В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

САФАРОВ АБДИВОХИД ШУКУРОВИЧ

СОНЛАРНИ АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯДАН ОЛИНГАН ТУБ СОНЛАР ЙИҒИНДИСИ КЎРИНИШИДА ИФОДАЛАШ

01.01.06 - Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент–2021

УДК: 511.28

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Сафаров Абдивохид Шукурович
Сонларни арифметик прогрессиядан олинган туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш..... 3

Сафарова Абдивохида Шукуровича
О представлении чисел суммой простых из арифметической прогрессии…….….. 19

Safarov Abdivokhid Shukurovich
On the representation of numbers as a sum of primes from arithmetic progression…….. 35

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works ……. 38

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

САФАРОВ АБДИВОХИД ШУКУРОВИЧ

СОНЛАРНИ АРИФМЕТИК ПРОГРЕССИЯДАН ОЛИНГАН ТУБ СОНЛАР ЙИҒИНДИСИ КЎРИНИШИДА ИФОДАЛАШ

01.01.06 - Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.3.PhD/FM402 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Термиз давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар: **Аллаков Исмаил**
физика-математика фанлари доктори, доцент

Расмий оппонентлар: **Рахмонов Зарулло Хусенович**
физика-математика фанлари доктори, академик (Тожикистон)

Худайбердиев Аброр Хакимович
физика-математика фанлари доктори, доцент

Етакчи ташкилот: Самарканд давлат университети

Диссертация ҳимояси И.В.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «30» июл соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website www.mathins.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (117 раками билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.:(+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website www.mathins.uz.

Диссертация автореферати 2021 йил «17» июл куни таркатилди.

(2021 йил «17» июл даги 2 –рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.,катта илмий ходим

Б.А.Омиров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш кошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти. Жахон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда назарий механика ва криптография масалаларини тадқиқ қилишга келтирилади. Табиий жараёнларнинг математик моделларини тадқиқ этиш сонлар назариясининг аддитив масалаларнинг назарий асосини ташкил этиб, криптографиянинг шифрлаш қонуниятларининг сонлар назариясининг аддитив масалалари ёрдамида аниқлаш муҳим аҳамиятга эга. Бундай масалаларни ечишда зарур бўладиган дешифрлаш, сонли функциялар ва Дирихле характерларининг қийматлари ўзгарувчиларининг сонли қийматларига боғлиқ. Берилган сонни арифметик прогрессиядан олинган туб сон ва туб соннинг фиксирланган даражаси йиғиндиси кўринишида ифодалаш – кўплаб физик, химик ва биологик жараёнларнинг табиий математик моделини ўрганишдаги муаммоларни ҳал этишнинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги вақтда жаҳон миқёсида сонлар назариясидаги аддитив масалаларидан Гольдбахнинг тернар ва бинар муаммоларини ечиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Берилган жуфт сонни арифметик прогрессиядан олинган иккита туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш масаласи ҳозирги вақтгача ҳал қилинмаган. Аддитив масалаларни ечиш учун биринчи бўлиб доиравий усул ёрдамида муҳим натижаларга эришилди. Шундан кейин доиравий усулни тригонометрик йиғиндилар усули билан тўлдириш, етарлича катта сонлар учун Гольдбахнинг тернар муаммоси ҳал этишга олиб келинди. Бу борада: туб сонлар қатнашган аддитив масалаларнинг турли хил кўринишлари, яъни берилган сонни туб ва натурал соннинг фиксирланган даражаси йиғиндиси кўринишида ифодалаш, берилган сонни туб сон ва туб соннинг фиксирланган даражаси йиғиндиси кўринишида ифодалаш, берилган сонни тублар сонлар ва натурал сонларнинг фиксирланган даражаси йиғиндиси кўринишида ифодалаш муаммолари мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларни илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган сонлар назариясининг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда Гольдбахнинг тернар ва бинар муаммоларини ўз ичига олган, берилган сонни туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш масаласини ҳал этиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра ва геометрия» фанларининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолиятлари этиб белгиланди[1]. Илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида сонлар назариясининг аддитив масалаларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида” ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика ва фан технологиялари ривожланишининг устувор йуналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика и информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Сонлар назариясининг асосий масалаларидан бири бўлган Гольдбахнинг бинар ва тернар масалалари XVIII асрнинг ўрталаридан буён маълум бўлган ва Варинг-Гольдбах, Харди-Литтлвуд, Хуа-Ло-Кен муаммолари ва бошқа масалалар шунга боғлиқ ҳолда келиб чиққан. И.М.Виноградов ўзи яратган тригонометрик йиғиндилар методи ёрдамида тернар муаммони етарлича катта сонлар учун ҳал қилди. Бу муаммо Харальд Гельфготтом томонидан ечилган. Лекин бинар муаммо тўла ҳал этилган эмас. Бу соҳада И.М.Виноградов ва Хуа-Ло-Кенларнинг машҳур ишларидан кейин Н.Г.Чудаков, Ван-дер-Корпут ва Эстерманлар Виноградовнинг тригонометрик йиғиндилар методини қўллаб, деярли барча жуфт сонларни иккита туб соннинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкинлигини кўрсатдилар. Кейинчалик бу натижа бир неча марта яхшиланди. Жумладан, Г.Л.Монтгомери, Р.К.Вон, И.Аллаков ва Ж.Ченлар томонидан янги баҳолар олинган бўлсада, муаммо тўла ҳал этилгани йўқ.

А.Ф.Лаврик қаралаётган оралиқдаги деярли барча натурал сонлар учун ўринли бўлган берилган натурал сонни иккита туб сон йиғиндиси кўринишида ифодалашлар сони учун асимптотик формулани топди. Кейинчалик, Г.Монтгомери ва Р.Вонлар бу баҳони яхшилаб, берилган оралиқдаги иккита туб сон йиғиндиси кўринишида ифодаланмайдиган натурал сонларнинг сони (масаланинг махсус тўплами) учун янги баҳоларни ўринли эканлигини кўрсатдилар. Биринчи марта И.Аллаков Б.М. Бредихиннинг ғоясини тадбиқ этиб, Г.Монтгомери ва Р.Вонларнинг махсус тўпламига кирмайдиган натурал сонларни шундай кўринишда ифодалашлар сони учун қуйидан баҳо олди. Шунга ўхшаш натижалар Хуа-Ло-Кен муаммоси ва берилган сонларни бир вақтда туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш масаласида ҳам исбот қилинди.

Ҳозирги вақтда сонлар назариясиниг аддитив масалаларидан Гольдбахнинг бинар муаммосини ҳал этиш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Жумладан, юқорида қайд этилган аддитив масалалар

соҳасидаги натижаларни ҳисобга олиб, туб сонлар қатнашган аддитив масалаларни, хусусан, бирор арифметик прогрессиядан олинган туб сонлар қатнашган аддитив масалаларни текшириб А.А.Карацуба, З.Х. Рахмонов, Н.Н. Добровольский, Н.М. Добровольский, Г.И. Архипов, В.Н. Чубариков, А.И. Нижников, А.В. Михалев, В.А. Панин, У.М. Пачев, А. Лауринчикас, Т.А. Шакова, Ю.Ю. Евсеева, Г.Монтгомери, Р.Вон ва бошқалар томонидан янги баҳолар олинган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таьлим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Термиз давлат университети илмий-тадқиқот ишлари режаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади сонларни арифметик прогрессиядан олинган туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш ва сонларни бир вақтда туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалашлар махсус тўплами учун янги баҳо олишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

арифметик прогрессиядан олинган иккита туб соннинг йиғиндиси кўринишида ифодалаб бўлмайдиган жуфт сонлар тўпламини текшириш ва жуфт сонни кўрсатилган кўринишда ифодалашлар сони учун қуйидан баҳо олиш;

арифметик прогрессиядан олинган туб сон ва туб соннинг фиксирланган даражасининг йиғиндиси кўринишида ифодалаб бўлмайдиган сонлар тўпламини текшириш ва берилган сонни шундай кўринишда ифодалашлар сони учун қуйидан баҳо олиш;

берилган натурал сонларни бир вақтда туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш масаласини текшириш ва кўрсатилган кўринишда ифодалашлар сони учун қуйидан баҳо олиш**.**

Тадқиқот объекти: алгебра ва сонлар назариясидаги сонли функциялар ва Дирихле характерлари, тригонометрик йиғиндилар ва арифметик прогрессиядан олинган туб сонлар.

Тадқиқотнинг предмети: сонларнинг аддитив назарияси, арифметик функциялар назарияси, комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, Дирихле характерлари назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда Харди-Литтлвуднинг доиравий усули, И.М.Виноградовнинг тригонометрик йиғиндилар усули ва Монтгомери–Воннинг аддитив масалаларни ечиш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

берилган соннинг арифметик прогрессиядан олинган иккита туб сонларнинг йиғиндиси кўринишида ифодалашлар сони учун қуйидан баҳо олинган ва бундай кўринишда ифодалаб бўлмайдиган сонлар тўплами учун янги баҳо исботланган;

берилган соннинг арифметик прогрессиядан олинган туб ва туб соннинг фиксирланган даражасининг йиғиндиси кўринишида ифодалашлар сони учун

қуйидан баҳо олинган ва бундай кўринишда ифодалаб бўлмайдиган сонлар тўплами учун янги баҳо исботланган;

чизиқли тенгламалар системасининг туб сонларда ечимга эга бўлиш шартларини қаноатлантирувчи натурал сонлар тўпламининг баҳолари такомиллаштирилган;

берилган натурал сонларни бир вақтда туб сонларнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкинлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

Гольдбахнинг бинар муаммоси ва Хуа-Ло-Кен муаммосидаги махсус тўпламларни баҳолаш усули ва шу махсус тўпламга тегишли бўлмаган натурал сонлар тўпламининг ифодаланишлар сони учун қуйидан баҳо олиш усулларини баён қилинганлигидан иборат.

