = \sum_{k<x+\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

где $\Rightarrow$ означает слабую сходимость распределений.

В параграфах два и три главы два соответственно приведены теоремы о свойствах числовых характеристик Ибрагимова-Осипова и Линдеберга. Эти теоремы использованы при доказательстве теоремы 5.

Третья глава имеет название **«Сходимость к нормальному закону распределения»** и состоит из трех параграфов. В самом начале этой главы отмечено, что задачи сходимости распределения сумм независимых с.в. могут быть редуцированы в более общей постановке к задачам о близости двух сверток (композиций) распределения: пусть

$$F_n = \prod_{j=1}^{\infty} * F_{nj} = F_{n1} * F_{n2} *, \ldots *, \ldots$$

$$G_n = \prod_{j=1}^{\infty} * G_{nj} = G_{n1} * G_{n2} *, \ldots *, \ldots$$

две свертки распределений. Следуя В.И.Ротарю свертки распределений F_n и G_n будем считать асимптотически слабо сближающимся, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, d\left(F_n - G_n\right)(x) \to 0,\ n\to\infty, \tag{7}$$

для любой непрерывной и ограниченной функции $u(x)$.

Для данной последовательности серий независимых с.в. $\left\{X_{nj}; 1\le j\le n\right\}$ $\left(\sigma_{nj}^2 = EX_{nj}^2,\ j\le n\right)$ неограничивая общности можно считать, что

$$EX_{nj} = 0,\ \ j = 1, 2, \ldots n,\ \ \sum_{j=1}^{n}\sigma_{nj}^2 = 1.$$

Теорема 6. Предложим, что для свёрток F_n и G_n имеют место условия: при $j = 1, 2, \ldots$,

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_{nj}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dG_{nj}(x),\ \ \sigma_{nj}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nj}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dG_{nj}(x),\ \ \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{nj}^2 = 1.$

2) числовая характеристика Ибрагимова-Осипова

$$D_n = M_n + L_n \to 0,\ n\to\infty. \tag{8}$$

Тогда свертки F_n и G_n являются асимптотически слабо сближающимся при $n\to\infty$, т.е. справедливо соотношение (7).

Если выполнено условие Феллера

$$\max_{1\le j\le n}\sigma_{nj}^2 \to 0,\ n\to\infty.$$

то выполнение условия (8) является необходимом и достаточном для справедливости соотношения (7).

В частности, если положим

$$G_{nj}(x) = \Phi_{nj}(x) * E_{0j}(x) = \Phi\left(x/\sigma_{nj} \right) * E_{0j} = \Phi\left(x/\sigma_{nj} \right)$$

$\left(\text{где, } E_{0j}(x) = E_0(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ 1, \ x > 0 \end{cases} \right)$, то получаем, что

$$G_n(x) = \prod_{j=1}^{n} * \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nj}} \right) = \Phi(x).$$

Следовательно, согласно теореме 6

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) d\left(F_n - \Phi_n\right)(x) \to 0, \ n \to \infty,$$

для любой ограниченной и непрерывной функции $u(x)$.

Последнее равносильно тому, что

$$\sup_x \left| F_n(x) - \Phi_n(x) \right| \to 0, \ n \to \infty.$$

Таким образом теорема 6 существенно обобщает классической теоремы Линдеберга-Феллера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена исследованию сходимости распределений сумм независимых случайных величин к нормальному, пуассоновскому и единичному законам распределения.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. Доказаны аналоги теоремы Линдеберга в законе больших чисел, с помощью уравнения Стейна и в терминах числовой характеристики Ибрагимова–Осипова;
2. Приведены упрощенные варианты доказательств теорему Боровкова о законе больших чисел, с помощью метода Стейна-Тихомирова и теорему Хинчина, основываясь на формуле Леви-Хинчина;
3. В терминах характеристики Ибрагимова–Осипова доказана теорема Линдеберга–Феллера для сходимости распределения сумм независимых случайных величин к пуассоновскому распределению;
4. В терминах характеристики Ибрагимова–Осипова доказаны классические варианты теоремы Линдеберга–Феллера.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

