В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ШОПЎЛАТОВ ШОМУРОД ШОРАСУЛ ЎҒЛИ

m −СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР УЧУН ИНТЕГРАЛ КРИТЕРИЯЛАР

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

УДК: 517.57

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of thesis abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ШОПЎЛАТОВ ШОМУРОД ШОРАСУЛ ЎҒЛИ

m −СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР УЧУН ИНТЕГРАЛ КРИТЕРИЯЛАР

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.4.PhD/FM431 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Садуллаев Азимбой** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Рахимов Абдуғофур Абдумажидович** физика-математика фанлари доктори, профессор **Туйчиев Тахир Турсунбаевич** физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Урганч давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил « 23 » декабрь соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (127-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2021 йил « 10 » декабрь куни тарқатилди.
(2021 йил « 10 » декабрдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

У.У.Жамилов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда потенциаллар назарияси масалаларига келтирилади. Классик ва умумлашган Лаплас операторлари физиканинг электростатика, электродинамика қисмларида, квант механикасида, робототехникада, диффузия ва иссиқлик ўтказувчанлигининг стационар муаммоларида ва бошқа масалаларда кенг қўлланилади. Узлуксиз муҳит физикасининг кўплаб тенгламаларини ечишда, амалий математика, муҳандислик ва математик физиканинг кўплаб масалалари ушбу операторлар ёрдамида аниқланадиган гармоник функциялар ва уларнинг умумлашмалари, хусусан, $m-$субгармоник функциялар ва бу синфда аниқланган интеграл ифодаларга олиб келинади. Шунинг учун $m-$субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясини қуриш, ушбу синфда аниқланган интеграл ифодаларни тадқиқ қилиш комплекс потенциаллар назариясида долзарб ва муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда $m-$субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясини қуриш комплекс потенциаллар назариясининг долзарб муаммоларидан бири бўлиб, кўплаб физик жараёнларни ифодалаб берадиган Пуассон, Монжа-Ампер тенгламаларига алоҳида эътибор қаратилган. Ушбу функциялар синфида интеграл критерияларнинг мавжуд эмаслиги сабабли, ушбу функцияларни махсус эллипсоидлар ёрдамида аниқланган ўрта қиймат ифодаларига олиб келинади. Бунда, олиб борилаётган тадқиқотлар $m-$субгармоник функциялар учун интеграл баҳолар, интеграл критериялар олишнинг алоҳида аҳамият касб этишини кўрсатиб бермоқда. Бу борада: субгармоник ва плюрисубгармоник функциялар учун жоиз тўпламларни аниқлаш, ушбу функцияларни кенгроқ синфларда қуриш каби масалалар мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда сўнгги йилларда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган математика, геология, биология ва физика фанларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, потенциаллар назарияси, калибрланган геометрия, механика, математик физика масалаларида кенг татбиққа эга бўлган $m-$субгармоник функциялар назариясини ривожлантиришга алоҳида аҳамият берилди. $m-$субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясини қуриш бўйича салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика ва статистик физика» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Бунда $m-$субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясининг ривожланиши ушбу қарорни бажаришда муҳим роль ўйнайди.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сон Фармони, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сон Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялар ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Классик потенциаллар назарияси физиканинг электростатика, магнетизм қисмларида, квант механикасида, математик физиканинг чегаравий масалаларида ва бошқа кўплаб масалаларида муҳим аҳамият касб этади ҳамда бу назария субгармоник функциялар ва Лаплас операторига асосланган. Субгармоник функциялар анализга Ф.Хартогс ва Ф.Рисс томонидан киритилган бўлиб, улар субгармоник функцияларни бир ўзгарувчили қаварик функцияларнинг кўп ўзгарувчили функцияларга давоми сифатида аниқлашган. Ф.Рисснинг асосий теоремаси локал атрофда ихтиёрий субгармоник функцияни потенциал ва бирор гармоник функция йиғиндиси сифатида ёзиш имконини беради. Шунинг учун ҳам потенциаллар назарияси асосини гармоник ва субгармоник функциялар синфи ташкил этади. Шу билан биргаликда субгармоник функцияларни кенгроқ синфга давом эттириш масаласида И.Привалов ва В.Бляшке томонидан киритилган операторлар, умумлашган Лаплас операторлари муҳим роль ўйнайди. Привалов-Бляшке томонидан исботланган теоремада субгармоник функцияларга нисбатан кучсизроқ шарт қўйилган бўлса, И.Привалов теоремасида эса субгармоник функцияларнинг жоиз тўпламлари тадқиқ қилинган.

Комплекс потенциаллар назарияси Монжа-Ампер оператори ва плюрисубгармоник функцияларга асосланган. Г.Бремерман максимал плюрисубгармоник функция тушунчасини киритди ва ушбу функциялар соҳада силлиқ бўлса, у ҳолда улар Монжа-Ампер тенгламаси $\left(dd^c u\right)^n = 0$ билан ифодалашини исботлади. Умуман олганда максимал плюрисубгармоник фунциялар $n > 1$да силлиқ бўлмаслиги мумкин. Шунинг учун ҳам ихтиёрий плюрисубгармоник функциялар учун $\left(dd^c u\right)^n$ операторини аниқлаш жуда муҳим эди. Э.Бедфорд ва Б.Тейлор, А.Садуллаевлар томонидан ушбу операторни Борель ўлчови ёрдамида аниқлаш таклиф қилинди ва

плюрипотенциаллар назариясининг асосий тушунчалари тадқиқ қилинди. Булардан, экстремал Грин функцияси $V(z,K)$ ва $\mathscr{P}$-ўлчов $\omega(z,K,D)$, плюриполяр тўпламлар, конденсатор сиғими ва бошқа тушунчалар ўрин олган. Олинган натижалар ёрдамида кўп ўлчамли комплекс анализнинг, плюрисубгармоник функциялар назариясининг йиғилиб қолган муаммоли масалалари ҳал этилди.

Ўтган асрнинг 90 йилларида плюрипотенциаллар назариясини кенгроқ функциялар синфига давом эттиришга жуда кўп ҳаракатлар бўлди. Шундай функциялар синфидан бири $m-$субгармоник ва кучли $m-$субгармоник функциялар синфларидир. $m-$субгармоник функциялар синфи З.Блоцкий томонидан аниқланди ва бу синфнинг муҳим хоссалари исботланди. Кучли $m-$субгармоник функциялар синфида потенциаллар назарияси А.Садуллаев ва Б.Абдуллаевлар томонидан қурилди. Ф.Харвей ва Г.Лоусонлар томонидан $m-sh$ функциялар қаварик геометриянинг масалаларида, қаварик қобиқлар, калибрланган геометрияда минимал сиртлар масалаларида татбиқ қилинди. А.Садуллаев, Б.Абдуллаев, Б.Дрновсек, Ф.Форстнерик, Хо Лу, Д.Жойс, М.Вербитскийлар томонидан $m-$субгармоник функциялар ёрдамида функциялар назариясига доир кўплаб масалаларда ижобий натижалар олинди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган илмий текшириш муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номли Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги Ф4-ФА-Ф013 рақамли «Операторлар ва ноассоциатив алгебралар, динамик системалар ва уларнинг статистик механика ва популяцион биологияга татбиқлари» (2012-2016 йиллар) мавзусидаги фундаментал лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади $m-$ субгармоник функциялар учун $n-$ўлчамли комплекс Евклид фазосида берилган махсус эллипсоидлар бўйича олинган ўрта қийматлар ёрдамида интеграл критерияларни қуришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

жоиз тўпламларга доир Привалов теоремасининг умумлашмасини исботлаш;

субгармоник функциялар учун жоиз тўпламларнинг топологик хоссаларини тадқиқ этиш;

плюрисубгармоник функциялар учун субгармоник функцияларга хос ўрта қиймат теоремаларини исботлаш;

функцияларни $m-$субгармоник функция бўлиши учун зарур ва етарли интеграл критериялар топиш.

Тадқиқотнинг объекти. Умумлашган Лаплас операторлари, сфера, шар ва махсус эллипсоидлар бўйича олинган ўрта қийматлар.