Чизиқли тенгламалар системасининг туб сонларда ечимга эга бўлиш шартларини топиш ва ечимга эга бўлиш шартларини қаноатлантирувчи натурал сонлар тўплами учун баҳо олиш усулини баён қилинганлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги комплекс анализ, алгебра, сонлар назарияси методларидан фойдаланилганлиги ва математикада қабул қилинган дедуктив хулосаларга асосан қўлланилганлиги ва теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботланганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти сонлар назариясининг аддитив масалалари назариясининг кейинги ривожида фойдаланиш мумкинлиги, ҳамда сонларнинг аналитик назриясини янада ривожлантириши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти сонлар назариясининг аддитив масалаларида сонли натижалар олиш имкониятини бериши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Сонларни арифметик прогрессиядан олинган туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш бўйича олинган натижалар асосида:

берилган соннинг арифметик прогрессиядан олинган туб ва туб соннинг фиксирланган даражасининг йиғиндиси кўринишида ифодалашлар сони учун қуйидан олинган баҳодан №ГР0116TJ00532 рақамли «Тригонометрик йиғиндилар ва уларнинг сонлар назариясининг аддитив масалаларига тадбиқи ҳамда функциялар яқинлашиш назариясининг танланган масалалари» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида тригонометрик йиғиндиларнинг ҳолатларини аниқлашда фойдаланилган (А.Жўраев номидаги Математика институтининг 2021 йил 9 апрелдаги 31004/23-46-сонли маълумотномаси, Тожикистон). Илмий натижанинг қўлланилиши сонлар назариясининг аддитив масалалари учун янги баҳолар исботлаш имконини берган;

берилган соннинг арифметик прогрессиядан олинган иккита туб сонларнинг йиғиндиси кўринишда ифодалаб бўлмайдиган сонлар тўплами учун олинган баҳодан «Содда тригонометрик йиғиндилар ва уларнинг тадбиқлари» номли махсус курс ўқитилишида фойдаланилган (Тожикистон

Миллий университетининг 2021 йил 28 апрелдаги 03/1134-03-сонли маълумотномаси, Тожикистон). Илмий натижанинг қўлланилиши Гольдбахнинг бинар ва тернар масалаларининг махсус тўпламлари учун қуйидан баҳо олиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Тадқиқотнинг асосий натижалари 5 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 16 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этишга тавсия этилган илмий нашрларда 6 та илмий мақола, жумладан 3 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 95 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Арифметик прогрессиядан олинган туб сонлар йиғиндисининг махсус тўпламлари хақида»** деб номланган биринчи бобда сонларни арифметик прогрессиядан олинган иккита туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш масаласи, яъни туб сонлар бирор арифметик прогрессиядан олинган ҳолатдаги Гольдбах муаммоси ўрганилган.

Мазкур бобнинг биринчи параграфи ёрдамчи характерга эга бўлиб, бу ерда асосий белгилашлар, ёрдамчи леммалар, бирлик интервални бўлиш, Дирихле L-функциясининг махсус нолларига оид тушунчалар келтирилган. Жумладан, Дирихле L-функциясининг махсус нолларини ўрганиш сонлар назариясининг аддитив масалаларини хал қилишга оид маълумотлар келтирилган.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$X-$етарлича катта ҳақиқий сон, $n-$ натурал сон, p, p_1, p_2- туб сонлар, $E(X)-$орқали $n \le X$ учун, $n = p_1 + p_2$ кўринишда ифодалаб бўлмайдиган сонлар сонини белгилаймиз. $M(D,X)-$орқали $n \le X$ учун

$$n = p_1 + p_2,\ \ p_i \equiv l_i (\mathrm{mod}\, D) \quad (l_i, D) = 1,\ \ i = 1,2; \qquad (1)$$

кўринишда ифодалаб бўлмайдиган сонлар тўпламини ва $E(D,X)=card\,\mathrm{M}(D,X)$ деб ҳамда $R(n,D,X)-$орқали эса берилган n ни (1) кўринишда ифодалашлар сонини белгилаймиз, c_j $(\mathrm{j}=1,2,...)-$ мусбат ўзгармас сонлар, $\varphi(a)-$ Эйлер функцияси, χ_q орқали q модул бўйича Дирихле характерни, $\overline{\chi}_q$ орқали q модул бўйича χ_q характерга қўшма Дирихле характерни белгилаймиз. Асосий интерваллар тўпламини $\mathcal{M}$ орқали, Т орқали эса $Q^{-1}<\alpha<1+Q^{-1},\alpha\notin\mathcal{M}$ шартни қаноатлантирувчи асосий интервалга кирмайдиган α лар тўпламини белгилаймиз. Шундай қилиб, Т қўшимча интерваллар бирлашмасини ифодалайди.

$R(n,D,X)$ ни қуйидаги

$$R(n,D,X)=R_1(n,D,X)+R_2(n,D,X) \tag{2}$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда

$$R_1(n,D,X)=\int_{\mathcal{M}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)\mathrm{e}(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha,\quad R_2(n,D,X)=\int_{\mathrm{T}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)\mathrm{e}(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha\ .$$

$R_1(n,D,X)$ ўрганиш учун қуйидаги леммалардан фойдаланамиз:

1-лемма. Айтайлик, $\chi-$ $q\le P$ модул бўйича Дирихле характери ва $L(\mathrm{s},\chi)-$ Дирихле $L-$функцияси бўлсин, у ҳолда:

a) $L(\mathrm{s},\chi)$, s=σ+it функция қуйидаги соҳада:

$$1-\frac{0,0019128}{\ln P}\le\sigma\le 1,\ |t|\le P^{19/4}, \tag{3}$$

$\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta}$ ягона ҳақиқий нолга эга бўлади;

b) агар $L(\mathrm{s},\chi)$ шундай махсус нолга эга бўлса, у ҳолда (3) соҳани қуйидаги соҳа билан алмаштириш мумкин

$$\sigma>1-\frac{1}{81\log P}\ln\left(\frac{1}{200\tilde{\delta}\ln P}\right),\ |t|\le P^{\delta},\ \tilde{\delta}\ln P\le\frac{1}{200e}; \tag{4}$$

c) бу махсус нол қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради:

$$\frac{0,4961}{\tilde{q}^{1/2}\log^2\tilde{q}}<1-\tilde{\beta}<\frac{0,3}{\log\tilde{q}}.$$

2-лемма. Айтайлик, $\aleph=\frac{(1+16\delta)}{115}$, $0<\delta<0,01$ бўлсин ва

$\exp(\log^{1/2}\mathrm{X})\le P\le X^{\aleph}, XP^{-1}\le h\le\frac{1}{2}X$, у ҳолда

$$\sum_{q\le P}\sum_{\chi}{}'\max_{x\le\frac{3}{2}X}\max_{h\le\frac{1}{2}X}\left(h+\frac{X}{P}\right)^{-1}\left|\sum_{x-h}^{x}{}^{\#}\chi(p)\ln p\right|<\begin{cases} c_2\exp\left(-c_3\frac{\ln X}{\ln P}\right),\ \text{агар } E_{\tilde{\beta}}=0,\\ c_4\exp\left(-c_5\frac{\ln X}{\ln P}\right)(1-\tilde{\beta})\ln\mathrm{P},\ \text{агар } E_{\tilde{\beta}}=1,\end{cases}$$

бу ерда $\sum^{\#}$ – $q=1$ бўлганда $\sum_{x-h}^{x}\ln p-\sum_{x-h<n\le x}1$ ва $E_{\tilde{\beta}}=1$ да $\sum_{x-h}^{x}\tilde{\chi}(p)\ln p+\sum_{\substack{x-h<n\le x\\ n>0}}n^{\tilde{\beta}-1}$ га тенг эканлигини билдиради.

3-лемма. Айтайлик, χ_0 – q модул бўйича бош характер, χ_i – r_i, $i=1,2$ модул бўйича примитив характер бўлсин. У ҳолда $m\neq 0$ учун қуйидаги баҳо ўринли:

$$\sum_{q}\frac{1}{\varphi^2(\mathrm{q})}\left|c_{\chi_1\chi_2\chi_0}(m)\tau(\tilde{\chi}_1\chi_0)\tau(\tilde{\chi}_2\chi_0)\right|\ll\frac{|m|}{\varphi(|m|)}.$$

$R_2(n,D,X)$ ни қараймиз. (2) тенгликдан ва Парсевал айниятидан қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{n}R_2^2(n,D,X)=\int_{\mathrm{T}}|S(\alpha)|^2d\alpha\le\left(\max_{\mathrm{T}}|S_1(\alpha)|\right)^2\int_{\mathrm{T}}|S_2(\alpha)|^2d\alpha, \qquad (5)$$

бу ерда $\int_{\mathrm{T}}|S_2(\alpha)|^2d\alpha\le\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}}|S_2(\alpha)|^2d\alpha\le\sum_{P<p\le X}\ln^2 p.$

К.Прахарнинг теоремасига кўра, $X\ge 2$ ва $D\le X^{\frac{1}{2}}$ учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{\substack{p\le X\\ p\equiv l(modD)}}\ln p\ll\frac{X}{\varphi(D)}.$$

Шунинг учун,

$$\int_{\mathrm{T}}|S_1(\alpha)|^2d\alpha\ll(\ln X)\sum_{\substack{P<p\le X\\ p\equiv l(modD)}}\ln p\ll\frac{X}{\varphi(D)}lnX \qquad (6)$$

$\max_{\alpha\in\mathrm{T}}|S_1(\alpha)|^2$ баҳолашимиз учун И.Аллаков ва М.Исраиловлар томонидан олинган баҳодан фойдаланиб, яъни агар, $R\le q\le\frac{X}{R}$ ва $1\le R\le X^{\frac{1}{3}}$, $(a,q)=1$, $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{2R}{qN}$ бўлса, у ҳолда

$$S(\alpha)\ll XDR^{-\frac{1}{2}}(\ln X)^{\frac{11}{2}}. \qquad (7)$$

Дирихленинг аппроксимация теоремасига кўра, шундай $q\le Q$ ва $1\le a\le q$,$(a,q)=1$ шартни қаноатлантирувчи a лар мавжуд бўлиб, улар учун $\left|\alpha-aq^{-1}\right|\le(qQ)^{-1}$ ўринли. Натижада (5), (6) ва (7) тенгликлардан

$$\sum_{n\le X}R_2^2(n,D,X)\ll\frac{X^3D^2}{P\varphi(D)}\ln^{12}X \qquad (8)$$

келиб чиқади.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида асосий интерваллар қаралган. Хусусан,

$$S_i = S_i(X;\alpha) = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D}\bar{\chi}_p(l_i)\sum_{P<p\le X}\chi_D(p_i)(lnp_i)e(p_i\alpha),\ i=1,2$$

белгилашга асосан, S_i ни қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$S_i = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D}\bar{\chi}_D(l_i)\sum_{P<p_i\le X}\chi_D(p_i)(\ln p_i)\left(\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(p_i a)\tau(\bar{\chi}_q)e(p\eta)\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)}\sum_{\chi_D,\chi_q}\bar{\chi}_D(l_i)\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}_q(h)e\left(\frac{ah}{q}\right)\sum_{P<p_i\le X}(lnp_i)\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)e(p_i\eta).$$

Қулайлик учун $A_i = \frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)}\sum_{\chi_D,\chi_q}\bar{\chi}_D(l_i)\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}_q(h)e\left(\frac{ah}{q}\right)$

ва $G_i = \sum_{P<p_i\le X}(lnp_i)\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)e(p_i\eta),\ \ i=1,2$ белгилашларни киритиб оламиз. У ҳолда $S_i = A_i G_i(\chi_m,\eta)$ га эга бўламиз.

