V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

ELMURODOV ALIMARDON NURIDDINOVICH

REAKSIYA DIFFUZIYA TIPIDAGI PARABOLIK TENGLAMALAR SISTEMASI UCHUN KO‘P FAZALI NOMA’LUM CHEGARALI MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (phd) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

Toshkent – 2023

UDK: 517.956.4

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

ELMURODOV ALIMARDON NURIDDINOVICH

REAKSIYA DIFFUZIYA TIPIDAGI PARABOLIK TENGLAMALAR SISTEMASI UCHUN KO‘P FAZALI NOMA’LUM CHEGARALI MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

Toshkent – 2023

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy Attestatsiya komissiyasida №B2021.4.PhD/FM307 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (http://kengash.mathinst.uz/) va "ZiyonNet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Taxirov Jozil Ostanovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Apakov Yusupjon Pulatovich fizika-matematika fanlari doktori, professor
Etakchi tashkilot:	**Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil «4» iyul soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (99871) 207-91-40, website: www.mathinst.uz, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (162 raqami bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil «19» iyun kuni tarqatildi.
(2023 yil «19» iyundagi 2 raqamli reestr bayonnomasi).

U.A. Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A.A. Azamov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Noma'lum chegarali diffuzion-ko'chish hodisalari sanoat, biologiya, tibbiyot, atrof-muhit va boshqalar bilan bog'liq bo'lgan ko'p sonli jarayonlarda sodir bo'ladi. Mediko-biologik va ekologik jarayonlarning ko'plab modellari qurilgan va bunda biologik populyatsiyalar tabiati, raqobat modellari, epidemiya tarqalishi va ekolik muammolar muhim kasb etadi. Noma'lum chegarali masalalarning muhim xususiyatlaridan biri shundaki, sohalar avvaldan noma'lum bo'lib, ular fazali o'tishni boshqaruvchi aniq fizik qonuniyatlar va boshqa shartlardan kelib chiquvchi, noma'lum chegaraviy masalaning qismi sifatida aniqlanishi lozim.

Hozirda reaksiya diffuziya tipidagi parabolik tenglamalar uchun noma'lum chegarali masalalarning bir qiymatli yechilishi ma'lum. Lekin reaksiya- diffuziya tipidagi parabolik tenglamalar sistemasi uchun ko'p fazali noma'lum chegarali masalalar yechimlarini qurish va noma'lum chiziqlar tabiatini tahlil qilish masalalari hal qilinmagan. Shuning uchun ma'lum natijalarni quyidagi yo'nalishlarda umumlashtirish talab etiladi: tenglamalar sistemalarida chiziqsiz diffuziya va advektiv ko'chish holatlarini aniqlash; masala yechishning yangi usullarini taklif etish va yangi modellar qurish. Shu bois yangi modellarni ishlab chiqish, rivojlantirish va ishlab chiqilgan usullar yordamida Mediko-biologik va ekologik jarayonlarni monitoring qilish va basharotlash maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda innovatsion xarakterdagi fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqlarga ega bo'lgan dolzarb yo'nalishlariga qiziqish ortib bormoqda. Matematika fanlarining ustuvor yo'nalishlari, ya'ni differensial tenglamalar va matematik fizika, amaliy matematika va matematik modellashtirish bo'yicha xalqaro talablar darajasida ilmiy natijalarga erishish Matematika institutining asosiy vazifalari va faoliyati yo'nalishlaridan biridir[1].

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi Farmoni, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son "Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora tadbirlari to'g'risida"gi, 2017 yil 20 apreldagi PQ-2909- son "Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida" gi va 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash, shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan

[1]O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi № PQ-4387-son qarori

vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalarni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur dissertatsiya O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Zamonaviy amaliy xarakterdagi fanning paydo bo‘lishi asosan suyuq va qattiq fazalarning birgalikdagi evolyutsiyasini tasvirlaydigan mashhur Stefan masalasi bilan bog‘liq. 1970 yillardan boshlab tobora ko‘proq modellarni ishlab chiqishda uzluksiz taraqqiyot kuzatildi va ularning ba’zilari noma’lum chegarali masalalari nazariyasida klassikaga aylandi. Noma’lum chegarali masalalar nazariyasi asoslari (asosan parabolik va elliptik tenglamalar uchun) A.Fridman, L.Rubinshteyn, J.Kannon, J.Xill, U.Kayner (AQSH), A.Fazano, M. Primecerio (Italiya), O. Oleynik, S. Kamenomostkaya, A. Meyrmanov, I. Danilyuk (Rossiya) va boshqalarning ishlarida ishlab chiqilgan va rivojlantirilgan.

So‘nggi o‘n yilliklarda biz turli sohalardan kelib chiqadigan, noma’lum chegarali muhim mavzularni o‘z ichiga oluvchi predmet sohasining tez kengayib borishini kuzatmoqdamiz. Noma’lum chegarali muammolar turli jihatlardan (sonli va nazariy) jadal o‘rganilmoqda, mavzu qo‘llanilish uchun doimiy yangi asoslarni topmoqda va zamonaviy fundamental nazariy muammolar kelib chiqishi davom etmoqda. Bu natijalar, yangi analitik va sonli usullarni ishlab chiqishni hamda o‘ta murakkab masalalarni yechish uchun mavjud algoritm va matematik apparatlarni takomillashtirishni taqozo etmoqda. Hozirgi kunda dunyoning ko‘pgina yetakchi ilmiy markazlarida noma’lum chegarali diffuzion-logistik modellarni qurish va tadqiq etish bo‘yicha faol ilmiy ishlar olib borilmoqda va ular turli xil ekologik, mediko-biologik va shunga o‘xshash jarayonlarni matematik modellashtirishda keng qo‘llanilmoqda.

Ko‘p fazali masalalar ko‘pincha amaliy muammolarda, masalan, neft sanoatida paydo bo‘ladi. Yana bir muammo - bu bir nechta biologik turlar o‘rtasidagi raqobatni modellashtiradigan reaksiya-diffuziyaning logistik muammolaridagi bo‘linish jarayonlari va Lotka-Volterra modelining modifikatsiyalaridir. Bu muammolar nazariyasi hali boshlang‘ich bosqich holatidadir.

Ushbu yo‘nalishlarda asosiy natijalar quyidagi mualliflar tomonidan olingan: A.Friedman, C.Rao, Y.Du, Y.Tao, X.Chen, Z.Lin, C.Li, M.Wang va boshqalar (1-bobga qarang).Biz bu oqimga qo‘shilishga harakat qilmoqdamiz.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan ilmiy tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti FA Matematika instituti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasidagi FA-Atex-2018-149 “Yer usti atmosferasi va ko‘p qatlamli muhitlarda zararli moddalarning diffuziyasi va konvektiv ko‘chishini tadqiq qilish uchun samarador hisoblash algoritmlari va dasturiy majmualarni yaratish” (2018-2020) amaliy loyihasi bo‘yicha va YOT-F4-85 “Biologiya va ekologiyaning zamonaviy muammolarini tadqiq etish uchun nochiziqli matematik modellarni va samarador hisoblash algoritmlarni ishlab chiqish” (2017-2020 yillar) fundamental loyihasi, shuningdek,

“Mediko-biologik va fizik jarayonlarning matematik modellarini ishlab chiqish va takomillashtirish, tadqiqot, monitoring va prognozlashning matematik usullarini qurish” Matematika instituti ilmiy tadqiqot yo‘nalishi doirasida tadqiqot rejasiga muvofiq amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi parabolik tenglamalar va reaksiya-diffuziya-adveksiya tipidagi sistemalar uchun noma’lum chegarali ko‘p fazali logistik masalalari nazariyasini qurish va rivojlantirishdir.