Тадқиқотнинг предмети. Ҳақиқий ўзгарувчили функциялар назарияси, субгармоник ва $m-$субгармоник функциялар, классик потенциаллар назарияси, гармоник функциялар ва уларнинг умумлашмалари, плюрипотенциаллар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда функционал анализ, комплекс анализнинг замонавий усуллари, умумлашган функциялар, классик потенциаллар назарияси, плюрипотенциаллар назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

субгармоник функциялар учун янги қуйи ва юқори сингуляр тўпламлар аниқланган ва уларнинг барча топологик хоссалари таснифланган;

субгармоник функциялар учун умумлашган Привалов теоремаси исботланган;

$n-$ўлчамли Евклид фазосида аниқланган $p(t)-$субгармоник функциялардан фойдаланиб плюрисубгармоник функциялар учун Бляшке-Привалов теоремаси муқобили исботланган;

$m-$субгармоник функциялар учун $n-$ўлчамли комплекс Евклид фазосида берилган махсус эллипсоидлар бўйича олинган ўрта қийматлар ёрдамида интеграл критериялар исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси субгармоник функциялар учун аниқланган жоиз тўпламларнинг тўлиқ метрик тавсифларини исботлаш ва плюрисубгармоник ва $m-$субгармоник функциялар учун интеграл критериялар аниқлаш, бу функциялар синфида жоиз тўпламлар киритилиб, уларни янада кенгроқ синфга давом эттириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, классик потенциаллар назарияси ва плюрипотенциаллар назарияси усулларидан фойдаланилгани ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти гармоник функция ва уларнинг умумлашмалари синфида жоиз тўпламларни аниқлаш ва уларни таснифлаш, интеграл критериялар олиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти $\mathbb{C}^n$ фазосида аниқланган эллипсоидлар ёрдамида $m-$субгармоник функциялар учун интеграл критериялар олиш ҳамда ушбу критерий орқали $m-$субгармоник функцияларни ўрта қийматлар ёрдамида аниқлаш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. $m-$субгармоник функциялар учун интеграл критериялар бўйича олинган илмий натижалар асосида:

$m-$субгармоник функциялар учун $n-$ўлчамли комплекс Евклид фазосида берилган махсус эллипсоидлар бўйича олинган интеграл критериялардан ФА-Ф-4-002 рақамли «$m-$субгармоник функциялар ва уларнинг калибрланган геометрияга татбиқлари» мавзусидаги фундаментал илмий лойиҳада калибрланган геометрияда минимал юзаларини топиш масалаларида фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг 2021 йил 30 сентябрдаги № 2/1255-2687-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши $m-$субгармоник функцияларни субгармоник функцияларга $(m=n)$ хос тарзда аниқлаш ва

калибрланган геометрияда потенциаллар назариясини қуриш имконини берган;

субгармоник функциялар учун янги қуйи ва юқори сингуляр тўпламлари ва уларнинг топологик хоссалари таснифидан UT-OT-2020-1 рақамли «Монже-Ампер тенгламаси ва экстремал плюрисубгармоник функциялар» мавзусидаги фундаментал илмий лойиҳада жоиз тўпламларда субгармоник функцияларни аниқлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университетининг 2021 йил 4 октябрдаги № 04/11-6015-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши компакт тўпламларнинг поляр қобиқларини аниқлаш ҳамда жоиз тўпламлар иштирокидаги функцияларни субгармоникликка текшириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 5 та халқаро ва 6 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 17 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 78 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти ёритиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Бирламчи тушунчалар»** деб номланувчи биринчи бобида, диссертация мавзусини тўла ёритиш учун зарур бўлган асосий таърифлар ва муҳим тушунчалар келтирилган.

Аввалambор, бизга зарур бўлган функциялар синфини аниқлаб оламиз. Айтайлик, бизга $D \subset \mathbb{R}^n$ соҳа берилган бўлсин.

1-таъриф. *Агар* $u \in C^2(D)$ *функция* D *соҳада қуйидаги тенгликни қаноатлантирса,*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

у ҳолда u функцияга гармоник функция дейилади (қисқача $u \in h(D)$). Бу ерда, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ *классик Лаплас оператори.*

2-таъриф. $D \subset \mathbb{R}^n$ соҳада берилган $u : D \to [-\infty, \infty)$ функция қуйидаги икки шартни қаноатлантирса, яъни

1. $u(x)$ юқоридан ярим узлуксиз, $\forall x^0 \in D$ *учун*

$$\overline{\lim_{x \to x^0}} u(x) \le u(x^0);$$

2. *ҳар бир* $x^0 \in D$ *нуқта учун шундай* $r(x^0) > 0$ *сон топилиб, барча* $r \le r_0(x^0)$ *учун қуйидаги тенгсизлик*

$$u(x^0) \le \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{S(x^0, r)} u(x) d\sigma,$$

ўринли бўлса, у ҳолда u функцияга субгармоник функция дейилади (қисқача $u \in sh(D)$). Бу ерда, $S(x^0, r)$ сфера ва σ_n бирлик сферанинг юзаси, $S(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

Қулайлик учун, $u \equiv -\infty$ тривиал функцияни ҳам $sh(D)$ синфга тегишли деб ҳисоблаймиз. Шуни таъкидлаш жоизки, субгармоник функция локал интегралланувчи ҳисобланади, яъни $u(x) \in L^1_{loc}(D)$ ва $\Delta u \ge 0$ тенгсизлик умумлашган маънода бажарилади. Айтайлик бизга $D \subset \mathbb{R}^n$ соҳада юқоридан ярим узлуксиз $u(x)$, $u \not\equiv -\infty$, функция берилган бўлсин. $m_u(x^0, r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{S(x^0, r)} u(x) d\sigma$ сифатида u функциянинг $S(x^0, r)$ сфера бўйича олинган ўрта қийматини белгилаймиз. Агар $u(x)$ $S(x^0, r)$ сферада интегралланмайдиган бўлса, у ҳолда $m_u(x^0, r) := -\infty$ деб оламиз. $x^0 \in D \setminus u_{-\infty}$ нуқта учун, бу ерда $u_{-\infty} := \{x \in D : u(x) = -\infty\}$, u функциянинг сфера бўйича олинган ўрта қийматлари ёрдамида умумлашган юқори $\overline{\Delta} u(x^0)$ ва қуйи $\underline{\Delta} u(x^0)$ Лаплас операторларини аниқлаймиз:

$$\overline{\Delta} u(x^0) := 2n \cdot \overline{\lim_{r \to +0}} \frac{m_u(x^0, r) - u(x^0)}{r^2}, \tag{1}$$

$$\underline{\Delta} u(x^0) := 2n \cdot \underline{\lim_{r \to +0}} \frac{m_u(x^0, r) - u(x^0)}{r^2}. \tag{2}$$

Худди шу усулда, *юқори* ва *қуйи Лаплас операторларини* шар бўйича олинган ўрта қийматлар $n_u(x^0,r)=\dfrac{1}{V_n r^n}\int\limits_{B(x^0,r)} u(x)dx$ орқали ифодалашимиз мумкин. Улар қуйидагига тенг бўлади ($x^0\in D\setminus u_{-\infty}$ нуқта учун):

$$\overline{\Delta}_B u(x^0):=2(n+2)\cdot\overline{\lim_{r\to+0}}\frac{n_u(x^0,r)-u(x^0)}{r^2}, \tag{3}$$

$$\underline{\Delta}_B u(x^0):=2(n+2)\cdot\underline{\lim_{r\to+0}}\frac{n_u(x^0,r)-u(x^0)}{r^2}. \tag{4}$$

Энди умумлашган Лаплас операторларининг хоссаларини кўриб ўтамиз:

1. *Агар* $u(x)$ *функция* x^0 *нуқтанинг бирор атрофида икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:*

$$\overline{\Delta}u(x^0)=\underline{\Delta}u(x^0)=\overline{\Delta}_B(x^0)=\underline{\Delta}_B u(x^0)=\Delta u(x^0),$$

бу ерда $\Delta-$*классик Лаплас оператори.*

2. *Агар* $u\in C(D)$ *функция учун қуйидагилар ўринли бўлса,*

$$\underline{\Delta}u(x)\le 0\le\overline{\Delta}u(x)\ \text{ёки}\ \underline{\Delta}_B u(x)\le 0\le\overline{\Delta}_B u(x),$$

у ҳолда $u(x)$ *функция* D *соҳада гармоник бўлади.*

3. *Агар* $u(x)$ *функция* $D\subset\mathbb{R}^n$ *соҳада субгармоник бўлса, у ҳолда ҳар бир* $x^0\in D\setminus u_{-\infty}$ *нуқтада қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:*

$$\overline{\Delta}u(x^0)\ge\underline{\Delta}u(x^0)\ge 0,\overline{\Delta}_B u(x^0)\ge\underline{\Delta}_B u(x^0)\ge 0.$$

Қуйида берилган Бляшке-Привалов теоремаси субгармониклик шартини умумлашган Лаплас операторлари ёрдамида аниқлаш имконини беради.

1-теорема. *u, $u\not\equiv-\infty$ функция $D\subset\mathbb{R}^n$ соҳада берилган, юқоридан ярим узлуксиз функция бўлсин. У ҳолда u функциянинг субгармоник бўлиши учун қуйидаги тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли*

$$\overline{\Delta}u(x)\ge 0\ \text{барча}\ x\in D\setminus u_{-\infty},$$

бу ерда $u_{-\infty}:=\{x\in D: u(x)=-\infty\}$.