Иккинчи параграфнинг асосий натижаси ушбу натижа ҳисобланади:

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} S_1 S_2 e(-n\alpha)d\alpha = \sum_{q\le P}R(q)\frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D)\varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)}\sum_{a=1}^{q}{}' e\left(\frac{a}{q}N_1\ (l_1+l_2)\right)\cdot$$

$$\cdot\int_{M(q,a)} g_1^{(1)}(X,\eta)g_1^{(2)}(X,\eta)e(-n\alpha)d\alpha +$$

$$+\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} A_1A_2 g_1^{(1)}(X,\eta)W_2(\chi_m,\eta)e(-n\alpha)d\alpha\ +$$

$$+\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} A_1A_2 g_1^{(2)}(X,\eta)W_1(\chi_m,\eta)e(-n\alpha)d\alpha +$$

$$+\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} A_1A_2 W_1(\chi_m,\eta)W_2(\chi_m,\eta)e(-n\alpha)d\alpha = M_1+M_2+M_3+M_4. \qquad (9)$$

А.Ф.Лаврик ва Р.Вон ишларидан фойдаланиб, И.Аллаков қуйидаги теоремани исботлади:

1-теорема. $D = p^{\nu}$ ва $\mathrm{D} \ll \ln^{A} X$ учун $E(D,X) \le c_3 \dfrac{X}{\varphi(D)} \exp(-\mathrm{c}_4 \sqrt{\ln X})$ баҳо ва $n \notin M(D,X),\, n \le X$ учун

$$R(n) \ge \mathrm{c}_5 \frac{n}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(1 - \frac{\ln^{A} n}{\exp(\mathrm{c}_6 \sqrt{\ln n})}\right)\exp\left(-\frac{c_6}{4}\sqrt{\ln n}\right)$$

тенгсизлик ўринли.

Учинчи параграфда 1-теоремадаги баҳолар такомиллаштирилган.

2-теорема. Етарлича катта X ва етарлича кичик $\delta > 0$ учун, $D < X^{\delta_1}$, $(10\delta_1 < \delta)$ да, $E(D,X) \le c_7 X^{1-\delta} \varphi^{-1}(D)$ баҳо ва $n \notin M(D,X), n \le X$ учун

$$R(n,D) \ge c_8 \frac{n^{1-\frac{7}{8}\delta}}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(n^{\frac{\delta}{8}} - 1\right)$$

баҳолар ўринли.

Таъкидлаш жоизки, 1-теорема ва 2- теоремалар бир-биридан қуйидагича фарқ қилади: 1-теоремада арифметик прогрессиянинг айирмаси $D = p^{\nu}$ (яъни туб соннинг даражасига тенг) ва $\mathrm{D} \ll \ln^{A} X$ махсус тўплам қуйидаги баҳони қаноатлантиради:

$$E(D,X) \le c_3 \frac{X}{\varphi(D)} \exp(-\mathrm{c}_4 \sqrt{\ln X}).$$

2-теоремада эса, D ихтиёрий ва $1 < D < X^{\delta_1}$ (δ_1 етарлича кичик), махсус тўплам $E(D,X) \le c_7 X^{1-\delta_1} \varphi^{-1}(D)$ (δ етарлича кичик ва $10\delta_1 < \delta$) баҳони қаноатлантиради.

Диссертациянинг иккинчи боби “**Хуа-Ло-Кеннинг аддитив масаласи**” деб номланган бўлиб, сонларни туб сон ва туб соннинг фиксирланган даражаси кўринишида ифодалаш масаласи ўрганилган ва бу натижалар p_1 ва p_2 туб сонлари айирмаси D га тенг бўлган арифметик прогрессия учун умумлаштирилган. Харди-Литтлвуд ва И.Виноградовнинг ишларидан сўнг, Хуа-Ло-Кен қуйидаги тасдиқни келтириб ўтди: «Барча етарлича катта натурал сонни туб сон ва туб соннинг фиксирланган даражаси йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин». $E_k(X)$ орқали $n, n \le X$ учун

$$n = p_1 + p_2^k, \qquad (10)$$

кўринишда ифодалаб бўлмайдиганлар сонини белгилаймиз, бу ерда $X -$ етарлича катта хақиқий сон, $p_1, p_2 -$ туб сонлар, $k \ge 2$ – фиксирланган натурал сон. Хуа-Ло- Кен $E_k(\mathrm{X}) < \mathrm{c}_1(\mathrm{k}) \dfrac{X}{\ln^{\gamma} X}$, (бу ерда $\gamma < \dfrac{k}{k+2}$) баҳони ўринли эканлигини исботлади. Сўнгра В.А.Плаксин қуйидаги теоремани исботлади:

3-теорема. Ушбу

$$\left(n-1,\ \prod_{\substack{p \\ \varphi(p)\nmid k}} p\right)=1 \qquad (11)$$

шартни қаноатлантирувчи n ($n \le X$) лар учун $k \ge 2$ бўлганда (10) кўринишда ифодалаб бўлмайдиган $n \le X$ лар сони учун $E_k(\mathrm{X}) \ll_k X^{\gamma}$ баҳо ўринли, бу ерда $0<\gamma<1$ ва $\gamma<1-\left(137k^3 lnk\right)^{-1}$.

Сўнгра италиялик математиклар А.Перелли ва А.Заккагнилар Риманнинг умумлашган гипотезаси ўринли деб қараб, қуйидаги аниқроқ натижани олдилар: $E_k(\mathrm{X}) \le \mathrm{c}_3(\mathrm{k},\varepsilon)\mathrm{X}^{1-\frac{2}{kK}+\varepsilon}$, бу ерда $K=2^{k-1}$ ва $\varepsilon>0$ – ихтиёрий етарлича кичик мусбат сон.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида бирлик интерваллари бўлаклаш ва улар учун баҳо олинган. Жумладан, $\varepsilon-$ ихтиёрий кичик мусбат сон, $X>X_{k,\varepsilon}$, $X_{k,\varepsilon}-$ етарлича катта мусбат сонлар,

$$\delta=1/14k,\ (0<\varepsilon<2/(7k4^k)),\ X=P^k, Q=X^{17\varepsilon}, \tau=XQ^{-1}, \Delta=\tau^{-1}, Z=Q^{0,3},$$

$L=lnX, l=lnlnX;\ c_1, c_2 ...-$ мусбат доимийлар, $\ll$ ва O белгилар $\varepsilon, k, X_{k,\varepsilon}$ доимийларга боғлиқ . Сўнгра,

$$R(n)=k\sum_{\substack{p_1+p_2^k=n \\ \frac{X}{3}<p_1,\,p_2^k\le X}} lnp_1 lnp_2 \quad \text{ва} \quad S_k(\alpha)=k\sum_{\frac{X}{3}<p^k\le X} lnp\, e\left(\alpha p^k\right)$$

белгилашларни киритсак, у ҳолда $R(n)=\int_{-\Delta}^{1-\Delta} S_1(\alpha)S_k(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha$ га эга бўламиз.

Иккинчи параграфда $R(n)=R_1(n)+R_2(n)$ тенгликдан $R_1(\mathrm{n})$ қараймиз. $R_1(\mathrm{n})$ ни баҳолаш учун қуйидаги леммаларни келтириб ўтамиз:

4-лемма. $0<\eta\le\frac{1}{2}$ учун

$$T_1(\eta), \tilde{T}_1(\eta) \ll \min(X;\eta^{-1}) \text{ ва } \Gamma_k(\eta), \tilde{\Gamma}_k(\eta) \ll \min(P;\eta^{-1/k})$$

муносабатлар ўринли.

5-лемма. Фараз қилайлик, $\delta=\theta T^{-1}$, $0<\theta<1$ ва $s(t)=\sum_{\mu} c(\mu)e(\mu t)$ – абсолют яқинлашувчи тригонометрик қатор бўлсин, бу ерда μ - ҳақиқий сон ва $c(\mu)$ - комплекс коэффициентлар. У ҳолда

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2\, dt \le c_3(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} |\delta^{-1} \sum_{x}^{x+\delta} c(\mu)|^2\, dx,$$

муносабат ўринли, бу ерда $c_3(\theta) = \left\{ \min(\frac{2}{\pi}; \frac{(1-\theta)}{\pi\theta}) \right\}^{-2}$.

6-лемма. Агар χ_1, χ_2 - r модул бўйича характерлар, r_1, r_2 модуллар бўйича примитив характерлар, $r = [r_1, r_2]$ ва $\rho(r,n) > 0$, у ҳолда

$$\frac{G(r,\chi_1,\chi_2,n)}{\varphi^2(r)\pi_r(n)} = \frac{\rho(r,\chi_1,\chi_2,n)}{\rho(r,n)} \ll \frac{(n,r)}{r^{0,33}}$$

муносабат ўринли.

7-лемма. Агар U, r-лар $Q^{0,7} \le U \le Qr^{-1}$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий сонлар бўлсин. У ҳолда барча n нинг $\ll XQ^{-0,4}$ қийматларидан бошқа барча $n \le X$ лар учун $A_r(n,U)\pi_r(n) = A(n) + O(Q^{-0,1})$ тенглик ўринли.

8-лемма. n нинг $\ll X^{0,88}$ қийматларидан ташқари барча $n \le X$ лар учун $A(n) = \sigma(n) + O(L^{-c_{10}})$ тенглик ўринли, бу ерда c_{10} – ўзгармас мусбат ва

$$\sigma(n) = \prod_{p \le Y} \frac{p \cdot \rho(p,n)}{\varphi^2(p)}, \;\; Y = X^{1/l\nu_1}, \;\; \nu_1 = 10^{-5}, \;\; l = \ln\ln X.$$

Учинчи параграфда юқоридаги леммалардан фойдаланиб қуйидаги теорема исботланган:

4-теорема. Етарлича катта X лар учун, $E_k(X) \ll X^{\gamma}$ баҳо ўринли, бу ерда

$$\gamma < \begin{cases} 1 - \left(17774{,}989k^2\left(lnk + 6{,}5452\right)\right)^{-1}, & агар \;\; 2 \le k \le 205, \\ 1 - \left(68k^3\left(2lnk + lnlnk + 2{,}8\right)\right)^{-1}, & агар \;\; 205 < k \le e^{628}, \\ 1 - \left(137k^3 lnk\right)^{-1}, & агар \;\; lnk > 628. \end{cases}$$

Фараз қилайлик, $n, n \le X$ лар учун $p_1 \equiv l(\mathrm{mod}\, D), p_2 \equiv l(\mathrm{mod}\, D)$ шартни қаноатлантирувчи $n = p_1 + p_2^k$ кўринишда ифодалаб бўлмайдиган ва (11) ни қаноатлантирувчи n лар сонини $E_k(D,X)$ – орқали белгилаймиз.