Tadqiqotning vazifalari:

lokal konkurent yashash muhitiga yangi turning kirib kelishini ifodalovchi, kvazichiziqli tenglamalar sistemasi uchun reaksiya-diffuziya-adveksiya raqobat masalasi va uch fazali ekologiya masalasini tadqiq etish;

noma’lum chegaralar turlarning tarqalish frontini ifodalovchi, invaziv yirtqich turlarning tarqalishini modellashtiruvchi Lesli-Gauer tipidagi yirtqich-o‘lja diffuzion modellarini tadqiq etish;

fazali o‘tish chegaralari noma’lum bo‘lgan reaksiya-diffuziya tipidagi parabolik tenglamalar uchun ikki fazali masalalarni o‘rganish;

masalalarni yechish usullarini ishlab chiqish, aprior baholar o‘rnatish, yechimning yagonaligi va mavjudligi teoremalarini isbotlash, taqqoslash prinsipini ta’minlash, noma’lum chegaraning tabiatini o‘rganish.

Tadqiqot ob’ekti. Ekologo-epidemiologik va mediko-biologik jarayonlarning noma’lum chegarali turli xil matematik modellaridan iborat.

Tadqiqot predmeti Aprior baholar o‘rnatish muammolari, yechimning yagonalik va mavjudlik teoremalarining isboti, taqqoslash teoremalarining isboti, shuningdek qidirilayotgan funksiyalarning sifat xossalarini o‘rganishdan iborat.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot ishida matematik va funksional tahlilning usullari, differensial tenglamalar va matematik fizika, matematik modellashtirish usullaridan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

lokal konkurent yashash muhitiga yangi turning kirib kelishini ifodalovchi, kvazichiziqli tenglamalar sistemasi uchun reaksiya-diffuziya-adveksiya raqobat masalasini yechish uchun Gyolder fazolari normalarida aprior baholarni olish usuli ishlab chiqilgan va ular asosida masala yechimining mavjudligi isbotlangan;

suv yuzasiga neft tarqalishi dinamikasining noma’lum chegarali uch fazali matematik modeli qurilgan va Shauder tipidagi aprior baholar o‘rnatilib, ular asosida masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

noma’lum chegara turlar fronti kengayishini ifodalovchi, yirtqichlarning invaziv turlarining tarqalishini modellashtiruvchi Lesli-Gauer tipidagi yirtqich-o‘lja logistik -diffuzion modeli yechimining mavjudligi va yagonaligi teoremalari isbotlangan;

fazali o‘tish chegaralari noma’lum bo‘lgan reaksiya-diffuziya tipidagi parabolik tenglamalar uchun ikki fazali masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

parabolik tenglamalar va reaksiya-diffuziya tipidagi sistemalar uchun noma’lum chegarali ko‘p fazali masalalar ko‘rinishidagi takomillashtirilgan

matematik modellar, shuningdek, taklif qilingan tadqiqot usullari turli xil biologik va ekologik jarayonlarni o‘rganishda qo‘llanilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik va funksional analiz usullari, differensial tenglamalar va matematik fizika, matematik modellashtirish usullari va zamonaviy matematikaning boshqa yangi natijalaridan foydalangan holda matematik yondashuvlar yordamida amalga oshirildi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, ulardan differensial tenglamalar nazariyasi va matematik fizikada, noma’lum chegarali masalalar nazariyasida hamda turli biologik va ekologik jarayonlarning matematik modellarini qurishda foydalanish mumkin.

Natijalarning amaliy ahamiyati biotibbiyot, fizik-kimyoviy va ekologik jarayonlarning modellarini qurish va o‘rganishda qo‘llash imkoniyati bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Reaksiya diffuziya tipidagi parabolik tenglamalar sistemasi uchun ko‘p fazali noma’lum chegarali masalalar bo‘yicha olingan natijalar asosida:

reaksiya-diffuziya tipidagi nochiziqli parabolik tenglamalar sistemasi uchun noma’lum chegarali modelidan YOT-Ftex-2018-149 raqamli “Nochiziqli chegaraviy shartlar bilan tavsiflangan ikki komponentali muhitlarda chiziqli bo‘lmagan filtrlash jarayonlarini matematik modellashtirish” mavzusidagi fundamental loyihada ikki komponentali muhitlarda filtratsiya sistemalarining avtomodel yechimlarini qurishda foydalanilgan (O‘zbekiston Milliy universitetning 2022 yil 17 maydagi 04/11-2821728-22-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi nochiziqli chegaraviy shartlari bo‘lgan ikki komponentali muhitlardagi filtrlash tizimlarining avtomodel yechimlari va ularning asimptotikalarini qurish imkonini bergan;

reaksiya-diffuziya tipidagi parabolik tenglamalar uchun ko‘p fazali noma’lum chegarali masala yechimidan FA-Atex-2018-414 raqamli “Boyitish kombinatlarida energiya sarfini pasaytiruvchi chiqindi mahsulotlari gidrotransporti texnologiyasini ishlab chiqish” mavzusidagi fundamental loyihada tog‘-kon va metallurgiya korxonalarida quvurlar orqali ko‘p fazali muhitlar oqimini o‘rganishda qo‘llanilgan. (Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi institutinng 2023 yil 22 maydagi №376-3 -sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi fiziko-mexanik jarayonlarning har xil murakkab qonuniyatlarini o‘rganish va yangi optimal algoritmlar qurish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 5 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokama qilindi.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 15 ta ilmiy ish chop etilgan bo‘lib, shulardan, 6 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari (PhD) asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda, jumladan 1 tasi xorijiy va 5 tasi O‘zMJa nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, to‘rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 114 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Dissertatsiyaning kirish qismida mavzuning dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi yoritilgan, tadqiqotning maqsad va vazifalari bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **“Nochiziqli parabolik tenglamalar va noma’lum chegarali masalalar nazariyasidan ba’zi ma’lumotlar”** deb nomlangan birinchi bobida dissertatsiya natijalarini isbotlashda foydalanilgan asosiy tushunchalar va o‘rganishda zarur bo‘lgan bir qator ma’lum faktlar keltirilgan.

Dissertatsiyadagi noma’lum chegarali barcha masalalar nochiziqli bo‘lganligi uchun ilmiy tadqiqotimizning asosiy maqsadi – yechimlar uchun aprior baholar o‘rnatish, ular asosida chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechiluvchanligini isbotlash va noma’lum chegaralar tabiatini o‘rganishdir.

