В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИМ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSC.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ТОШКЕНТ КИМЁ-ТЕХНОЛОГИЯ ИНСТИТУТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ИСКАНАДЖИЕВ ИКРОМЖОН МАДАШЕВИЧ

АЛЬТЕРНИРЛАНГАН ИНТЕГРАЛ УЧУН АППРОКСИМАЦИОН СХЕМАЛАР ВА УЛАРНИНГ НОЧИЗИҚЛИ БОШҚАРУВ СИСТЕМАЛАРИДАГИ ЯҚИНЛАШИШ МАСАЛАСИГА ТАТБИҚЛАРИ

01.01.02 — Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

УДК: 517.957.56

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

Исканаджиев Икромжон Мадашевич
Альтернирланган интеграл учун аппроксимацион схемалар ва уларнинг ночизиқли бошқарув системаларидаги яқинлашиш масаласига татбиқлари .....……..3

Исканаджиев Икромжон Мадашевич
Аппроксимационные схемы для алтернированого интеграла и их приложения к задаче сближения в нелинейных системах управления 25

Iskanadjiev Ikromjon Madashevich
Approximation schemes for the alternating integral and their applications to the problem of convergence in nonlinear control systems …….……47

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works…….....51

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSC.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ТОШКЕНТ КИМЁ-ТЕХНОЛОГИЯ ИНСТИТУТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ИСКАНАДЖИЕВ ИКРОМЖОН МАДАШЕВИЧ

АЛЬТЕРНИРЛАНГАН ИНТЕГРАЛ УЧУН АППРОКСИМАЦИОН СХЕМАЛАР ВА УЛАРНИНГ НОЧИЗИҚЛИ БОШҚАРУВ СИСТЕМАЛАРИДАГИ ЯҚИНЛАШИШ МАСАЛАСИГА ТАТБИҚЛАРИ

01.01.02 — Дифференциал тенгламалар ва математик физика

Физика-математика фанлари доктори (Doctor of Science) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

Фан доктори (DSc) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.4.DSc/FM6 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида ва Тошкент кимё-технология институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Азамов Абдулла** физика–математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Дурдиев Дурдимурод Қаландарович** физика–математика фанлари доктори, профессор
	Артем Александрович Седаков физика–математика фанлари доктори, профессор
	Саматов Бахром Таджиаҳматович физика–математика фанлари доктори, доцент
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон миллий университети**

Диссертация ҳимояси В.И. Романовский номидаги Математика Институти, ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил « 27 » декабрь соат « 10-00 » даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz.).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (128-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Диссертация автореферати 2021 йил « 16 » декабрь куни тарқатилди.
(2021 йил « 16 » декабрь 2-рақамли реестр баённомаси).

У. А. Розиков
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж. К. Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

Р. Р. Ашуров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссерацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда зиддиятли бошқариладиган жараёнлар, яъни дифференциал ўйинлар моделларини тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Дифференциал ўйинлар зиддиятли бошқариладиган жараёнларнинг математик модели, масалан, бошқариладиган бир объектни бошқаси томонидан таъқиб қилиш, объектни олдиндан номаълум кучлар таъсири остида бошқариш, ноаниқлик шароитида яшаш муаммоси ва бошқалар бўлганлиги учун бутун дунёда қувиш масаласини ечишнинг янги усулларини ишлаб чиқиш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Қувиш масаласини ечиш учун бир неча ёндашув ишлаб чиқилган бўлиб, уларнинг кўпчилиги стратегия тушунчасига боғлиқдир. Қарама-қарши объектлар ҳаракатларини бошқариш масаласини ечиш тизимли таҳлил, менежмент бошқаруви ва қарор қабул қилиш назарияларидаги муаммоларни ҳал этишда муҳим аҳамият эга вазифалардан бири бўлиб келмоқда.

Ҳозирги вақтда дунёда тўғри қувиш усулларида фойдаланиладиган интеграллар учун янги аппроксимацион схемалар, соддалаштирилган формулалар ишлаб чиқиш долзарб ҳисобланади. Қувишннинг иккинчи тўғри усули айниқса муҳим аҳамиятга эга бўлиб, у альтернирланган интеграл тушунчасига асосланган. Альтернирланган интеграл оддий(классик) интеграллардан икки жиҳати билан фарқ қилади. Унинг таърифида кўп қийматли функция (акслантириш) интеграли ва вектор функциялар бўйича кесишма амаллари қатнашади. Ушбу амаллар альтернирланган интегрални, айниқса чизиқли бўлмаган тизимлар учун ҳисоблашни қийинлаштиради. Шу сабабли, альтернирланган интеграл учун тақрибий схемаларни тадқиқ этиш ва уларни чизиқли бўлмаган бошқариш тизимларидаги яқинлашиш масаласига татбиқ этиш ҳозирги куннинг муҳим муаммоларидан ҳисобланади. Шунинг учун альтернирланган интеграл учун янги тақрибий схемаларни ишлаб чиқиш ва уларни турли хил амалий масалаларни ечишга татбиқ қилиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда математиканинг илмий ва амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда дифференциал ўйинлардаги қувишнинг тўғри усуллари интеграллари учун аппроксимацион схемалар ишлаб чиқишда ва уларни амалий масалаларни ечишга татбиқ қилишда салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал таҳлил, дифференциал тенгламалар ва математик физика, динамик тизимлар назарияси» фанларининг устивор йўналишларида халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Ушбу қарорнинг

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги 292-сон қарори.

бажарилишини таъминлашда альтернирланган интеграл учун янги аппроксимацион схемаларни ишлаб чиқиш ва уларни чизиқли бўлмаган бошқарув тизимларидаги яқинлашиш муаммосига татбиқ қилиш бўйича кейинги изланишларнинг ривожланиши учун муҳим рол ўйнайди.

Ўзбекистон Республикаси Президентиниг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон "Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида"ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон "Математика таълими ва фанларини ян да ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон "Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги қарорлари ҳамда мазкур соҳа фаолиятига тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада ҳизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг асосий устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялари ривожланишининг IV. "Математика, механика ва информатика" устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи.

Альтернирланган интегрални аппроксимациялаш усулларини ишлаб чиқиш ва уларни чизиқли бўлмагаи бошқарув тизимларидаги яқинлашиш муаммосига татбиқ этиш бўйича дунёнинг етакчи илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Department of Mathematics and Statics of Loyola University Chicago (АҚШ), University de Bretague Occidenata Le (Франция), Mathematical center for interdiscipline reseach and School of mathematical sciences of Soochow University (Хитой), Chine University of Geoscience, University de Rome "La Sapienza (Италия), Institute of Applied Mathematics and Mechanics of university Warsaw (Польша), Uniuersity of Cambridge (Англия), University Putra (Малайзия), М.В.Ломоносов номидаги Москва давлат университети, Россия Фанлар Академиясининг В. А. Стеклов номидаги Математика институти, Россия ФА Урал бўлими Н. Н. Красовский номидаги Математика ва механика институти, Санкт-Петербург давлат университети, Удмуртия давлат университети, Москва физика-техника институти, Россия ФА Бошқарув муаммолари институти, Украина Фанлар Миллий Академиясининг Математика ва Кибернетика институтлари ва бошқа хорижий илмий муассасаларда кенг қамровли илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда.

Охирги йилларда дифференциал ўйинлардаги қувишнинг тўғри усуллари интеграллари учун аппроксимацион схемалар ишлаб чиқиш бўйича олиб борилган илмий тадқиқотлар натижасида бир қатор долзарб муаммолар ҳал қилинган, жумладан, чизиқли дифференциал ўйинлар учун альтернирланган йиғиндиларнинг альтернирланган интегралга яқинлашиш тезлиги, тақрибий альтернирланган йиғиндиларнинг барқарорлиги ва

альтернирланган интеграл учун соддалаштирилган схемалар қуриш, альтернирланган интеграл қуришнинг сонли алгоритмлари, альтернирланган интегралнинг бошқарув функциясини синтез қилишга татбиғи, альтернирланган интегрални Гамильтон-Якоби тенгламаси ва Красовский барқарор кўприги билан боғлиқлик масалалари ҳал қилинган (М.В.Ломоносов номидаги Москва давлат университети, Россия ФА В. А. Стеклов номидаги Математика институти, Россия ФА Урал бўлими Н. Н. Красовский номидаги Математика ва механика институти, Москва физика-техника институти); ночиқли дифференциал ўйинлардаги қувиш ва қочиш масалаларини ечишнинг самарали усуллари, чизиқли бўлмаган системалардаги Понтрягин ва Пшеничний операторлари учун баъзи аппроксимацион схемалар ва уларнинг яқинлашиши (Украина Фанлар Миллий Академияси Кибернетика институти); статик ўйинлардаги оптималлик тамойилини ноантагоник ўйинлар учун регуляризация қилиш ва динамик барқарор, кучли динамик барқарор оптималлик тамойиллари қуриш усуллари таклиф қилинган (Санкт-Петербург давлат университети); дифференциал ўйинлар Гильберт фазосида ўрганилган (Кембриж университети, Малайзия Путра университети).

Ҳозирги кунда дунёнинг кўплаб илмий марказларида дифференциал ўйинлар назарияси ва уларни амалий масалаларга қўллаш бўйича тадқиқот ишлари давом этмоқда. Хусусан, альтернирланган интегрални қуриш учун тақрибий схемаларни ишлаб чиқиш ва уларни ночизиқли тизимлардаги яқинлашиш масаласига қўллаш, дифференциал мутаносибликлар билан тавсифланувчи тизимлар учун қувишнинг тўғри усулларидаги кўп қийматли функциялар интегралларини ҳисоблаш учун тақрибий схемалар ишлаб чиқиш ва шунингдек, чекланган вақт оралиғида ноаниқ параметрларга эга бўлган системаларда бошқарув масалалари; чексиз ўлчовли фазоларда ва чексиз чегараланмаган соҳаларда гуруҳли қувиш, вектор майдонларида чизиқли бўлмаган стационар ўйинларни ечиш учун сонли усулларни ишлаб, ахборот кечикувчи дифференциал ўйинлар учун Нэш мувозанат ҳолати, Гильберт фазосидаги чизиқли бўлмаган дифференциал ўйинлар қийматининг мавжудлигини тадқиқ этиш каби устивор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Дифференциал ўйинларни дастлаб Р. Айзекс ўрганган бўлиб, унинг машҳур монографиясида жуда кўп ўзига хос масалалар кўриб чиқилган ва ечимнинг мураккаблигига қисман ойдинлик киритилган. Кейинроқ Н. Н. Красовскийнинг ёндашувига кўра, ўйинчилар позицион стратегияларни танлаб ва алтернатива шаклида дифференциал ўйин ечими мавжудлиги исботланган. Дифференциал ўйинларга бундай ёндошувларни ривожлантиришга Ю. С. Осипов, А. И. Субботин, А. Б. Куржанский, А. В. Кряжимский, Ф. Л. Черноусько, В. Н. Ушакова, А. Г. Ченцов, Н. Ю. Лукоянов, Н. Н. Субботина, В. Е. Третьяков, В. И. Ухоботов ва бошқалар ўз ҳиссаларини қўшган. Ю. С. Осиповнинг ишларида дифференциал-айирмали ўйинларда қувишни якунлаш учун етарли шартлар топилган бўлиб, бу шартларни топишда

“минимакс дастурий сингдириш” усулидан фойдаланилган. Нейтрал типдаги “меросли” ахборотга эга чизиқли бўлмаган дифференциал ўйинлар учун тақрибий ечимлар қуриш масалалари Н. Ю. Лукаянов томонидан ўрганилган. В. Н. Ушаков изланишларида чекли вақт оралиғида номаълум параметрли бошқарув тизимларида яқинлашиш масаласини ҳал қилиш мумкин бўлган тўпламни топишнинг тақрибий усуллари ишлаб чиқилган.

Л. С. Понтрягин ёндашувида дифференциал ўйинларда қувиш масаласини ечиш биринчи ва иккинчи тўғри усулларга асосланади. Н. Ю. Сатимов ва Е. Ф. Мищенколарнинг ишларида эса қувишнинг иккинчи тўғри усули квазичизиқли дифференциал ўйинлар учун умумлаштирилган ва биринчи тўғри усулнинг турли модификациялари таклиф қилинган. А. А. Азамов альтернирланган интеграл назариясида иккиламчилик принципини исботлаб, бундай интегрални қуриш учун турли соддалаштирилган схемаларни таклиф қилди. Ҳамда альтернирланган интегралнинг дифференциал ўйин бошланғич берилганлари бир томонлама ўзгаришига нисбатан ярим барқарор эканлигини кўрсатди. Б. Н. Пшеничний томонидан иккинчи тўғри усул ночизиқли дифференциал ўйинлар учун умумлаштирилиб, операторли тузилишлар ёндашувини яратди, кейинроқ унинг ёндашуви Е. С. Половинкин томонидан ноавтоном дифференциал ўйинлар учун ривожлантирилди. Альтернирланган интеграл таърифида қатнашаётган кўп қийматли функция интеграли ҳисоблашларни қийинлаштириши муносабати билан М. С. Никольский чизиқли дифференциал ўйинлардаги альтернирланган интеграл учун соддалаштирилган схемани таклиф қилди. А. Б. Куржанский, Н.Б. Мельников, Е. С. Половинкин, Г. Г. Иванов, М. В. Балашов, Р. Х. Константинов, А. В. Хорев ва Д. Б. Силинлар томонидан чизиқли дифференциал ўйинлар учун альтернирланган интегрални тақрибий ҳисоблаш масаласи ривожлантирилди.

Ҳозирги вақтда альтернирланган интеграл учун аппроксимацион схемалар асосан чизиқли дифференциал ўйинлар учун ишлаб чиқилган бўлиб, ночизиқли дифференциал ўйинлар учун ўрганилмаган. Кўп иштирокчили, иштирокчилари турли ахборотли ва иштирокчилар жоиз функциялари турли чегаралганликларга эга бўлган дифференциал ўйинлар назарияси Н. Ю. Сатимов, А. А. Азамов, Л. А. Петросян, Б. Н. Пшеничний, М. С. Никольский, Б. П. Гусятников, Е. С. Половинкин, А. А. Чикрия, Г. Ц. Чикрия, Н. Л. Григоренко, А. С. Мищенко, Б. Б. Рихсиев, А. З. Фазилов, М. Тўхтасинов, М. Ш. Маматов, Б. Т. Саматов, Г. Ибрагимов, А. Ш. Кучкаров ва Н. Мамадалиевнинг илмий изланишларида тадқиқ этилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим ёки илмий-тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ф4-ФА-Ф014 рақамли "Динамик ва бошқариладиган тизимларда траекторияни кузатиш ва стратегияларни синтез қилиш усулларини ривожлантириш ва уларни иссиқлик ва кимёвий жараёнларнинг математик моделларига татбиқ қилиш” (2012-2016 йиллар) грант тадқиқоти ва ОТ-Ф4-84 рақамли "Полиномиал тизимлар учун дискрет

сонли усуллар ва уни циклик ва бошқариладиган жараёнларни моделлаштиришга татбиғи” (2017й. ва ҳ.в) мавзусидаги илмий-тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади альтернирланган интеграл учун янги аппроксимацион схемалар ишлаб чиқиш ва уларни чизиқли бўлмаган бошқарув тизимларидаги яқинлашиш масаласига қўллашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

альтернирланган интеграл учун янги аппроксимацион схемалар қуриш ва уларни ночизиқли бошқарув тизимларидаги яқинлашиш масаласига татбиқ қилиш ҳамда дифференциал муносиблик учун альтернирланган интегралнинг ярим гуруҳлик хоссасини исботлаш ва рекуррент муносабатни келтириб чиқариш;

дифференциал муносиблик учун қуйи альтернирланган интеграл учун янги соддалаштирилган формулалар яратиш ва уни яқинлашиш масаласига татбиқ қилиш ҳамда квазичизиқли тизимлар учун альтернирланган интеграл иккиламчилиги муносабатини исботлаш ва уни қувиш масаласига татбиқ этиш;

биринчи ва умумлашган биринчи тўғри усул интегралини юқоридан ва қуйидан берилган аниқликда аппроксимацияловчи янги схемаларни таклиф қилиш ҳамда қувишнинг биринчи ва умумлашган биринчи усул интеграл-ларининг дифференциал ўйин дастлабки берилганларининг бир томонлама ўзгаришига нисбатан ярим барқарорлигини ўрнатиш;

чизиқли бўлмаган дифференциал ўйинлардаги асосий операторлар учун янги соддалаштирилган схемалар қуриш, шунингдек қуйи ва юқори операторларни ўйин дастлабки берилганлари бир томонлама ўзгаришига нисбатан барқарорлигини ўрнатиш ҳамда белгиланган вақтли чизиқсиз дифференциал ўйинлар учун юқори ва қуйи операторлар ўртасида муносабат ўрнатиш ва уни чизиқли бўлмаган тизимлардаги яқинлашиш масаласига татбиқ қилиш.