Тўртинчи параграфда қуйидаги теорема исботланган.

5-теорема. Агар $1 \le D \le \ln^A X$ бўлса, у ҳолда $E_k(D,X) \ll X^{\gamma} / \varphi(D)$ баҳо ўринли, бу ерда

$$\gamma < \begin{cases} 99999{,}8212\cdot 10^{-5}\,, & агар\ \ k=2, \\ 99999{,}9263\cdot 10^{-5}\,, & агар\ \ k=3, \\ 1-\left(261{,}3963k^2 4^k\left(lnk+6{,}9313\right)\right)^{-1}, & агар\ \ 4\le k\le e^{503}, \\ 1-\left(265k^2 4^k lnk\right)^{-1}, & агар\ \ lnk>503. \end{cases}$$

4-теорема В.А.Плаксин теоремасининг такомиллаштирилгани бўлиб, 5-теорема эса шу теорема айирмаси $D \ll \ln^A X$ га тенг бўлган арифметик прогрессия учун умумлаштирилганидир, бу ерда $A>0-$мусбат ҳақиқий сон.

Таъкидлаш лозимки, бу ерда (11) шарт табиий равишда келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, агар p сони $\varphi(p)\backslash \mathrm{k}$ шартни қаноатлантирувчи туб сон бўлса, у ҳолда $(p-1)\backslash \mathrm{k}$ ва агар $k=(p-1)\mathrm{k}_1$ деб олсак, (10) тенгламанинг ечимга эга эканлигидан $n\equiv u+v^k\equiv u+1(\mathrm{mod p})$ $p\nmid uv$ таққосламанинг ечимга эга бўлиши келиб чиқади. Чунки $v^k=v^{(\mathrm{p}-1)\mathrm{k}_1}\equiv 1^{\mathrm{k}_1}\equiv 1(\mathrm{mod p})$, $n-1\equiv u+v^k-1\equiv u(\mathrm{mod p})$. Бундан (11) нинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Бу ерда фойдаланилган метод $n\notin M(D,X), n\le X$ ни (10) кўринишида ифодалашлар сони $R_k(D,n)$ учун ҳам қуйидан баҳо олиш имконини беради:

$$R_k(D,n) > \mathrm{c}(\mathrm{k},\varepsilon)\frac{n^{(1-\mathrm{E}_\beta\varepsilon)/\mathrm{k}}}{\varphi(D)\ln^2 n}A(n),\ (\varepsilon\ge 1.8322\cdot 10^{-4})\,.$$

Бу баҳо $\tilde{\beta}$ махсус нол мавжуд бўлмаган ҳолда, яъни $\mathrm{E}_{\tilde{\beta}}=0$ қаралаётган масаланинг бош ҳадидан ўзгармас кўпайтувчига $\tilde{\beta}$ махсус нол мавжуд бўлган ҳолда ($\mathrm{E}_{\tilde{\beta}}=1$), $n^{-\varepsilon}$ кўпайтувчига фарқ қилади. Бу ерда $A(\mathrm{n})$ масаланинг махсус қатори бўлиб, $(\ln\mathrm{X})^{-k}\ll A(\mathrm{n})\ll \ln\mathrm{X}$ шартни қаноатлантиради.

Диссертациянинг учинчи боби “**Сонларни бир вақтда туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш**” деб номланган бўлиб, ушбу

$$b_i=a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\ldots+a_{im}p_m\ ;\ i=1,2,3,\ldots,s \qquad (12)$$

чизиқли тенгламалар системаси $s=n$ ва $m=n+1$ бўлганда текширилган. Бу ерда $b_1,b_2,\ldots,b_s-$натурал сонлар, $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{im}-$ бутун коэффициентлар, $p_1,p_2,\ldots,p_m-$ туб сонлар. Маълумки, (12) системанинг ечимга эга бўлиши қуйидаги иккита шартга боғлиқ:

a) ихтиёрий туб сон учун $a_{i1}l_1+a_{i2}l_2+\ldots+a_{i,n+1}l_{n+1}\equiv b_i\left(modp\right)$;

$i=1,2,3,\ldots,n$ таққосламалар системасини қаноатлантирувчи $l_1,l_2,\ldots,l_{n+1}$ $(1\le l_1,l_2,\ldots,l_{n+1}\le p-1)$ бутун сонлар мавжуд;

b) бирор мусбат ҳақиқий сонлар $y_1,y_2,\ldots,y_{n+1}$ учун

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{i,n+1}y_{n+1} = b_i, \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

тенглик ўринли.

Бундан кейин фақат мана шу иккита (конгруэнт ечимга эга бўлиш ва мусбат ечимга эга бўлиш) шартларни қаноатлантирувчи $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ларни қараймиз.

Етарлича катта ихтиёрий X учун a), b) ва $1 \le b_1, b_2, \ldots, b_n \le X$ шартларни қаноатлантирувчи $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ векторлар тўпламини $U(X)$ орқали белгилаймиз.

$m \ge 2s+1$ ҳол учун Ву Фанг томонидан (12) системани ечимлар сони учун асимптотик формула исботланди.

$s < m \le 2s$ бўлганда эса, (12) система ечимга бўлмаган $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $1 \le b_1, b_2, \ldots, b_n \le X$ векторлар сони $E(X)$ нинг $E(X) < X^{n-\varepsilon}$ тенгсизликни қаноатлантириши исботланган, бу ерда X етарлича катта сон, $\varepsilon -$етарлича кичик мусбат ўзгармас сон.

Фараз қилайлик, $n-$ фиксирланган натурал сон ва $J(\vec{b})$ эса (12) системанинг $s = n, \quad m = n+1$ бўлган ҳол учун туб сонлардаги ечимлари сони бўлсин.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида (12) системанинг ечимга эга бўлишига боғлиқ бўлган қуйидаги теорема исботланган:
$s = 2, \quad m = 3$ бўлган ҳолда:

6-теорема. Агар X - етарлича катта ҳақиқий сон ва y_1, y_2, y_3 мусбат сонлар учун $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}y_j > 0,\ i = 1,2,$ шарт бажарилса, у ҳолда

$$cardU(X) > X^2 B^{-4}(42,4246(\ln\ln B + 1,8)^2)^{-1} \text{ ва } E(X) < X^{\gamma},\ \gamma < 1,9999833$$

ўринли.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида туб коэффициентли тенгламалар системасининг ечимга эга бўлиш шарти келтирилган. Жумладан, $b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3,\ i = 1,2$ тенгламалар системасини

a) ихтиёрий туб сон учун $a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + a_{i3}l_3 \equiv b_i (mod p),\ i = 1,2$ таққосламалар системасини қаноатлантирувчи l_1, l_2, l_3 $(1 \le l_1, l_2, l_3 \le p-1)$ бутун сонлар мавжуд;

b) бирор мусбат ҳақиқий сонлар y_1, y_2, y_3 учун $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 = b_i,\ i = 1,2$ тенглик ўринли.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида (12) системанинг ечимга эга бўлиши билан боғлиқ қуйидаги теорема исботланган:
$s = n, \quad m = n+1$ ҳол учун:

7-теорема. Агар $X-$ етарлича катта, $\delta(0<\delta<1)-$етарлича кичик мусбат сонлар бўлса, у ҳолда $\vec{b}\in U(X)$ даги кўпи билан $E(X)<X^{n-\frac{\delta}{17n^3}}$ тадан ташқари барча векторлар учун учун қуйидаги баҳо ўринли:

$$J\left(\vec{b}\right)>\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}3(n!)^2B^{(2n-1)}\left|\vec{b}\right|\right)^{1-\frac{\delta}{10(n-1)}}}{\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}3(n!)^2B^{(2n-1)}\left|\vec{b}\right|\right)\right)^{n+1}},$$

бу ерда $B=\max\left\{3\left|a_{ij}\right|\right\},\quad 1\le i\le n, 1\le j\le n+1.$

Олинган натижалар Ву Фанг, И. Аллаков, M.C.Liu, K.M. Tsang, Б.Бабаназаров, М.И.Тулаганов, А.С. Файнлейб ишларини тўлдиради ва Б.Абраевнинг натижасини барча n лар учун умумлашмаси ҳисобланади.

ХУЛОСА

Диссертация иши берилган сонни арифметик прогрессиядан олинган туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш ва бир вақтда сонларни туб сонлар йиғиндиси кўринишида ифодалаш масалаларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Жуфт сонларни арифметик прогрессиядан олинган иккита туб соннинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш масаласи, яъни туб сонлар арифметик прогрессиядан олинган ҳолдаги Гольдбахнинг бинар масаласи махсус тўплами учун янги баҳо исботланди;
2. Берилган сонни кўрсатилган кўринишда ифодалашлар сони учун қуйидан баҳолар исботланган. Олинган натижалар А.Ф.Лаврик ва И.Аллаковларнинг шу соҳада олган натижаларини такомиллаштирилган, шунингдек, Х. Монтгомери ва Р.Воннинг натижаларини арифметик прогрессия учун умумлаштирилган;
3. Берилган сонни туб сон ва туб соннинг фиксирланган даражаси йиғиндиси кўринишида ифодалаш масаласининг махсус тўплами учун янги баҳо олинган;
4. Берилган сонни арифметик прогрессиядан олинган туб сон ва туб соннинг фиксирланган даражаси йиғиндиси кўринишида ифодалашлар сони учун янги баҳо исботланган;
5. Чизиқли тенгламалар системасининг туб сонларда ечимга эга бўлиш шартларини қаноатлантирувчи натурал сонлар тўпламининг баҳолари аниқлаштирилган;
6. Берилган натурал сонларни бир вақтда туб сонларнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш масаласининг махсус тўплами учун янги баҳо исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

САФАРОВА АБДИВОХИДА ШУКУРОВИЧА

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ СУММОЙ ПРОСТЫХ ИЗ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

01.01.06 – Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2021

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2013.3.PhD/FM402

Диссертация выполнена в Термезском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель: **Аллаков Исмаил**
физика-математика фанлари доктори, доцент

Официальные оппоненты: **Рахмонов Зарулло Хусенович**
доктор физико-математических наук, академик (Таджикистан)

Худойбердиев Аброр Хакимович
доктор физико-математических наук, доцент

Ведущая организация: Самаркандский государственный университет

Защита диссертации состоится «30» июля 2021 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.01.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website www.mathins.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 117). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «17» июля 2021 года.
(протокол рассылки № 2 от «17» июля 2021 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Б.А.Омиров
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во всем мире многие научные и практические исследования, часто приводятся к исследованию задач теоретической механики и криптографии. Исследование математических моделей естественных процессов составляет теоретическую основу аддитивных задач теории чисел, и важно определить законы шифрования криптографии с помощью аддитивных задач теории чисел. Расшифровка, числовые функции и характеры Дирихле, необходимые для решения таких задач, зависят от значений числовых функций и числовых значений переменных. Выражение данного числа как суммы простого числа и фиксированной степени простого числа полученных из арифметической прогрессии, остается одной из важных задач при решении проблем изучания естественной математической модели многих физических, химических и биологических процессов.