Dissertatsiyaning “**Biologiya va ekologiya masalalarida noma’lum chegarali reaksion-diffuzion modellar**” deb nomlangan ikkinchi bobi lokal konkurent yashash muhitiga yangi turning kirib kelishini ifodalovchi, kvazichiziqli tenglamalar sistemasi uchun reaksiya-diffuziya-adveksiya raqobat masalasi va uch fazali ekologiya masalasini tadqiq etishga bag‘ishlangan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida noma’lum chegaraga ega bo‘lgan chegaraviy masala qaraladi: Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $s(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$ funksiyalar topilsin

$$\begin{cases} a(u)u_t - d_1u_{xx} - k_1u_x = u(a_1 - b_1u - c_1v), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < s(t), \\ b(v)v_t - d_2v_{xx} - k_2v_x = v(a_2 - b_2u - c_2v), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < l, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0 = s_0 < l, \; v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_x(t,0) = v_x(t,0) = v(t,l) = 0, \quad 0 < t \le T, \\ \dot{s}(t) = -\mu u_x(t,s(t)), t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

bu yerda $x = s(t)$ noma’lum chegara $u(t,x)$ va $v(t,x)$ bilan birgalikda aniqlanadi; a_i, b_i, c_i, d_i, $k_i (i = 1,2)$ va μ lar berilgan musbat konstantalar.

Biosig‘im koeffitsientlari $a(u)$, $b(v)$ va $u_0(x)$, $v_0(x)$ funksiyalar uchun silliqlik va musbatlik shartlari bajarilgan.

Bu model populyatsiya zichligi u bo‘lgan yangi turning v mahalliy konkurentning yashash muhitiga qanday tarqalishini ifodalaydi.

Paragrafning asosiy natijasi (1) masalaning klassik yechimining global mavjudligini aniqlash va yechimning tabiatini o‘rganish. Aralash ikki fazali tenglamalar uchun noma’lum chegarasi bo‘lgan yangi sinf masalalari uchun Shauder tipidagi aprior baholarni o‘rnatish usuli taklif etiladi. Taqqoslash teoremasi isbotlangan.

1-lemma. *$s(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$ funksiyalar (1) masalaning yechimlari bo‘lsa, u holda quyidagi*

$$0 < u(t,x) \leqslant \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \| u_0 \|_\infty\right\} = M_1, \quad 0 < t \leqslant T, \quad 0 < x < s(t);$$

$$0 < v(t,x) \leqslant \max\left\{\frac{a_2}{c_2}, \| v_0 \|_\infty\right\} = M_2, \quad 0 < \dot{s}(t) \leqslant M_3, \quad 0 < t \leqslant T,$$

tengsizliklar o‘rinli va M_3 faqat berilganlarga bog‘liq.

Lemma maksimum prinsipi va taqqoslash teoremasi yordamida isbotlangan.

Aprior baholar o‘rnatish uchun birinichi masalada quyidagicha $t = t$, $y = \dfrac{x}{s(t)}$ almashtirish kiritamiz. U holda D sohaga $\Omega = \{(t,y): 0 < t < T, 0 < y < 1\}$ soha mos keladi, $U(t,y) = u(t,x)$, $V(t,y) = v(t,x)$ chegaralangan funksiyalar esa quyidagi masalalarning yechimlaridan iborat bo‘ladi

$$\begin{cases} U_t = A_1(s(t))U_{yy} + F_1(U,V,U_y), & (t,y) \in \Omega, \\ U(0,y) = U_0(y), & 0 \le y \le 1, \\ U_y(t,0) = 0, & 0 \le t \le T, \\ U(t,1) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} V_t = A_2(s(t))V_{yy} + F_2(U,V,V_y), & (t,y) \in Q, \\ V(0,y) = V_0(y), & 0 \le y \le l, \\ V_y(t,0) = 0, & 0 \le t \le T, \\ V(t,l) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{3}$$

bu yerda koeffisientlar tushunarli.

1-teorema. *$U(t,y)$ funksiya $\bar{\Omega}$ sohada U_y xususiy hosilasi bilan birgalikda uzluksiz, $\bar{\Omega}$ da (2) masalaning shartlarini qanoatlantirsin. Bundan tashqari $\sup\limits_{\bar{\Omega}} |U_{yy}| < +\infty$ bo‘lsin. U holda $|U_y(t,y)| \le M_4(M_1, M_2, A_{10}, \delta)$, $(t,y) \in \Omega^\delta$, bo‘ladi.*

Agar $U|_{\Gamma(t=0,y=0,y=1)} = 0$ bo‘lsa, u holda $(t,y) \in \bar{\Omega}$ uchun $|U_y(t,y)| \le M_4(M_1, M_2, A_{10})$, bo‘ladi, bu yerda $A_{10} = \min\limits_{\bar{Q}} A_1$, Γ – parabolik chegara.

2-teorema. *$\bar{\Omega}$ sohada uzluksiz $U(t,y)$ funksiya* (2) *masalaning shartlarini qanoatlantirsin. Faraz qilaylik uzluksiz $A_1(t,s(t),U)$, $F_1(U,V,U_y)$ funksiyalar $(t,y) \in \bar{\Omega}$, $|U| \le M_1$, $|V| \le M_2$ va ixtiyoriy U_y uchun $\dfrac{|F_1(U,V,U_y)|}{A_1(t,s(t),U)} \le K_0(U_y^2 + 1)$, $K_0 > 0$, shartni qanoatlantirsin. Shu bilan birga $\{(t,y) \in \bar{\Omega}, |U| \le M_1, |V| \le M_2, |U_y| \le M_4\}$ sohada $A_1(t,s(t),U) \le A_{11}$ bo‘lsa, u holda*

$$|U|_{\frac{2}{3}}^{\Omega^\delta} \le M_5(M_1, M_2, A_{11}, K_0, \delta) \tag{4}$$

bo‘ladi. Bundan tashqari $U(t,y)$ *funksiya* $\bar{\Omega}$ *sohada* U_{ty}, U_{yy} *umumlashgan hosilalari kvadrati bilan jamlanuvchi bo‘lsin. U holda*

$$|U|_{1+\gamma}^{\Omega^\delta} \le M_6\left(M_1, M_2, A_{11}, A_{21}, K_0, \delta\right), \quad 0<\gamma<1, \tag{5}$$

bu yerda $A_{11} = \max_{\bar{\Omega}} A_1$, $A_{21} = \max_{\bar{Q}} A_2$.

Agar $U\big|_{\Gamma(t=0,y=0,y=1)} = 0$ *bo‘lsa,* (4)-(5) *baholar* $\bar{\Omega}$ *sohada o‘rinlidir.*

Teorema[1] ish natijalari yordamida isbotlangan.

Yechimning yagonaligini isbotlash uchun, biz noma’lum chegaraning yangi ko‘rinishni topamiz

$$\frac{d_1}{\mu}s(t) = \frac{d_1}{\mu}s_0 + k_1\int_0^t u(\eta,0)d\eta - \int_0^{s(\eta)} q(u)d\xi + \int_0^{s_0} q(u_0)d\xi + \iint_{D_t} f(u,v)d\xi d\eta, \tag{6}$$

Bu yerda $f(u,v) = u(a_1 - b_1u - c_1v)$.