Тадқиқотнинг объекти. Кўп қийматли акслантиришлар ва қувишнинг тўғри усуллари интеграллари.

Тадқиқотнинг предмети. Кўп қийматли акслантиришлар назарияси, дифференциал муносибликлар назарияси, альтернирланган интеграллар назарияси, Пшеничний ва Понтрягин операторлари назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида кўп қийматли акслантиришлар ва қаварик таҳлил усуллари, Понтрягин ва Пшеничний операторлари усуллари, замонавий дифференциал тенгламалар усуллари ҳамда чизиқсиз таҳлил усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

дифференциал муносибликлардаги юқори ва қуйи альтернирланган интеграллар учун янги аппроксимацион схемалар ишлаб чиқилган ҳамда квазичизиқли дифференциал ўйинлар учун юқори ва қуйи альтернирланган интеграллар ўртасида иккиланганлик муносабати ўрнатилган;

дифференциал муносибликлардаги қувишнинг биринчи тўғри усули интегралини стробоскопик стратегиялар синфида қувишни берилган вақтда

тугатиш учун зарур ва етарли эканлиги исботланган;

қувишнинг биринчи ва умумлашган биринчи усули интегралларини юқори ва қуйидан берилган аниқликда аппроксимацияловчи янги тақрибий схемалар қурилган ва уларнинг дифференциал ўйин дастлабки берилганларга нисбатан ярим барқарорлиги исботланган;

чизиқсиз дифференциал ўйинлардаги қуйи ва юқори операторларнинг ярим барқарорлиги исботланган, шунингдек тугатилиши тайинланган чизиқсиз дифференциал ўйинлар учун юқори ва қуйи операторлар орасида муносабат ўрнатилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси дифференциал муносибликлардаги альтернирланган интеграл учун аппроксимацион схемалар қуриш усулларини ривожлантириш асосида менежмент, автоматика, узоқ муддатли башоратлаш, технологик жараёнларни бошқариш ва техникада учрайдиган бошқа масалаларни ечиш имкониятининг яратилганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги диссертация тадқиқотида келтирилган барча тушунчаларнинг аниқлиги ва равшан ифодаланганлиги, барча натажалар исботининг дедуктив қатъийлиги, хулосаларнинг тўғрилиги ва маълум тушунчалар ва фактлардан фойдаланилган ҳолатларда манбаларга етарлича ҳаволалар келтирилиши билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ишда олинган натижалардан дифференциал муносиблик билан тавсифланувчи зиддиятли бошқарилувчи тизимлар учун қувишнинг тўғри усулларидаги интеграллар учун тақрибий схемалар ишлаб чиқишнинг кейинги ривожида фойдаланиш мумкинлиги билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти уларни ноаниқлик шароитида бошқариладиган жараёнларнинг амалий масалаларини ҳал қилишда, шунингдек тизимли таҳлил, қарор қабул қилиш, менежмент ва узоқ муддатли башоратлаш муаммоларини ҳал қилишга татбиқ этиш билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Альтернирланган интеграл учун аппроксимацион схемалар ва уларнинг ночизиқли бошқарув системаларидаги яқинлашиш масаласига татбиғи бўйича олинган натижалар асосида:

квазичизиқли ўйинлар учун юқори ва қуйи альтернирланган интеграллар ўртасида ўрнатилган иккиланганлик муносабатидан ОТ-Ф4-33 рақамли «Дифференциал тенгламалар билан ифодаланувчи зиддиятларни бошқаришнинг янги усулларини ишлаб чиқиш ва уларни сонли амалга ошириш» мавзусидаги фундаментал лойиҳада зиддиятли вазиятларни бошқаришда позицион стратегияларни қуришда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университетининг 2021 йил 10-ноябрдаги №04/11-7212-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши зиддиятли вазиятларда ночизиқли тизимларни бошқаришда биринчи ва иккинчи тўғри усулларда позицион стратегияларни қуришда ва уларни сонли амалга оширишда ҳосил бўладиган чизиқсиз бошқарув масаласи ечимининг етарли шартларини топиш имконини берган;

дифференциал муносибликлар билан тавсифланувчи ўйинлардаги қувишнинг тўғри усуллари интеграллари учун янги аппроксимацион схемалар ва уларнинг бошқарилувчи чизиқсиз тизимлардаги тескари алоқадорлигидан «Плазмали технологиялар» мавзусидаги хорижий лойиҳада соленоидал ва магнитоквадрупол майдонларни дискретлаштириш ва зарядланган заррачалар оқимини бошқариш масаласини ечишда фойдаланилган (Самара давлат техника университетининг 2021 йил 28 апрелдаги №01.0202/12-25-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланилиши соленоидал ва магнитквадрупол майдонларни бошқаришнинг дискретлаштириш усулини ва зарядланган заррачалар оқимини бошқаришнинг оптимал ечимини топиш имкониятини берган;

қувишнинг биринчи тўғри усули интегралини берилган аниқликда юқоридан ва қуйидан аппроксимацияловчи тақрибий схемаларидан AP05133858 рақамли «Сингуляр тарқалган тенгламалар контраст тузилмалари ва уларга фазовий ўтишлар тадбиғи» мавзусидаги хорижий лойиҳада сингуляр тарқалган тенгламалар контраст структураларини топишда фойдаланилган (Ҳ. А. Яссавий номидаги қозоқ-турк халқаро университетининг 2021 йил 10 ноябрдаги №19-сонли маълумотномаси, Қозоғистон). Илмий натижани қўлланиши дифференциал муносибликлар билан тавсифланувчи сингуляр тарқалган тенгламалар фазовий структурасида ва ўтишларида контраст ёпиқ траекториялар мавжудлигини исботлаш имконини берган;

дифференциал муносибликлардаги юқори ва қуйи альтернирланган интегралларга асосланган қувиш усулларидан 01-01-16-1840FR рақамли «Евклид метрикали кўпҳилликларда кўп қувловчили қувиш-қочиш дифференциал ўйинлари масаласини ечишнинг янги усуллари» мавзусидаги хорижий лойиҳада ўйинчилар бошқарувига геометрик ва интеграл чекловлар қўйилганда чексиз ўлчовли фазоларда дифференциал ўйинлардаги қувиш масаласини ечишда фойдаланилган (Путра Малайзия университетининг 2020 йил 12 ноябрдаги маълумотномаси, Малайзия). Илмий натижанинг қўлланилиши ўйинчилар бошқарувига геометрик ва интеграл чекловлар қўйилганда чексиз ўлчовли фазоларда дифференциал ўйинларда қувишни тугатишнинг етарли шартини топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 20 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 10 та халқаро ва 10 та республика илмий-амалий анжуманларда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 37 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 13 та мақола, жумладан 6 таси хорижий ва 7 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация таркиби кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 191 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг "**Дифференциал мансубликлар учун қувишнинг биринчи тўғри усули интегралини аппроксимациялаш**" деб номланувчи биринчи боби тўртта параграфдан иборат бўлиб, у қувишнинг биринчи тўғри усули интегралига бағишланган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида дифференциал мансублик билан тавсифланувчи ўйинларда қувувчининг стробоскопик ва деярли стробоскопик стратегиялари аниқланган ва дифференциал мансубликлар учун қувишнинг биринчи тўғри усули интегралининг стробоскопик стратегиялар синфида ўйинни белгиланган вақтда тугатиш учун зарур ва етарли зканлиги исботланган.

Қуйидаги бошқарилувчи системани қараймиз

$$\dot{z} \in -F(t,v) \tag{1}$$

бу ерда $z \in R^d$, $v \in Q \in K^q$, $t \in I$, $F : I \times Q \to coK^d$ – узлуксиз (Хаусдорф метрикасида) акслантириш. Бундан ташқари яна $M \in R^d$, M – терминал тўплам ҳам берилган.

Агар A евклид фазоси қисм тўплами бўлса, барча $a(\cdot) : \Delta \to A$ ўлчовли функциялар оиласини $A[\Delta]$ билан белгилаймиз. Барча $z(\cdot) : J \to R^d$ абсолютузлуксиз функциялар синфини $AC(J)$ орқали белгилаймиз. Ихтиёрий $v(\cdot) \in Q(I)$ функцияни қочувчининг жоиз бошқаруви деб атаймиз.

Энди $F(t,v)$ акслантиришнинг I кесмадаги барча $U : I \times Q \to R^d$ бир қийматли Борель бўйича ўлчовли селекторлари (кесимлари) оиласини $P_B = \{U\}$ билан белгилаймиз. P_B га тегишли ҳар бир U элементни қувувчининг стробоскопик сратегияси деб атаймиз. Ҳар бир бошланғич нуқта $\xi \in R^d$, қувловчи стратегияси $U \in P_B$ ва $v(\cdot) \in Q(I)$ қочувчи жоиз бошқарувига қуйидаги $z(\cdot) \in AC(I)$ функцияни мос қўямиз:

$$z(t,\xi,U,v(\cdot)) = \xi - \int_0^t w(t)dt \text{, где } w(t) = U(t,v(t)), t \in I.$$

$z(t) = z(t,\xi,U,v(\cdot))$ функцияни бошланғич $\xi \in R^d$ нуқтага, қувловчи стратегияси $U \in P_B$ ва қочувчининг $v(\cdot) \in Q(I)$ жоиз бошқарувига мос келувчи (1) тизимнинг $I = [0,\tau]$ кесмадаги траекторияси деб атаймиз.

1-таъриф. Айтамизки, (1) ўйинда $\xi \in R^d$ бошланғич ҳолатдан τ вақтда (τ вақтгача) қувишни P_B стратегиялар синфида тугаллаш мумкин дейилади, агарда қочувчининг ихтиёрий $v(\cdot) \in Q(I)$ бошқарув функцияси учун қувувчининг шундай $U \in P_B$ стратегияси мавжуд бўлсаки, (1) системанинг $\xi, U, v(\cdot)$ учликка мос келувчи $z(t, \xi, U, v(\cdot)) \in \Gamma(\xi, U, v(\cdot))$ траекторияси учун $z(\tau) \in M$ ($z(t^*) \in M$ бирор $t_* \in I$) муносабат ўринли бўлса.

Кўп қийматли $X(\cdot):[\alpha, \beta] \to C^d$ акслантиришнинг $[\alpha, \beta]$ кесмадаги интеграли деб, унинг барча $x(\cdot):[\alpha, \beta] \to R^d$ бир қийматли интегралланувчи селекторларининг интеграллари $\int_\alpha^\beta x(t)dt$ тўпламига айтилади, яъни

$$\int_\alpha^\beta X(t)dt = \left\{ \int_\alpha^\beta x(t)dt \,\middle|\, x(t) \in X(t)d, t \in [\alpha, \beta] \right\}.$$

Энди

$$W^\tau = M + \int_0^\tau \bigcap_{v \in Q} F(t, v)dt,$$

1-теорема. Агар $z_0 \in W^\tau$ бўлса, у ҳолда (1) ўйинда z_0 ҳолатдан белгиланган τ вақтда (τ вақтгача) қувишни P_B стратегиялар синфида тугаллаш мумкин.

I кесманинг барча бўлакларга бўлишлар

$$\omega = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \iota_{n-1} < \tau_n = \tau\}$$

тўпламини Ω, $\Delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $\delta_i = |\Delta_i|$, $|\omega| = \max\limits_{1<i<n} \delta_i$ билан белгилаймиз.

M фазо R^d нинг қисм фазоси бўлсин, L унинг R^d га ортогонал тўлдирувчиси, π оператор R^d дан L га ортогонал проекцияловчи оператор бўлсин ва $\omega \in \Omega$. Белгилаймиз

$$F_i = \bigcap_{v \in Q} \int_i \pi F(t, v(t))dt, \; F(\omega) = \sum_{k=1}^n F_i, \; W^F = \bigcap_{\omega \in \Omega} F(\omega).$$

Бу ерда $\int_i$ интеграл $\Delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$ кесма бўйича олинади.

2-теорема. Қуйидаги тенглик ўринлидир

$$W^F = \int_0^\tau \bigcap_{v \in Q} \pi F(t, v)dt.$$

3-теорема. (1) ўйинда z_0 ҳолатдан белгиланган τ вақтда қувишни P_B стратегиялар синфида тугаллаш учун

$$\pi z_0 \in \int_0^\tau \bigcap_{v \in Q} \pi F(t, v)dt$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Энди $\gamma(\delta)$ – $F(t, v)$ акслантиришнинг узлуксизлик модули, яъни.

$$\alpha(\delta)=\max\left\{h\left(F\left(t_1,\upsilon_1\right),F\left(t_1,\upsilon_1\right)\right)\middle|\,|t_1-t_2|\le\delta,|\upsilon_1-\upsilon_2|\le\delta,t_1,t_2\in I,v_1,v_2\in Q\right\},$$

H эса R^d фазодаги бирлик ёпиқ шар бўлсин. $A,B\in K^d$ тўпламлар учун Хаусдорф метрикаси қуйидаги формула билан аниқланади

$$h(A,B)=\min\{r>0\,|\,A\subset B+rH,B\subset A+rH\}.$$

Диссертациянинг биринчи боби иккинчи параграфи дифференциал мансублик учун қувишнинг биринчи тўғри усули интегралини берилган аниқликда юқоридан аппроксимацияловчи тақрибий схемаларни қуришга бағишланган.

Биринчи тўғри усул интегралининг топишда асосий қийинчилик

$$\int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} F(t,v)dt$$

кўринишдаги интегрални ҳисоблашдан иборат. Шунинг учун қуйида шу кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш учун тақрибий схемаларни келтирамиз.

2-теоремада $\int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} F(t,v)dt=W^F$ тенглик ўринлиги кўрсатилганлиги учун қуйида кўпроқ W^F белгилашдан фойдаланамиз.

4-теорема. ε- етарлича кичик мусбат сон бўлсин. У ҳолда шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ мавжудки, барча $|\omega|<\delta$ шартни қаноатлантирувчи $\omega\in\Omega$ бўлаклашлар учун $h[W^F,F(\omega)]<\varepsilon$ тенгсизлик ўринлидир.

$\omega_n=\{0,\delta_n,...,(n-1)\delta_n,\, n\delta_n=\tau\}-I$ кесмани тенг (текис) бўлаклашлар кетма – кетлиги бўлсин.

1-натижа. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай натурал сон $N=N(\varepsilon)$ мавжудки, барча $n>N$ учун қуйидаги муносабат ўринлидир

$$W^F\subset F(\omega_n)+\varepsilon H,\qquad F(\omega_n)\subset W^F+\varepsilon H.$$

Қуйидаги тўпламларни аниқлаймиз

$$\tilde{F}_i=\bigcap_{v\in Q}[F(\xi_i,v)+\delta_n\gamma(\delta_n)H],\quad \tilde{F}(\omega_n)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{F}_i \tag{2}$$

5-теорема. $W^\tau=\bigcap_{\omega_n\in\Omega}\tilde{F}(\omega_n)$ тенглик ўринли.

2-натижа. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай натурал сон $N=N(\varepsilon)$ мавжудки, барча $n>N$ учун қуйидаги муносабатлар ўринли

$$W^F\subset\tilde{F}(\omega_n)+\varepsilon\tilde{H},\quad \tilde{F}(\omega_n)\subset W^F+\varepsilon H.$$

Шуни таъкидлашимиз керакки, $\tilde{F}(\omega_n)$ тўпламни қуришда кўп қийматли акслантириш интеграли қатнашмайди ва у W^F интегрални юқоридан аппроксимация қилади, яъни ихтиёрий $\omega_n\in\Omega$ учун $W^F\subset\tilde{F}(\omega_n)$. Бунда ҳар бир $\tilde{F}_i$ қуришда $\delta\gamma(\delta)H$ қўшилувчи қатнашади. Агар $\tilde{F}(\omega_n)$ тўпламни $\delta\gamma(\delta)H$ қўшилувчисиз қурсак 5-теорема ўринли бўлмайди.