KHUSAINOVA BIKAJON BAKHRAMBOYEVNA

CONVERGENCE OF DISTRIBUTIONS OF SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES TO NORMAL, POISSON AND UNIT DISTRIBUTION LAWS

01.01.05-Probability theory and mathematical statistics

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2021

The theme of thesis of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.4.PhD/FM312.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Formanov Shakir Kasimovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, academician
Official opponents:	**Sharipov Olimjon Shukurovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Sagidullaev Kalmurza Saparbaevich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent
Leading organization:	**Karshi State University**

Defense will take place " 7 " January 2021 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered № 129). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on « 21 » December 2021 year
(Mailing report № 2 on « 21 » December 2021 year)

U.A.Rozikov
Deputy Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

Ya.M.Khusanbayev
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., docent

INTRODUCTION (abstract of (PhD) thesis)

The aim of the research is to find necessary and sufficient conditions for the convergence of the distribution of sums of independent random variables to the normal, Poisson and unit distribution laws and to prove the classical versions of the Lindeberg and Lindeberg-Feller theorems.

The object of research is the sum of independent random variables, normal distribution, Poisson distribution, unit distribution law.

The scientific novelty of the research is as follows:

analogs of the Lindeberg theorem are proved using the Stein equation and in terms of the numerical Ibragimov-Osipov characteristic;

another proof of Borovkov's theorem is given, based on the Stein-Tikhomirov method; a shorter proof of the Khinchin theorem based on the Levi-Khinchin formula is given;

in terms of the Ibragimov-Osipov characteristic, the Lindeberg-Feller theorem is proved for the convergence of the distribution of sums of independent random variables to the Poisson distribution;

in terms of the Ibragimov-Osipov characteristic, the classical versions of the Lindeberg-Feller theorem are proved.

Implementation of research results. Results related to limit theorems for sums of independent random variables were used in the following research projects:

Limit theorems on the convergence of the distributions of sums of independent random variables to the normal, Poisson and unit distribution laws were used by the fundamental scientific project OT-F4-40 «Investigations of the asymptotic properties of integral empirical processes indexed by the class of measurable functions» (Reference of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek No. 04 / 11-7087 from 06.11.2021) Scientific results are applied in the study of some classical and non-classical versions of the central limit theorem and in limit theorems on convergence to Poisson and unit distribution laws;

Analogues of the Lindeberg theorem and the proposed method in the proof of the Lindeberg-Feller theorem were used to study the trajectory of stochastic processes in the fundamental scientific project No. OT-F-4-03 "Continuous and discrete exact dynamical systems, spectra of partial integral operators" (Reference from Karshi State University No. 04/5729 dated November 15, 2021). The application of the scientific result made it possible to obtain asymptotic conclusions evaluating the evolution of discrete-time population systems.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the thesis is 108 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Форманов Ш.К, Хусаинова Б.Б. Предельные теоремы о сходимости к пуассоновскому закону распределения // Вестник РГГУ (Рос.Гос.Гум.Унив.) Информатика, Информационная безопасность. Математика. 1 (2018), С.74-94. (РИНЦ)
2. Хусаинова Б.Б. Центральная Предельная Теорема без моментных условий. I // Бюллетень Института Математики, выпуск № 5, 2020, С.59-64. (10.00.00: №17)
3. Хусаинова Б.Б. Центральная Предельная Теорема без моментных условий. II // Бюллетень Института Математики, выпуск № 6, 2020, С.74-78. (10.00.00: №17)
4. Formanov Sh.K., Khusainova B.B., Sirozhitdinov A.A. On the numerical characteristics in the central limit theorem // AIP Conference Proceedings. 2021. 2365. № 1. 060011. (3. Scopus IF=0.177)
5. Formanov Sh.K., Khusainova B.B. Analytical proof of one Strong version of the law of large numbers // Global and Stochastic Analysis, 2021, 8(3), P. 143-149. (3.Scopus IF=0.297).