3-teorema. *1-lemmaning shartlari bajarilsin. U holda* (1) *masalaning yechimi yagona bo‘ladi.*

Isbot. $s_1(t)$, $v_1(t,x)$, $u_1(t,x)$ va $s_2(t)$, $v_2(t,x)$, $u_2(t,x)$ funksiyalar (1) masalaning yechimlari, bundan tashqari, $y(t) = \min\left(s_1(t), s_2(t)\right)$, $h(t) = \min\left(s_1(t), s_2(t)\right)$ bo‘lsin. Keyin, (6) ni hisobga olgan holda, biz quydagini olamiz

$$\frac{d}{\mu}\left|s_1(t) - s_2(t)\right| \le k_1\int_0^t \left|u_1(\eta,0) - u_2(\eta,0)\right|d\eta + \int_0^{y(t)} \left|q(u_1(\eta,\xi)) - q(u_2(\eta,\xi))\right|d\xi +$$

$$+ \int_{y(t)}^{h(t)} \left|q(u_i(\eta,\xi))\right|d\xi + \int_0^t d\eta \int_0^{y(t)} \left|f(u_i,v_i)\right|d\xi + \int_0^t d\eta \int_{y(t)}^{h(t)} \left|f(u_1,v_1) - f(u_2,v_2)\right|d\xi, \tag{7}$$

bu yerda u_i, $v_i (i=1,2)$ lar $y(t)$ va $h(t)$ orasidagi yechim, ya’ni.

$$\left(u_i, v_i\right) = \begin{cases} \text{arap } s_2(t) < s_1(t) \text{ bo'lsa, } u_1(t,x), v_1(t,x), \\ \text{arap } s_1(t) < s_2(t) \text{ bo'lsa, } u_2(t,x), v_2(t,x), \end{cases} \quad f(u_i,v_i) = u_i(a_i - b_iu_i - c_iv_i).$$

1-lemmadan hosil qilamiz

$$\left|u_i(t,x)\right| \le N\left(y(t) - x\right), \left|u_1\left(t, y(t)\right) - u_2\left(t, y(t)\right)\right| \le N\left|s_1(t) - s_2(t)\right|.$$

Teorema maksimum prinsipi va taqqoslash teoremasi yordamida isbotlanadi.

Yechimning mavjudligi. Nochiziqli masalaning yechiluvchaligini isbotlash uchun nochiziqli tenglamalar nazariyasi turli teoremalaridan foydalanish mumkin, bunda klassik yechimning yagonalik teoremasi o‘rinli ekanligini hisobga olish lozim. Nochiziqli masalalarning barcha mumkin bo‘lgan yechimlari uchun $|\cdot|_{1+\alpha}^{Q}$ tipdagi aprior baholarning o‘rnatilganligi va chiziqli masalalar uchun Gyolder sinflaridagi mavjudlik teoremalari yordamida Lera-Shauder prinsipini qo‘llaymiz. Bunda sistemalar uchun mavjudlik teoremasi bitta tenglama holati uchun kabi isbotlanadi, chunki har bir tenglamani $u(t,x)$ va $v(t,x)$ funksiyalar uchun uzluksiz Gyolder koeffitsientli chiziqli tenglama sifatida qarash mumkin.

---

1 Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. Тр.ММО., Т.16. 1967. С.~329-346.

4-teorema. *3 teoremalarning shartlari bajarilsin. U holda* (1) *masalaning* $D \subset Q$ *da* $u(t,x) \in C^{2+\gamma}\left(\bar{D}\right)$, $v(t,x) \in C^{2+\gamma}\left(\bar{Q}\right)$, $s(t) \in C^{1+\gamma}([0,T])$ *yechimi mavjud.*

Taqqoslash prinsipi. Umumlashgan taqqoslash prinsipi isbotlangan.

Quyidagi tasdiq (1) noma'lum chegarali masala bilan bog'liq taqqoslash prinsipidir. $Q_T \times J_1 \times J_2$ da (f,g) funksiyalari Gyolder bo'yicha uzluksiz va chegaralangan to'plam $J_1 \times J_2 \subset R^2$. $J_1 \times J_2$ to'plami (f,g) funksiyasining kvazimonotonikligiga qarab mos keladigan yuqori va quyi yechimlar bilan aniqlanadi.

Berilgan funksiyalar jufti $\underline{U} = (\underline{u}, \underline{v})$, $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v})$ uchun $[\underline{U}, \bar{U}] = \{U := (u,v) \in [C([0,T] \times [0,\infty))]^2 : (\underline{u}, \underline{v}) \le (u,v) \le (\bar{u}, \bar{v})\}$ deb belgilaymiz, bu yerda $(u_1, v_1) \le (u_2, v_2)$ mos ravishda $u_1 \le u_2$ va $v_1 \le v_2$. Agar fiksirlangan u uchun f funksiya v bo'yicha va fiksirlangan v uchun g funksiya u bo'yicha o'smaydigan bo'lsa, u xolda $(f,g) = (f(u,v), g(u,v))$ funksiyalar juftligi o'smaydigan kvazimonoton deb olinadi[1]; masalan (1) dagi $f = u(a_1 - b_1 u - c_1 v)$ va $g = v(a_2 - b_2 u - c_2 v)$ funksiyalar ta'rifni qanoatlantiradi.

2-lemma. (f,g) *kvazimonoton o'smaydigan va* $\left[\underline{U}, \bar{U}\right]$ *da Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiya bo'lsin, bu yerda* $f(0,v) = g(u,0) = 0$. *Quyidagilar o'rinli bo'lsin:* $T \in (0,\infty)$, $\underline{s}, \bar{s} \in C^1([0,T])$, $\underline{u} \in C(\bar{D}_T^*) \cap C^{1,2}(D_T^*)$ *bilan* $D_T^* = \{(t,x) \in R^2 : t \in (0,T], x \in (0, \underline{s}(t))\}$, $\bar{u} \in C(\bar{D}_T^{**} \cap C^{1,2}(D_T^{**}))$, $D_T^{**} = \left\{(t,x) \in R^2 : t \in (0,T], x \in [0, \bar{s}(t))\right\}$, $\underline{v}$, $\bar{v} \in (L^\infty \cap C)([0,T] \times [0,\infty)) \cap C^{1,2}((0,T] \times [0,\infty))$ *va*

$$
\begin{gathered}
a(\bar{u})\bar{u}_t - d_1\bar{u}_{xx} - k_1\bar{u}_x \ge f(\bar{u}, \underline{v}), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < \bar{s}(t), \\
a(\underline{u})\underline{u}_t - d_1\underline{u}_{xx} - k_1\underline{u}_x \le f(\underline{u}, \bar{v}), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x \le \underline{s}(t), \\
b(\bar{v})\bar{v}_t - d_1\bar{v}_{xx} - k_2\bar{v}_x \ge g(\underline{u}, \bar{v}), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < l, \\
b(\underline{v})\underline{v}_t - d_1\underline{v}_{xx} - k_2\underline{v}_x \le g(\bar{u}, \underline{v}), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < l, \\
\bar{u}_x(t,0) = \underline{v}_x(t,0) = 0, \quad \bar{u}(t, \bar{s}(t)) = 0, \quad \underline{v}(t,l) = 0, \\
\underline{u}_x(t,0) = \bar{v}_x(t,0) = \underline{u}(t, \underline{s}(t)) = \bar{v}(t,l) = 0, \quad 0 < t \le T, \\
\underline{s}'(t) \le -\mu\underline{u}_x(t, \underline{s}(t)), \quad \bar{s}'(t) \ge -\mu\bar{u}_x(t, \bar{s}(t)), \quad 0 < t \le T, \\
\underline{s}(0) \le s_0 \le \bar{s}(0), \, \underline{u}(0,x) \le u_0(x) \le \bar{u}(0,x), \quad 0 \le x \le s_0, \\
\underline{v}(0,x) \le v_0(x) \le \bar{v}(0,x), \quad 0 \le x \le l.
\end{gathered}
$$

(u,v,s) *funksiya* (1) *masalaning yagona yechimi bo'lsin, u holda umumiy ta'rifning yopiq sohalarida* $(0,T]$ *ichida* $s(t) \le \bar{s}(t)$, $u(t,x) \le \bar{u}(t,x)$, $v(t,x) \ge \underline{v}(t,x)$, $(0,T]$ *ichida* $s(t) \ge \underline{s}(t)$, $u(t,x) \ge \underline{u}(t,x)$, $v(t,x) \le \bar{v}(t,x)$ *bo'ladi.*

Vaqtning katta qiymatlarida yechimlarning tabiati haqida.