Жоиз тўпламларга доир муҳим теоремалардан бири бу Привалов теоремасидир. У қуйидагича ифодаланади

2-теорема. *u, $u\not\equiv-\infty$ функция $D\subset\mathbb{R}^n$ соҳада берилган, юқоридан ярим узлуксиз функция бўлсин. Агар қуйидаги икки шарт бажарилса:*

1. $\overline{\Delta}_B u(x)\ge 0$ *барча* $x\in D\setminus[E\cup u_{-\infty}]$, *бу ерда* $E\subset D$ *соҳадаги ёпиқ тўплам,* $mesE=0$;
2. $\overline{\Delta}_B u(x)>-\infty$ *барча* $x\in E\setminus P$, *бу ерда* $P\subset E$ *поляр тўплам,*

у ҳолда $u(x)$ *функция* D *соҳада субгармоник бўлади.*

Плюрисубгармоник (*psh*) функциялар ($\mathbb{C}^n$ да) комплекс чизиқларда субгармониклик шарти билан аниқланади.

3-таъриф. *Бизга* $D \subset \mathbb{C}^n$ *соҳа ва шу соҳада юқоридан ярим узлуксиз функция* $u : D \to [-\infty, \infty)$ *берилган бўлсин. Агар ҳар қандай комплекс чизиқ* l *учун* $u\big|_l$ *функция* $l \bigcap D$ *тўпламда субгармоник бўлса, у ҳолда* u *функцияга плюрисубгармоник функция (қисқача* $u \in psh(D)$ *) дейилади.*

$D \subset \mathbb{C}^n$ соҳада аниқланган плюрисубгармоник функция $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ соҳада субгармоник функциядир. Шунинг учун ҳам, субгармоник функцияларнинг барча хоссалари плюрисубгармоник функциялар учун ҳам ўринли бўлади.

Ўтган асрнинг охирларида плюрипотенциаллар назариясини кенгроқ функциялар синфига давом эттириш учун кўплаб уринишлар бўлди. Шундай синфлардан бири $m-$субгармоник функциялардир, бу ерда $1 \le m \le n$. Шуни таъкидлаш жоизки, қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$psh(D) = 1 - sh(D) \subset m - sh(D) \subset n - sh(D) = sh(D).$$

4-таъриф. *Бизга* $D \subset \mathbb{C}^n$ *соҳа ва шу соҳада* $u \in L^1_{loc}(D)$ *функция берилган бўлсин. Агар* $u(z)$ *функция қуйидаги шартларни қаноатлантирса,*

1. D *соҳада юқоридан ярим узлуксиз, яъни қуйидаги тенгсизлик ўринли:*

$$\overline{\lim_{z \to z^0}} u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{B(z^0, \varepsilon)} u(z) \le u(z^0);$$

2. *ихтиёрий* $m-$*ўлчовли комплекс текислик учун* $\Pi \subset \mathbb{C}^n$ $u\big|_{\Pi}$ *функция* $\Pi \bigcap D$ *соҳада субгармоник, яъни* $u\big|_{\Pi} \in sh(\Pi \bigcap D)$*;*

у ҳолда бу функцияга D *соҳада* $m-$*субгармоник (қисқача* $m - sh$ *) дейилади (* m*-ўлчовли комплекс текисликларда субгармоник функция, бу ерда* $1 \le m \le n$*).*

Диссертациянинг **«Субгармоник функцияларнинг жоиз** $\underline{S}, \overline{S}$ **– сингуляр тўпламларининг топологик хоссалари»** деб номланувчи иккинчи бобида, Привалов теоремасини тадқиқ этиш мақсадида субгармоник функциялар учун жоиз $\underline{S}, \overline{S}-$сингуляр тўпламлари киритилган. Уларнинг топологик хоссалари исботланган. Ушбу бобнинг асосий натижаларидан бири бу Привалов теоремасининг умумлашмаси ҳисобланиб, у $\underline{S}, \overline{S}-$сингуляр тўпламлар орқали ифодаланган.

5-таъриф. *Агар* $\nu \in sh(\mathbb{R}^n)$ *тривиал бўлмаган функция топилиб,* $\underline{\Delta}_B \nu(x)\big|_E = +\infty$ *тенглик ўринли бўлса, у ҳолда* E *тўпламга* $\underline{S}$ *(сингуляр) – тўплам дейилади.*

Агар $\nu \in sh(\mathbb{R}^n)$ *тривиал бўлмаган функция топилиб,* $\overline{\Delta}_B \nu(x)\big|_E = +\infty$ *тенглик ўринли бўлса, у ҳолда* E *тўпламга* $\overline{S}$ *(сингуляр) – тўплам дейилади.*

Агар $\nu(x^0) = -\infty$ тенглик бажарилса, у ҳолда $\underline{\Delta}_B \nu(x^0) = \overline{\Delta}_B \nu(x^0) = +\infty$ деб ҳисоблаймиз. Бу эса $\nu(x) \in sh(\mathbb{R}^n), \nu(x^0) \equiv -\infty,$ субгармоник функция учун $n_\nu(x^0, r) - \nu(x^0) = +\infty$ тенглик ўринли бўлишига олиб келади.

Энди ушбу сингуляр тўпламларнинг баъзи хоссаларини кўриб ўтамиз:

1. $\underline{S}$ *- тўплам бир вақтда* $\overline{S}$ *- тўплам ҳисобланади, яъни қуйидаги* $\underline{S} \subset \overline{S}$ *ўринли бўлади.*

2. *Саноқли сондаги* $\underline{S}$ *- тўпламларнинг бирлашмаси яна* $\underline{S}$ *- тўплам бўлади.*

3. *Чекли сондаги* $\overline{S}$ *- тўпламларнинг бирлашмаси яна* $\overline{S}$ *- тўплам бўлади.*

4. *Ихтиёрий сондаги* $\underline{S}(\overline{S})$ *- тўпламларнинг кесишмаси яна* $\underline{S}(\overline{S})$ *– тшплам бўлади.*

Қуйидаги теорема Привалов теоремасининг умумлашмаси ҳисобланади.

3-теорема. $D \subset \mathbb{R}^n$ *соҳада юқоридан ярим узлуксиз бўлган* $u(x), u(x) \not\equiv -\infty,$ *функция берилган бўлсин ҳамда ихтиёрий* $x^0 \in D \setminus [E \bigcup u_{-\infty}]$ *нуқта учун* $\overline{\Delta}_B u(x^0) \geq 0$ *тенгсизлик ўринли бўлсин, бу ерда* $u_{-\infty} := \{x \in D : u(x) = -\infty\}.$ *У ҳолда*

a) агар $E \in \underline{S}$ *ва* E *тўпламда, бирор поляр тўплам* $P \subset E$ *дан ташқарида* $\overline{\Delta}_B u > -\infty$ *тенгсизлик ўринли бўлса,* $u \in sh(D)$ *ўринли бўлади;*

b) агар $E \in \overline{S}$ *ва* E *тўпламда, бирор поляр тўплам* $P \subset E$ *дан ташқарида* $\underline{\Delta}_B u > -\infty$ *тенгсизлик ўринли бўлса,* $u \in sh(D)$ *ўринли бўлади.*

Қуйидаги теоремалар ёпиқ $\underline{S}, \overline{S}$ – сингуляр тўпламларни тўлиқ тавсифлаш имконини беради.

4-теорема. *Ёпиқ тўплам* $E \in \underline{S}$ *га тегишли бўлиши учун* $mesE = 0$ *тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.*

5-теорема. *Ёпиқ тўплам* $E \in \overline{S}$ *га тегишли бўлиіи учун* E *тўпламнинг ички нуқталари тўплами бўш бўлиши зарур ва етарли,* $E^0 = \varnothing,$ *яъни у ҳеч қаерда зич бўлмаслиги зарур ва етарли.*

Диссертациянинг **«Плюрисубгармоник функциялар учун интеграл критериялар»** деб номланувчи учинчи бобида, *psh* функциялар янги интеграл критериялар келтирилган ҳамда плюрисубгармоник функциялар учун Бляшке-Привалов теоремасининг муқобили исботланган.