В настоящее время решение бинарных и тернарных проблем Гольдбаха из аддитивных задач теории чисел имеет большое значение во всем мире. Проблема выражения данного четного числа в виде суммы двух простых чисел, полученных из арифметической прогрессии, еще не решена. Впервые в решение аддитивных задач существенные результаты были достигнуты с использованием кругового метода. Затем дополнение кругового метода с методом тригонометрических сумм привела к решению тернарной задачи Гольдбаха для достаточно больших нечетных чисел. В связи с этим, различные виды аддитивных задач, связанных с простыми числами, т.е. выражение данного числа в виде суммы простого числа и фиксированной степени натурального числа, выражение данного числа в виде суммы простого числа и фиксированной степени натурального числа, выражение данного числа в виде суммы простых и натуральных чисел в фиксированных степенях считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране уделяется внимание современным направлениям теории чисел, имеющим научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, в последние годы были достигнуты значительные результаты в решении задач о представление чисел суммой простых чисел включающие в себе тернарные и бинарные проблем Гольдбаха. Основными задачами и направлениями деятельности математики являются проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Алгебра и геометрия»[2]. В целях использования научных результатов в смежных областях науки важными считаются развитие ддитивных задач теории чисел.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Одна из основных проблем теории чисел, бинарная и тернарная проблема Гольдбаха, известна с середины восемнадцатого века, и проблемы Варинга-Гольдбаха, Харди-Литтлвуда, Хуа-Ло-Кена и другие проблемы возникли в связи с этой проблемой. И.М. Виноградов решил тернарную задачу для достаточно больших чисел, используя свой метод тригонометрических сумм. Эта проблема была решена Харальдом Гельфготтомом. Но бинарная проблема остаётся до сих пор до конца не решенной. После известных работ И.М.Виноградова и Хуа Ло Кена, Ван дер Корпут, А.Г.Чудаков и Т.Эстерман применили метод тригонометрических сумм И.М.Виноградова и доказали, что почти все четные числа представимы в виде суммы двух простых чисел. Позже этот результат улучшился в несколько раз. В частности, новые оценки были получены Г. Л. Монтгомери, Р. К. Вон, И. Аллаковым и Дж. Ченом, но проблема не была решена полностью.

А.Ф.Лаврик получил асимптотическую формулу для числа представления данного четного числа в виде суммы двух простых чисел, которая справедлива для почти всех натуральных чисел в рассматриваемом интервале. Затем Г. Монтгомери и Р. Вон улучшили эту оценку и доказали, новые оценки для (исключительного множества) количества натуральных чисел в заданном интервале, которые возможно непредставимые в виде суммы двух простых чисел. Впервые И.Аллаков применяя идею Б.М.Бредихина, получил оценку снизу для числа представлениие четных чисел, которые не входит в исключительное множество указанные Г. Монтгомери и Р. Воном. Аналогичные результаты были доказаны в проблеме Хуа-Ло-Кена и в задаче об одновременном представлении заданных чисел ввиде суммы простых чисел.

В настоящее время ведутся научные исследования по решению бинарной проблемы Гольдбаха из аддитивных задач теории чисел. В частности, с учетом результатов в области упомянутых выше аддитивных задач, в частности аддитивные задачи с простыми числами из некоторой арифметической прогрессии А.А.Карацуба, З.Х. Рахмонов, Н.М.Добровольский, Н.Н. Добровольский, Г.И.Архипов, В.Н.Чубариков,

А.И.Нижников, А.В.Михалев, В.А.Панин, У.М.Пачев, А.Лауринчикас, Т.А.Шакова, Ю.Ю. Евсеева, Г. Монтгомери, Р. Вон и другие получили новые оценки.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Работа над диссертацией проводилась в рамках научно-исследовательского плана Термезского государственного университета.

Целью исследования является представление данного числа в виде суммы простых чисел, полученных из арифметической прогрессии, и одновременно получить новую оценку для специального множества представлений чисел в виде суммы простых чисел.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

исследовать множество четных чисел, которые не могут быть представлены как сумма двух простых чисел из арифметической прогрессии и получить оценку снизу для количества представлений четного числа в указанном виде;

исследовать множество чисел, которые не могут быть представлены в виде суммы простого числа и фиксированной степени простого числа из арифметической прогрессии, и получить оценку снизу для количества представлений данного числа в указанном виде;

исследовать задачи об одновременном представлении заданных натуральных чисел в виде суммы простых чисел и получить оценку снизу для количества представлений в заданном виде.

Объект исследования. Числовые функции, характеры Дирихле в алгебре и теории чисел, тригонометрические суммы и простые числа из арифметической прогрессии.

Предмет исследования. Аддитивная теория чисел, теория арифметических функций, теория функций комплексных переменных, теория характеров Дирихле.

Методы исследования. В диссертации использовались круговой метод Харди-Литтлвуда, метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова и методы Монтгомери-Вона для решения аддитивных задач.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказано новая оценка для множества четных чисел, которые возможно непредставимы в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии и получена оценка для числа представлений четного числа в указанном виде;

доказано новая оценка для множества натуральных чисел, которые возможно непредставимы в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа из арифметической прогрессии и получена оценка снизу для числа представлений натурального числа в указанном виде;

усовершенствована оценка для количества натуральных чисел удовлетворяющих условиям конгруэнтной разрешимости и положительной разрешимости системы линейных уравнений в простых числах;

доказано новая оценка снизу для числа представлений в задаче об одновременном представлении натуральных чисел, суммой простых чисел.

Практические результаты исследования состоит в следующем:

Изложены способы оценки количества представлений натуральных чисел, не входящих в специальное множество и оценки специальных множеств в проблемах Хуа-Ло-Кена и бинарной задачи Гольдбаха.

найдено условие, при котором система линейных уравнений разрешимо в простых числах и изложен способ получение численных оценок множества натуральных чисел, которые удовлетворяют этим условиям разрешимости.

Достоверность результатов исследования обоснована на использовании методов комплексного анализа, алгебры, теории чисел и применении дедуктивных выводов, принятых в математике, а также строгостью и полнотой доказательств теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что они могут быть использованы при дальнейшем развитии теории аддитивных задач теории чисел, а также дальнейшем развитии аналитической теории чисел.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что они позволяют получать численные результаты в аддитивных задачах теории чисел.

Внедрение результатов исследований. По результатам представление чисел в виде суммы простых чисел из арифметической прогрессии:

оценка снизу для количества представлений заданного числа в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа из арифметической прогрессии было использовано в зарубежном проекте под номером ГР0116TJ00532 «Поведение тригонометрических сумм, их приложения в аддитивных проблемах теории чисел, избранные задачи теории приближении функций» при уточнении состояний тригонометрических сумм (справка от 09 апреля 2021 года Института Математики имена А.Жураева, Таджикистан). Применение научного результата позволило получить новые оценки для аддитивных задач теории чисел;

оценка множества чисел возможно непредставимых в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии было использовано при чтении специальных курсов по теме «Короткие тригонометрические суммы и их приложения» (справка от 28 апреля 2021 года Таджикский национальный университет, Таджикистан). Применение научного результата позволило получить новые оценки снизу специальных множеств в тернарной и бинарной проблемах Гольдбаха.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 5 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики

Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, из которых 3 опубликованы в зарубежных журналах и 3 в республиканском научном издании.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 91 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Об исключительном множестве суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии»**, исследует проблему представлений чисел в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии, то есть проблема Гольдбаха, когда простые числа берется из арифметической прогрессии.

Первый параграф этой главы носит вспомогательный характер, в нем даются основные определения, вспомогательные леммы, деление единичного интервала, понятия специальных нулей L-функции Дирихле. В частности, изучение особых нулей L-функции Дирихле служила толчком к развитию аддитивных задач теории чисел.

Введем следующие определения: Пусть $X-$достаточно большое действительное число, $n-$ натуральное число, p, p_1, p_2-простые числа, $E(X)-$ количество четных натуральных чисел $n \le X$, которые (возможно) не представимы в виде суммы двух простых, т.е. в виде $n = p_1 + p_2$. Далее, пусть $M(D,X)-$множество четных натуральных чисел $n \le X$, которые (возможно) непредставимы в виде

$$n = p_1 + p_2,\ p_i \equiv l_i (\mathrm{mod}\, D),\ (l_i, D) = 1,\ i = 1,2; \qquad (1)$$

$E(D,X) = card\,\mathrm{M}(D,X)$; $R(n,D,X)-$число представлений n в виде (1); c_j $(\mathrm{j} = 1,2,...)-$некоторые положительные постоянные, $\varphi(a)-$ функция Эйлера, χ_q- характер Дирихле по модулю q, $\bar{\chi}_q-$ характер Дирихле по модулю q, сопряженный с характером χ_q. Через $\mathcal{M}$ обозначим множество основных интервалов, а через T обозначим множество α с условиями $Q^{-1} < \alpha < 1 + Q^{-1}, \alpha \notin \mathcal{M}$. Таким образом, T$-$объединение всех

допольнительных интервалов. Соответствие этим делением $R(n,D,X)$ можно представить в виде

$$R(n,D,X)=R_1(n,D,X)+R_2(n,D,X), \tag{2}$$

где $R_1(n,D,X)=\int\limits_{\mathcal{M}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)\mathrm{e}(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha,\quad R_2(n,D,X)=\int\limits_{\mathrm{T}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)\mathrm{e}(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha$.