Biz $u(t,x)$ kuchsiz raqib bo'lgan holatni tekshiramiz, xususan:

[3] Pao C. V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. Plenum Press, New York, 1992. 728.

$$\frac{a_1}{a_2} < \min\left\{\frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}\right\}. \qquad (8)$$

5-teorema. *Faraz qilaylik* (8) *shart bajarilsin* $v_0(x) \geqslant \delta > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0,$ $\frac{\mu}{d_1} c_1 A_0 + s_0 < l$, *bu yerda* $A_0 > a(u) > a_0$. *U holda [0,l] da* $s_\infty < l$.

Ikkinchi bobi ikkinchi paragrafda neft va neft mahsulotlarining avariya holatida to‘kilishi bilan bog‘liq ekalogik muammo qaraladi.

Faraz $u(t,x), v(t,x)$ va $w(t,x)$ funksiyalar atmosferada, suvda va cho‘kmalardagi neft mahsulotlarining konsentratsiyasi bo‘lsin. Uchta fazaning har birida neft mahsulotlari konsentratsiyasini va fazalar aro qo‘zg‘aluvchan noma’lum chegaralarni aniqlash quyidagi chegaraviy masalaga keltiriladi: Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(t,x),\ v(t,x),\ w(t,x),\ h(t),\ g(t)$ funksiyalar topilsin:

$$u_t = u_{xx} + c_1 u_x + u(a_1 - b_1 u), \qquad (t,x) \in D_1 \qquad (9)$$

$$v_t = v_{xx} + c_2 v_x + v(a_2 - b_2 v), \qquad (t,x) \in D_2 \qquad (10)$$

$$w_t - w_{xx} - c_3 w_x = w(a_3 - b_3 w), \qquad (t,x) \in D_3 \qquad (11)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le g_0 = g(0), \qquad (12)$$

$$v(0,x) = v_0(x), \qquad g_0 \le x \le h_0 = h(0), \qquad (13)$$

$$w(0,x) = w_0(x), \qquad h_0 \le x \le l, \qquad (14)$$

$$u_x(t,0) = u(t,g(t)) = v(t,g(t)) = v(t,h(t)) = w(t,h(t)) = w_x(t,l) = 0, \ 0 \le t \le T, \qquad (15)$$

$$\dot{g}(t) = -\mu u_x(t,g(t)) + \mu v_x(t,g(t)), \ \dot{h}(t) = \mu v_x(t,h(t)) - \mu w_x(t,h(t)), \ 0 \le t \le T. \qquad (16)$$

bu yerda $D_1 = \{(t,x): 0 < t \le T, 0 < x < g(t)\}$, $D_2 = \{(t,x): 0 < t \le T, g(t) < x < h(t)\}$, $D_3 = \{(t,x): 0 < t \le T, h(t) < x < l\}$.

$x = g(t)$ va $x = h(t)$ funksiyalar ifloslanishning tarqalish frontini ifodalaydi va konsentratsiyalar bilan birga aniqlanadi, $g_0, h_0, \mu, a_i, b_i, c_i \ (i = 1,2,3)$–musbat o‘zgarmaslar, c_i-ko‘chirish koeffitsienti, tenglamalardagi reaksiya-diffuziya hadlar kimyoviy va biologik oksidlanish hisobidan neft mahsulotlari konsentratsiyasining kamayish jarayonini ifodalaydi.

Ishning asosiy maqsadi konsentratsiya va D_2 soha yuzasini kamaytirishni ta’minlashdan iborat. Bu konsentratsiya uchun yuqori bahoni o‘rnatish va noma’lum chegaraning monotonligini o‘rnatish yo‘li bilan ta’minlanadi ($g(t)$-o‘sadi, $h(t)$-kamayadi). Keyinchalik masala yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlanadi.

Aprior baholar. Bu bo‘limda yechimning yagonaligi va global mavjudligini isbotlashda qo‘llaniladigan ba’zi aprior baholar o‘rnatiladi.

6-teorema. $c_2 \ge 1$ *bo‘lib,* $g(t), h(t), u(t,x), v(t,x), w(t,x)$ *funksiyalar* (9)-(16) *masalaning yechimlari bo‘lsin. U holda quyidagi tengsizliklar o‘rinlidir:*

$$0 < u(t,x) \le M_1, \ (t,x) \in D_1, \ 0 < v(t,x) \le M_2, \ (t,x) \in D_2, \ 0 < w(t,x) \le M_3, \ (t,x) \in D_3,$$

$$0 \le \dot{g}(t) \le M_4, \ \ D_1 \cup D_2, \ 0 \le -\dot{h}(t) \le M_5, \ D_2 \cup D_3,$$

bu yerda $M_i = \frac{a_i}{b_i}(i = 1,2,3)$, $M_j\,(j = 4,5)$ – *berilganlar bo'yicha aniqlanadi va bu o'zgarmaslar* T *ga bog'liq emas.*

Boshlang'ich aprior baholar o'rnatilgandan keyin, nochiziqli parabolik nazariya bo'yicha ma'lum natijalarni qo'llash mumkin. Qaralayotgan masalaning uch fazaliligi va o'tishning noma'lum qo'zg'aluvchan chegaraning mavjudligi bilan bog'liq asosiy qiyinchiliklar kelib chiqadi.

Masalaning har bir tenglamasi uchun o'zgaruvchilarni almashtirishdan foydalanib, fiksirlangan sohada alohida kvazichiziqli mos tenglamalar uchun masalalarni hosil qilamiz. Yuqorida o'rnatilgan baholarga asosan bu tenglamalar koeffitsientlari chegaralangan funksiyalar bo'ladi.