Энди $\mathbb{C}^n$ да берилган қуйидаги эллипсоидларни қараймиз:

$$E(r_1, \ldots, r_n) = \left\{ \frac{|z_1|^2}{r_1^2} + \cdots + \frac{|z_n|^2}{r_n^2} \leq 1 \right\},$$

бу ерда $r_j > 0$ ихтиёрий $1 \leq j \leq n$. Барча $2 \leq j \leq n$ лар учун $r_1 = R$ ва $r_j = r$ деб олиб қуйидагича белгилаш киритамиз $E(R, r) := E(R, r, \ldots, r),$ бу ерда R ва r мусбат сонлар. Шуни таъкидлаш жоизки, ихтиёрий унитар T матрица ва марказдан ўтувчи ихтиёрий комплекс чизиқ $l \subset \mathbb{C}^n$ учун $(T \circ E(r_1, \ldots, r_n)) \bigcap l$ ифода l да доира бўлади. $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳада интегралланувчи u функция учун $E(r_1, \ldots, r_n)$ бўйича олинган ўрта қиймат ифодасини қараймиз:

$$M_u(z^0, T, E(r_1, \ldots, r_n)) = \frac{1}{V(r_1, \ldots, r_n)} \int\limits_{z^0 + T \circ E(r_1, \ldots, r_n)} u(\xi) dV(\xi).$$

6-теорема. *Бизга* $D \subset \mathbb{C}^n$ *соҳа ва бу соҳада юқоридан ярим узлуксиз функция* u *берилган бўлсин. Қуйидагилар эквивалент ҳисобланади:*

(a) u *функция* D *соҳада плюрисубгармоник;*

(b) ихтиёрий $z^0 \in D$ *нуқта ва ихтиёрий унитар матрица* T *учун, бунда* $z^0 + T \circ E(r_1,\ldots,r_n) \subset D$*, қуйидаги тенгсизлик ўринли:*

$$u(z^0) \le M_u(z^0, T, E(r_1,\ldots,r_n));$$

(c) ихтиёрий $z^0 \in D$ *нуқта ва ихтиёрий унитар матрица* T *учун шундай етарли кичик* $r_0 > 0$ *сони мавжуд бўлиб, ихтиёрий* $(r_1,\ldots,r_n)$ *учун, бунда* $\max\{r_1,\ldots,r_n\} \le r_0$*, қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:*

$$u(z^0) \le M_u(z^0, T, E(r_1,\ldots,r_n));$$

(d) ихтиёрий $z^0 \in D$ *ва ихтиёрий унитар матрица* T *учун шундай етарли кичик* $r_0 > 0$ *сони мавжуд бшлиб, ихтиёрий* (R, r) *учун, бунда* $\max\{R, r\} \le r_0$*, қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:*

$$u(z^0) \le M_u(z^0, T, E(R, r));$$

(e) ихтиёрий $z^0 \in D$ *нуқта ва ихтиёрий унитар матрица* T *учун, бунда* $z^0 + T \circ E(R, r) \subset D$*, қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$u(z^0) \le M_u(z^0, T, E(R, r)).$$

Плюрисубгармоник функциялар учун Бляшке-Привалов теоремасининг муқобилини исботлаш учун қуйидаги операторни аниқлаб оламиз:

$$\overline{D}_T u(z^0) = \overline{\lim_{R\to 0}}\,\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{M_u(z^0, T, E(R, r)) - u(z^0)}{R^2}$$

ва $\overline{D} u(z^0) = \inf_T \overline{D}_T u(z^0)$ деб оламиз, бу ерда инфимум барча T унитар матрицалар бўйича олинган.

7-теорема. $D \subset \mathbb{C}^n$ *соҳада берилган, юқоридан ярим узлуксиз функция* u*,* $u \not\equiv -\infty$*, плюрисубгармоник бўлиши учун қуйидаги тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли*

$$\overline{D} u(z) \ge 0 \ \text{барча}\ z \in D \setminus u_{-\infty}.$$

1-изоҳ. *Теоремани* $E(r_1,\ldots,r_n)$ *эллипсоидлар учун ҳам исботлаш мумкин.*

2-изоҳ. *Теорема шарти* $\overline{D} u(z^0) = \inf_T \overline{D}_T u(z^0) \ge 0$ *ўрнига* $\sup_T \overline{D}_T u \ge 0$ *ёки*

$$\inf_T \overline{D}_T u(z) = \inf_T \overline{\lim_{(r_1,\ldots,r_n)\to 0}} \frac{M_u(z, T, E(r_1,\ldots,r_n)) - u(z)}{r_1^2} \ge 0 \ \text{барча}\ z \in D \setminus u_{-\infty}$$

шартлар u *функциянинг psh бўлишини таъминлаб бера олмайди.*

Диссертациянинг «$m-$**субгармоник функциялар учун $\mathbb{C}^n$ да берилган эллипсоидлар ёрдамида аниқланган интеграл критериялар»** деб номланувчи тўртинчи бобида, $m-$субгармоник функциялар учун $\mathbb{C}^n$ да аниқланган эллипсоидлар ёрдамида интеграл критериялар келтирилган.

$\mathbb{C}^n$ фазода қуйидаги эллипсоидлар синфини қараймиз:

$$E(R,r)=\left\{\frac{|z_1|^2+\ldots+|z_m|^2}{R^2}+\frac{|z_{m+1}|^2+\ldots+|z_n|^2}{r^2}\le 1\right\}.$$

Шуни таъкидлаш жоизки, марказдан ўтувчи $m-$ўлчовли комплекс текислик $\Pi_0=\{z_{m+1}=\ldots=z_n=0\}\subset\mathbb{C}^n$ учун $E(R,r)\bigcap\Pi_0$ ифода Π_0 да шарни ифодалайди. Шу билан биргаликда, ҳар қандай марказдан ўтувчи $m-$ўлчовли комплекс текислик $\Pi\subset\mathbb{C}^n$ учун шундай унитар T матрица мавжудки, $T\circ\Pi_0=\Pi$ тенглик ўринли бўлади ҳамда $(T\circ E(R,r))\bigcap\Pi$ ифода Π даги шарни ифодалайди. Шу каби, ихтиёрий унитар T матрица учун шундай марказдан ўтувчи $m-$ўлчовли комплекс текислик $\Pi\subset\mathbb{C}^n$ топиладики, натижада $(T\circ E(R,r))\bigcap\Pi$ ифода Π даги шарни ифодалайди. Бизга $D\subset\mathbb{C}^n$ соҳа берилган бўлсин. $u(z)\in L^1_{loc}(D)$ функция учун $E(R,r)$ бўйича олинган қуйидаги ўрта қийматни қараймиз:

$$M_u(z^0,T,E(R,r))=\frac{1}{V(R,r)}\int\limits_{z^0+T\circ E(R,r)}u(\xi)dV(\xi),$$

бу ерда $V(R,r)=\int\limits_{E(R,r)}dV(\xi)=\dfrac{\pi^n R^{2m}r^{2(n-m)}}{n!}$ $E(R,r)$ нинг ҳажмини ифодалайди.

Қуйидаги теорема $m-sh$ функциялар учун $E(R,r)$ бўйича олинган интеграл критерияни ифодалайди.

8-теорема. *Бизга $D\subset\mathbb{C}^n$ соҳа ва бу соҳада юқоридан ярим узлуксиз функция u берилган бўлсин. u функциянинг $m-sh$ бўлиши учун ихтиёрий $z^0\in D$ нуқта ва ихтиёрий унитар T матрица учун, бунда $z^0+T\circ E(R,r)\subset D$ ва $0<r\le R$, қуйидаги тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.*

$$u(z^0)\le M_u(z^0,T,E(R,r)).$$

3-изоҳ. *$R\ge r$ шарти $2m\le n$ бўлганда шарт эмас. Лекин $2m>n$ бўлган ҳолатда $R\ge r$ шарти муҳим ҳисобланади.*

ХУЛОСА

Диссертация иши субгармоник функцияларнинг жоиз тўпламларини тадқиқ қилишга ҳамда $m-sh$ функциялар учун интеграл ифодаларни аниқлашга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Привалов теоремасининг умумлашмасини исботлаш мақсадида субгармоник функциялар учун жоиз $\underline{S},\overline{S}-$сингуляр тўпламлар аниқланган бўлиб, уларнинг барча топологик хоссалари исботланган.
2. $\mathbb{R}^n$ фазода $p(t)-$субгармоник функциялар киритилган бўлиб, уларнинг субгармоник функциялар билан боғлиқлиги кўрсатилган. Диссертация ишидаги кўпгина теоремалар ушбу аниқланган $p(t)-$ субгармоник функциялар орқали исботланган.
3. Махсус комплекс эллипсоидлар ёрдамида psh функциялар учун янги интеграл критериялар берилган.
4. Плюрисубгармоник функциялар учун Бляшке-Привалов теоремасининг муқобили исботланган. Шунга ўхшаш натижа $E(r_1,\ldots,r_n)$ эллипсоидлар учун ҳам ўринли эканлини кўрсатилган.
5. $\mathbb{C}^n$ фазода берилган махсус эллипсоидлар бўйича олинган ўрта қийматлар ёрдамида $m-$субгармоник функциялар учун интеграл критериялар исботланган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

SHOPULATOV SHOMUROD SHORASUL UGLI

INTEGRAL CRITERIA FOR m −SUBHARMONIC FUNCTIONS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2021

The theme of thesis of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.4.PhD/FM431.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Sadullaev Azimbay** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician
Official opponents:	**Rakhimov Abdugafur Abdumajidovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Tuychiev Tahir Tursunbayevich Candidate of Physical and Mathematical Sciences,Docent
Leading organization:	**Urgench State University**

Defense will take place « 23 » December 2021 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar district, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered № 127). (Address: University str. 9, Almazar district, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on « 10 » December 2021 year.
(Mailing report № 2 on « 10 » December 2021 year).