При исследовании $R_1(n,D,X)$ будем использовать следующие леммы:

Лемма 1. Пусть $\chi-$характер Дирихле модуля $q\le P$ и $L(\mathrm{s},\chi)-$соответствующие $L-$функции Дирихле, тогда:

a) функции $L(\mathrm{s},\chi)$, s=σ+it в области:

$$1-\frac{0,0019128}{\log P}\le\sigma\le 1,\ |t|\le P^{19/4}, \tag{3}$$

могут иметь единственный вещественный нуль $\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta}$ для одного вещественного примитивного характера $\tilde{\chi}$ по модулю $q\le P$;

b) если $L(\mathrm{s},\chi)$ имеет такой исключительный нуль, то область (3) можно заменить на область

$$\sigma>1-\frac{1}{81\log P}\log\left(\frac{1}{200\tilde{\delta}\log P}\right),\ |t|\le P^{\delta},\ \tilde{\delta}\log P\le\frac{1}{200e}; \tag{4}$$

c) этот исключительный нуль удовлетворяет неравенствам

$$\frac{0,4961}{\tilde{q}^{1/2}\log^2\tilde{q}}<1-\tilde{\beta}<\frac{0,3}{\log\tilde{q}}.$$

Лемма 2. Пусть $\aleph=\frac{(1+16\delta)}{115},\ 0<\delta<0,01$ и $\exp(\log^{1/2}\mathrm{X})\le P\le X^{\aleph}, XP^{-1}\le h\le\frac{1}{2}X$,

тогда

$$\sum_{q\le P}\sum_{\chi}{}^{'}\max_{x\le\frac{3}{2}X}\max_{h\le\frac{1}{2}X}\left(h+\frac{X}{P}\right)^{-1}\left|\sum_{x-h}^{x}{}^{\#}\chi(p)\ln p\right|<\begin{cases} c_2\exp\left(-c_3\dfrac{\ln X}{\ln P}\right), & \text{если } E_{\tilde{\beta}}=1;\\ c_4\exp\left(-c_5\dfrac{\ln X}{\ln P}\right)(1-\tilde{\beta})\ln P, & \text{если } E_{\tilde{\beta}}=1,\end{cases}$$

здесь $\sum^{\#}-$означает сумму равную $\sum\limits_{x-h}^{x}\mathrm{logp}-\sum\limits_{x-h<n\le x}1$ при $q=1$ и , в случае $E_{\tilde{\beta}}=1$, она равна $\sum\limits_{x-h}^{x}\tilde{\chi}(\mathrm{p})\mathrm{logp}+\sum\limits_{\substack{x-h<n\le x\\ n>0}}n^{\tilde{\beta}-1}$.

Лемма 3. Пусть χ_0 – главный характер по модулю q, χ_i – примитивные характеры по модулю r_i, $i=1,2$; $r_3=[r_1,r_2]$ – НОК r_1 и r_2. Тогда для $m\neq 0$ справедлива оценка

$$\sum_q \frac{1}{\varphi^2(\mathrm{q})}\left|c_{\chi_1\chi_2\chi_0}(m)\tau(\tilde{\chi}_1\chi_0)\tau(\tilde{\chi}_2\chi_0)\right| \ll \frac{|m|}{\varphi(|m|)},$$

где суммирование ведется по всем q кратным r_1 и r_2.

Рассмотрим $R_2(n,D,X)$. В силу (2) и тождество Парсеваля, имеем

$$\sum_n R_2^2(n,D,X)=\int_{\mathrm{T}}|S(\alpha)|^2 d\alpha \le \left(\max_{\mathrm{T}}|S_1(\alpha)|\right)^2 \int_{\mathrm{T}}|S_2(\alpha)|^2 d\alpha. \qquad (5)$$

Здесь

$$\int_{\mathrm{T}}|S_2(\alpha)|^2 d\alpha \le \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}}|S_2(\alpha)|^2 d\alpha \le \sum_{P<p\le X}\ln^2 p.$$

Согласно теореме К.Прахара, при $X\ge 2$ и $D\le X^{\frac{1}{2}}$, имеем

$$\sum_{\substack{p\le X\\ p\equiv l(modD)}} \ln p \ll \frac{X}{\varphi(D)}.$$

Поэтому

$$\int_{\mathrm{T}}|S_1(\alpha)|^2 d\alpha \ll (\ln X)\sum_{\substack{P<p\le X\\ p\equiv l(modD)}} \ln p \ll \frac{X}{\varphi(D)} lnX. \qquad (6)$$

Для того, чтобы оценить $\max_{\alpha\in\mathrm{T}}|S_1(\alpha)|^2$ будем использовать оценки, полученные И.Аллаковым и И.Исраиловым, согласно которым: если, $R\le q\le \frac{X}{R}$ и $1\le R\le X^{\frac{1}{3}}$, $(a,q)=1$, $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{2R}{qN}$, тогда

$$S(\alpha)\ll XDR^{-\frac{1}{2}}(\ln X)^{\frac{11}{2}}. \qquad (7)$$

Согласно теореме Дирихле об аппроксимации существуют такие $q\le Q$ и a с условием $1\le a\le q$, $(a,q)=1$, для которых $\left|\alpha-aq^{-1}\right|\le(qQ)^{-1}$.

Это означает, что $\alpha\in M(q,a)$, если $q\le P$. Значит для $\alpha\in\mathrm{T}$, имеем $q>P$ и следовательно в (7) можем полагать $R=P$. Теперь из (5), (6) и (7) следует

$$\sum_{n\le X} R_2^2(n,D,X) \ll \frac{X^3D^2}{P\varphi(D)}\ln^{12} X. \qquad (8)$$

Второй параграф первой главы посвящен основным интервалам. В частности,

$$S_i = S_i(X;\alpha) = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D}\bar{\chi}_p(l_i)\sum_{P<p\le X}\chi_D(p_i)(lnp_i)e(p_i\alpha),\ i=1,2$$

можно преобразовать следующим образом:

$$S_i = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D}\bar{\chi}_D(l_i)\sum_{P<p_i\le X}\chi_D(p_i)(\ln p_i)\left(\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(p_i a)\tau(\bar{\chi}_q)e(p\eta)\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)}\sum_{\chi_D,\chi_q}\bar{\chi}_D(l_i)\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}_q(h)e\left(\frac{ah}{q}\right)\sum_{P<p_i\le X}(lnp_i)\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)e(p_i\eta).$$

Для удобство введем обозначения: $A_i = \frac{1}{\varphi(D)\varphi(q)}\sum_{\chi_D,\chi_q}\bar{\chi}_D(l_i)\sum_{h=1}^{q}\bar{\chi}_q(h)e\left(\frac{ah}{q}\right)$ и $G_i = \sum_{P<p_i\le X}(lnp_i)\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)e(p_i\eta)$ $i=1,2.$ Тогда получим $S_i = A_iG_i(\chi_m,\eta)$.

Основным результатом второго параграфа является следующий результат:

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}' \int_{M(q,a)} S_1S_2e(-n\alpha)d\alpha = \sum_{q\le P}R(q)\frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2(D)\varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)}\sum_{a=1}^{q}{}'e\left(\frac{a}{q}N_1\ (l_1+l_2)\right)\cdot$$

$$\cdot\int_{M(q,a)} g_1^{(1)}(X,\eta)g_1^{(2)}(X,\eta)e(-n\alpha)d\alpha +$$

$$+\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}'\int_{M(q,a)} A_1A_2g_1^{(1)}(X,\eta)W_2(\chi_m,\eta)e(-n\alpha)d\alpha\ +$$

$$+\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}'\int_{M(q,a)} A_1A_2g_1^{(2)}(X,\eta)W_1(\chi_m,\eta)e(-n\alpha)d\alpha +$$

$$+\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}{}'\int_{M(q,a)} A_1A_2W_1(\chi_m,\eta)W_2(\chi_m,\eta)e(-n\alpha)d\alpha = M_1+M_2+M_3+M_4. \qquad (9)$$

Используя схемы работы А.Ф.Лаврика и Р.Вона И.Аллаков доказал следующую теорему:

Теорема 1. При $D = p^{\nu}$ и $\mathrm{D} \ll \ln^{A} X$ справедливы оценки

$$E(D,X) \le c_3 \frac{X}{\varphi(D)} \exp(-\mathrm{c}_4 \sqrt{\ln X}) \text{ и для } n \notin M(D,X), n \le X$$

$$R(n) \ge \mathrm{c}_5 \frac{n}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(1 - \frac{\ln^{A} n}{\exp(\mathrm{c}_6 \sqrt{\ln n})}\right)\exp\left(-\frac{c_6}{4}\sqrt{\ln n}\right).$$

В паргарафе три главы I доказана теорема:

Теорема 2. При достаточно большом X и достаточно малом $\delta > 0$, при $D < X^{\delta_1}$, $(10\delta_1 < \delta)$ справедливы оценки $E(D,X) \le c_7 X^{1-\delta_1}\varphi^{-1}(D)$ и для $n \notin M(D,X), n \le X$

$$R(n,D) \ge c_8 \frac{n^{1-\frac{7}{8}\delta}}{\varphi(D)\ln^2 n}\left(n^{\frac{\delta}{8}} - 1\right).$$

Теорема 2 отличается от теоремы И. Аллакова следующим образом: в теореме 1 разность арифметической прогрессии равна $D = p^{\nu}$ (то есть равна степени простого числа) и $\mathrm{D} \ll \ln^{A} X$, исключительное множество удовлетворяет оценку $E(D,X) \le c_3 \frac{X}{\varphi(D)} \exp(-\mathrm{c}_4 \sqrt{\ln X})$, а в теореме 2 D произвольное и $1 < D < X^{\delta_1}$ (δ_1 достаточно малое), исключительное множество удовлетворяет оценку $E(D,X) \le c_7 X^{1-\delta_1}\varphi^{-1}(D)$ (где δ достаточное малое и $(10\delta_1 < \delta)$.

Вторая глава диссертации названа **«Об одной аддитивной задаче Хуа-Ло-Кена»** и сначала изучается проблема представления чисел в виде суммы простого числа и фиксированной степени простого числа, а затем эти результаты обобщены для простых чисел p_1 и p_2 из арифметической прогрессии, с разностью D. После известных работ Харди-Литтлвуда и И. Виноградова Хуа-Ло-Кен высказал предположение: «Всякое достаточно большое натуральное число можно представить в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа».