$F(t,v)=\exp(tC)f(P,v)$, $P\in K^p$, $v\in Q$ ва $f:P\times Q\to coK^d$ – узлуксиз бўлган ҳолда дифференциал мансублик билан тавсифланувчи ўйинлар учун биринчи тўғри усул интегралини юқоридан аппроксимацияловчи соддалаштирилган янги схемалар келтирилган.

Биринчи бобнинг учинчи параграфи дифференциал мансублик учун қувишнинг биринчи тўғри усули интегралини қуйидан берилган аниқликда аппроксимацияловчи янги схемалар қуришга бағишланган.

Энди $F(t,v)=\exp(tC)f(P,v)$, $P\in K^p$, $v\in Q$ ва $f:P\times Q\to coK^d$ – узлуксиз бўлсин. Ихтиёрий $\omega\in\Omega$, учун

$$\bar{F}_i=\bigcap_{v\in Q}\int_i \exp(tC)dtf(P,v),\ \bar{F}(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_i$$

белгилашларни киритамиз.

1-лемма. Ихтиёрий $\omega\in\Omega$ учун $\bar{F}(\omega)\subset W^F$ муносабат ўринлидир.

Таъкидлаймизки, $\bar{F}(\omega)$ тўплам ω бўлаклаш майдаланган сари монотон ўсиб W^F интегрални қуйидан аппроксимациялайди.

6-теорема. $cl\{\bigcup_{\omega_n\in\Omega}\bar{F}(\omega_n)\}=W^F$ тенглик ўринлидир.

Қуйидаги теорема W^F, $\bar{F}(\omega)$ тўпламлар яқинлигини баҳолайди.

Энди $W^F=\int_0^\tau \bigcap_{v\in Q}\exp(tC)f(P,v)dt$ ва $\bar{F}_i=\bigcap_{v\in Q}\int_i \exp(tC)dtf(P,v)$.

ω – ихтиёрий бўлаклаш Ω тўпламдан олинган ва $\delta=\max_{1\le i\le n}\delta_i$.

7-теорема. Қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$h[\,W^F,\bar{F}(\omega)\,]\le L\delta,$$

бу ерда $L=2|C|e^{2\tau|C|}|f|,|f|=\max_{v\in Q}|f(P,v)|$.

Биринчи бобнинг тўртинчи параграфида дифференциал мансублик учун қувишнинг биринчи тўғри усули интегралини дифференциал ўйин бошланғич берилганларининг бир томонлама ўзгаришига нисбатан яримбарқарор эканлиги исботланган.

Диссертациянинг “**Дифференциал мансубликлар учун қувишнинг умумлашган биринчи тўғри усули интегралини аппроксимациялаш**” деб номланган иккинчи боби тўртта параграфдан иборат бўлиб, у қувишнинг умумлашган биринчи тўғри усули интегралининг аппроксиматив хоссаларини ўрганишга бағишланган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида дифференциал мансублик учун қувишнинг умумлашган биринчи тўғри усули интеграли қувишни стробоскобик стратегиялар синфида белгиланган вақтда тугаллаш учун зарур ва етарли эканлиги исботланган.

Барча ўлчовли ёпиқ қийматли $A(\cdot):I\to C^d$ (мос равишда ўлчовли компакт қийматли $A(\cdot):I\to K^d$) ва қуйидаги шартни қаноатлантирувчи

$$\int_0^\tau A(t)dt \subset M$$

акслантиришлар оиласини $cl\Phi$ (мос равишда $comp\Phi$) билан белгилаймиз.

Ҳар бир $A(\cdot) \in cl\Phi$ учун $W[A(\cdot),\tau] = \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} [A(t) + F(t,v)]dt$ деб оламиз ва $W_{об}^\tau = \bigcup_{A(\cdot)\in cl\Phi} W[A(\cdot),\tau]$ белгилашни киритамиз. $W_{об}^\tau$ ни қувишнинг умумлашган тўғри усул интеграли деб атаймиз.

8-теорема. (1) ўйинда z_0 ҳолатдан τ вақтда қувишни P_B стратегиялар синфида тугаллаш учун

$$z_0 \in W_{об}^\tau$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Юқорида баён қилинганлар муносабати билан (1) ўйинда қувишни тугаллаш масаласини ечиш учун $W_{об}^\tau$ ни ҳисоблаш муҳим аҳамиятга эга эканлиги келиб чиқади. Аммо кўпчилик ҳолларда $W_{об}^\tau$ ни аниқ ҳисоблаб бўлмайди. Шу муносабат билан бу интегрални тақрибий ҳисоблаш ва унинг аппроксиматив хоссаларини ўрганиш масаласи келиб чиқади. Таъриф бўйича $W_{об}^\tau$ ни ҳисоблаш учун барча ўлчовли ёпиқ қийматли акслантиришлар бўйича бирлашма олиш керак. Бундан қуйидаги савол келиб чиқади: соддароқ тузилишга эга бўлган ва $W_{об}^\tau$ ни тақрибий ҳисоблаш учун етарли бўлган, ўлчовли ёпиқ қийматли акслантиришлар оиласининг бирор қисм оиласини ажратиб олиш мумкинми?

Диссертациянинг иккинчи боби иккинчи параграфи юқорида қўйилган саволга $W_{об}^\tau$ таърифидаги қатнашувчи бирлашмани компакт қийматли, бўлакли – ўзгармас, узлуксиз ва кўпёқли қийматли бўлакли – ўзгармас акслантиришлар синфигача торайтириш орқали жавоб берилади.

9-теорема. Қуйидаги тенглик ўринли

$$W^\tau = \bigcup_{A(\cdot)\in comp\Phi} W[A(\cdot),\tau].$$

Барча ўлчовли $B(t), t \in I$ ва t нинг ҳар бир қийматида $B(t)$ учлари рационал координатали нуқталарда бўлган кўпёқликдан иборат ва қуйидаги шартни қаноатлантирувчи

$$\int_0^\tau B(t)dt \subset M + \varepsilon K \quad \left(\int_0^\tau B(t)dt \subset M \overset{*}{-} \varepsilon K\right)$$

акслантиришлар оиласини Π^ε (мос равишда Π_ε) билан белгилаймиз. Бу ерда $K = \{x = (x_1, x_2, ..., x_d \mid |x_i| \le 1\} -$ R^d фазодаги бирлик куб.

Энди W^τ таърифида қатнашувчи ўлчовли ёпиқ қийматли акслантиришлар оиласини, бўлакли-ўзгармас қиймати Π^ε да бўлган акслантиришлар оиласигача торайтирамиз.

10-теорема. Қуйидаги муносабат ўринлидир

$$W^{\tau} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\hat{B}(\cdot)\in\Pi^{\varepsilon}} W[\hat{B}(\cdot),\tau] \subset W_2^{\tau},$$

бу ерда $\hat{B}(\cdot)$ – бўлакли-ўзгармас ва Π^{ε} оилага мансуб.

3-натижа. Қуйидаги тенглик ўринлидир

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{A(\cdot)\in cl\Phi^{\varepsilon}} W[A(\cdot),\tau] = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\hat{B}(\cdot)\in\Pi^{\varepsilon}} W[\hat{B}(\cdot),\tau],$$

бу ерда $\hat{B}(\cdot)$ – бўлакли-ўзгармас ва Π^{ε} оилага мансуб, W_2^{τ} - альтернирланган интеграл.

Юқоридаги тенглик қуйидагича талқинга эга:

агар $z_0 \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\hat{B}(\cdot)\in\Pi^{\varepsilon}} W[\hat{B}(\cdot),\tau]$ бўлса, (1) ўйинда z_0 ҳолатдан M терминал тўпламнинг ихтиёрий ε атрофида қувишни τ вақтда P_B стробоскопик стратегиялар синфида тугатиш мумкин.

Диссертациянинг иккинчи боби учинчи параграфида $A(\cdot)$ акслантириш узлуксиз, бўлакли ўзгармас бўлган ҳолларда $W[A(\cdot),\tau]$ интегрални юқоридан ва қуйидан берилган аниқликда аппроксимацияловчи турли янги соддалаштирилган схемалар келтирилган.

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида дифференциал мансублик учун қувишнинг биринчи тўғри усули интеграли $W_{об}^{\tau}$ ва $W[A(\cdot),\tau]$ интегрални дифференциал ўйин бошланғич берилганларининг бир томонлама ўзгаришига нисбатан ярим барқарор эканлиги исбот қилинган.

Диссертациянинг **«Дифференциал мансубликлар учун альтернирланган интеграл ва унинг ночиқли бошқарув системаларидаги яқинлашиш масаласига татбиғи»** номли учинчи боби альтернирланган интеграл учун янги аппроксимацион схемалар қуриш масаласига багишланган.

$I=[0,\tau]$ кесманинг ихтиёрий бўлакланиши ω бўлсин, яъни $\omega\in\Omega$. S^i хусусий йиғиндиларни қуйидаги рекуррент формула билан аниқлаймиз

$$S^0 = M,\ S^i = \bigcap_{\upsilon[\bullet]\in Q(\Delta_i)} \left[S^{i-1} + \int_i F(t,\upsilon(t))dt \right],\ S(\omega) = S^n, i = 1,2,...n. \qquad (3)$$

$S(\omega)$ тўпламни альтернирланган йиғинди, $W^{\tau}(M) = \bigcap_{\omega\in\Omega} S(\omega)$ тўпламни эса дифференциал мансубликлар учун Понтрягиннинг юқори альтернирланган интеграли деб атаймиз.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида дифференциал мансублик учун альтернирланган интегралнинг ярим группавий хоссалари аниқланган ва бу хоссалар учун рекуррент муносабат исботланган, шунингдек унинг ночизиқли бошқарув системалардаги яқинлашиш масаласига татбиғи келтирилган.

Альтернирланган интегралнинг таърифида кўп қийматли акслантириш-ни интеграллаш амали қатнашиб, бу амал амалиётда кўп қийматли

акслантиришнинг барча ўлчовли бир қийматли кесимлари бўйича бирлашма амалига тенг кучлидир. Бу ҳолат альтернирланган интегральни квазичизиқли ўйинлар учун, дифференциал мансубликлар учун аниқланганда яъни геомерик айирма амалини барча ўлчовли функциялар оиласи кесишмаси билан алмаштирилганда янада чуқурлашади. Шунинг учун альтернирланган интеграл учун соддалаштирилган схемалар ишлаб чиқиш долзарб масала бўлиб қолмоқда.

Чизиқли дифференциал ўйинлардаги альтернирланган интеграл учун биринчи соддалаштирилган схема М. С. Никольский томонидан таклиф қилинган. А. Азамов ишларида умумий ҳолларда альтернирланган интеграл учун соддалаштирилган схемалар таклиф қилинган.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида дифференциал мансублик учун қувиш масаласидаги умумлашган биринчи тўғри усул интеграли воситасида альтернирланган интеграл учун янги соддалаштирилган схемалар таклиф қилинган.

$F(t,v)$ кўп қийматли акслантириш узлуксизлик модулини $\alpha(\delta)$ билан белгилаймиз ва $\omega \in \Omega$ бўлсин. Белгилаймиз $L^0 = M$,

$$L^i = \int_i \bigcap_{v \in Q} [\frac{1}{\delta_i} L_{i-1} + 2\alpha(\delta_i)H + F(t,v)]dt, \quad L(\omega) = L^n. \tag{4}$$

$L^\tau(M) = \bigcap_\omega L(\omega)$ тўпламни аниқлаймиз.

11-теорема. Агар $M \in C^d$, у ҳолда

$$W^\tau(M) = L^\tau(M).$$

Таъкидлаш жоизки, (4) схеманинг (3) схемадан фарқи шундаки, унда ҳар бир ҳусусий сумма L^{i-1} га $2\delta_i\alpha(\delta_i)H$ қўшилувчи қўшиш билан ҳосил қилинади. Агар L^i бу қўшилувчисиз қурилса, умумий ҳолда $L^\tau(M) \subset W^\tau(M)$ муносабат ўринли бўлади.

Қуйидаги схема чизиқли дифференциал ўйинлар учун Н. Сатимов томонидан киритилган бўлиб, ўзида Л.С.Понтрягиннинг биринчи ва иккинчи тўғри усуллари элементларини ифодалайди.

$\omega \in \Omega$ ва

$$B^0 = M, \quad B^i = \bigcup_{A(\cdot)} \int_i \bigcap_{v \in Q} \left[A(t) + F(t,\upsilon)\right]dt \text{ бўлсин,}$$

бу ерда бирлашма барча $A(\cdot) \in \Phi\left(\Delta_i, B^{i-1}\right)$ бўйича олинади, ва

$$B(M,\omega) = B^n, \; B^\tau(M) = \bigcup_\omega B(M,\omega).$$

Энди қўшимча қўшилувчи фақат терминал тўпламга қўшиладиган схемаларни келтирамиз, бу эса схема қуришни анча соддалаштиради. Ўша $I = [0,\tau]$, $\omega \in \Omega$. Белгилаймиз

$$D^0 = M, D^i = \int_i \bigcap_{v \in Q} [\frac{1}{\delta_i} D^{i-1} + F(t,v)]dt.$$

$$D(\omega)=D^n,\ \ D^\tau(M)=\bigcup_{\omega\in\Omega}D(\omega)$$ тўпламларни аниқлаймиз.

12-теорема. Агар $M\in C^d$ бўлса,

$$W^\tau(M)=\bigcap_{\varepsilon>0}D^\tau(M+\varepsilon H)$$

тенглик тўғридир.

13-теорема. Агар $M\in C^d$ бўлса,

$$W^\tau(M)=\bigcap_{\varepsilon>0}B^\tau(M+\varepsilon H)$$

тенглик тўғридир.

Таъкидлаймизки, теорема 13 қуйидагича талқин қилиниши мумкин:

Агар M – R^d фазонинг ёпиқ қисм тўплами ва $z_0\in W^\tau(M)$ бўлса, у ҳолда (1) ўйинда z_0 ҳолатдан қувишни белгиланган τ вақтда M терминал тўпламнинг ихтиёрий ε-атрофида бўлакли стробоскопик стратегиялар синфида тугатиш мумкин.

Энди альтернирланган интегрални қуйидан баҳоловчи схемаларни келтирамиз.

14-теорема. Агар $M\subset R^d$ бўлса, у ҳолда қуйидаги

$$\bigcup_{\varepsilon>0}W^\tau\left(M\overset{*}{-}\varepsilon H\right)=\bigcup_{\varepsilon>0}D^\tau\left(M\overset{*}{-}\varepsilon H\right)$$

тенглик тўғридир.

15-теорема. Агар $M\subset R^d$ бўлса,

$$\bigcup_{\varepsilon>0}W^\tau\left(M\overset{*}{-}\varepsilon H\right)=\bigcup_{\varepsilon>0}B^\tau\left(M\overset{*}{-}\varepsilon H\right)$$

тенглик ўринлидир.

Учинчи параграфда $\dot z(t)\in F(t,u)$ ($F-$узлуксиз компакт қийматли акслантириш) кўринишидаги дифференциал мансубликлар билан тавсифланувчи қувиш ўйинлари учун қуйи альтернирланган интегралнинг аппроксиматив хоссаларини ўрганишга бағишланган. Унинг учун рекуррент формула исботланган ва янги соддалаштирилган аппроксимацион схемалар қурилган. Қуйи интегралга тегишли бўлган барча бошлангич ҳолатлар учун қувувчининг ўйинни τ вақт ичида тугатувчи бўлакли – ўзгармас реализацияга эга бўлган стратегияси мавжудлиги исботланган.

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида квазичизиқли дифференциал ўйинлар учун юқори ва қуйи альтернирланган интеграллар учун иккиламчилик хоссаси исботланган ва унинг қувиш масаласига татбиғи ўрганилган.

Қуйидаги дифференциал ўйинни қараймиз

$$\dot z=f(t,u,v) \tag{5}$$

бу ерда $z\in R^d, t\in I, u\in P, v\in Q, P\in coK^p, Q\in coK^q$ и $f:I\times P\times Q\to R^d$ – узлуксиз функция. $M\in C^d$, M – терминал тўплам.

$W^\tau(M)$ ва $W_\tau(M)$ орқали квазичиқли дифференциал ўйинлар учун Понтрягиннинг юқори ва қуйи альтернирланган интегралларини

белгилаймиз.

Қуйидаги теоремалар квазичизиқли дифференциал ўйинлар учун альтернирланган интегралнинг иккиламчилик принципини ўрнатади.