II бўлим (Часть II; Part II)

6. Форманов Ш.К., Хусаинова Б.Б. Асимптотическая нормальность пуассоновских случайных сумм. // Тезисы докладов Международного научного форума «Математические модели гуманитарных, естественнонаучных процессов: проблемы, решения, перспективы». 18 апреля 2018 года, Москва, С. 91-93.
7. Formanov Sh.K., Khusainova B.B. On non-classical variant of central limit theorem // Abstracts of the International Scientific Conference «Modern problems of applied mathematics and information technologies- al-Khorezmiy 2018», September 13-15, 2018, Tashkent, P.104.
8. Khusainova B.B. Characterization of the normal distribution by the Stein method.Тезисы докладов Республиканской научно-практической конференции с участием зарубежных женщин-ученых «Актуальные проблемы математики и механики – CAWMA-2018», 25-26 октябрь, Хива, С.81-82.
9. Форманов Ш.К., Хусаинова Б.Б. Об аппроксимациях распределений с обобщенным пуассоновским распределением // Тезисы докладов международного научного форума Круглые столы: “математические модели гуманитарных, естественно-научных процессов: проблемы, решения, перспективы” 16 - 25 апреля 2019 года, Москва, С.36-38.
10. Formanov Sh.K., Khusainova B.B. Approximations of distributions with a generalized Poisson distribution // STEMM: Science–Technology–Education–Mathematics–Medicine. Abstract of the Join International Conference, May 16-17, 2019, Tashkent, P.51-53.

11. Хусаинова Б.Б., Хасанова С.Ш. Предельная теорема о сходимости к обобщенному пуассоновскому закону распределения // Тезисы докладов Международной научной конференции на тему «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики» том II, 12-13 март, 2020 год, Фергана, P.115-117.
12. Форманов Ш.К., Хусаинова Б.Б., Сирожиддинов А.А. Новый вариант классической предельной теоремы Линдеберга-Феллера// Международный научный круглый стол «Математические модели гуманитарных, естественнонаучных процессов: проблемы, решения, перспективы» Международный гуманитарный научный форум. Гуманитарные чтения РГГУ: Специальный выпуск 2020, Москва, P.5-7.
13. Хусаинова Б.Б., Сирожиддинов А.А. Характеристика Ибрагимова-Осипова и Центральная предельная теорема // Uzbekistan-Malaysia international online conference Computational models and technologies, August 24-25, 2020, Tashkent, C.197-198.
14. Форманов Ш.К., Хусаинова Б.Б. Характеристика Ибрагимова–Осипова и аналог теоремы Линдеберга для закона больших чисел// Республиканская научная конференция «Современные проблемы стохастического анализа» посвященная 100-летию со дня рождения академика С.Х.Сираждинова. 21-22 сентября 2020 г. Ташкент, С.231-235.
15. Хусаинова Б.Б., Ҳасанова С.Ш. Характеристика Ибрагимова–Осипова и аналог теоремы Линдеберга для закона больших чисел // Академик Ш.Қ.Фармонов таваллудининг 80 йиллигига бағишланган “Стохастик таҳлилнинг долзарб муаммолари” мавзусидаги Республика илмий конференцияси. 20-21 феврал 2021й., Ташкент, С.250-254.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Бичими: 60x84 $^{1}/_{16}$. Ризограф босма усули. Times гарнитураси.

Шартли босма табоғи: 2,25. Адади 100. Буюртма № 65/21.
Баҳоси келишилган нархда.

«ЎзР Фанлар Академияси Асосий кутубхонаси» босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100170, Тошкент ш., Зиёлилар кўчаси, 13-уй.