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

U.U.Jamilov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

INTRODUCTION

Actuality and demand of the theme of the thesis. Many scientific and practical researches conducted around the world are mostly focused on the theory of potentials. The classical and the generalised Laplace operators are widely used in electrostatics, electrodynamics, quantum mechanics, robotics, stationary problems of diffusion and thermal conductivity and other issues. In solving many equations of continuous environment physics, many problems of applied mathematics, engineering, and mathematical physics lead to the harmonic functions defined by these operators and their generalisations, in particular to the $m-$subharmonic functions and to the integral expressions defined in them. Therefore, the construction of the theory of potentials in the class of $m-$subharmonic functions, the study of integral expressions defined in this class remains one of the main and actual problems in the theory of complex potentials.

Nowadays in the world, the construction of the theory of potentials in the class of $m-$subharmonic functions is one of the actual problems of the theory of complex potentials, with special emphasis on the Poisson, Monge-Ampere equations, which represent many physical processes. At the same time, the research shows the importance of integral estimates, integral criteria for $m-$subharmonic functions at all. However, special attention is paid to the study of singular sets for subharmonic and plurisubharmonic functions, to the study of these functions in a broader class.

In last years, in our country has been paid more attention to geology, biology, mathematics and physics, which have a scientific and practical application of fundamental sciences. Especially, special attention was paid to the development of the theory of $m-$subharmonic functions, which has a wide application in the theory of potentials, calibrated geometry, mechanics, mathematical physics. Significant results have been obtained in constructing the theory of potentials in the class of $m-$subharmonic functions. Scientific studies on the international level in such priority areas as the functional analysis, mathematical physics and statistical physics were considered as the main task of fundamental research[2]. In this way, the development of the theory of potentials in the class of $m-$subharmonic functions plays an important role in the implementation of this decree.

The subject and object of the research of this thesis are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February 7, 2017, UP-4947, «On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan», PP-4387 dated July 9, 2019 «On state support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan», PP-4708 of May 7, 2020 «On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics» as well as in other regulations related to basic sciences.

[2] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan of 2017 year 18 May «On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of the Republic of Uzbekistan IV, «Mathematics, Mechanics and Computer Science».

The degree of scrutiny of the problem. Classical potential theory is important in the fields of electrostatics, magnetism, quantum mechanics, boundary problems in mathematical physics, and many other areas of physics, and is based on the subharmonic functions and the Laplace operator. Subharmonic functions were introduced by F.Hartogs and F.Riss. They defined subharmonic functions as a continuation of single variable convex functions to the several variable convex functions. Basic theorem of F.Riss allows us to write an arbitrary subharmonic function in the local neighbourhood as the sum of a potential and a harmonic function. Therefore, the theory of potentials is based on a class of harmonic and subharmonic functions. At the same time, the operators introduced by I.Privalov and W.Blaschke, the generalised Laplace operators, play an important role in the continuation of subharmonic functions to a broader class. The theorem proved by Privalov-Blaschke has a weaker condition for the functions to be subharmonic. Privalov's theorem investigates singular sets of subharmonic functions.

The theory of complex potentials is based on the Monge-Ampere operator and the plurisubharmonic functions. G.Bremerman constructed the maximum plurisubharmonic functions, and proved that if these functions were smooth in the domain, then the Monge-Ampere equation can be expressed by $\left(dd^c u\right)^n = 0.$ In general, maximal plurisubharmonic functions may not be smooth in $n > 1.$ Therefore, it was very important to determine the operator $\left(dd^c u\right)^n$ for arbitrary plurisubharmonic functions. E.Bedford, B.Taylor and A.Sadullaev proposed to define with Borel measure and were studied basic concepts of the theory of pluripotentials. They include extremal Green function $V\left(z, K\right)$ and $\mathscr{P}$-measure $\omega\left(z, K, D\right),$ pluripolar sets, the capacity of condenser and other concepts. With the help of the obtained results the accumulated problematic problems of multidimensional complex analysis, the theory of plurisubharmonic functions were solved.

In the 1990s, there were many attempts to extend the theory of pluripotentials to a broader class of functions. One of such functions class is the $m-$subharmonic function class ($m-sh$) and strong $m-$subharmonic (sh_m) function class. The class of $m-sh$ functions is defined by Z.Blocki as follows

$$m-sh(D) =$$

$$= \{u \in C^2(D) : (dd^c u) \wedge \beta^{n-1} \geq 0, ..., (dd^c u)^{n-m+1} \wedge \beta^{m-1} \geq 0\}$$

and proved important properties of this class. The theory of potentials in the class of sh_m functions were built by A.Sadullaev and B.Abdullaev. Also proved the main properties of this functions class. These classes of functions have many applications. $m-$subharmonic functions and functions close to functions $m-sh$ have been applied in several problems. For example, in problems of convex geometry, convex

shells, in matters of minimal surfaces in calibrated geometry were applied by F.Harvey and G.Lawson. Positive results have been obtained by A.Sadullaev, B.Abdullaev, B.Drnovsek, F.Forstnerik, L.Ho, D.Joyce, M.Verbitsky on many issues in the theory of functions using $m-$subharmonic functions.

The connection of the theme of the thesis with the research plans of the scientific research institute, where the research on the thesis is carried out. The dissertation research is done in accordance with the planned theme of scientific research F4-FA-F013 «Non−associative and operator algebras, dynamic systems and their applications in statistical physics and population biology» (2012-2016) at the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy.

The aim of the research work is to describe integral criteria for $m-$subharmonic functions by the means of special ellipsoids in $n-$dimensional complex Euclidean space.

Research problems:

to prove the generalisation of Privalov's theorem on singular sets;

to study the topological properties of singular sets for subharmonic functions;

to prove subharmonic-like mean value theorems for plurisubharmonic functions;

to find the necessary and sufficiently integral criteria for the functions to be $m-$subharmonic.

The research object. The generalised Laplace operators, mean values by spheres, balls and special ellipsoids.

The research subject. Theory of functions of real variables, subharmonic and $m-$subharmonic functions, classical potential theory, harmonic functions and their generalisations, pluripotential theory.

Research methods. In the research the methods of functional analysis, modern methods of complex analysis, generalised functions, classical potential theory, methods of pluripotentials are used.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

new upper and lower singular sets for subharmonic functions have been identified and all their topological properties have been classified;

the generalised Privalov theorem for subharmonic functions is proved;

the analogue of the Blaschke-Privalov theorem for plurisubharmonic functions is proved using $p(t)-$subharmonic functions defined in the $n-$dimensional Euclidean space;

the necessary and sufficiently integral criteria for $m-$subharmonic functions are proved using the mean values via special ellipsoids given in the $n-$dimensional complex Euclidean space.

Practical results of the research consists of the following:

the obtained results allowed to prove the complete metric characteristics of the singular sets defined for subharmonic functions;

integral criteria for plurisubharmonic and subharmonic functions were defined, which allowed to define singular sets in these classes of functions, that allowed them to be extended to a broader class.

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using the methods of functional analysis, classical potential theory and pluripotential theory. The obtained results are mathematically strongly proved.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the research results is explained by the fact that in the class of harmonic functions and their generalisations it is possible to identify and classify singular sets, to obtain integral criteria.

The practical significance of the research determines by obtaining integral criteria for $m-$subharmonic functions using the mean values over ellipsoids in $\mathbb{C}^n$, it gives an opportunity to identify $m-$subharmonic functions like subharmonic functions.

Implementation of the research results. The scientific results obtained during the research of the dissertation are implemented in the following research projects:

the integral criteria obtained on special ellipsoids given in $n-$dimensional Euclidean complex space for $m-$subharmonic functions were used in the fundamental scientific project FA-F-4-002 "$m-$subharmonic functions and their applications to calibrated geometry" on minimum surfaces in calibrated geometry (Reference No. 2/1255-2687 of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated September 30, 2021). The application of the scientific result allowed to define $m-$subharmonic functions like subharmonic functions and to build the potential theory in calibrated geometry;

the obtained results on singular removable sets for subharmonic functions, and characterising completely this type of sets were used in the fundamental scientific project UT-OT-2020-1 "Monge-Ampere equation and extremal plurisubharmonic functions" on defining subharmonic functions in singular sets (Reference No. 04/11-6015 of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek dated October 4, 2021). The application of the scientific result allowed determine the polar shells of compact sets and to check the functions for subharmonicity in singular sets.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 5 international and 6 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 17 research papers have been published in the scientific journals, 5 of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the PhD thesis, in addition 2 of them were published in international journals and 3 papers published in national mathematical journals.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The general volume of the thesis is 78 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE THESIS

The **introduction** part of the thesis includes the actuality and the demand of the research, the relevance of the research to the prioritity areas of science and technology, the review of foreign research on the topic, the degree of scrutiny of the problem. Also the introductory part contains the aim of the research work, research problems, the object and the subject of the research, scientific novelty and practical results, theoretical, practical significance and the statement of the research results, published works and the information on the structure of the thesis.