16-теорема. Агар $M \in \mathrm{co}C^d$ ва $f(t,P,v)$ тўплам ихтиёрий $t \in I, v \in Q$ лар учун қаварик бўлса, у ҳолда

$$W^{\tau}(M) = \bigcap_{\varepsilon>0} W_{\tau}(M + \varepsilon H) \tag{6}$$

тенглик ўринлидир.

17-теорема. Агар $M \subset R^d$ бўлиб, қаварик ёпик тўлдирувчига эга ва ихтиёрий $t \in I$ ва $u \in P$ учун $f(t,v,Q)$ тўплам қаварик бўлса, у ҳолда

$$W_{\tau}(M) = \bigcup_{\varepsilon>0} W^{\tau}(M \overset{*}{-} \varepsilon H) \tag{7}$$

тенглик тўғридир.

Таъкидлашимиз жоизки, (6) и (7) тенгликлар ва уларнинг ўйинчилар маълумотлилик муаммосига татбиғи биринчи марта чизиқли дифференциал ўйинлар учун А. Азамов томонидан ўрнатилган.

Ночизиқли дифференциал ўйинлар тузилиши чизиқли дифференциал ўйинлардаги Понтрягиннинг иккинчи тўғри усулининг табиий умумлашмаси сифатида киритилган $\tilde{T}^t$ ва $\tilde{\Pi}^t$ операторлар орқали тафсифланади.

А. Азамов томонидан ночизиқли дифференциал ўйинлар фазовий ҳолатларининг тузилиши сифат назариясини яратиш жараёнида $\tilde{T}^t$ ва $\tilde{\Pi}^t$ операторларнинг қуйи аналоглари ҳам киритилган. Бу қуйи аналогларни симметрия учун $\tilde{T}_t$ ва $\tilde{\Pi}_t$ билан белгилаймиз. $\tilde{T}^t, \tilde{\Pi}^t$ ва $\tilde{T}_t$, $\tilde{\Pi}_t$ операторлар ночизиқли дифференциал ўйинлардаги асосий операторлар деб аталади.

Диссертациянинг «**Ночизиқли дифференциал ўйинлар асосий операторларини аппроксимациялаш ва уларнинг ярим барқарорлиги**” номли тўртинчи боби ночизиқли дифференциал ўйинлар асосий операторлари учун аппроксимацион схемалар қуриш, уларнинг ярим барқарорлигини ва улар ўртасидаги муносабатларни ўрнатишга бағишланган.

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида қуйи операторлар учун уларни берилган аниқликда аппроксимацияловчи янги соддалаштирилган схемалар таклиф қилинган.

Қуйидаги ночизиқли дифференциал ўйинни қараймиз

$$\dot{z} = f(z,u,v) \tag{8}$$

бу ерда $z \in R^d$, $u \in P$, $v \in Q$, $P \in K^p$, $Q \in K^q$, $f : R^d, \times P \times Q \to R^d$. Келгусида f функция Каратеодори маъносидаги шартларни қаноатлантиради, деб ҳисоблаймиз.

Ихтиёрий $u(\cdot) \in P[\alpha,\beta]$ функция (мос равишда $v(\cdot) \in Q[\alpha,\beta]$ функция) қувувчининг (қочувчининг) жоиз бошқаруви деб аталади. (8) тенгламанинг $u(t)$ ва $v(t)$ жоиз бошқарувларга, ξ бошланғич нуқтага мос келувчи ечимини

$z(t,u(\cdot),v(\cdot),\xi)$ билан белгилаймиз. $M \subset R^d$, M – терминал тўплам.

2-таъриф. T_ε (Π_ε) оператор ҳар бир $A \subset R^d$ тўпламга барча $\xi \in R^d$ нуқталар тўпламини мос қўядики, улар учун қувувчининг шундай жоиз бошқаруви $u(\cdot) \in P[0,\varepsilon]$ мавжудки, қочувчининг ихтиёрий жоиз бошқаруви $v(\cdot) \in Q[0,\varepsilon]$ учун (8) системанинг ξ, $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ учликка мос келучи, бошланиш нуқтаси $\xi \in R^d$ бўлган, $z(t,u(\cdot),v(\cdot),\xi)$ траекторияси $A \subset R^d$ тўпламга ε дан кеч бўлмаган вақтда келиб тушади, яъни шундай $t_* \in [0,\varepsilon]$ борки $z(t_*,u(\cdot),v(\cdot),\xi) \in A$ (ε вақтда келиб тушади, яъни $z(\varepsilon,u(\cdot),v(\cdot),\xi) \in A$).

$\omega = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ – $[0,t]$ кесма бўлакланиши, $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ ва $|\omega| = t$. Қуйидагича белгилаш киритамиз

$$\Pi_\omega M = \Pi_{\delta_1}\Pi_{\delta_2}\ldots\Pi_{\delta_n} M \text{ и } T_\omega M = T_{\delta_1}T_{\delta_2}\ldots T_{\delta_n} M .$$

3-таъриф.

$$\tilde{\Pi}_t M = \bigcup_{|\omega|=t} \Pi_\omega M, \tilde{T}_t M = \bigcup_{|\omega|=t} T_\omega M.$$

$\bar{\Pi}_\varepsilon$ ва $\bar{T}_\varepsilon$ операторлар мос равишда T_ε ва Π_ε операторлардан шуниси билан фарқ қиладики, уларнинг таърифида қувувчининг ихтиёрий жоиз бошқаруви $u(\cdot) \in P[0,\varepsilon]$ ўрнига ўзгармас бошқарув $u(\cdot) = u \in P$ олинади.

$$\omega = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = t\} - [0,t]$$

кесма бўлакланиши ва $\bar{\Pi}_\omega M = \bar{\Pi}_{\delta_1}\bar{\Pi}_{\delta_2}\ldots\bar{\Pi}_{\delta_n} M$, $\bar{T}_\omega M = \bar{T}_{\delta_1}\bar{T}_{\delta_2}\ldots\bar{T}_{\delta_n} M$ бўлсин.

$\bar{\bar{\Pi}}_t M = \bigcup_{|\omega|=t} \bar{\Pi}_\omega M$, $\bar{\bar{T}}_t M = \bigcup_{|\omega|=t} \bar{T}_\omega M$ деб аниқлаймиз.

18-теорема. $M - R^d$ фазонинг очиқ қисм тўплами бўлсин. У ҳолда $\tilde{\Pi}_t M = \bar{\bar{\Pi}}_t M$, $\tilde{T}_t M = \bar{\bar{T}}_t M$ тенглик ўринли.

Қуйидаги соддалаштирилган операторни қараймиз

$$\Theta_t A = \bigcup_{u \in P} \bigcap_{v \in Q} \bigcup_{t_* \in [0,\varepsilon]} [\xi \in R^d \mid z(t_*,u(\cdot),v(\cdot),\xi) = \xi + t_* f(\xi,u,v) \in A].$$

$\tilde{\Theta}_t A$ оператор $\tilde{T}_t M$ оператор каби аниқланади. Биринчи $\tilde{\Theta}_t A$ ва $\bar{T}_t M$ ўртасидаги боғланишни ва унинг қувиш масаласига татбиқини келтирамиз.

19-теорема. $M - R^d$ фазонинг очиқ қисм тўплами бўлсин. У ҳолда

$$\tilde{T}_t M = \bigcup_{\delta > 0} \Theta_t (M \overset{*}{-} \delta H).$$

4-натижа. M – очиқ тўплам ва $z_0 \in \tilde{T}_t M$ бўлсин. У ҳолда шундай мусбат $\delta > 0$ сони ва қувувчининг бўлакли-ўзгармас бошқаруви $\hat{u}(\cdot) \in P[0,\varepsilon]$ мавжудки, қочувчининг ихтиёрий жоиз бошқарувида $v(\cdot) \in Q[0,\varepsilon]$ (8) системанинг уларга мос ечими учун қандайдир $t_* \in [0,t]$ да $z(t_*) + \delta H \subset M$ муносабат ўринлидир.

Иккинчи параграфда ночизиқли дифференциал ўйинлардаги қуйи ва

юқори операторларнинг ўйин дастлабки берилганларининг кичик ўзгаришларига нисбатан барқарор эканлиги исботланган.

4-таъриф. $T^{\varepsilon}\left(\Pi^{\varepsilon}\right)$ оператор ҳар бир $A\subset R^{d}$ тўпламга барча $\xi\in R^{d}$ нуқталар тўпламини мос қўядики, қочувчининг ихтиёрий жоиз бошқаруви $v(\cdot)\in Q[0,\varepsilon]$ учун қувувчининг шундай жоиз бошқаруви $u(\cdot)\in P[0,\varepsilon]$ мавжудки, (8) системанинг ξ, $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ учликка мос келувчи, бошланиш нуқтаси $\xi\in R^{d}$ бўлган, $z(t,u(\cdot),v(\cdot),\xi)$ траекторияси $A\subset R^{d}$ тўпламга ε дан кеч бўлмаган вақтда келиб тушади, яъни шундай $t_{*}\in[0,\varepsilon]$ мавжудки $z(t_{*},u(\cdot),v(\cdot),\xi)\in A$ (ε вақтда келиб тушади, яъни $z(\varepsilon,u(\cdot),v(\cdot),\xi)\in A$**).**
$\omega=\left\{\tau_{0},\tau_{1},\tau_{2},\ldots,\tau_{n}\right\}-\left[0,t\right]$ кесма бўлакланиши ва

$$T^{\omega}M=T^{\delta_1}T^{\delta_2}...T^{\delta_n}M,\quad \Pi^{\omega}M=\Pi^{\delta_1}\Pi^{\delta_2}...\Pi^{\delta_n}M,$$

бу ерда $\delta_i=\tau_i-\tau_{i-1}, i=1,2,...,n$.

5- таъриф . $\tilde{T}^{t}M=\bigcap\limits_{|\omega|=t}T_{\omega}M$, $\tilde{\Pi}_{t}M=\bigcap\limits_{|\omega|=t}\Pi_{\omega}M$.

$\bar{T}^{\varepsilon}$ ва $\bar{\Pi}^{\varepsilon}$ операторлар мос равишда T^{ε} ва Π^{ε} операторлардан шуниси билан фарқ қиладики, уларнинг таърифида қувувчининг ихтиёрий жоиз бошқаруви $v\left(\cdot\right)\in Q\left[0,\varepsilon\right]$ ўрнига ўзгармас бошқарув $v(\cdot)=v\in Q$ олинади.

Юқоридагидек $\bar{T}^{\omega}=\bar{T}^{\delta_1}\bar{T}^{\delta_2}...\bar{T}^{\delta_n}A$, $\bar{\Pi}^{\omega}=\bar{\Pi}^{\delta_1}\bar{\Pi}^{\delta_2}...\bar{\Pi}^{\delta_n}A$.

20-теорема. $M_0\in C^{d}$ ва $M_k\in C^{d}, P_k\in K^{p}, Q_k\in K^{q}$ кетма-кетликлар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $M_k\supset M_{k+1}\supset\cdots\supset M_0$, $h(M_k,M_0)\to 0$, $k\to\infty$ да;
2) $P_k\supset P_{k+1}\supset\cdots\supset P_0$, $h(P_k,P_0)\to 0$, $k\to\infty$ да;
3) $Q_k\subset Q_{k+1}\subset\cdots\subset Q_0$, $h(Q_k,Q_0)\to 0$, $k\to\infty$ да;

4) $f(z,P_k,v)$ тўплам ихтиёрий $z\in R^{d}, v\in Q$ $f(z,P_k,v)$ да барча $k\geq 0$ учун қаварик бўлсин. У ҳолда

$$\bar{T}^{\varepsilon}(M_0,P_0,Q_0)=\bigcap_{k\geq 1}\bar{T}^{\varepsilon}(M_k,P_k,Q_k),\ \bar{\Pi}^{\varepsilon}(M_0,P_0,Q_0)=\bigcap_{k\geq 1}\bar{\Pi}^{\varepsilon}(M_k,P_k,Q_k)$$

тенгликлар ўринлидир.

21-теорема. 20-теоремада келтирилган барча шартлар бажарилсин ва ω_k – $\left[0,t\right]$ кесманинг майдаланувчи бўлакланишлари кетма-кетлиги бўлсин, яъни $\omega_k\subset\omega_{k+1},|\omega_k|=t,\max\left|\tau_i^k-\tau_{i-1}^k\right|\to 0$ қачон $k\to\infty$. У ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли

$$\tilde{T}^{t}(M_0,P_0,Q_0)=\bigcap_{k\geq 1}\bar{T}^{\omega_k}(M_{kk},P_k,Q_k),$$
$$\tilde{\Pi}^{t}(M_0,P_0,Q_0)=\bigcap_{k\geq 1}\bar{\Pi}^{\omega_k}(M_k,P_k,Q_k).$$

20-теорема ва 21-теоремага ўхшаш теоремалар $\tilde{T}_{t}M$ ва $\tilde{\Pi}_{t}M$ қуйи

операторлар учун ҳам ўринлидир.

Тўртинчи бобнинг учинчи параграфида белгиланган вақтли ночизиқли дифференциал ўйинлардаги юқори ва қуйи операторлар учун соддалаштирилган аппроксимацион схемалар қуриш, улар ўртасидаги боғлиқлик, бу муносабатларнини яқинлашиш масаласига татбиғи ўрганилган.

22-теорема. $M \in C^d$ бўлса, у ҳолда $\tilde{\Pi}^t M = \bigcap_{\delta>0} \tilde{\Pi}_t(M + \delta H)$ тенглик ўринли.

ХУЛОСА

Диссертация иши альтернирланган интеграл учун аппроксимацион схемалар қуриш, қувишнинг биринчи ва умумлашган биринчи тўғри усуллари интегралларининг аппроксиматив хоссаларини ўрганиш ва уларнинг ночизиқли бошқарув системаларидаги яқинлашиш масаласига татбиғига бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Дифференциал мансубликлар билан тавсифланувчи ўйинлар учун альтернирланган интегралнинг ярим группавий хоссаси ва рекуррент муносабат исботланган. Умумлашган биринчи усул интеграли ёрдамида альтернирланган интеграл учун янги соддалаштирилган схемалар қурилган ва уларнинг ночизиқли бошқарув тизимларидаги яқинлашиш масаласига татбиғи берилган.

2. Дифференциал мансубликлар билан тавсифланувчи ўйинлар учун қуйи альтернирланган интегралнинг янги аппроксиматив хоссалари исботланган ва янги соддалаштирилган схемалар қурилган ҳамда уларнинг қувиш масаласига қўлланиши келтирилган.

3. Квазичиқли дифференциал ўйинлар учун альтернирланган интегралнинг иккиламчилик хоссаси исботланган ва уни қувиш масаласига татбиғи келтирилган.

4. Қувишнинг биринчи тўғри усули дифференциал мансубликлар билан тавсифланувчи ўйинлар учун баён қилинган. Шундай ўйинлар учун қувучининг стробоскопик стратегиялари синфи киритилган. Қувишнинг биринчи тўғри усули интеграли воситасида дифференциал мансубликлар билан тавсифланувчи ўйинларда стробоскопик стратегиялари синфида қувишни белгиланган вақтда тугатиш учун зарур ва етарли шарт топилган, шунингдек бу интегрални юқоридан ва қуйидан берилган аниқликда аппроксимацияловчи янги тақрибий схемалар қурилган.

5.Умумлашган биринчи тўғри усул интеграли учун янги соддалаштирилган формулалар, унинг таърифида қатнашувчи барча ўлчовли ёпиқ қийматли акслантиришлар бўйича бирлашмани, компакт қийматли, бўлакли-ўзгармас, узлуксиз ва кўпёқли қийматли бўлакли-ўзгармас акслантиришлар синфигача торайтириш орқали ҳосил қилинган. Бу интегрални дифференциал ўйин дастлабки берилганларига нисбатан ярим барқарор эканлиги исботланган.

6. Ночизиқли ўйинлардаги асосий операторларни қуриш учун янги соддалаштирилган схемалар келтирилган ҳамда қуйи ва юқори операторларнинг дифференциал ўйин дастлабки берилганларининг кичик ўзгаришларига нисбатан ярим барқарор эканлиги исботланган.