Обозначим через $E_k(X)$ количество натуральных чисел $n, n \le X$, которые возможно непредставимы в виде

$$n = p_1 + p_2^k, \tag{10}$$

где X – достаточно большое действительное число, p_1, p_2 – простые числа, $k \ge 2$ – фиксированное натуральное число. Хуа-Ло- Кен доказал, что

$$E_k(\mathrm{X}) < \mathrm{c}_1(\mathrm{k})\frac{X}{\ln^{\gamma} X}, \text{ где } \gamma < \frac{k}{k+2}.$$

В.А. Плаксин доказал теорему:

Теорема 3. При $k \geq 2$ числа $n, n \leq X$ с условием

$$\left(n-1, \prod_{\substack{p \\ \varphi(p) \nmid k}} p \right) = 1, \tag{11}$$

возможно непредставимые в виде (10), удовлетворяют оценку $E_k(\mathrm{X}) \ll_k X^{\gamma}$, где $0 < \gamma < 1$ и $\gamma < 1 - \left(137k^3 lnk\right)^{-1}$ при достаточно большом k.

Затем, итальянские математики А.Перелли и А.Заккагнини, предполагая верным обобщенную гипотезу Римана, получили сравнительно точный результат: $E_k(\mathrm{X}) \leq \mathrm{c}_3(\mathrm{k}, \varepsilon)\mathrm{X}^{1-\frac{2}{kK}+\varepsilon}$, где $K = 2^{k-1}$ и $\varepsilon > 0$ – произвольное малое действительное число.

В первом параграфе главы II изложены деление единичного интервала и оценка интеграла по допольнительним интервалам. Пусть, $\varepsilon -$ произвольное малое положительное число, $X > X_{k,\varepsilon}$, $X_{k,\varepsilon} -$достаточно большое число и

$$\delta = 1/14k, (0 < \varepsilon < 2/(7k4^k)), X = P^k, Q = X^{17\varepsilon}, \tau = XQ^{-1}, \Delta = \tau^{-1}, Z = Q^{0,3},$$

$L = lnX, l = lnlnX; c_1, c_2 ... -$ положительные постоянные, постоянные в символах $\ll$ и O в худшем случае зависит от постоянных $\varepsilon, k, X_{k,\varepsilon}$. Далее, пусть

$$R(n) = k \sum_{\substack{p_1 + p_2^k = n \\ \frac{X}{3} < p_1, p_2^k \leq X}} lnp_1 lnp_2 \quad \text{и} \quad S_k(\alpha) = k \sum_{\frac{X}{3} < p^k \leq X} lnp\, e\left(\alpha p^k\right),$$

тогда имеем $R(n) = \int_{-\Delta}^{1-\Delta} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha$. Согласно нашему делению $R(n)$ можем представить в виде $R(n) = R_1(n) + R_2(n)$.

Во втором параграфе главы II исследуется $R_1(n)$. Для того чтобы оценить $R_1(n)$ нам необходимо следующие леммы:

Лемма 4. При $0 < \eta \leq \frac{1}{2}$ имеют место

$$T_1(\eta), \tilde{T}_1(\eta) \ll \min(X; \eta^{-1}), \qquad \Gamma_k(\eta), \tilde{\Gamma}_k(\eta) \ll \min(P; \eta^{-1/k}).$$

Согласно лемме 1 если c_1 и c_2 - подходящие положительные постоянные, то существует не более одного действительного примитивного характера $\tilde{\chi}$ по модулю $\tilde{r} \leq Z$, для которого $L(s, \tilde{\chi})$ имеет вещественный нуль $\tilde{\beta}$, удовлетворяющий неравенству $c_2(\tilde{r}^{1/2} \ln^2 \tilde{r})^{-1} < 1 - \tilde{\beta} < c_1(\ln Z)^{-1}$, где $c_1 = 0{,}0019128$; $c_2 = 0{,}4961$.

Лемма 5. Пусть $\delta = \theta T^{-1}$, $0 < \theta < 1$ и $s(t) = \sum_{\mu} c(\mu) e(\mu t)$ – абсолютно сходящийся тригонометрический ряд. Здесь μ - пробегает любую

последовательность вещественных чисел и коэффициенты $c(\mu)$ - комплексные. Тогда

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2\, dt \le c_3(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} |\delta^{-1} \sum_{x}^{x+\delta} c(\mu)|^2\, dx, \text{ где } c_3(\theta) = \left\{ \min(\frac{2}{\pi}; \frac{(1-\theta)}{\pi\theta}) \right\}^{-2}.$$

Доказательство леммы 4 и 5 имеются в работе И. Аллакова.
Далее, обозначим

$$G(q,\chi_1,\chi_2,n) = \sum_{a=1}^{q} F_1(\chi_1) F_k(\chi_2) e\left(-\frac{an}{q}\right), \quad G(q,n) = G(q,\chi_0,\chi_0,n) \qquad (12)$$

и $$\rho(q,\chi_1,\chi_2,n) = \sum_{\substack{u,v=1 \\ u+v^k \equiv n (mod q)}}^{q} \chi_1(u)\chi_2(v), \quad \rho(q,n) = \rho(q,\chi_0,\chi_0,n),$$

$$\pi_r(n) = \sum_{d \diagdown r} \frac{G(d,n)}{\varphi(d)^2}, \quad A_r(n,U) = \sum_{\substack{q \le U \\ (q,r)=1}} \frac{G(q,n)}{\varphi^2(q)}, \qquad A(n) = A_1(n,Q). \qquad (13)$$

Лемма 6. Если χ_1, χ_2 - характеры по модулю r, индуцированные примитивными характерами по модулям r_1, r_2 соответственно, $r = [r_1, r_2]$ *и* $\rho(r,n) > 0$, тогда

$$\frac{G(r,\chi_1,\chi_2,n)}{\varphi^2(r)\pi_r(n)} = \frac{\rho(r,\chi_1,\chi_2,n)}{\rho(r,n)} \ll \frac{(n,r)}{r^{0,33}}.$$

Лемма 7. Если U, r - произвольные числа с условием $Q^{0,7} \le U \le Qr^{-1}$. Тогда для всех $n \le X$, за исключением $\ll XQ^{-0,4}$ значений n справедливо равенство $A_r(n,U)\pi_r(n) = A(n) + O(Q^{-0,1})$.

Лемма 8. Для всех $n \le X$, за исключением $\ll X^{0,88}$ значений n справедливо равенство $A(n) = \sigma(n) + O(L^{-c_{10}})$, где c_{10} – некоторое положительное постоянное и

$$\sigma(n) = \prod_{p \le Y} \frac{p \cdot \rho(p,n)}{\varphi^2(p)}, \; Y = X^{1/l\nu_1}, \; \nu_1 = 10^{-5}, \; l = \ln\ln X.$$

Лемма 6-8 доказано В.А.Плаксином.

В главе II диссертации доказаны следующее теоремы:

Теорема 4. Для достаточно больших X справедлива оценка $E_k(X) \ll X^{\gamma}$, где

$$\gamma < \begin{cases} 1-\left(17774{,}989k^2\left(lnk+6{,}5452\right)\right)^{-1}, & \text{при } 2 \le k \le 205 \\ 1-\left(68k^3\left(2lnk+lnlnk+2{,}8\right)\right)^{-1}, & \text{при } 205 < k \le e^{628}, \\ 1-\left(137k^3lnk\right)^{-1}, & \text{при } lnk > 628\ . \end{cases}$$

Пусть $E_k(D,X)-$количество $n, n \le X$, которые возможно непредставимы в виде $n = p_1 + p_2^k$, где $p_1 \equiv l(\mathrm{mod}\, D), p_2 \equiv l(\mathrm{mod}\, D)$ и n удовлетворяет условию (11).

Теорема 5.. Если $1 \le D \le \ln^A X$, то $E_D\left(X\right) \ll X^\gamma / \varphi\left(D\right)$, где

$$\gamma < \begin{cases} 99999{,}8212 \cdot 10^{-5}, & \text{при } k=2; \\ 99999{,}9263 \cdot 10^{-5}, & \text{при } k=3; \\ 1-\left(261{,}3963k^2 4^k\left(lnk+6{,}9313\right)\right)^{-1}, & \text{при } 4 \le k \le e^{503}; \\ 1-\left(265k^2 4^k lnk\right)^{-1}, & \text{при } lnk > 503. \end{cases}$$

Отметим что, теорема 4 является усилением (уточнением) теоремы 3 Плаксина В.А., а теорема 5 является обобщением на арифметическую прогрессию с разностью $D \ll \ln^A X$, где $A > 0-$ некоторое действительное число.

Заметим, что условие (3) здесь возникает естественным образом. Действительно, пусть p простое число с условием, что $\varphi(p) \backslash \mathrm{k}$, тогда $(p-1) \backslash \mathrm{k}$ и если $k = (p-1)\mathrm{k}_1$, то из разрешимости уравнения (10) следует разрешимость сравнения $n \equiv u + v^k \equiv u + 1(\mathrm{mod p})$, $p \nmid uv$. Поскольку $v^k = v^{(\mathrm{p}-1)\mathrm{k}_1} \equiv 1^{\mathrm{k}_1} \equiv 1(\mathrm{mod p})$, $n-1 \equiv u + v^k - 1 \equiv u(\mathrm{mod p})$. Отсюда получим (11).

Используемый здесь метод дает возможность получить оценку снизу для $R_k(D,n)-$ числа представлений $n \notin M(D,X), n \le X$ в виде (10)

$$R_k(D,n) > \mathrm{c}(\mathrm{k},\varepsilon)\frac{n^{(1-\mathrm{E}_\beta\,\varepsilon)/\mathrm{k}}}{\varphi(D)\ln^2 n}A(n),\ (\varepsilon \ge 1.8322 \cdot 10^{-4})$$

отличающейся от главного члена рассматриваемой проблемы на постоянный множитель, если не существует исключительный нуль $\tilde{\beta}(\mathrm{E}_{\tilde{\beta}} = 0)$ и на множитель $n^{-\varepsilon}$, если существует исключительный нуль $\tilde{\beta}(\mathrm{E}_{\tilde{\beta}} = 1)$ с условием $\tilde{\beta} > 1 - 1/\ln q$. Здесь $A(n)$ особый ряд задачи, который удовлетворяется соотношением $(\mathrm{lnX})^{-k} \ll A(\mathrm{n}) \ll \mathrm{lnX}$.

Третья глава диссертации, названная «**Об одновременном представление чисел суммой простых чисел»** посвящена исследованию систем линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{im}p_m \; ; i = 1,2,3,\ldots,s \qquad (14)$$

при $s = n,\ \ m = n+1$. Здесь $b_1, b_2, \ldots, b_s -$ натуральные числа, $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im} -$ целые коэффициенты, $p_1, p_2, \ldots, p_m -$простые числа.

Известно, что разрешимость системы (14) зависит от следующих двух условий:

а) для любого простого p систему уравнений

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \ldots + a_{i,n+1}p_{n+1} \equiv b_i \left(modp\right) ; i = 1,2,3,\ldots,n$$

удовлетворяют некоторые целые числа $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$ с условием $1 \le l_1, l_2, \ldots, l_{n+1} \le p-1$.

b) для некоторых положительных вещественных чисел $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ справедливы равенства $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{i,n+1}y_{n+1} = b_i, \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$.