In the first chapter of the thesis, titled **«Preliminary notions»** we give main definitions and important notions to cover the topic of the thesis. Firstly, we shall define some important classes of functions. Let $D \subset \mathbb{R}^n$ be a domain.

Definition 1. *The function* $u \in C^2(D)$ *is called harmonic on* D *(shortly* $u \in h(D)$*) if in* D *the following holds*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

where $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ *is a classical Laplace operator.*

Definition 2. *A function* $u : D \to [-\infty, \infty)$, *given in a domain* $D \subset \mathbb{R}^n$ *is called subharmonic in* D *(shortly* $u \in sh(D)$*) if it satisfies the following two conditions:*

1. $u(x)$ *is upper semi-continuous, i.e.* $\forall x^0 \in D$ *the following inequality holds*

$$\overline{\lim_{x \to x^0}} u(x) \le u(x^0);$$

2. *for every point* $x^0 \in D$ *there exists a* $r(x^0) > 0$ *such that, for all* $r \le r_0(x^0)$ *the following inequality holds*

$$u(x^0) \le \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{S(x^0, r)} u(x) d\sigma,$$

where $S(x^0, r)$ *is a sphere and* σ_n *is the area of the unit sphere* $S(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

The set of all subharmonic functions on D is denoted by $sh(D)$. We also include a trivial function $u \equiv -\infty$ to $sh(D)$. We note that subharmonic function is summable, i.e. $u \in L^1_{loc}(D)$ and its Laplace operator $\Delta u \ge 0$ in the generalisation sense. Let $u(x)$ be an upper semi-continuous function in the domain $D \subset \mathbb{R}^n$ and $u \not\equiv -\infty$. We define $m_u(x^0, r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{S(x^0, r)} u(x) d\sigma$ as the mean u over the sphere

$S(x^0,r)$. If $u(x)$ nonsummable on the $S(x^0,r)$ we put $m_u(x^0,r) := -\infty$. For a point $x^0 \in D \setminus u_{-\infty}$, where $u_{-\infty} := \{x \in D : u(x) = -\infty\}$, we define the *upper* $\overline{\Delta}u(x^0)$ and the *lower* $\underline{\Delta}u(x^0)$ *generalised Laplace operators* of the function u at the point x^0, constructed by the mean of spheres with the following equalities:

$$\overline{\Delta}u(x^0) := 2n \cdot \overline{\lim_{r \to +0}} \frac{m_u(x^0,r) - u(x^0)}{r^2}, \tag{1}$$

$$\underline{\Delta}u(x^0) := 2n \cdot \underline{\lim_{r \to +0}} \frac{m_u(x^0,r) - u(x^0)}{r^2}. \tag{2}$$

Analogically, this kind of construction can also be implemented by the mean of balls $n_u(x^0,r) = \frac{1}{V_n r^n} \int\limits_{B(x^0,r)} u(x)dx.$ In this case the upper and the lower generalised Laplace operators will have the following forms (for $x^0 \in D \setminus u_{-\infty}$):

$$\overline{\Delta}_B u(x^0) := 2(n+2) \cdot \overline{\lim_{r \to +0}} \frac{n_u(x^0,r) - u(x^0)}{r^2}, \tag{3}$$

$$\underline{\Delta}_B u(x^0) := 2(n+2) \cdot \underline{\lim_{r \to +0}} \frac{n_u(x^0,r) - u(x^0)}{r^2}. \tag{4}$$

Now we formulate some simple properties of the generalised Laplace operators:

1. *If the function* $u(x)$ *is twice continuously differentiable in some neighbourhood of the point* x^0, *then the following equalities hold:*

$$\overline{\Delta}u(x^0) = \underline{\Delta}u(x^0) = \overline{\Delta}_B(x^0) = \underline{\Delta}_B u(x^0) = \Delta u(x^0),$$

where $\Delta -$ *is a classical Laplace operator.*

2. *If the function* $u \in C(D)$ *satisfies the following double inequality at each point of the domain* D

$$\underline{\Delta}u(x) \le 0 \le \overline{\Delta}u(x) \text{ or } \underline{\Delta}_B u(x) \le 0 \le \overline{\Delta}_B u(x),$$

then $u(x)$ *will be harmonic in* D.

3. *If the function* $u(x)$ *is subharmonic in the domain* $D \subset \mathbb{R}^n$, *then at any point* $x^0 \in D \setminus u_{-\infty}$ *the following inequalities hold:*

$$\overline{\Delta}u(x^0) \ge \underline{\Delta}u(x^0) \ge 0, \overline{\Delta}_B u(x^0) \ge \underline{\Delta}_B u(x^0) \ge 0.$$

The theorem of Blaschke-Privalov gives an excellent criterion for subharmonicity in terms of the generalised Laplace operators. The theorem states as follows

Theorem 1. *Let u be an upper semi-continuous function in a domain $D \subset \mathbb{R}^n$ with $u \not\equiv -\infty$. Then u is subharmonic if and only if*

$$\overline{\Delta} u(x) \geq 0 \text{ for all } x \in D \setminus u_{-\infty},$$

where $u_{-\infty} := \{x \in D : u(x) = -\infty\}$.

One of the notable results is Privalov's theorem, where he got more deeper result with an *exceptional* set E. This theorem states as follows

Theorem 2. *Let u be an upper semi-continuous function in a domain $D \subset \mathbb{R}^n$ with $u \not\equiv -\infty$. If the following two conditions hold:*

1. $\overline{\Delta}_B u(x) \geq 0$ *for all* $x \in D \setminus [E \cup u_{-\infty}]$, *where* $E \subset D$ *is a closed in* D *set,* $mesE = 0$;
2. $\overline{\Delta}_B u(x) > -\infty$ *for all* $x \in E \setminus P$, *where* $P \subset E$ *is some polar set,*

then the function $u(x)$ is subharmonic in D.

Plurisubharmonic (*psh*) functions (in $\mathbb{C}^n$) are defined by using subharmonicity at complex lines. Now let us recall the definition of plurisubharmonic functions.

Definition 3. *Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a domain. An upper semi-continuous function $u : D \to [-\infty, \infty)$, is called plurisubharmonic in D (shortly $u \in psh(D)$) if for any complex line l the function $u|_l$ is subharmonic in $l \cap D$.*

We also include a trivial function $u \equiv -\infty$ to the class of plurisubharmonic functions. The plurisubharmonic function in the domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is at the same time subharmonic function defined in $D \subset \mathbb{R}^{2n}$. Consequently, all properties of subharmonic functions are true for plurisubharmonic functions.

At the end of the last century there were a lot of attempts to expand the pluripotential theory to wider classes of functions. One of these classes is the $m-$ subharmonic functions, where $1 \leq m \leq n$. Note that

$$psh(D) = 1 - sh(D) \subset m - sh(D) \subset n - sh(D) = sh(D).$$

Definition 4. *The function $u \in L^1_{loc}(D)$ given in the domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is called $m-$subharmonic (shortly $m - sh$) in D (subharmonic function on m-dimenisonal complex planes, where $1 \leq m \leq n$), if*

1. *it is upper semi-continuous in D, in other words the following inequality holds:*

$$\overline{\lim_{z \to z^0}} u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{B(z^0, \varepsilon)} u(z) \leq u(z^0);$$

2. *for any $m-$dimensional complex plane $\Pi \subset \mathbb{C}^n$ the restriction $u|_\Pi$ is subharmonic function on $\Pi \cap D$, i.e. $u|_\Pi \in sh(\Pi \cap D)$.*

In other words, the class of $m-$subharmonic functions is broader than the class of plurisubharmonic functions. Moreover, the class of subharmonic functions strictly includes the class of $m-$subharmonic functions. When $m=n$ the class of $n-sh$ functions is the same as the class of sh functions. When $m=1$ the class of $1-sh$ functions is the same as the class of psh functions.

In the second chapter of the thesis, titled **«On the topological characteristic of removable $\underline{S},\overline{S}-$singular sets of subharmonic functions»** we introduce $\underline{S},\overline{S}-$ singular removable sets of subharmonic functions in order to develop Privalov's theorem. However, we prove some basic properties and characterise completely this type of exceptional sets. One of the important results of this chapter is the generalisation of Privalov's theorem. This theorem is given in terms of $\underline{S},\overline{S}-$ singular sets.

In the proof of his famous theorem on removable singular set of a subharmonic function, Privalov used the construction of an auxiliary subharmonic function $v(x)\in sh(\mathbb{R}^n):\underline{\Delta}_B v(x^0)=+\infty\ \ \forall x^0\in E\subset\mathbb{R}^n$. This idea led us to give the following definitions of the class of exceptional sets. Note that as applied to subharmonic functions, it is more convenient the averaging over balls and quantities $\overline{\Delta}_B u(x^0)$ and $\underline{\Delta}_B u(x^0)$.