7. Белгиланган вақтли ночизиқли дифференциал ўйинлар учун қуйи ва юқори операторлар ўртасида янги муносабат ўрнатилган ва уни қувиш масаласига татбиғи берилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮУЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ТАШКЕНТСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ИСКАНАДЖИЕВ ИКРОМЖОН МАДАШЕВИЧ

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ АЛЬТЕРНИРОВАННОГО ИНТЕГРАЛА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ – 2021

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.4.DSc/FM6.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского АН РУз. и в Ташкентском химико-технологическом институте

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Азамов Абдулла** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
	Седаков Артем Александрович доктор физико-математических наук, профессор
	Саматов Бахром Таджиахматович доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится « 27 » декабря 2021 г. в 10-00 часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрировано за № 128). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 16 » декабря 2021 г.
(протокол рассылки № 2 от « 16 » декабря 2021 г.).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней д.ф.-м.н., профессор.

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней д.ф.-м.н., старший научный сотрудник.

Р.Р. Ашуров
Заместитель председателя Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней д.ф.-м.н, профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые на мировом уровне, в основном, приводятся к задачам о конфликтных управляемых процессах, которые относятся к решению проблем связанных с теорией дифференциальных игр. Дифференциальная игра является математической моделью конфликтно управляемых процессов, таких как преследование одного управляемого объекта другим, управление объектом при заранее неизвестных возмущающих силах, задача выживания в условиях неопределенности и др. Поэтому во всем мире разрабатываются новые методы решения таких задач. Много подходов разработано для решения задач преследования. Эти подходы во многом зависят от определения понятия стратегии. Задачи преследования одного управляемого объекта другим имеют важное значение при решении многих проблем системного анализа, менеджмента и в теории принятия решений.

В настоящее время во всем мире актуальной является задача разработки новых аппроксимационных схем, новых упрощенных формул для интегралов, используемых в прямых методах преследования. Особое значение имеет второй прямой метод, который основан на понятии альтернированного интеграла. Альтернированный интеграл отличается от обычных интегралов двумя особенностями. В его определении участвуют интеграл от многозначного отображения и операция пересечения по вектор-функциям. Эти операции затрудняют вычисление альтернированного интеграла, особенно это касается нелинейных систем. В связи с этим в настоящее время актуальными в мире являются исследования аппроксимационных схем для альтернированного интеграла и их приложения к задаче сближения в нелинейных системах управления. Поэтому разработка новых упрощенных схем для альтернированного интеграла и их применение для решения различных практических задач определены в качестве целевых научных исследований.

В целом нашей стране большое внимание уделяется актуальным направлениям математики, имеющим научное и практическое применение. В частности, в последние годы достигнуты значительные результаты в разработке аппроксимационных схем для интегралов прямых методов преследования в дифференциальных играх и их применении для решения практических задач. Исследования на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Дифференциальные уравнения и математическая физика, теория динамических систем» обозначены как основные цели и задачи в области математики[1].

Дальнейшее развитие исследований по разработке новых

[1] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

аппроксимационных схем и их приложению к задачам сближения в нелинейных системах управления призвано внести свой вклад в реализацию данного Постановления.

В целом настоящая диссертационная работа направлена на решение задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года “О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан” и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики” и в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данная диссертация выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. “Математика, механика и информатика”.

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации.

Научные исследования по развитию методов аппроксимации альтернированного нтеграла и их применению к решению задач сближения в нелинейных системах управления ведутся в крупных научных центрах мира, в частности это Department of Mathematics and Statistics of Loyola University Chicago(США), Université de Bretagne Occidentale (Франция), Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique(Франция), Mathematical center for interdiscipline research and School of mathematical sciences, Soochow University(Китай), China University of Geosciences (Китай), Università di Roma “La Sapienza”(Италия), Institute of Applied Mathematics and Mechanics of University Warsaw(Польша), University of Cambridge (Англия), University Putra (Малайзия), Московский Государственный университет им. М.В.Ломоносова, Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук, Институт математики и механики им.Н.Н.Красовского УрО РАН, Санкт-Петербургский государственный университет, Удмуртский государственный университет, Московский физико-технический институт, Институт проблем управления РАН, Институт математики Национальной академии наук Украины, Институт кибернетики НАН Украины.

В последние годы в результате научных исследований по разработке аппроксимационных схем для интегралов прямых методов преследования в дифференциальных играх решен целый ряд актуальных задач, в том числе: получены аппроксимационные схемы построения альтернированного интеграла, оценка скорости сходимости альтернированных сумм к альтернированному интегралу и устойчивости приближенных альтернированных сумм, алгоритм численной реализации альтернированного интеграла для линейных дифференциальных игр; получено приложение альтернированного интеграла к задаче синтеза управлений; установлена связь

альтернированного интеграла с стабильным мостом Красовского и уравнением Гамильтона-Якобы (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Московский физико-технический институт); разработаны эффективные методы для решения нелинейных дифференциальных игр преследования-убегания, аппроксимационные схемы и доказана их сходимость для оператора Понтрягина и Пшеничного в нелинейных системах (Институт кибернетики НАН Украины); предложены процедуры регуляризации классических принципов оптимальности из статической теории игр, которые приводили к построению новых динамически устойчивых и сильно динамически устойчивых принципов оптимальности для неантагонических игр (Санкт-Петербургский Государственный университет); было выведено необходимое условие нахождения седловой точки как решение задачи дифференциальной игры (Принстонский университет); изучена максиминная дифференциальная игра в гильбертовом пространстве (Кембриджский университети, Путра университет);

В настоящее время во многих научных центрах продолжаются научно-исследовательские работы по теории дифференциальных игр и их приложениям. В частности: разработки аппроксимационных схем для построения альтернированного интеграла и их приложения к задачам сближений, а также таких приоритетных направлениях, как задачи конфликтных ситуаций, описываемых дифференциалными включениями; разработка методов решения нелинейных задач теории дифференциальных игр и их приближенных решений с заданной точностью; приближенные и численные методы построения стабильного моста Красовского для нелинейных дифференцииальных игр, решение задачи о сближении управляемых систем с неопределенными параметрами на конечном промежутке времени; разработка эффективных методов преследования для дифференциальных игр с импульсными управлениями и дробными производными, развитием операторной конструкции для нелинейных дифференциальных игр, задач многократной поимки, задач группового преследования в бесконочномерных пространствах и в неограниченных областях; разработка численных методов для решения нелинейных стационарных игр на векторных полях; исследование существование цены и ситуации равновесии по Нэшу дифференциальной игры с ассиметрией и задержкой информации, а также нелинейные дифференциальные игры в гильбертовым пространстве и в других приоритетных напрвлениях.

Степень изученности проблемы. Впервые дифференциальные игры были изучены Р. Айзексом. В его знаменитой монографии рассмотрено большое количество конкретных задач, где на конкретных примерах выяснена часть сложности решения. Согласно подходу Н. Н. Красовского, игроки выбирают позиционную стратегию, при этом доказывается существование решений дифференциальной игры в виде альтернативы.

Дальнейшее развитие этот подход к дифференциальным играм получил в работах Ю. С. Осипова, А. И. Субботина, А. Б. Куржанского, А. В. Кряжимского, Ф. Л. Черноусько, В. Н. Ушакова, А. Г. Ченцова, Н. Ю. Лукоянова, Н. Н. Субботина, В. Е. Третьякова, В. И. Ухоботова и др.

Ю. С. Осиповым исследованы дифференциально – разностные игры сближения с помощью метода мини-максного программного поглощения и получены достаточны условия для завершения преследования. Н. Ю. Лукояновым изучены аппроксимационные схемы для нелинейных дифференциальных игр нейтрального типа и с наследственной информацией. В. Н. Ушаковым, А. А. Ершовым исследована задача о сближении управляемых систем с неопределенными параметрами на конечном промежутке времени и разработан метод приближенного вычисления множества разрешимости этой задачи.

В подходе Л. С. Понтрягина решение задачи преследования в дифференциальных играх основывается на двух прямых методах.

Н. Ю. Сатимовым совместно с Е. Ф. Мищенко второй прямой метод преследования обобщен на класс квазилинейных дифференциальных игр. Н. Ю. Сатимовым предложены различные модификации первого прямого метода преследования, а также методов убеганий Понтрягина в дифференциальных играх. А. А. Азамовым предложены двойственная теория альтернированного интеграла и различные упрощенные схемы для построения альтернированного интеграла, а также доказана полуустойчивость альтернированного интеграла при односторонних возмущениях исходных данных дифференциальной игры. Развитие второго прямого метода преследования для нелинейных дифференциальных игр получило в исследованиях Б. Н. Пшеничного и им разработана операторная конструкция дифференциальных игр. Позже Е. С. Половинкиным предложена операторная конструкция для неавтономных дифференциальных игр и рассмотрены отдельные вопросы приближенного вычисления альтернированного интеграла. В определении альтернированного интеграла участвует интеграл от многозначного отображения и это усложняет его вычисления. Впервые М. С. Никольским предложена упрощенная схема для альтернированного интеграла в линейных дифференциальных играх без участия интеграла многозначного отображения. Дальнейшее развитие разработки аппроксимационных схем для альтернированного интеграла получили в исследованиях А. Б. Курянского, Н. В. Мельникова, Е. С. Половинкина, Г. Г. Иванова, Р. Константинова, А. В. Хорева и Д. Б. Силина.

В настоящее время аппроксимационные схемы для альтернированного интеграла разработаны, в основном, для линейных дифференциальных игр, а для нелинейных дифференциальных игр они не изучены. Теория дифференциальных игр со многими игроками, участниками с разной информацией и с разными ограничениями на допустимом управлении игроков изучена Н. Ю. Сатимовым, А. А. Азамовым, Л. А. Петросяном, М. С. Никольским, Б. П. Гусятниковым, А. А. Чикрия, Г. Ц. Чикрия,

Н. Л. Григоренко, А. С. Мищенко, Б. Б. Риксиевым, А. З. Фазиловым, М. Тухтасиновым, М. Ш. Маматовым, Б. Саматовым, Г. Ибрагимовым, А. Кучкаровым, Н. Мамадалиевым и другими.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами, научно-исследовательского учреждения, в котором выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по фундаментальным грантам Ф4-ФА-Ф014 «Развитие методов слежения траекторий и синтеза стратегий в динамических и управляемых системах и их приложения к математическим моделям тепловых и химических процессов» (2012-2016 гг.) и ОТ-Ф4-84 «Дискретно-численный метод для полиномиальных систем и его приложения к моделированию циклических и управляемых процессов».

Целью исследования являются получение новых аппроксимационных схем для альтернированного интеграла и их приложения к задаче сближения в нелинейных системах управления.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

построение новых аппроксимационных схем для альтернированного интеграла и их приложения к задаче сближения в нелинейных системах управлений, а также доказательство полугруппового свойства альтернированного интеграла и выводение нового реккурентного соотношения для этого интеграла;

установление новых аппроксимационных схем для нижнего альтернированного интеграла в дифференциалных включениях и их применение к задаче сближения в нелинейных системах управлений, а также доказательство соотношения двойственности альтернированного интеграла для квазилинейных дифференциальных игр и ее применение к задаче преследования;

построение новых приближенных схем, аппроксимирующих интегралы первого и обобщенного первого прямых методов сверху и снизу с заданной точностью и доказательство полуустойчивости интегралов первого и обобщенного первого методов преследования при односторонних возмущениях исходных данных дифференциальной игры;

получение новых упрощенных схем для построения основных операторов в нелинейных дифференциальных играх и аппроксимирующих их с заданной точностью, а также доказательство полуустойчивости верхнего и нижнего операторов в нелинейных дифференциальных играх, а также установление связи между верхним и нижним операторами для нелинейных дифференциальных игр с фиксированным временем; их применение к задаче сближения в нелинейных системах управлений.

Объектами исследования являются многозначные отображения и интегралы прямых методов преследования.

Предметом исследования являются теория многозначных отображений, теория дифференциальных включений, теория альтернированного интеграла, теория операторов Понтрягина и Пшеничного.

Методы исследования. В работе применяются методы теории

многозначного отображения и выпуклого анализа, аппарат операторов Понтрягина и Пшеничного, современной теории дифференциальных уравнений и методы нелинейного анализа.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

разработаны новые аппроксимационные схемы для нижнего и верхнего альтернированных интегралов, описываемых дифференциальными включениями, а также доказано соотношение двойственности альтернированного интеграла для квазилинейных дифференциальных игр;

получено необходимое и достаточное условия посредством интеграла первого прямого метода для завершения преследования в дифференциальной игре, описываемой дифференциальным включением в фиксированом моменте времени;

получены новые приближенные схемы, аппроксимирующие интегралов первого и обобщенного первого прямого методов сверху и снизу с заданной точностью, а также доказана полуустойчивость этих интегралов при односторонних возмущениях исходных данных дифференциальной игры;

доказана полуустойчивость верхних и нижних операторов в нелинейных дифференциальных играх, а также установлена связь между верхним и нижним операторами для нелинейных дифференциальных игр с фиксированным временем.

Практические результаты исследования состоят в развитии методов построений аппроксимационных схем для альтернированного интеграла, описываемого дифференциальными включениями, которые могут быть применены для решения различных задач менеджмента, автоматики, долгосрочного прогнозирования, упраления технологическими процессами, в технике и других областях.

Достоверность результатов исследования основывается на четкости и однозначности определения всех понятий, введенных в диссертации, дедуктивной строгости доказательств всех результатов, корректности выводов, а также достаточности приведеных литературных ссылок на источники в тех случаях, когда используются известные понятия и факты.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в диссертации результаты могут быть использованы в дальнейшей разработке аппроксимационных схем для интегралов прямых методов преследования относительно конфликтных управляемых систем, описываемых дифференциальными включениями.

Практическая значимость диссертационного исследования определяется возможностью применения полученных в работе научных результатов в решении практических задач математической теории управляемых процессов в условиях неопределенности, а также при решении задач системного анализа, принятия решений, менеджмента, долгосрочного прогнозирования.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с аппроксимационными схемами для альтернированного интеграла и их приложением к задаче сближения в нелинейных системах, были использо-

ваны в следующих научно-исследовательских проектах:

двойственность альтернированного интеграла для квазилинейных дифференциальных игр были использованы при выполнении научно-исследовательского проекта №ОТ-Ф4-33 «Создание новых способов для управления конфликтами, описываемыми дифференциальными уравнениями и их численная реализация» (Национальный Университет Узбекистана, справка № 04/11-7212 от 10 ноября 2021 года). Применение научных результатов позволило построить позиционные стратегии игроков в первом и втором прямом методах преследования в управлени конфликтными ситуациями и получить достаточные условия разрешимости в нелинейной задаче управления, возникающие при численной реализации построения позиционных стратегий игроков;

новые аппроксимационные схемы для интегралов прямых методов преследования и их приложения к задаче обратной связи в нелинейных системах управления с дифференциальными включениями были использованы при выполнении зарубежного проекта «Плазменные технологии» (Самарский государственный технический университет, справка № 01.0202/12-25 от 28 апреля 2021 года). Применение научных результатов дало возможность найти решения задач дискретизации управления системой соленоидальных и магнитоквадрупольных полей и оптимизации управления потоками заряженных частиц;

приближенные схемы, аппроксимирующей сверху и снизу с заданной точностью в первом прямом методе преследования были использованы при выполнении зарубежного проекта AP 05133858 «Контрастные структуры в сингулярных возмущенных уравнениях и их приложения в теории фазовых переходов», (Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, справка № 19 от 10 ноября 2021 года). Применение научных результатов позволило доказать существование контрастных замкнутых траектории в фазовой структуре решения сингулярно возмущенных уравнений и в фазовых переходах, описываемых дифференциальными включениями;

методы преследования, основанные на аппроксимации верхнего и нижнего альтернированного интеграла для дифференциальных включений были использованы в зарубежном проекте 01-01-16-1840FR «Новые методы решения дифференциальных игр преследования и убегания со многими преследователями на многообразиях с Евклидовой метрикой» для решения задачи дифференциальных игр преследования в бесконечномерных пространствах с геометрическими и интегралными ограничениями на управления игроков (Университет Путра Малайзия, справка от 12 ноября 2020 года);

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 20 научных и научно-практических конференциях, в том числе на 10 международных и 10 республиканских конфренциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации

опубликовано 37 научных работ, в том числе 13 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, из них 6 опубликованы в зарубежных журналах и 7 в республиканских изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 191 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертации обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная “**Аппроксимация интеграла первого прямого метода преследования для дифференциальных включений”,** посвящена первому прямому методу преследования, описываемого дифференциальными включениями вида $\dot{z} \in -F(t,v)$, где F – непрерывное (в метрике Хаусдорфа) компактнозначное отображение.