В дальнейшем рассмотрим только те $b_1, b_2, \ldots, b_n$, которые удовлетворяют этим двум, так называемым, условиям конгруент-разрешимости и положительной разрешимости. Для любого достаточно большого X через $U\left(X\right)$ обозначим множество векторов $\vec{b} = \left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)$, которые удовлетворяют условиям a), b), и $1 \le b_1, b_2, \ldots, b_n \le X$.

При $m \ge 2s+1$ Ву Фангом доказана асимптотическая формула для числа решений системы (4). А при $s < m \le 2s$ установлено, лишь, что $E\left(X\right) -$ количество векторов $\vec{b} = \left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)$, $1 \le b_1, b_2, \ldots, b_n \le X$ для которых система (4) не разрешима в простых числах, удовлетворяет неравенству $E\left(X\right) < X^{n-\varepsilon}$, где X достаточно большое число, а $\varepsilon -$ абсолютная, эффективно вычисляемая, положительно малая постоянная.

Пусть $n-$фиксированное натуральное число и $J\left(\vec{b}\right) -$ количество решений системы (14) в простых числах, при $s = n, \quad m = n+1$.

В третьей главе диссертации относительной разрешимости системы (14) доказаны:

в случае $s = 2, \quad m = 3$:

Теорема 6. Если X - достаточно большое вещественное число и для некоторых положительных вещественных чисел y_1, y_2, y_3 выполняются условия $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}y_j > 0,\ i = 1,2,$ то $cardU(X) > X^2 B^{-4}(42,4246(\ln\ln B + 1,8)^2)^{-1}$

и $E(X) < X^{\gamma},\ \gamma < 1,9999833.$

в случае $s = n, \ \ m = n+1$:

Теорема 7. Если $X -$ достаточно большое, а $\delta(0 < \delta < 1) -$ достаточно малое действительные числа, то справедлива оценка

$$J\left(\vec{b}\right) > \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} 3(n!)^2 B^{(2n-1)} \left|\vec{b}\right|\right)^{1-\frac{\delta}{10(n-1)}}}{\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}} 3(n!)^2 B^{(2n-1)} \left|\vec{b}\right|\right)\right)^{n+1}},$$

для всех векторов $\vec{b} \in U(X)$ за исключением не более чем $E(X) < X^{n-\frac{\delta}{17n^3}}$ векторов из них. Здесь $B = \max\left\{3\left|a_{ij}\right|\right\}, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n+1.$

Полученные результаты дополняют соответствующие результаты Wu Fang'a, И. Аллакова, M.C.Liu, K.M. Tsang'a, Б.Бабаназарова, М.И.Тулаганова, А.С. Файнлейба и являются обобщением результата работы Б.Абраева для всех n.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению вопросов о представлении чисел суммой простых чисел из арифметической прогрессии и об одновременном представлении чисел суммой простых чисел.

В заключении можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. Проблема представления четных чисел в виде суммы двух простых чисел, полученных из арифметической прогрессии, т.е. бинарная проблема Гольдбаха, когда простые числа получаются из арифметической прогрессии, доказана новая оценка для специального множества;
2. Доказаны оценки снизу для числа представлений данного числа в указанном виде. Полученные результаты усовершенствовали результаты А.Ф. Лаврика и И.Аллакова в этой области, а также обобщены результаты Х. Монтгомери и Р. Вона для арифметической прогрессии;
3. Получена новая оценка для специального множества задач представления данного числа в виде суммы простого числа и фиксированной степени простого числа.
4. Доказана новая оценка количества представлений заданного числа в виде суммы простого числа и фиксированной степени простого числа из арифметической прогрессии;
5. Определены оценки множества натуральных чисел, удовлетворяющих условиям разрешимости системы линейных уравнений в простых числах.
6. Доказана новая оценка для специального множества задач одновременного представления заданных натуральных чисел в виде суммы простых чисел.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

SAFAROV ABDIVOKHID SHUKUROVICH

ON THE REPRESENTATION OF NUMBERS AS A SUM OF PRIMES FROM ARITHMETIC PROGRESSION

01.01.06-Algebra

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.3.PhD/FM402

Dissertation has been prepared at Termez State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (summary)) on the website (http//www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor: **Allakov Ismoil**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent

Official opponents: **Rakhmonov Zarullo Khusenovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, academician (Tajikistan)

Khudoyberdiev Abror Khakimovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent

Leading organization: Samarkand State University

Defense will take place on «30» July 2021 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics. (Address: University str. 46, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website www.mathins.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 117) (Address: University str. 46, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «17» July 2021 year
(Mailing report № 2 on «17» July 2021 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Professor

J.K.Adashev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, PhD., senior researcher

B.A.Omirov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work. Exploring questions about the representation of numbers as a sum of primes from an arithmetic progression and about the simultaneous representation of numbers as a sum of primes.

The Object of the research work: a set of natural and prime numbers, as well as a set of prime numbers from an arithmetic progression, trigonometric sums over prime numbers.

Scientific novelty of the research is as follows:

a new estimate is proved for the set of even numbers, which are possibly unrepresentable as the sum of two primes from an arithmetic progression, and for the first time, a lower estimate is obtained for the number of representing an even number in the indicated form;

a new estimate is proved for the set of natural numbers, which are possibly non-representable as a sum of a prime and a fixed power of a prime number from an arithmetic progression, and for the first time, a lower estimate is obtained for the number of representing a natural number in the indicated form;

a new estimate is obtained for the number of natural numbers satisfying the conditions of congruent solvability and positive solvability of a system of linear equations in primes;

a new lower bound is proved for the representation number in the problem of the simultaneous representation of natural numbers as a sum of primes.

Implementation of the research results. The results obtained were used in the following research projects:

on the representation of numbers as a sum of primes from an arithmetic progression, they were used in a foreign project under the number GR0116TJ00532 “Behavior of trigonometric sums, their applications in additive problems of number theory, selected problems in the theory of approximation of functions (Reference dated April 09, 2021, Institute of Mathematics named after A. Zhuraev, Tajikistan). The scientific results were used by researchers of the Department of Algebra, Number Theory and Topology of the Institute in the implementation of a scientific project;

on the representation of numbers as a sum of primes from an arithmetic progression, they were used in the foreign Tajik National University of the Republic of Tajikistan at the Department of Algebra and Number Theory of the Faculty of Mechanics and Mathematics when reading special courses and performing the scientific topic "Short trigonometric sums and their applications" (Reference dated April 28, 2021 Tajik National University, Tajikistan).

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, divided into 10 paragraphs, a conclusion and 55 references. The full volume of the thesis is 91 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об одновременном представлении чисел суммой простых чисел // Чебышевский сборник(Chebyshevskii Sbornik). – 2012. Т.42. № 2. – С.12-17. (3. Scopus. IF=0,273).
2. Allakov I., Safarov A.Sh. On representation of numbers by sum of prime number's prime fixed degree // Uzbek Mathematical Journal. 2019, No 1, p.14-26. (01.00.00; №6).
3. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об исключительном множестве суммы простого и фиксированной степени простого числа из арифметической прогрессии // Бюллетень Института математики, Узбекистан, 2019, №-5. С. 9-21. (01.00.00; №17).
4. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об одной аддитивной задаче Хуа-Ло-Кена. // Чебышевский сборник (Chebyshevskii Sbornik). – 2019. Т. 20. № 4. –С. 32–45. (3. Scopus. IF=0,273).
5. Allakov I., Safarov A.Sh. Exceptional set of the sum of a prime number and a fixed degree of a prime number // Russian Mathematics. – 2020. 64, P. 8-21. (3. Scopus. IF=0,373).
6. Safarov A.Sh. Goldbaxning ternar va binar problemalari, hamda bu borada olingan keyingi natijalar // Samarqand Davlat universiteti ilmiy tadqiqotlar axborotnoma. – 2020. № 1(119). – 58-63 b. (01.00.00; №2).

II бўлим (II часть; II part)

7. Аллаков И., Сафаров А.Ш. О количестве решений системы линейных уравнений в простых числах // Тезисы докладов Второй международный Российско-Узбекский Симпозиум "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". Кабардино Балкарская Республика 12-14 сентября 2012 года. С.40-41.
8. Аллаков И., Абраев Б.Х., Сафаров А.Ш. О количестве k - близнецов в данном интервале // Тезисы докладов республиканской научной конференции "Актуальные вопросы анализа". Карши 22-23 апреля 2016 года. С.217-219.
9. Сафаров А.Ш. О представлении четных чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Тезисы докладов IV Международный конференции "Актуальные проблемы прикладной математики" Нальчик – Эльбрус 22-26 мая 2018 года. С.224.
10. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об исключительном множестве суммы двух простых чисел // Тезисы докладов республиканской научной конференции "Новые результаты математики и их приложения". Самарканд 14-15 мая 2018 года. С.130-131.

11. Сафаров А.Ш. О количестве представлений четного числа в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии // Тезисы докладов XVII Международный конференции “Современные проблемы, приложения и проблемы истории”. Тула 23-28 сентября 2019 года. С.126-129.
12. Сафаров А.Ш. О количестве представлений четного числа в виде суммы двух простых чисел из арифметической прогрессии // Тезисы докладов республиканской научной конференции “Актуальные проблемы и применения анализа ”. Карши 4-5 октября 2019 года. С.259-260.
13. Safarov A.Sh. O number representing an even number as the sum of two prime numbers from an arithmetic progression // Тезисы докладов Международный научной конференции “Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа”. Душанбе 13-14 декабря 2019 года. С.217-218.
14. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об исключительном множестве в задаче Хуа-Ло- Кена // Тезисы докладов V Международная научно - практическая конференция “Актуальные проблемы математики и информатики”. Елец 18-20 апреля 2019 года. С.17-18.
15. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об условиях разрешимости пары линейных уравнений с тремя простыми переменным // Тезисы докладов республиканской научной конференции “Новые результаты математики и их приложения”. Фергана 13-14 марта 2020 года. С.13-14.
16. Сафаров А.Ш. Об исключительном множестве суммы простого и фиксированного степени простого числа //Тезисы докладов научной онлайн-конференции "Современные проблемы математики". NUKUS 20 мая 2020 года. С.83-84.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2021 йил 7 июлда таҳрирдан ўтказилди.

Бичими: 84x60 1/16. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,75. Адади 50. Буюртма № 8/21.

Гувохнома № 10-3719
“Тошкент кимё технология институти” босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Навоий кўчаси, 32-уй.