Masalan $t = t$, $y = \frac{2x - l - h(t)}{l - h(t)}$ yangi o'zgaruvchilarda D_3 soha $Q = \{(t,y): 0 < t < T, -1 < y < 1\}$ sohaga mos keladi, $W(t,y) = w(t,x)$ funksiya uchun masala quyidagicha bo'ladi

$$\begin{cases} W_t - A_3(t,h(t))W_{yy} + B_3\left(t,h(t),\dot{h}(t),W,W_y\right) = 0, & (t,y) \in Q_3, \\ W\left(0, \frac{l + h_0 + (l - h_0)y}{2}\right) = w_0\left(\frac{l + h_0 + (l - h_0)y}{2}\right), & -1 \le y \le 1, \\ W_y(t,1) = 0, & 0 \le t \le T, \\ W(t,-1) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{17}$$

$t = t$, $y = \frac{2x - h(t) - g(t)}{h(t) - g(t)}$ yangi o'zgaruvchilarda D_2 soha $Q = \{(t,y): 0 < t < T,\ -1 < y < 1\}$ sohaga mos keladi, $V(t,y) = v(t,x)$ funksiya uchun masala quyidagicha bo'ladi

$$\begin{cases} V_t - A_2(t,h(t),g(t))V_{yy} - B_2\left(t,h(t),g(t),\dot{h}(t),\dot{g}(t),V,V_y\right) = 0, & (t,y) \in Q_2, \\ V\left(0, \frac{h_0 + g_0 + (h_0 - g_0)y}{2}\right) = V_0\left(\frac{h_0 + g_0 + (h_0 - g_0)y}{2}\right), & -1 \le y \le 1, \\ V(t,1) = 0, & 0 \le t \le T, \\ V(t,-1) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{18}$$

$t = t$, $y = \frac{2x - g(t)}{g(t)}$ yangi o'zgaruvchilarda D_1 soha $Q = \{(t,y): 0 < t < T,\ -1 < y < 1\}$ sohaga mos keladi, $U(t,y) = u(t,x)$ funksiya uchun masala quyidagi ko'rinishni oladi

$$\begin{cases} U_t - A_1(t,g(t))U_{yy} - B_1(t,g(t),\dot{g}(t),U,U_y) = 0, & (t,y) \in Q_1, \\ U\left(\frac{g_0(y+1)}{2}, 0\right) = u_0\left(\frac{g_0(y+1)}{2}\right), & -1 \le y \le 1, \\ U(t,1) = 0, & 0 \le t \le T, \\ U_y(t,-1) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{19}$$

Noma’lum chegaralar uchun shartlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\dot{g}(t) = -\frac{2\mu}{g(t)}U_y(t,1) + \frac{2\mu}{h(t)-g(t)}V_y(t,-1), \quad t>0,$$

$$\dot{h}(t) = \frac{2\mu}{h(t)-g(t)}V_y(t,1) - \frac{2\mu}{l-h(t)}W_y(t,-1), \quad t>0.$$

(17), (18) va (19) masalalardagi barcha tenglamalar uchun paraboliklik shartlari va kichik hadlarining bo‘ysunish sharti bajarilib, ushbu[1] ish natijalarini to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘llashga imkon beradi. Teoremani $V(t,y)$ funksiya uchun keltiramiz.

$U(t,y)$, $W(t,y)$ funksiyalar uchun shunga o‘xshash natijalar o‘rinlidir.

7-teorema. *Faraz* $V(t,y)$ *funksiya* V_y *hosilasi bilan birgalikda* $\bar{Q}$ *sohada uzluksiz va* Q *sohada* (18) *masalaning shartlarini qonoatlantirsin, hamda* $\sup_{\bar{Q}}|V_{yy}|<+\infty$ *bo‘lsin. U holda* $|V_y(\tau,y)|\le M_6(M_2,A_{10},\delta)$, $(\tau,y)\in Q^\delta$ *bo‘ladi. Agar* $V|_{\Gamma(t=0,y=-1,y=1)}=0$ *bo‘lsa,* $(\tau,y)\in\bar{Q}$ *uchun* $|V_y(t,y)|\le M_6(M_2,A_{10})$, *tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, bunda* $A_{10}=\min_{\bar{Q}}A_2$, $\Gamma-$ *parabolik chegara.*

8-teorema. *6-teoremaning barcha shartlari bajarilsin.* $\overline{Q_2}$ *sohada uzluksiz* $V(\tau,y)$ *funksiya* (18) *masalaning shartlarini qonoatlantirsin. Faraz qilaylik,* $(\tau,y)\in\overline{Q_2}$, *uchun* $A_2(h(\eta),g(\eta))$, $B_2(h,g,V,V_y)$ *uzluksiz funksiyalar,* $|V|\le M_2$ *va ixtiyoriy* V_y *quyidagi shartlarni qanoatlantirsin*

$$\frac{|B_2(h,g,V,V_y)|}{A_2(h,g)} \le K_1\left(V_y^2+1\right), \quad K_1>0.$$

Bundan tashqari, agar $\{(\tau,y)\in\overline{Q_2}, |V|\le M_2, |V_y|\le P_{01}\}$ *sohada* $A_2(g,h)\le a_{11}$ *bo‘lsa, u holda*

$$|V|_{\frac{2}{3}}^{Q_2^{2\delta}} \le C(M_2,a_{10},K_1,\delta). \tag{20}$$

Agar $V(\tau,y)$ funksiya $\overline{Q_2}$ sohada kvadrat bilan jamlanuvchi $V_{\tau y}$, V_{yy} umumlashgan hosilaga ega bo‘lsa, u holda

$$|V|_{1+\alpha}^{Q_2^{2\delta}} \le K_2(M_2,a_{11},P_{01},K_1,\delta), \quad 0<\alpha<1, \tag{21}$$

bo‘ladi, bu yerda $a_{11}=\max_{D_2}A_2(h,g)$. Agar $V|_\Gamma=0$ bo‘lsa, u holda (20)-(21) baholar $\overline{D_2}$ sohada ham o‘rinli.

Xuddi ikkinchi bob birinchi paragrafdagidek kabi yechimning mavjudligi va yagonalik teoremasi isbotlanadi.

Dissertatsiyaning **uchinchi bobi** “Yirtqich-o‘lja modeli uchun noma’lum chegarali aralash-ikki fazali masalalar” deb atalib, yirtqich va o‘lja munosabati dinamikasining ba’zi masalalari matematik modellarini o‘rganishga bag‘ishlangan.

[1] Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. Тр.ММО., Т.16. 1967. С.~329-346.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida nochiziqli adveksion hadli Lesli-Gauer tipidagi “yirtqich-o‘lja” modeli o‘rganiladi.

$Q=\{(t,x): 0<t\le T, 0<x<L\}$, $D=\{(t,x): 0<t\le T, 0<x<s(t)\}$ sohalarda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(t,x)$, $v(t,x)$ va $s(t)$ funksiyalar topilsin:

$$u_t = u_{xx} + m_1 \cdot u \cdot u_x + u(1-u) - v\left(\frac{u}{u+m}\right), \quad (t,x)\in Q, \tag{22}$$

$$v_t = dv_{xx} + m_2 \cdot v \cdot v_x + kv\left(1-\frac{bv+p}{u+a}\right), \quad (t,x)\in D, \tag{23}$$

$$u(0,x)=u_0(x), \quad 0\le x\le L, \quad v(0,x)=v_0(x), \quad 0\le x\le s_0=s(0) \tag{24}$$

$$u_x(t,0)=v_x(t,0)=u(t,L)=0, \ 0\le t\le T, v(t,x)=0, s(t)\le x\le L, \tag{25}$$

$$\dot{s}(t)=-\mu v_x(t,s(t)), \ 0\le t\le T, \tag{26}$$

bu yerda $s(t)$ – noma’lum chegara bo‘lib, $v(t,x)$ funksiya bilan birga aniqlanadi. s_0, μ, m, p, m_1, m_2, d, a va b - musbat o‘zgarmaslar.