В первом параграфе первой главы даны определения классов стробоскопических и почти стробоскопических стратегий преследователя. Доказаны необходимость и достаточность интеграла первого прямого метода для завершения игры в классе стробоскопических стратегий в фиксированном моменте времени. Построены приближенные схемы, аппроксимирующие сверху и снизу, также доказана полуустойчивость его при односторонних возмущениях исходных данных дифференциальной игры.

Рассматривается управляемая система

$$\dot{z} \in -F(t,v) \tag{1}$$

где $z \in R^d$, $v \in Q \in K^q$, $t \in I$, $F : I \times Q \to coK^d$ – непрерывное отображение. А также дано терминальное множество M, $M \in R^d$ игры (1).

Семейство всех измеримых функций $a(\cdot) : \Delta \to A$ обозначим через $A[\Delta]$, где A подмножество евклидового пространства. Совокупность всех абсолютно-непрерывных функций $z(\cdot) : J \to R^d$ обозначим $AC(J)$. Каждую функцию $v(\cdot) \in Q(I)$ будем называть допустимым управлением убегающего.

Пусть $P_B = \{U\}$ – совокупность всех борельевских измеримых сечений $U : I \times Q \to R^d$ отображения $F(t,v)$ на отрезке I. Элементы U из класса P_B называются стробоскопическими стратегиями преследователя. Для каждой

точки $\xi \in R^d$, стратегии преследователя $U \in P_B$ и допустимого управления убегающего $v(\cdot) \in Q(I)$ отображение Γ ставит в соответствие функцию $z(\cdot) \in AC(I)$, определяемую формулой

$$z(t) = \xi - \int_0^t w(t)dt \text{ , где } w(t) = U(t, v(t)).$$

Функцию $z(t) = z(t, \xi, U, v(\cdot))$ назовем траекторией системы (1), соответствующей начальной точке $\xi \in R^d$, стратегии преследователя $U \in P_B$ и допустимому управлению убегающего $v(\cdot) \in Q(I)$ на отрезке $I = [0, \tau]$.

Определение 1. В игре (1) из точки $\xi \in R^d$ можно завершить преследование (м.з.п.) в момент времени τ (за время τ) в классе стратегий P_B, если при любом допустимом управлении убегающего $v(\cdot) \in Q(I)$ существует стратегия преследователя $U \in P_B$ для траектории $z(t, \xi, U, v(\cdot)) \in \Gamma(\xi, U, v(\cdot))$, соответствующей тройке $\xi, U, v(\cdot)$, и имеет место включение $z(\tau) \in M$ ($z(t_*, \xi, U, v(\cdot)) \in M$ при некотором $t_* \in I$).

Интегралом от измеримого многозначного отображения $X(\cdot) : [\alpha, \beta] \to C^d$ называется совокупность всех интегралов $\int_\alpha^\beta x(t)dt$ от интегрируемых однозначных сечений $x(\cdot) : [\alpha, \beta] \to R^d$ отображений $X(t)$, т.е.

$$\int_\alpha^\beta X(t)dt = \left\{ \int_\alpha^\beta x(t)dt \middle| x(t) \in X(t) n.в. t \in [\alpha, \beta] \right\}.$$

Пусть

$$W^\tau = M + \int_0^\tau \bigcap_{v \in Q} F(t, v)dt \text{ ц}$$

Теорема 1. Если $z_0 \in W^\tau$, то в игре (1) из точки z_0 можно завершить преследование в момент времени τ в классе стробоскопических стратегий P_B.

Ω обозначает совокупность всех разбиений ω, $\omega = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \iota_{n-1} < \tau_n = \tau\}$ отрезка I, а $\Delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $\delta_i = |\Delta_i|$, $|\omega| = \max_{1 < i < n} \delta_i$.

Пусть M – линейное подпространство R^d, L – его ортогональное дополнение в R^d, а через π обозначим оператор ортогонального проектирования из R^d на L и $\omega \in \Omega$. Положим

$$F_i = \bigcap_{v(\cdot) \in Q(\Delta_i)} \int_i \pi F(t, v(t))dt, \quad F(\omega) = \sum_{k=1}^n F_i, \quad W^F = \bigcap_{\omega \in \Omega} F(\omega) .$$

Здесь интеграл $\int_i$ берется по отрезку $\Delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$.

Теорема 2. Справедливо равенство

$$W^F = \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} \pi F(t,v)dt .$$

Теорема 3. Для того, чтобы в игре (1) из точки z_0 можно было завершить преследование в момент времени τ в классе P_B стробоскопических стратегий, необходимо и достаточно

$$\pi z_0 \in \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} \pi F(t,v)dt \ .$$

Пусть $\gamma(\delta)$ – модуль непрерывности отображения $F(t,v)$, т.е.

$$\alpha(\delta) = \max\left\{ h\left(F\left(t_1,\upsilon_1\right), F\left(t_1,\upsilon_1\right)\right) \middle| \left|t_1 - t_2\right| \le \delta, \left|\upsilon_1 - \upsilon_2\right| \le \delta,\ t_1,\ t_2 \in I, v_1, v_2 \in Q \right\},$$

а единичный замкнутый шар в R^d обозначим через H. Метрика Хаусдорфа для $A, B \in K^d$ определяется формулой

$$h(A,B) = \min\{r > 0 \mid A \subset B + rH, B \subset A + rH\}.$$

Второй параграф первой главы посвящен построению приближенных схем, аппроксимирующих сверху с заданной точностью интеграл первого прямого метода преследования для дифференциальных включений.

Из построения интеграла первого прямого метода преследования следует, что при нахождении этого множества основная трудность заключается в вычислении интеграла вида

$$\int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} F(t,v)dt .$$

В теореме 2 установлено равенство $\int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} F(t,v)dt = W^F$. Поэтому в дальней-шем используем обозначение W^F.

Теорема 4. Пусть ε – достаточно малое положительное число. Тогда существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\omega \in \Omega$, где $|\omega| < \delta$, справедливо неравенство $h[W^F, F(\omega)] < \varepsilon$.

Пусть $\omega_n = \{0, \delta_n, ..., (n-1)\delta_n, n\delta_n = \tau\}$ – последовательность равномерных разбиений отрезка I.

Следствие 1. Если $\varepsilon > 0$, то существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ имеют место включения

$$W^F \subset F(\omega_n) + \varepsilon H, \qquad F(\omega_n) \subset W^F + \varepsilon H .$$

Пусть $\omega_n = \{0, \delta_n, ..., (n-1)\delta_n, n\delta_n = \tau\}$–последовательность равномерных разбиений отрезка I. Определим множества

$$\tilde{F}_i = \bigcap_{v\in Q} [F(\xi_i, v) + \delta_n \gamma(\delta_n) H], \quad \tilde{F}(\omega_n) = \sum_{i=1}^n \tilde{F}_i \tag{2}$$

Теорема 5. Справедливо равенство $W^\tau = \bigcap_{\omega_n \in \Omega} \tilde{F}(\omega_n)$.

Следствие 2. Если $\varepsilon > 0$, то существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ имеют место включения

$$W^F \subset \tilde{F}(\omega_n) + \varepsilon H, \quad \tilde{F}(\omega_n) \subset W^F + \varepsilon H.$$

Следует заметить, что множества $\tilde{F}(\omega_n)$ построены без участия интеграла многозначного отображения и аппроксимируют интеграл W^F сверху, т.е. $W^F \subset \tilde{F}(\omega_n)$ для любого $\omega_n \in \Omega$. При этом в каждом слагаемом $\tilde{F}_i$ участвует $\delta\gamma(\delta)H$. Естественно, возникает следующий вопрос: нельзя ли вычислить множество $\tilde{F}(\omega_n)$ без слагаемого $\delta\gamma(\delta)H$? Оказывается, слагаемое $\delta\gamma(\delta)H$ в формулах (2) имеет существенное значение. Приведен пример.

Теперь рассмотрим случай, когда $F(t,v) = \exp(tC) f(P,v)$, $P \in K^p$, $v \in Q$ и $f : P \times Q \to coK^d$ – непрерывно. В этом случае также предложены новые упрощенные схемы, аппроксимирующие сверху интеграл первого прямого метода для дифференциальных включений.

Третий параграф первой главы посвящен построению приближенных схем, аппроксимирующих снизу с заданной точностью интеграл первого прямого метода преследования для дифференциальных включений.

Пусть $F(t,v) = \exp(tC) f(P,v)$, $P \in K^p$, $v \in Q$ и $f : P \times Q \to coK^d$ – непрерывно. Положим $W^F = \int_0^\tau \bigcap_{v \in Q} \exp(tC) f(P,v) dt$ и

$$\bar{F}_i = \bigcap_{v \in Q} \int_i \exp(tC) dt f(P,v), \; \bar{F}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_i.$$

Лемма 1. Для любого $\omega \in \Omega$ имеет место включение $\bar{F}(\omega) \subset W^F$.

Отметим, что множество $\bar{F}(\omega)$ монотонно возрастает при измельчении разбиения ω и аппроксимирует интеграл W^F снизу.

Теорема 6. Имеет место равенство $cl\{\bigcup_{\omega_n \in \Omega} \bar{F}(\omega_n)\} = W^F$.

Следующая теорема и ее следствия устанавливают оценки близости множеств W^F и $\bar{F}(\omega)$.

Пусть теперь $W^F = \int_0^\tau \bigcap_{v \in Q} \exp(tC) f(P,v) dt$ и $\bar{F}_i = \bigcap_{v \in Q} \int_i \exp(tC) dt f(P,v)$.

Пусть ω – произвольное разбиение из Ω. Положим $\delta = \max_{1 \le i \le n} \delta_i$.

Теорема 7. Справедлива оценка

$$h[W^F, \bar{F}(\omega)] \le L\delta,$$

где $L = 2e^{2\tau|C|} |f||C|, |f| = \max_{v \in Q} |f(P,v)|$.

В четвертом параграфе первой главы установлена полуустойчивость

интеграла первого прямого метода преследования для дифференциальных включений при односторонних изменениях начальных данных дифференциальной игры.

Вторая глава диссертации «Аппроксимация интеграла обобщенного первого прямого метода преследования для дифференциальных включений» посвящена изучению аппроксимационных свойств интеграла обобщенного первого прямого метода преследования для дифференциальных включений

В первом параграфе второй главы на основе интеграла обобщенного первого прямого метода сформулировано новое достаточное условие завершения преследования для игр, описываемых дифференциальными включениями, и доказаны необходимость и достаточность интеграла этого метода для завершения преследования в классе стробоскопических стратегий.

Пусть $cl\Phi$ (соответственно $comp\Phi$) обозначает семейство всех измеримых замкнутозначных (соответственно компактнозначных) отображений $A(\cdot): I \to C^d$ (соответственно $A(\cdot): I \to K^d$), удовлетворяющих условию

$$\int_0^\tau A(t)dt \subset M .$$

По каждому $A(\cdot) \in cl\Phi$ построим интеграл

$$W[A(\cdot),\tau] = \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} [A(t) + F(t,v)]dt .$$

Пусть $W_{об}^\tau = \bigcup_{A(\cdot)\in cl\Phi} W[A(\cdot),\tau]$. $W_{об}^\tau$ называется интегралом обобщенногоо первого прямого метода преследования.

Теорема 8. Для того, чтобы в игре (1) из точки z_0 можно было завершить преследование в момент времени τ в классе P_B стробоскопических стратегий, необходимо и достаточно, чтобы $z_0 \in W_{об}^\tau$.

В связи с выше изложенным задача вычисления множества $W_{об}^\tau$ имеет важное значение для решения задачи преследования в играх (1). Однако, как правило, в большинстве случаев интеграл $W_{об}^\tau$ не поддается точному вычислению. Отсюда возникают вопросы приближенного вычисления и изучения аппроксимативных свойств $W_{об}^\tau$. По определению, для вычисления $W_{об}^\tau$ необходимо взять объединение по всем возможным измеримым замкнутозначным отображениям. Поэтому целесообразно поставить следующий вопрос: нельзя ли выделить подсемейство измеримых замкнутозначных отображений, которое имело бы более простое строение и достаточное для приближенного вычисления множества $W_{об}^\tau$.

Во втором параграфе второй главы диссертации ответ на поставленный

вопрос дается сужением операций объединения в определении $W^{\tau}_{об}$ на класс компактнозначных, кусочно-постоянных, непрерывных и кусочно-постоянных отображений со значениями в многограннике.

Теорема 9. Справедливо равенство

$$W^{\tau} = \bigcup_{A(\cdot)\in comp\Phi} W[A(\cdot),\tau].$$

Π^{ε} (соответственно Π_{ε}) обозначает семейство всех измеримых отображений $B(t), t\in I$, таких, что при каждом t множество $B(t)$ является многогранником с рациональными вершинами, удовлетворяющих включению

$$\int_0^{\tau} B(t)dt \subset M + \varepsilon K, \qquad \int_0^{\tau} B(t)dt \subset M \overset{*}{-} \varepsilon K \tag{3}$$

где $K = \{x = (x_1, x_2, ..., x_d \mid\mid x_i \mid \le 1\}$ – единичный куб в пространстве R^d.

Теперь семейство всех отображений, участвующее в определении W^{τ}, сужаем до класса кусочно-постоянных отображений со значениями в Π^{ε}.

Теорема 10. Имеют место включения

$$W^{\tau} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\hat{B}(\cdot)\in\Pi^{\varepsilon}} W[\hat{B}(\cdot),\tau] \subset W_2^{\tau},$$

где $\hat{B}(\cdot)$ – кусочно-постоянное отображение из семейства Π^{ε}.

Следствие.7. Справедливо равенство

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{A(\cdot)\in cl\Phi^{\varepsilon}} W[A(\cdot),\tau] = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\hat{B}(\cdot)\in\Pi^{\varepsilon}} W[\hat{B}(\cdot),\tau],$$

где $\hat{B}(\cdot)$ – кусочно-постоянное отображение из семейства Π^{ε}. Это равенство имеет следующую игровую интерпретацию:

если $z_0 \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\hat{B}(\cdot)\in\Pi^{\varepsilon}} W[\hat{B}(\cdot),\tau]$,то в игре (1) из точки z_0 можно завершить преследование за время τ в любой ε-окрестности множества M в классе стратегии P_B.

В третьем параграфе изучаются задачи построения упрощенных формул для интеграла $W[A(\cdot),\tau]$, когда $A(\cdot)$ – непрерывное и кусочно-постоянное компактнозначное отображение.

В четвертом параграфе исследуются свойства интегралов $W[A(\cdot),\tau]$, $W^{\tau}_{об}$ при маленьких изменениях исходных данных дифференциальной игры (1). Доказано, что интегралы $W[A(\cdot),\tau]$, $W^{\tau}_{об}$ полуустойчивы при односторонних изменениях начальных данных дифференциальной игры, хотя это невыгодно преследователю.

В третьей главе **«Аппроксимация альтернированного интеграла для дифференциальных включений и ее приложения к задаче сближения в нелинейных системах управления»** исследуются аппроксимативные свойства альтернированного интеграла Понтрягина для игр преследования, описываемых дифференциальными включениями.

Второй прямой метод Понтрягина в линейных дифференциальных играх основывается на понятии альтернированного интеграла. Альтернированный интеграл отличается от обычных интегралов двумя особенностями. В его определении участвуют интеграл от многозначного отображения и операция пересечения по вектор-функциям. Эти операции затрудняют вычисление альтернированного интеграла, особенно для нелинейных систем. Поэтому задача построения новых аппроксимационных схем для альтернированного интеграла и их приложения к задаче сближения в нелинейных системах управления является актуальной.

В первом параграфе третьей главы доказаны полугрупповое свойство, рекуррентное соотношение для альтернированного интеграла для дифференциальных включений игр и их приложения к задаче сближения в нелинейных системах управлений.

Пусть ω – произвольное разбиение отрезка $I=[0,\tau]$, т.е. $\omega\in\Omega$. Определим частичные суммы S^i следующей рекуррентной формулой

$$S^0=M,\ S^i=\bigcap_{\upsilon[\bullet]\in Q(\Delta_i)}\left[S^{i-1}+\int_i F(t,\upsilon(t))dt\right],\ S(\omega)=S^n, i=1,2,...n. \qquad (4)$$

Множество $S(\omega)$ называется альтернированной суммой, а множество

$$W^\tau(M)=\bigcap_{\omega\in\Omega}S(\omega)$$

называется верхним альтернированным интегралом Понтрягина для дифференциальных включений.