Definition 5. *A set E is called $\underline{S}$ (singular) - set, if there exists a non-trivial subharmonic function $v(x)$, $v\in sh(\mathbb{R}^n)$, such that $\underline{\Delta}_B v(x)\big|_E=+\infty$.*

A set E is called $\overline{S}$ (singular) - set, if there exists a non-trivial subharmonic function $v(x)$, $v\in sh(\mathbb{R}^n)$, such that $\overline{\Delta}_B v(x)\big|_E=+\infty$.

Here we count $\underline{\Delta}_B v(x^0)=\overline{\Delta}_B v(x^0)=+\infty$ if $v(x^0)=-\infty$. This corresponds to the ratio, that $n_v(x^0,r)-v(x^0)=+\infty$ for subharmonic function $v\in sh(\mathbb{R}^n), v(x^0)\equiv-\infty$.

Now we formulate some simple properties of singular sets:

1. $\underline{S}$ - set is a $\overline{S}$ - set, i.e. the inclusion $\underline{S}\subset\overline{S}$ is true.

2. Countable union of singular $\underline{S}$ - sets is again a singular $\underline{S}$ - set.

3. Finite union of singular $\overline{S}$ - sets is again a singular $\overline{S}$ - set.

4. An arbitrary intersection of $\underline{S}$ ($\overline{S}$) - sets is singular $\underline{S}$ ($\overline{S}$) - set.

The following theorem is an analogue of Privalov's theorem in terms of $\overline{S},\underline{S}$ - sets. Note that in the second part of the theorem, it taken the lower generalised Laplace operator $\underline{\Delta}_B u$.

Theorem 3. *Let a function $u(x)$, $u\not\equiv-\infty$, is upper semi-continuous in the domain $D\subset\mathbb{R}^n$ and $\overline{\Delta}_B u(x^0)\geq 0$ for any $x^0\in D\setminus[E\bigcup u_{-\infty}]$, where $u_{-\infty}:=\{x\in D:u(x)=-\infty\}$. Then*

a) if $E \in \underline{S}$ *and* $\overline{\Delta}_B u > -\infty$ *in* E*, except for some polar set* $P \subset E$*, then* $u \in sh(D)$;

b) if $E \in \overline{S}$ *and* $\underline{\Delta}_B u > -\infty$ *in* E*, except for some polar set* $P \subset E$*, then* $u \in sh(D)$.

The following theorems characterize fully closed $\underline{S}, \overline{S}$ – singular sets.

Theorem 4. *A closed set* $E \in \underline{S}$ *if and only if* $mesE = 0$.

Theorem 5. *A closed set* $E \in \overline{S}$ *if and only if the interior of* E *is empty,* $E^0 = \varnothing$*, i.e. when it is nowhere dense.*

In the third chapter of the thesis, titled **«Integral criterion for plurisubharmonic functions»** we present a new kind of integral criterion for *psh* functions in terms of special complex ellipsoids, so it can be used a subharmonic-like definition for plurisubharmonic functions. For this purpose we define $p(t)$-subharmonic functions in $\mathbb{R}^n$ for continuous weight function $p(t)$ with $\int_0^1 p(t)dt = 1$. Also we prove an analogue of Blaschke–Privalov theorem for plurisubharmonic functions.

Now we consider in $\mathbb{C}^n$ the following class of ellipsoids

$$E(r_1,\ldots,r_n) = \left\{ \frac{|z_1|^2}{r_1^2} + \cdots + \frac{|z_n|^2}{r_n^2} \le 1 \right\},$$

where $r_j > 0$ for any $1 \le j \le n$. Taking $r_1 = R$ and $r_j = r$ for all $2 \le j \le n$ in $E(r_1,\ldots,r_n)$ let us denote $E(R,r) := E(R,r,\ldots,r)$, where R and r are positive numbers. It is not difficult to check that for any unitary matrix T and for any complex line $l \subset \mathbb{C}^n$ passing through origin $(T \circ E(r_1,\ldots,r_n)) \bigcap l$ is a disc in l. Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a domain. For integrable function u on D we consider the mean value over $E(r_1,\ldots,r_n)$

$$M_u(z^0, T, E(r_1,\ldots,r_n)) = \frac{1}{V(r_1,\ldots,r_n)} \int\limits_{z^0 + T \circ E(r_1,\ldots,r_n)} u(\xi) dV(\xi),$$

where $V(r_1,\ldots,r_n) = \int\limits_{E(r_1,\ldots,r_n)} dV(\xi) = \frac{\pi^n r_1^2 \cdots r_n^2}{n!}$ is the volume of $E(r_1,\ldots,r_n)$.

Theorem 6. *Let* $D \subset \mathbb{C}^n$ *be a domain and* u *be an upper semi-continuous function on* D*. Then the following properties are equivalent:*

(a) u *is psh on* D;

(b) *for any* $z^0 \in D$ *and any unitary matrix* T *with* $z^0 + T \circ E(r_1,\ldots,r_n) \subset D$ *the following inequality holds*

$$u(z^0) \le M_u(z^0, T, E(r_1,\ldots,r_n));$$

(c) *for any* $z^0 \in D$ *and any unitary matrix* T *there exists* $r_0 > 0$ *small enough such that for any tuple* $(r_1,\ldots,r_n)$ *with* $\max\{r_1,\ldots,r_n\} \le r_0$ *the following inequality holds*

$$u(z^0) \le M_u(z^0, T, E(r_1,\ldots,r_n));$$

(d) *for any* $z^0 \in D$ *and any unitary matrix* T *there exists* $r_0 > 0$ *small enough such that for any* (R,r) *with* $\max\{R,r\} \le r_0$ *the following inequality holds*

$$u(z^0) \le M_u(z^0, T, E(R,r));$$

(e) *for any* $z^0 \in D$ *and any unitary matrix* T *with* $z^0 + T \circ E(R,r) \subset D$ *the following inequality holds*

$$u(z^0) \le M_u(z^0, T, E(R,r)).$$

In order to introduce an analogue of Blaschke-Privalov's theorem for *psh* functions we define the following

$$\overline{D}_T u(z^0) = \overline{\lim_{R\to 0}}\,\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{M_u(z^0, T, E(R,r)) - u(z^0)}{R^2}$$

and let

$$\overline{D} u(z^0) = \inf_T \overline{D}_T u(z^0),$$

where the infimum is taken all over the unitary matrices T.

Theorem 7. *Let* u *be an upper semi-continuous function in a domain* $D \subset \mathbb{C}^n$ *with* $u \not\equiv -\infty$. *Then* u *is psh if and only if*

$$\overline{D} u(z) \ge 0 \text{ for all } z \in D \setminus u_{-\infty},$$

where $u_{-\infty} := \{z \in D : u(z) = -\infty\}$.

Remark 1. *We can prove a similar result in terms of* $E(r_1,\ldots,r_n)$ *ellipsoids.*

Remark 2. *Note that neither* $\sup_T \overline{D}_T u \ge 0$ *nor*

$$\inf_T \overline{D}_T u(z) = \inf_T \overline{\lim_{(r_1,\ldots,r_n)\to 0}} \frac{M_u(z, T, E(r_1,\ldots,r_n)) - u(z)}{r_1^2} \ge 0 \text{ for all } z \in D \setminus u_{-\infty}$$

do not guarantee plurisubharmonicity of u.

In the fourth chapter of the thesis, titled **«An integral criterion for $m-$ subharmonic functions in terms of ellipsoids in $\mathbb{C}^n$»** we give a criterion for $m-$ subharmonic functions using the mean value over the special ellipsoids in $\mathbb{C}^n$. It can serve as a subharmonic-like definition for $m-$subharmonic functions.

We consider in $\mathbb{C}^n$ the following class of ellipsoids

$$E(R,r)=\left\{\frac{|z_1|^2+\ldots+|z_m|^2}{R^2}+\frac{|z_{m+1}|^2+\ldots+|z_n|^2}{r^2}\le 1\right\}.$$

We note that for the $m-$dimensional complex plane $\Pi_0=\{z_{m+1}=\ldots=z_n=0\}\subset\mathbb{C}^n$ passing through origin $E(R,r)\bigcap\Pi_0$ is a ball in Π_0. In addition, for each $m-$ dimensional complex plane $\Pi\subset\mathbb{C}^n$ passing through origin there exists an unitary matrix T such that $T\circ\Pi_0=\Pi,$ so that $(T\circ E(R,r))\bigcap\Pi$ is a ball in Π. Similarly, for any unitary matrix T there exists an $m-$dimensional complex plane $\Pi\subset\mathbb{C}^n$ passing through origin such that $(T\circ E(R,r))\bigcap\Pi$ is a ball in Π. Let $D\subset\mathbb{C}^n$ be a domain. For the function $u(z)\in L^1_{loc}(D)$ we consider the following mean value over $E(R,r)$

$$M_u(z^0,T,E(R,r))=\frac{1}{V(R,r)}\int\limits_{z^0+T\circ E(R,r)}u(\xi)dV(\xi),$$

where $V(R,r)=\int\limits_{E(R,r)}dV(\xi)=\dfrac{\pi^n R^{2m}r^{2(n-m)}}{n!}$ is the volume of $E(R,r)$.