Aprior baholar

9-teorema. *$u(t,x)$, $v(t,x)$, $s(t)$ funksiyalar* (22)-(26) *masalaning yechimi bo‘lsin. U holda* $0<u(t,x)\le \max\{1, \| u_0 \|_\infty\} = M_1$, $(t,x)\in \bar{Q}_T$,

$$0<v(t,x)\le \{M_1+a, \| v_0 \|_\infty\} = M_2, \quad (t,x)\in \bar{D}_T, \ 0<\dot{s}(t)\le \mu N = M_3, \quad t>0,$$

Quyidagi tasdiq masala bilan bog‘liq taqqoslash prinsipini ifodalaydi. Berilgan funksiyalar jufti $\underline{U}=(\underline{u},\underline{v})$, $\bar{U}=(\bar{u},\bar{v})$ uchun

$$[\underline{U},\bar{U}]=\{U:=(u,v)\in[C([0,T]\times[0,\infty))]^2 : (\underline{u},\underline{v})\le(u,v)\le(\bar{u},\bar{v})\}$$

deb belgilaymiz, bu yerda $(u_1,v_1)\le(u_2,v_2)$, mos ravishda $u_1\le u_2$ va $v_1\le v_2$.

3-lemma (Taqqoslash prinsipi). *Faraz qilaylik* $\underline{u}$, $\bar{u}\in(L^\infty\cap C)([0,T]\times[0,\infty))\cap C^{1,2}((0,T]\times[0,\infty))$ *va*

$$\bar{u}_t \ge \bar{u}_{xx} + m_1\cdot\bar{u}\cdot\bar{u}_x - \bar{u}(1-\bar{u}), \quad 0<t\le T, \quad 0<x<L,$$

$$\underline{u}_t \le \underline{u}_{xx} + m_1\cdot\underline{u}\cdot\underline{u}_x - \underline{u}(1-\underline{u}), \quad 0<t\le T, \quad 0<x<L,$$

$$\bar{u}_x(t,0)=0, \quad \bar{u}(t,L)=0, \quad 0<t\leqslant T, \quad \underline{u}_x(t,0)=0, \quad \underline{u}(t,L)=0, \quad 0<t\le T,$$

$$\underline{u}(0,x)\le u_0(x)\le\bar{u}(0,x), \quad 0\le x\le L.$$

bo‘lsin. $u(t,x)$ *funksiya* (22) *tenglamaning chegaralangan yagona yechimi bo‘lsin. U holda* $\bar{Q}$ *sohada* $u(t,x)\le\bar{u}(t,x)$ *va* $u(t,x)\ge\underline{u}(t,x)$ *bo‘ladi.*

Sistemaning har bir tenglamasi uchun mos keluvchi masalani alohida keltiramiz:

$$\begin{cases} u_{xx}+b_1(u,v,u_x)-u_t=0, \quad (t,x)\in Q, \\ u(0,x)=u_0(x), \quad 0\le x\le L, \\ u_x(t,0)=0, \quad u(t,L)=0, \quad 0\le t\le T, \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} dv_{xx}+b_2(u,v,v_x)-v_t=0, \quad (t,x)\in D, \\ v(0,x)=v_0(x), \quad 0\le x\le s_0, \\ v_x(t,0)=v(t,s(t))=0, \quad 0\le t\le T, \end{cases} \tag{28}$$

10-teorema. *Aytaylik* $\bar{Q}$ *sohada uzluksiz* $u(t,x)$ *funksiya* (27) *masalaning shartlarini qanoatlantirsin.* $(t,x)\in\bar{Q}$ *bo'lganda* $b_1(u,v,u_x)$ *uzluksiz funksiya* $|u|\le M_1$, $|v|\le M_2$ *tengsizliklarni qanoatlantirsin va* u_x *hosila* $|b_1(x,u,v,u_x)|\le K_1(u_x^2+1)$ *shartni qanoatlantirsin. U holda*

$$|u_x(t,x)|\le C_0(M_1,K_1,\delta),(t,x)\in Q^\delta. \tag{29}$$

Agar $u(t,x)$ *funksiya* $\bar{Q}$ *sohada kvadrati bilan jamlanuvchi* u_{tx} *va* u_{xx} *umumlashgan hosilalarga ega bo'lsa, u holda*

$$|u|_{1+\gamma}^{Q^\delta}\le C_1(M_1,C_0,K_1,\delta),\quad 0<\gamma<1,\quad |u|_{2+\beta}^{Q^\delta}\le C_2(M_1,C_1,\delta),\quad 0<\beta<1, \tag{30}$$

bu yerda $Q^\delta=\{(t,x):0\le t\le T,\delta\le x\le L-\delta\}$. $u|_\Gamma=0$ bo'lsa, (29)-(30) $\bar{Q}$ da o'rinli.

11-teorema. *9-teoremaning barcha shartlari bajarilsin.* $\bar{D}$ *sohada uzluksiz* $v(t,x)$ *funksiya* (28) *masalaning shartlarini qanoatlantirsin.* $(t,x)\in\bar{D}$ *lar uchun* $|u|\le M_1$, $|v|\le M_2$ *va ixtiyoriy* v_x *lar uchun* $b_2(t,x,u,v,v_x)$ *uzluksiz funksiya* $|b_2(t,x,u,v,v_x)|\le K_2(v_x^2+1)$ *shartni qanoatlantirsin. U holda*

$$|v_x(t,x)|\le P_{01}(M_2,a_{10},K_2,\delta),\quad (t,x)\in D^\delta. \tag{31}$$

Agar $v(t,x)$ *funksiya* $\bar{D}$ *sohada kvadrat bilan jamlanuvchi* v_{tx}, v_{xx} *umumlashgan hosilaga ega bo'lsa, u holda* $|v|_{1+\alpha}^{D^{2\delta}}\le C(M_2,P_{01},K_2,\delta)$, $0<\alpha<1$.

Agar $v|_\Gamma=0$ *bo'lsa,* (31) *baholar* $\bar{D}$ *sohalarda o'rinli bo'ladi.*

$|u|_{2+\alpha}^{\bar{Q}}\le C$, $|v|_{2+\gamma}^{\bar{D}}\le C$ aprior baholar[1] ish natijalari yordamida o'rnatiladi.

12-teorema. *Aytaylik* $v_0(x)\ge\delta>0$, $0\le x\le s_0$, $\frac{\mu}{d}c_1+s_0<L$ *bo'lsin. U holda* $s_\infty<L$ *bo'ladi.*

Kelgusida ikkinchi bobning birinchi paragrafidagidek yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalar isbotlanadi.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida Lesli-Gauer tipidagi yirtqich-o'lja kvazichiziqli model qaraladi. $Q=\{(t,x):0<t\le T,0<x<\infty\}$, $D=\{(t,x):0<t\le T,0<x<s(t)\}$ $(D\subset Q)$ quyidagi masala qaraladi

$$\begin{aligned}
&u_t=u_{xx}+m_1uu_x+u(1-u)-v\left(\frac{u}{u+m}\right),\qquad (t,x)\in Q,\\
&v_t=dv_{xx}+m_2vv_x+kv\left(1-\frac{bv+p}{u+a}\right),\qquad (t,x)\in D,\\
&u(0,x)=u_0(x),\ 0\le x\le l,\ \ v(0,x)=v_0(x),\quad 0\le x\le s_0=s(0)<l,\\
&u_x(t,0)=u(t,l)=v_x(t,0)=v(t,s(t))=0,\quad 0\le t\le T,\\
&\dot{s}(t)=-\mu v_x(t,s(t)),\quad 0\le t\le T,
\end{aligned} \tag{32}$$

[1] Ладыженская О.А., Солонников В.А. и Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967. –736 с.

bu yerda $s(t)$ – noma'lum chegara va $v(t,x)$ funksiya bilan birgalikda aniqlanuvchi, barcha s_0, k, μ, p, m, m_1, m_2, d, a va b parametrlar musbat o'zgarmaslardir.