В определении верхнего альтернированного интеграла участвует операция интегрирования многозначных отображений, что фактически равносильно операции объединения по всевозможным измеримым сечениям. Это обстоятельство усиливается при определении альтернированного интеграла для квазилинейных игр, когда операцию геометрической разности также приходится заменить пересечением по семейству функций. Поэтому задача разработки новых аппроксимационных схем для альтернированного интеграла является актуальной.

Первая упрощенная схема построения альтернированного интеграла в линейном случае предложена М.С.Никольским. В работах А.Азамова предложены различные упрощенные схемы для построения альтернированного интеграла.

Во втором параграфе третьей главы даны новые упрощенные схемы построения альтернированного интеграла для дифференциальных включений.

Модуль непрерывности отображения $F(t,v)$ обозначим $\alpha(\delta)$. Пусть $\omega\in\Omega_\alpha^\beta$. Положим $L^0=M$,

$$L^i=\int_i\bigcap_{v\in Q}[\frac{1}{\delta_i}L_{i-1}+2\alpha(\delta_i)H+F(t,v)]dt,\quad L(\omega)=L^n \qquad (5)$$

Определим множества $L^\tau(M)=\bigcap_\omega L(\omega)$.

Теорема 11. Если $M \in C^d$, то

$$W^\tau(M) = L^\tau(M).$$

Обратим внимание на одно отличие схемы (4) от схемы (3). Частичная сумма L^i строится, исходя из L^{i-1}, с наращиванием на каждом шаге слагаемого $2\delta_i\alpha(\delta_i)H$, принятого называть "шапкой М.С.Никольского". Если частичные суммы L^i строить без этой операции, то остается верным лишь включение $L^\tau(M) \subset W^\tau(M)$.

Следующая схема построения альтернированного интеграла была введена Н. Сатимовым применительно к линейным играм. Она примечательна тем, что сочетает в себе элементы первого и второго прямых методов Л.С.Понтрягина для задачи преследования.

Пусть $I = [0,\tau]$, $\omega \in \Omega$ и $B^0 = M$, $B^i = \bigcup\limits_{A(\cdot)} \int_i \bigcap\limits_{v \in Q} \left[A(t) + F(t,\upsilon)\right] dt$, где объединение производится по всем многозначным отображениям $A(\cdot) \in \Phi\left(\Delta_i, B^{i-1}\right)$, и $B(M,\omega) = B^n$, $B^\tau(M) = \bigcup\limits_{\omega} B(M,\omega)$.

Теперь опишем пример схемы, в которой итоговая "шапка надевается" на терминальное множество с самого начала, что позволяет заметно упростить построения.

Пусть по-прежнему ω – произвольное разбиение из Ω. Положим

$$D^0 = M, D^i = \int_i \bigcap_{v \in Q} [\frac{1}{\delta_i} D^{i-1} + F(t,v)] dt.$$

Определим $D(\omega) = D^n$, $D^\tau(M) = \bigcup\limits_{\omega \in \Omega} D(\omega)$.

Теорема 12. Пусть $M \in C^d$. Тогда справедливо равенство

$$W^\tau(M) = \bigcap_{\varepsilon > 0} D^\tau(M + \varepsilon H).$$

Теорема 13. Пусть $M \in coC^d$. Тогда справедливо равенство

$$W^\tau(M) = \bigcap_{\varepsilon > 0} B^\tau(M + \varepsilon H).$$

В заключение отметим, что теорема 13 может быть интерпретирована следующим образом:

если M – выпуклое замкнутое подмножество R^d и $z_0 \in W^\tau(M)$, то в игре (1) из точки z_0 возможно завершение преследования в любой ε-окрестности множества M в момент времени τ с помощью кусочно-стробоскопической стратегии преследователя. При этом преследователь для построения своего управления пользуется информацией о текущих значениях управления убегающего и текущем фазовом состоянии системы (1) в дискретные моменты времени.

Теперь приводим схемы, аппроксимирующие альтернированный интеграл снизу.

Теорема 14. Если $M \subset R^d$, то справедливо равенство

$$\bigcup_{\varepsilon>0} W^{\tau}\left(M \overset{*}{-} \varepsilon H\right) = \bigcup_{\varepsilon>0} D^{\tau}\left(M \overset{*}{-} \varepsilon H\right).$$

Теорема 15. Если $M \subset R^d$, то

$$\bigcup_{\varepsilon>0} W^{\tau}\left(M \overset{*}{-} \varepsilon H\right) = \bigcup_{\varepsilon>0} B^{\tau}\left(M \overset{*}{-} \varepsilon H\right).$$

В третьем параграфе изучаются аппроксимативные свойства нижнего альтернированого интеграла для игр преследования, описываемых дифференциальными включениями вида $\dot{z}(t) \in F(t,u)$, где F – непрерывное компактнозначное отображение. Установлена рекуррентная формула и предложены новые упрощенные схемы для нижнего альтернированного интеграла, а также доказано существование стратегии преследователя, имеющей кусочно – постоянную реализацию и завершающей преследование из тех начальных точек, к которым применим нижний альтернированный интеграл.

В четвертом параграфе третьей главы диссертации установлена связь между верхним и нижним альтернированными интегралами для квазилинейных дифференциальных игр и даны их приложения к задаче преследования.

Рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot{z} = f(t,u,v) \tag{6}$$

где $z \in R^d$, $t \in I$, $u \in P$, $v \in Q$, $P \in coK^p$, $Q \in coK^q$ и $f : I \times P \times Q \to R^d$ является непрерывной функцией. Множество $M, M \in C^d$ также фиксируется и называется терминальным множеством игры.

Пусть $W^{\tau}(M)$ и $W_{\tau}(M)$ обозначают соответственно верхний и нижний альтернированный интеграл Понтрягина для квазилинейных игр.

Следующие теоремы устанавливают связь между верхним и нижним альтернироваными интегралами для квазилинейных дифференциальных игр.

Теорема 16. Пусть $M \in coC^d$ и множество $f(t,P,v)$ выпукло для любых $t \in I, v \in Q$. Тогда справедливо равенство

$$W^{\tau}(M) = \bigcap_{\varepsilon>0} W_{\tau}(M + \varepsilon H) \tag{7}$$

Теорема 17. Пусть множество $M \subset R^d$ имеет выпуклое замкнутое дополнение и множество $f(t,v,Q)$ выпукло для любых $t \in I$ и $u \in P$. Тогда справедливо равенство

$$W_{\tau}(M) = \bigcup_{\varepsilon>0} W^{\tau}(M \overset{*}{-} \varepsilon H) \tag{8}$$

Отметим, что соотношения (7) и (8) впервые установлены А. Азамовым для линейных дифференцильных игр и даны их приложения к проблеме информированности игроков. Приведены приложения равенства (7) и (8) к задаче управления в квазилинейных системах.

Структура нелинейных дифференциальных игр описывается на языке операторов $\tilde{T}^t$ и $\tilde{\Pi}^t$, которые введены как естественное обобщение второго прямого метода Понтрягина в линейных дифференциальных играх. В работах

А. Азамова предложены нижние аналоги операторов $\tilde{T}^t$ и $\tilde{\Pi}^t$ и их приложения к исследованию качественной структуры фазового пространства дифференциальных игр преследования-убегания. Для симметричности, операторы $\tilde{T}^t$ и $\tilde{\Pi}^t$ назовем верхними, а нижние аналоги соответственно обозначим через $\tilde{T}_t$ и $\tilde{\Pi}_t$ и назовем их нижними операторами нелинейных дифференциальных игр. Эти операторы называются основными операторами нелинейных дифференциальных игр.

Четвертая глава диссертации «**Аппроксимация и полуустойчивость основных операторов в нелинейных дифференциальных играх»** посвящена изучению аппроксимативных свойств основных операторов в нелинейных дифференциальных играх и их связи.

В первом параграфе четвертой главы предлагаются новые упрощенные схемы для построения основных операторов, аппроксимирующие их с заданной точностью .

Рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{z} = f(z,u,v) \tag{9}$$

где $z \in R^d$, $u \in P$, $v \in Q$, $P \in K^p$, $Q \in K^q$, $f : R^d, \times P \times Q \to R^d$. Считаем в дальнейшем, что функция f удовлетворяет условиям в смысле Каратедори.

Любую функцию $u(\cdot) \in P[\alpha,\beta]$ (соответственно $v(\cdot) \in Q[\alpha,\beta]$) назовем допустимым управлением преследователя (убегающего). Решение уравнения (9), определяемое допустимыми управлениями $u(t)$ и $v(t)$, с начальной точкой ξ, обозначим через $z(t,u(\cdot),v(\cdot),\xi)$. Фиксируем подмножество M, $M \subset R^d$, называемое терминальным множеством.

Определение 1. Оператор T_ε (соответственно Π_ε) ставит в соответствие каждому множеству $A \subset R^d$ множество всех точек $\xi \in R^d$, таких, что существует допустимое управление $u(\cdot) \in P[0,\varepsilon]$ преследователя и что при любом допустимом управлении убегающего $v(\cdot) \in Q[0,\varepsilon]$ соответствующая траектория $z(t,u(\cdot),v(\cdot),\xi)$ системы (9) с началом в точке $\xi \in R^d$ попадает на множество $A \subset R^d$ не позднее, чем время ε, т.е. $z(t_*) \in A$ для некоторого $t_* \in [0,\varepsilon]$ (соответственно в момент времени ε, т.е. $z(\varepsilon) \in A$).

Пусть $\omega = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ – разбиение отрезка $[0,t]$, $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ и $|\omega| = t$. Положим

$$\Pi_\omega M = \Pi_{\delta_1}\Pi_{\delta_2}\ldots\Pi_{\delta_2}M, \text{ и } T_\omega M = T_{\delta_1}T_{\delta_2}\ldots T_{\delta_n}M .$$

Определение 2. $\tilde{\Pi}_t M = \bigcup\limits_{|\omega|=t} \Pi_\omega M, \tilde{T}_t M = \bigcup\limits_{|\omega|=t} T_\omega M$.

Пусть операторы $\bar{\Pi}_\varepsilon$ и $\bar{T}_\varepsilon$ отличаются от операторов T_ε и Π_ε тем, что в определении 1 вместо произвольных допустимых управлений $u(\cdot) \in P[0,\varepsilon]$ берутся только постоянные управления $u(\cdot) = u \in P$.

Пусть $\omega = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = t\}$ – разбиение отрезка $[0,t]$.

Положим $\overline{\Pi}_{\omega}M=\overline{\Pi}_{\delta_1}\overline{\Pi}_{\delta_2}...\overline{\Pi}_{\delta_n}M$ и $\overline{T}_{\omega}M=\overline{T}_{\delta_1}\overline{T}_{\delta_2}...\overline{T}_{\delta_n}M$. Определим

$$\overline{\overline{\Pi}}_t M=\bigcup_{|\omega|=t}\overline{\Pi}_{\omega}M\,,\quad \overline{\overline{T}}_{\varepsilon}M=\bigcup_{|\omega|=t}T_{\omega}M\,.$$

Теорема 18. Если M – открытое подмножество R^d, то справедливы равенства

$$\tilde{\Pi}_t M=\overline{\overline{\Pi}}_t M\,,\quad \tilde{T}_t M=\overline{\overline{T}}_t M\,.$$

Следствие 4. Пусть M – открытое подмножество R^d и $z_0\in\tilde{T}_t M$, $\left(z_0\in\tilde{\Pi}_t M\right)$. Тогда существует кусочно-постоянное управление $\hat{u}(\cdot)\in P[0,\varepsilon]$ преследователя такое, что для любого управления $v(\cdot)\in Q[0,\varepsilon]$ убегающего для соответствующего решения системы (9) выполняется включение $z(t_*)\in M$ для некоторого $t_*\in[0,\tau]$ ($z(\tau)\in M$).

Теперь изучим задачи построения эффективных схем для оператора $\overline{T}_t M$. Рассмотрим следующий оператор

$$\Theta_t A=\bigcup_{u\in P}\bigcap_{v\in Q}\bigcup_{t_*\in[0,\varepsilon]}[\xi\in R^d\mid z(t_*,u(\cdot),v(\cdot),\xi)=\xi+t_* f(\xi,u,v)\in A].$$

Определение оператора $\tilde{\Theta}_t A$ аналогично определению оператора $\tilde{T}_t M$. Сначала установим связь между операторами $\tilde{\Theta}_t A$ и $\overline{T}_t M$ и ее приложение к задаче преследования.

Теорема 19. Пусть M – открытое подмножество R^d. Тогда справедливо равенство

$$\overline{T}_t M=\bigcup_{\delta>0}\Theta_t(M\overset{*}{-}\delta H).$$

Во втором параграфе исследуется поведение верхних и нижних операторов при небольших изменениях начальных данных дифференциальной игры. Доказано, что основные операторы являются полуустойчивыми при односторонних изменениях исходных данных дифференциальной игры.

Определение 3. Оператор T^{ε} (соответственно Π^{ε}) ставит в соответствие каждому множеству $A\subset R^d$ множество $T^{\varepsilon}A$ всех точек $\xi\in R^d$ таких, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)\in Q\left[0,\varepsilon\right]$ существует допустимое управление $u\left(\cdot\right)\in P\left[0,\varepsilon\right]$ преследователя, такое, что соответствующая траектория системы (9) $z(t)=z(t,u(\cdot),v(\cdot),\xi)$ с началом в точке $\xi\in R^d$ попадает на $A\subset R^d$ не позднее, чем за время ε, т.е. $z(t_*)\in A$ для некоторого $t_*\in\left[0,\varepsilon\right]$ (соответственно в момент времени ε,т.е. $z(\varepsilon)\in A$).

Пусть $\omega=\left\{\tau_0,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\right\}$ – разбиение отрезка $\left[0,t\right]$. Положим $T^{\omega}M=T^{\delta_1}T^{\delta_2}...T^{\delta_n}M$, $\Pi^{\omega}M=\Pi^{\delta_1}\Pi^{\delta_2}...\Pi^{\delta_n}M$, где $\delta_i=\tau_i-\tau_{i-1}, i=1,2,...,n$.

Определение 4. $\tilde{T}^{t}M=\bigcap_{|\omega|=t}T_{\omega}M$, $\tilde{\Pi}_{t}M=\bigcap_{|\omega|=t}\Pi_{\omega}M$.

Пусть теперь операторы $\bar{T}^{\varepsilon}$ (соответственно $\bar{\Pi}^{\varepsilon}$) отличаются от операторов T^{ε}(соответственно Π^{ε}) тем, что в определении 3 вместо произвольных допустимых управлений $v(\cdot)\in Q[0,\varepsilon]$ берутся только постоянные управления $v(\cdot)=v\in Q$.

Пусть $\omega=\{0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<...<\tau_n=t\}$ – разбиение отрезка $[0,t]$.

$$\bar{T}^{\omega}=\bar{T}^{\delta_1}\bar{T}^{\delta_2}...\bar{T}^{\delta_n}A,\quad \bar{\Pi}^{\omega}=\bar{\Pi}^{\delta_1}\bar{\Pi}^{\delta_2}...\bar{\Pi}^{\delta_n}A\ ,$$

где $\delta_i=\tau_i-\tau_{i-1}, i=1,2,...,n.$

Теорема 20. Пусть $M_0\in C^d$ и последовательности $M_k\in C^d, P_k\in K^p$, $Q_k\in K^q$ удовлетворяют условиям:

1) $M_k\supset M_{k+1}\supset\cdots\supset M_0,\ h(M_k,M_0)\to 0$ при $k\to\infty$;

2) $P_k\supset P_{k+1}\supset\cdots\supset P_0,\ \ h(P_k,P_0)\to 0$ при $k\to\infty$;

3) $Q_k\subset Q_{k+1}\subset\cdots\subset Q_0,\ \ h(Q_k,Q_0)\to 0$ при $k\to\infty$;

4) Множество $f(z,P_k,v)$ – выпукло для любого $z\in R^d, v\in Q$ при всех $k\geq 0$. Тогда справедливы равенства

$$\bar{T}^{\varepsilon}(M_0,P_0,Q_0)=\bigcap_{k\geq 1}\bar{T}^{\varepsilon}(M_k,P_k,Q_k),\ \bar{\Pi}^{\varepsilon}(M_0,P_0,Q_0)=\bigcap_{k\geq 1}\bar{\Pi}^{\varepsilon}(M_k,P_k,Q_k).$$

Теорема 21. Пусть выполнены все условия теоремы 20 и ω_k – бесконечно измельчающаяся последовательность разбиений отрезка $[0,t]$, т.е. $\omega_k\subset\omega_{k+1}, |\omega_k|=t, \max\left|\tau_i^k-\tau_{i-1}^k\right|\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда имеют место равенства

$$\tilde{T}^t(M_0,P_0,Q_0)=\bigcap_{k\geq 1}\bar{T}^{\omega_k}(M_{kk},P_k,Q_k),\ \tilde{\Pi}^t(M_0,P_0,Q_0)=\bigcap_{k\geq 1}\bar{\Pi}^{\omega_k}(M_k,P_k,Q_k).$$

В четвертом параграфе четвертой главы диссертации изучается связь между верхним и нижним операторами для нелинейных дифференциальных игр с фиксированным временем и даны ее приложения к задаче сближения в нелинейных системах управления.