The following theorem can be used for $m-sh$ functions as an integral criterion in terms of ellipsoids $E(R,r)$.

Theorem 8. *Let $D\subset\mathbb{C}^n$ be a domain and u be an upper semi-continuous function on D. Then u is $m-sh$ if and only if for any $z^0\in D$ and for any unitary matrix T with $z^0+T\circ E(R,r)\subset D$ and $0<r\le R$ the following inequality holds*

$$u(z^0)\le M_u(z^0,T,E(R,r)).$$

Remark 3. *The condition $R\ge r$ is not required when $m\le\dfrac{n}{2}$. Once when $m>\dfrac{n}{2}$ the condition $R\ge r$ is needed.*

CONCLUSION

The thesis is devoted to study of removable sets for subharmonic functions and integral criteria for $m-sh$ functions.

The main results of the research are as follows:

1. Intoduced $\underline{S},\overline{S}$ – singular removable sets of subharmonic functions in order to prove the generalisation of Privalov's theorem. Proved some basic properties of $\underline{S},\overline{S}$ – singular sets and characterised completely this type of exceptional sets.

2. Presented $p(t)$ – subharmonic functions in $\mathbb{R}^n$ for continuous weight function $p(t)$ with $\int_0^1 p(t)dt = 1$. Proved that $p(t)$ – subharmonic functions are subharmonic functions for positive weight functions. However, many theorems were proved by using $p(t)$ – subharmonic functions.

3. Proved a new kind of integral criterion for psh functions in terms of special complex ellipsoids.

4. Proved an analogue of Blaschke–Privalov theorem for plurisubharmonic functions. Showed that a similar result can be obtained for $E(r_1,\ldots,r_n)$ ellipsoids.

5. Obtained a new integral criterion for m – subharmonic functions by using the mean value over the special ellipsoids in $\mathbb{C}^n$.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ШОПУЛАТОВ ШОМУРОД ШОРАСУЛ УГЛИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ m −СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 –Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.4.PhD/FM431.

Диссертация выполнена в Институте математики имени В.И.Романовкого АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Садуллаев Азимбай** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Рахимов Абдугофур Абдумажидович** доктор физико-математических наук, профессор
	Туйчиев Тахир Турсунбаевич кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 23 » декабря 2021 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 127). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 10 » декабря 2021 года.
(протокол рассылки № 2 от « 10 » декабря 2021 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

У.У.Жамилов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Целью исследования является изучение интегральных критериев для $m-$субгармонических функций с помощью усреднений по специальным эллипсоидам заданных в $n-$мерном комплексном евклидовом пространстве.

Объект исследования: Обобщенные операторы Лапласа, средние значения по сфере, по шару и по специальным эллипсоидам.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

определены новые исключительные верхний и нижний сингулярные множества для субгармонических функций и доказаны все их топологические свойства;

доказана обобщенная теорема Привалова для субгармонических функций;

доказан аналог теоремы Бляшке-Привалова для плюрисубгармонических функций с использованием $p(t)-$субгармонических функций, определенных в $n-$мерном евклидовом пространстве;

представлены необходимые и достаточные интегральные критерии для $m-$субгармонических функций с использованием средних значений по эллипсоидам, заданных в $n-$мерном комплексном евклидовом пространстве.

Внедрение результатов исследования. Научные результаты, полученные в ходе работы над диссертацией, были использованы в следующих исследовательских проектах:

интегральные критерии, полученные с помощью эллипсоидов, заданных в $n-$мерном комплексном евклидовом пространстве для $m-$субгармонических функций были использованы в фундаментальном научном проекте № ФА-Ф-4-002 «$m-$субгармонические функции и их приложения в калибровочной геометрии» (Справка Академии наук Республики Узбекистан № 2/1255-2687 от 30 сентября 2021 г.). Применение научного результата позволило определить $m-$субгармонические функции как субгармонические функции и построить теорию потенциала в калибровочной геометрии;

полученные результаты о сингулярных устранимых множествах для субгармонических функций и их топологические свойста были использованы в фундаментальном научном проекте № УТ-ОТ-2020-1 «Уравнение Монжа-Ампера и экстремальные плюрисубгармонические функции» (Справка Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека № 04 / 11-6015 от 4 октября 2021 г.). Применение научного результата позволило определить полярные оболочки компактных множеств и исследовать функции на субгармоничность в особых множествах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на одиннадцать параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 78 страниц.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (part I; I часть)

1. Sadullaev A., Shopulatov Sh.Sh. The generalised Laplace operator and the topological characteristic of removable $\overline{S}$ – singular sets of subharmonic functions // Complex Analysis and Operator Theory. – 2021. – Vol. 15. – No. 50. P. 1-10. (3. Scopus. IF=0.843).
2. Rakhimov K., Shopulatov Sh. A mean value criterion for plurisubharmonic functions // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2021. – P. 1-12. (3. Scopus. IF=0.846).
3. Shopulatov Sh.Sh. On a weak criterion for the subharmonicity of functions in $\mathbb{R}^n$ // Uzbek Mathematical Journal. – 2018. – No. 2. P. 136-141. (01.00.00; №6).
4. Shopulatov Sh.Sh. On the properties of singular removable sets of subharmonic functions // Rep. AS RUz. – 2019. – No. 2. P. 3-6. (01.00.00; №7).
5. Shopulatov Sh.Sh. An integral criterion for $m-sh$ functions in terms of ellipsoids in $\mathbb{C}^n$ // Uzbek Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 65. – No. 3. P. 140-146. (01.00.00; №6).

II бўлим (part II; II часть)

6. Shopulatov Sh.Sh. Some properties of removable singular sets of subharmonic functions // Acta of Turin Polytechnic University in Tashkent. – 2019. – No. 2. P. 30-32.
7. Shopulatov Sh.Sh. On a generalised Laplace operator // Abstracts of the Uzbek-Israel International Scientific conference "Contemporary problems in mathematics and physics". – Tashkent, October 6-10, 2017. – P. 113-115.
8. Shopulatov Sh.Sh. New singular sets in $\mathbb{R}^n$ // Abstracts of the Republican scientific conference with participation of foreign scientists "Actual problems of differential equations and their applications". – Tashkent, December 15-17, 2017. – P. 158.
9. Shopulatov Sh.Sh. The importance of conditions in Privalov's theorem about subharmonic functions // Proceedings of the scientific-practical conference "The role of innovation ideas and technologies in the research of young scientists". – Tashkent, April 27, 2018. – P. 4-7.
10. Shopulatov Sh.Sh. On the singular $\overline{S}, \underline{S}$ – sets of subharmonic functions // Proceedings of International Scientific conference "Science, Research and Development #13, Technics and Technology". – Berlin, January 30-31, 2019. – P. 33-34.

11. Shopulatov Sh.Sh. Removable singularities of subharmonic functions // Abstracts of Uzbek-Israel joint international conference "Science-Technology-Education-Mathematics-Medicine". – Bukhara-Samarkand-Tashkent, May 13-17, 2019. – P. 131-132.
12. Shopulatov Sh.Sh. Singular removable sets of subharmonic functions // Proceedings of the IV Republican online conference "Youth activity in the construction and development of a new Uzbekistan", 1st section: Physics and mathematics. – Namangan, May 25, 2020. – P. 154-157.
13. Shopulatov Sh.Sh. On the metric characteristic of removable singular sets of subharmonic functions // Abstracts of the International Scientific online conference "Frontier in mathematics and computer science". – Tashkent, October 12-15, 2020. – P. 137-138.
14. Shopulatov Sh.Sh. On a theorem of I.Privalov // Abstracts of Republican scientific online conference "Modern problems of mathematics: problems and solutions". – Termez, October 21-23, 2020. – P. 240-242.
15. Shopulatov Sh.Sh. On the singular sets of subharmonic functions // Abstracts of the Republican scientific conference with participation of foreign scientists "Modern methods of mathematical physics and their applications". – Tashkent, November 17-18, 2020. – P. 105-106.
16. Shopulatov Sh.Sh. A new integral criterion for m – subharmonic functions // Abstracts of the Republican scientific conference with participation of foreign scientists "Sarimsakov's readings". – Tashkent, September 16-18, 2021. – P. 275-276.
17. Shopulatov Sh.Sh. On an integral criterion for plurisubharmonic functions // Abstracts of the International Scientific conference "Order analysis and related problems of mathematical modeling, XVI. Operator theory and differential equations". – Vladikavkaz, September 20-25, 2021. – P. 53-54.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
2021 йил 24 ноябрда таҳрирдан ўтказилди.

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,5. Адади 100. Буюртма № 26/21.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.