Теорема 22. Пусть $M\in C^d$. Тогда имеет место равенство

$$\tilde{\Pi}^t M=\bigcap_{\delta>0}\tilde{\Pi}_t(M+\delta H).$$

Приведены приложения теоремы 22 к задаче сближения в нелинейных системах управлений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена разработке новых аппроксимационных схем для альтернированного интеграла, исследованию аппроксимативных свойств интегралов первого и первого обобщенного прямого методов преследования и их применению к задаче сближения в нелинейных системах управлений.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1.Для игр описываемых дифференциальными включениями, доказаны полугрупповое свойство альтернированного интеграла и рекуррентное соотношение. Предложены новые упрощенные схемы для построения альтернированного интеграла посредством интеграла обобщенного первого прямого метода преследования и даны их приложения к задаче сближения в нелинейных системах управлений.

2. Для игр, описываемых дифференциальными включениями, доказаны новые аппроксимативные свойства, построены новые аппроксима-ционные схемы для нижнего альтернированного интеграла и даны их приложения к задаче сближения в нелинейных системах управлений.

3. Доказано соотношение двойственности альтернированного интеграла для квазилинейных дифференциальных игр и его приложения к задаче преследования.

4. Изложен первый прямой метод Понтрягина применительно к играм описываемым дифференциальным включением. Определен класс стробоскопических стратегий преследователя для таких игр. На основе интеграла этого метода сформулировано необходимое и достаточное условия для завершения преследования в классе стробоскопических стратегий в фиксированном времени, а также предложены новые приближенные схемы, аппроксимирующие интеграл данного метода преследования сверху и снизу с заданной точностью.

5. Предложены новые упрощенные формулы для интеграла обобщенного первого прямого метода посредством сужения объединения, участвующего в определении этого интеграла, на класс компактнозначных, кусочно-постоянных, непрерывных отображений и кусочно-постоянных отображений со значениями в многограннике. Построены новые приближенные схемы для вычисления интеграла этого метода с заданной точностью. Доказана полуустойчивость интеграла данного метода при односторонних возмущениях исходных данных дифференциальной игры.

6. Предложены новые упрощенные схемы для построения основных операторов в нелинейных дифференциальных играх посредством оператора, имеющего более простое построение. Доказана полуустойчивость верхних и нижних операторов в нелинейных дифференциальных играх при односторонних изменениях исходных данных дифференциальной игры.

7. Установлена связь между верхним и нижним операторами для нелинейных дифференциальных игр с фиксированным временем и ее приложения к задаче преследования в нелинейных системах управления.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

TASHKENT CHEMICAL-TEHNOLOGY INSTITUTE, INSTITUTE OF MATHEMATICS

ISKANADJIEV IKROMJON MADASHEVICH

APPROXIMATIVE SCHEMES FOR ALTERNATING INTEGRAL AND THEIR APPLICATIONS TO APPROACHING PROBLEM IN NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2021

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.4.DSc/FM6 .

Dissertation has been prepared at Tashkent chemical-tehnology Institute and at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Azamov Abdulla** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician
Official opponents:	**Durdiyev Durdimurad Qalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Sedakov Artem Aleksandrovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Samatov Bakhronjon Tadjiahmatovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent
Leading organization:	**National University of Uzbekistan**

Defense will take place «27 » December 2021 at 10-00 at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str., 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 128) (Address: University str., Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz).

Abstract of dissertation sent out on « 16 » December 2021.

(mailing report № 2 on « 16 » December 2021).

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., senior researcher

R.R.Ashurov
Deputy Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Professor

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of the research work is to obtain new approximation schemes for the alternating integral and their application to the problem of convergence in nonlinear control systems.

The object of the research work are multivalued mappings and integrals of direct pursuit methods.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the new approximation schemes for the lower and upper alternating integrals are constructed, and the duality relation of the alternating integral for quasilinear differential games is proved and their applications to the problem of convergence in nonlinear control systems are given;

a necessary and sufficient condition is obtained by means of the integral of the first direct method for the completion of the pursuit in a differential game, described by a differential inclusion at a fixed moment of time;

the new approximate schemes are obtained that approximate the integrals of the first and generalized first direct methods from above and below with a given accuracy, and also proved the semi-stability of these integrals under one-sided perturbations of the initial data of the differential game;

the semi-stability of the upper and lower operators in nonlinear differential games is proved, as well as the connection between the upper and lower operators for nonlinear differential games with fixed time is established and its applications to the problem of convergence in nonlinear systems are given.

Implementation of the research results. The results related to approximation schemes for the alternating integral and their application to the problem of convergence in nonlinear control systems were used in the following research projects:

new approximation schemes for the alternating integral and recurrence relations, the duality of the alternating integral for quasilinear differential games, were used in the research project No.OT-Ф4-33 "Creation of new methods for control of conflicts described by differential equations and their numerical implementation "(National University of Uzbekistan, certificate No. 04 / 11-7212 dated November 10, 2021). The application of these scientific results made it possible to construct positional strategies of players in the first and second direct methods of pursuing conflict situations in controls and to obtain new sufficient conditions for solvability in a nonlinear control problem arising from the numerical implementation of constructing positional strategies of players;

the new approximate schemes for integrals of direct pursuit methods and their application to the problem of feedback in nonlinear control systems in differential inclusions were used in the foreign project "Plasma Technologies" (Samara State Technical University, certificate No. 01.0202 / 12-25 dated April 28, 2021). The application of these scientific results made it possible to find solutions to the problems of discretization of controls for a system of solenoidal and magneto-quadrupole fields and optimization of control of charged particle fluxes;

the simplified construction schemes for the lower operator, and the

semistability of the upper and lower operators in nonlinear differential games under one-sided perturbations of the initial data of the differential games were used in the foreign scientific project No.AR 05133858 "Contrast structures in singular perturbed equations and their applications in the theory of phase transitions", supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (International Kazakh-Turkish University named after H.A. Yasavi, certificate No. 19 dated November 10, 2021).The application of these scientific results made it possible to prove the existence of contrasting closed trajectories in the phase structure by solving singularly perturbed equations and in phase transitions described by differential inclusions, and also the approximate methods for solving nonlinear differential games are used in the thesis to test and analyze the mathematical models of phase transitions;

the pursuit methods based on upper and lower alternating integrals for differential inclusions were used in the fundamental research project 01-01-16-1840FR “New methods for solving differential pursuit and evasion games with many pursuers on manifolds with Euclidean metric” to solve the problem of differential pursuit games in infinite-dimensional spaces with geometric constraints on the player's controls. (University of Putra Malaysia, certificate of November 12, 2020). The application of the scientific result made it possible to find an adequate condition for the completion of the chase in differential games in infinite-dimensional spaces when geometric and integral constraints were placed on player control.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and titles of used literature. The full volume of the thesis is 191 pages.

ЭЪЛОН КИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим(часть I; part I)

1. Исканаджиев И. Аппроксимация третего интеграла в верхней игре посредством операции объединения по кусочно-постоянным отображения // Вестник НУУз. - 2009. - №1. - С.12-15. (01.00.00, № 8).
2. Исканаджиев И. Аппроксимация альтернированного интеграла Понтрягина и ее приложения к проблеме информированности в задаче преследования // Докл.АН РУз. - 2009. - №6.-С.7-9 .(01.00.00; №7).
3. Исканаджиев И. М. О третьем методе решений линейных дифференциальных игр // Uzbek Mathematical Journal. - 2011. - №1. - С.87-96. (01.00.00; №6).
4. Iskanadjiev I. Duality of the alternating integral for quasi-linear differential games // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. – 2012. - v.17. - № 2. - pp.169-181.(3. Scopus. IF =0.73).
5. Iskanadjiev I.M. On the Lower Pontryagin's Alternating integral // Journal of Automation and Information Sciences. - 2013.- v.45. - № 2. – pp.33-40. (3. Scopus. IF=0.25).
6. Iskanadjiev I.M. Pontryagin's Alternating integral for differential inc-lusion // Cybernetics and Systems analysis. – 2013. - v. 49.- № 6. - pp. 936-940. (3. Scopus. IF=0.25).
7. Исканаджиев И. Упрщенные схемы построения нижних аналогов операторов Понтрягина и Пшеничного для нелинейных дифференциальных игр преследования // Uzbek Mathematical Journal. - 2013.- №2.- С.22-29. (01.00.00, №6).
8. Iskanadjiev I. M. Semi-Stability of Main Operators In Differential Games with Non-Fixed Time // Journal of Automation and Information Sciences. – 2014. - v.46. - №8. - pp.49 – 55. (3. Scopus. IF=0.25)
9. Iskanadjiev I.M. Lower Pontryagin's Alternating Integral for Differential Inclusion // Cybernetics and Systems analysis.- 2015.- v.51. - №5. - pp.782-791. (3. Scopus. IF=0.25).
10. Iskanadjiev I. M. Pontryagin's First Direct Method for Differential Inclusions // Jornal of Automation and Information Sciences. – 2020. - v.52. - №2. - pp.27-41. (3. Scopus. IF=0.55).
11. Iskanadjiev I. M. On Pontryagin's lower operanor in nonlinear differential games with fixed times // Bulleten of the Institute of Mathematics. – 2020.– № 4. – pp. 13-20. (01.00.00, №17).
12. Iskanadjiev I. M. Approximative properties of the integral of Pontryagin's generalized first direct method for differential inclusions // Uzbek Mathematical Journal. – 2020. – № 2. – pp. 65-75, (01.00.00, №6).
13. Исканаджиев И.М., Абдуганиев А. Об обобщение первого прямого преследование // Докл.АН РУз. - 2020. - №6.-С.16-20, (01.00.00; №7).

II бўлим (часть II; part II)

14. Azamov A., Iskanadjiev I. Alternating integral for differential Inclusions with counteraction // Contributions to Game Theory and Management. - 2012. - Vol. V. - pp.33-44.
15. Исканаджиев И.М. Об одном классе стратегий преследователя в верхней игре // Вестник ТГТУ. - 2010. - №3. - С.38-40.
16. Iskanadjiev I. On Main Operators In Nonlinear Differential Games With Fixed Times // Journal of Progressive Research in Mathematics (JRM). - 2017.-v.12. - № 3. - pp.1946 - 1956
17. Iskanadjiev I. Approximation of the lower operator in nonlinear differential games with non-fixed time // Journal of Advances in Mathematics. -2019. - v.16. pp. 8348–8358.
18. Iskanadjiev I. On duality of alternating integral for quasi-linear differential games // Abstracts the thiкd international conference Game Theory and Management. - St. Petersburg, Russia, 2009, June 24-26. - pp.67-68.
19. Исканаджиев И. Нижний альтернированный интеграл для дифференциальных включений // Тезисы международный конференции “Управление и Оптимизация, Динамические системы”-Ташкент,28-30 сетябрь,2009. - С.50-51.
20. Исканаджиев И. Полуустойчивость основных операторов в дифференциальных играх преследования // Тезисы Республиканский конференции с участием зарубежных ученых “Операторная алгебра и ее смежные вопросы”, Ташкент,28-30 октябрь, 2012. - С.212-213
21. Исканаджиев И. Двойственность основных операторов для квазилинейных игр с фиксированным временем. // Тезисы Республиканский конференции с участием зарубежных ученых “Неклассические уравнения математической физики и их приложения”. - Ташкент,23-25 октябрь,2014.- С.278-279.
22. Исканаджиев И.М. Полуустойчивость третьего интеграла в верхней игре // Тезисы докладов международной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий”. - Самарканд, 15-17 сентябрь,2014. - С.49-50.
23. Исканаджиев И.М. Об основных операторах в нелинейных дифференциальных играх с фиксированным временем // Abstracts of the republican scientific conference with participiation of foreign scientists “Modern problems of dynamical systems and their Applications”. - Tashkent. - May 1-3, 2017. – pp.119-120.
24. Исканаджиев И.М. Приближение нижнего оператора в нелинейных дифференциальных играх с нефиксированным временем //Abstracts the international conference “ Mathematical Analysis and Its Application to Mathematical Physics. - September 17-20, 2018.- Samarkand. - Part-I. – p.123. 27
25. Iskanadjiev I.M. Approximation of increased accuracy of the Pontryagin’s

lower operator for one class differential games // Abstracts of Uzbek-Israel joint International conference “Science – Technology- Education-Mathematics-Medicine”. - Bukhara-Samarkand-Tashkent. – 2019, May 13 - 17. - pp.67 - 68.
26. Iskanadjiev I. Approximation of Pontryagin’s alternating integral // Abstracts the First International conference “Mathematical Physics, Dynamical systems, Infinite-Dimensional Analysis” - Dolgoprudny, Russia. – 2019, June 17-21. - pp. 40 - 41.
27. Исканаджиев И.М. Связь между основними операторами в нели-нейных дифференциальных играх преследованияс фик-сированным временем // Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н.Красовского “Устойчивость,управление, дифференциальные игры” (SCDG2019). - Екатеринбург. - 16-20 сентябрь.- 2019.- С.157-159.
28. Iskanadjiev I.M. Linear Differential Games with Simple Matrices // Тезисы докладов Республиканский научный конференции “Актуальные проблемы и применения Анализа” - Карши. - 4-5 октябрь, 2019. - С.109-110.
29. Исканаджиев И.М. Связь между интегралами прямых методов преследования в нижней игре // Тезисы докладов международной научной конференции “Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа”.- г.Ташкент, 23-25 ноября 1993года.- С.78.
30. Исканаджиев И.М. Связь между интегралами прямых методов преследования в верхней игре // Тезисы докладов Республиканский научной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения”. Ош,7-9 октябрь, 1993. - С.51.
31. Исканаджиев И. О модифицированном третьем методе преследования // Тезисы докладов Республиканский конференции с участием зарубежных ученых “Управление, Оптимизация и динамические системы”. - Андижан,17-19 октябрь, 2019. - С.39-41.
32. Исканаджиев И. Полуустойчивость интеграла первого прямого метода преследования. // Материалы Республиканской научно-практической конференции “Прикладные и фундаментальные проблемы естественных наук” - Ташкент,23- октябрь, 2019.- С.175-176.
33. Исканаджиев И.М. Аппроксимативные свойства интеграла первого прямого метода Понтрягина для дифференциальных включений //Тезисы докладов Международной конференции “Современные проблемы диффе-ренциальных уравнений и смежных разделов математики” - Фергана.- 12-13 март.-2020.- С.312-315.
34. Исканаджиев И. М. Аппроксимативные свойства интеграла обобщенного первого прямого метода Понтрягина для дифференциальных включений // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “ Современные методы математической физики и их приложения”. - Ташкент , 17-18 ноября 2020 года. С.135-138.
35. Исканаджиев И. М. Аппроксимация нижнего оператора Понтрягина в

нелинейных дифференциальных играх с фиксированным временем // Материалы научной конференции “Актуальные проблемы стохастического анализа” посвященной 80-летию академика Ш.К.Форманова, Ташкент , 20-21 февраля 2021 года. С.297-298.

36. Исканаджиев И. Аппроксимационные схемы для обобщенного первого метода преследования. // “Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари” мавзусидаги Республика миқиёсида илмий-амалий анжуман материаллари. 1 қисм, 1-2 июнь Тошкент, 2021.С 272-276.

37. Исканаджиев И. Приближенные схемы для построения альтернированного интеграла Понтрягина для дифференциальных включений. // Материалы Международной научной конференции “Динамические системы: Устойчивость, Управление, Оптимизация” посвященной памяти профессора Р.Ф. Габасова, Минск, 5-10 октября 2021 года. С.113-114.