4-lemma. *Aytaylik* $t \in [0,T]$, $T > 0$ *lar uchun* $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s(t)$ *funksiyalar* (32) *masalaning yechimi bo'lsin. U holda*

$$\bar{Q}_T \text{ da } 0 < u(t,x) \leqslant \max\left\{1, \| u_0 \|_\infty\right\} = M_1,$$

$$\bar{D}_T \text{ da } 0 < v(t,x) \leq \left\{M_1 + a, \| v_0 \|_\infty\right\} = M_2, \quad 0 < \dot{s}(t) \leq \mu N = M_3, \qquad t > 0,$$

Sistemaning har bir tenglamasi uchun mos masalani keltiramiz:

$$\begin{cases} u_t = A_1(t,x,u)u_{xx} + F_1(t,x,u,v,u_x), & (t,x) \in Q, \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, & t > 0, \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} v_t = A_2(t,x,v)v_{xx} + F_2(u,v,v_x), & (t,x) \in D, \\ v(0,x) = v_0(x), & 0 \leq x \leq s_0, \\ V_x(t,0) = 0, \quad V(t,1) = 0, \end{cases}$$

13-teorema. *4-lemmaning shartlari bajarilsin va* $\bar{Q}$ *sohada uzluksiz funksiya* $u(t,x)$ (33) *shartlarni qanoatlantirsin. Agar* $u(t,x)$ *funksiya Q sohada kvadrati bilan integrallanuvchi* u_{tx}, u_{xx} *hosilalarga ega bo'lsin, u holda*

$$|u_x(t,x)| \leq M_4(M_1, u_0), \qquad (t,x) \in \bar{Q}, \ |u|^{\bar{Q}}_{1+\gamma} \leq M_5(M_4), \ |u|^{\bar{Q}}_{2+\beta} \leq M_6(M_5).$$

14-teorema. *Faraz qilaylik* $v_0(x) \geq \delta > 0$, $0 \leq x \leq s_0$, $1 + a \leq p$ *va* $\dfrac{\mu c_1 A_0}{d_2} + s_0 < l$ *bo'lsin, bunda* $B_0 > b(v) > b_0$. *U holda* [0, l] *kesmada* $s_\infty < l$.

Keyin, ikkinchi bobning birinchi paragrafidagidek yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalar isbotlanadi.

Dissertatsiyaning to'rtinchi bobi "Stefan tipidagi ikki fazali masalalar" deb atalib, parabolik tenglamalar uchun noma'lum chegarali reaksiya-diffuziya tipidagi masalalarni o'rganishga bag'ishlangan.

To'rtinchi bobning birinchi paragrafida quyidagi Koshi-Stefan masalasi qaraladi:

$$u_t - u_{xx} + c_1 u_x = u(a_1 - b_1 u), \ (t,x) \in D_1, \tag{34}$$

$$v_t - v_{xx} + c_2 v_x = v(a_2 - b_2 v), \ (t,x) \in D_2, \tag{35}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \ -\infty < x \leq 0, \quad v(0,x) = v_0(x), \ 0 \leq x < \infty, \tag{36}$$

$$u(t,s(t)) = v(t,s(t)) = 0, \ \dot{s}(t) = -\alpha u_x(t,s(t)) + \beta v_x(t,s(t)), \ t > 0, \tag{37}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi, $D_1 = \{(t,x): -\infty < x \leq s(t), \ 0 < t \leq T\}$, $D_2 = \{(t,x): \ s(t) \leq x < +\infty, \ 0 < t \leq T\}$, $D = D_1 \cup D_2$ sohada $s(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$ funksiyalarni toping, bu yerda $x = s(t)$ muhitlar tutashuvini aniqlovchi chiziq qismidan iborat noma'lum chegara hamda (34), (35) tenglamalar yechimi bilan aniqlanuvchi funksiya, $u(t,x)$, $v(t,x)$ lar muhit komponentlari konsentratsiyasidir. $u_0(x)$, $v_0(x)$ lar boshlang'ich konsentratsiya.

Masalani o'rganishda yechimni potensiallar yig'indisi ko'rinishda tasvirlashdan foydalanamiz. Integrallarning yaqinlashuvchiligini ta'minlash uchun

boshlang‘ich funksiya va tenglamaning o‘ng tomoni $|x| \to \infty$ da juda tez o‘smasligi zarur; ularning e^{kx^2} funksiyadan tez o‘smasligi yetarli. Biz esa (34)-(41) masalani chegaralangan funksiyalar sinfida qaraymiz.

Qaralayotgan vaqt oralig‘i noma’lum chegaraning tabiati o‘rganilgan, masalaning global yechilishi uchun zarur bo‘lgan aprior baholar o‘rnatilgan. Masala nochiziqli integral tenglamalar sistemasiga keltirilgan va uning yechilishi qo‘zg‘almas nuqta prinsipi yordamida isbotlangan.

Aprior baholar va noma’lum chegara tabiati

15-teorema. *Faraz qilaylik* $s(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$ *funksiyalar* D_1, D_2 *sohalarda* (34)-(37) *masalaning yechimi bo‘lsin va shunday* N_1, N_2 *o‘zgarmas sonlar mavjud bo‘lib,* $N_1 \ge \max\limits_x \left\{ \dfrac{u_0(x)}{-x}, \dfrac{-a_1^2}{b_1 c_1} \right\}$, $N_2 \ge \max\limits_x \left\{ \dfrac{v_0(x)}{x}, \dfrac{a_2^2}{b_2 c_2} \right\}$, $0 < u_0(x) \le \dfrac{a_1}{b_1}$, $0 < v_0(x) \le \dfrac{a_2}{b_2}$ *bo‘lsin. U holda* T *dan bog‘liq bo‘lmagan* M_1, M_2 *musbat o‘zgarmas sonlar mavjud bo‘lib, ular uchun quyidagi tengsizliklar o‘rinlidir:*

$$0 < u(t,x) \le M_1, \quad |u_x(t,x)| \le M_4, \quad (t,x) \in D_1,$$

$$0 < v(t,x) \le M_3, \quad |v_x(t,x)| \le M_5, \quad (t,x) \in D_2, \quad 0 < \dot{s}(t) \le M_2, \qquad D_1 \cup D_2.$$

Teorema maksimum prinsipi va taqqoslash teoremalari yordamida isbotlanadi. Keyin yechimning potensiallar yig‘indisi ko‘rinishdagi ifodasidan foydalanib, masala Volter integral tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bu sistemaning bir qiymatli yechilishi qo‘zg‘almas nuqta prinsipi yordamida isbotlanadi.

To‘rtinchi bobning ikkinchi paragrafi reaksiya-diffuziya tipidagi kvazichiziqli parabolik tenglamalar uchun noma’lum chegarali ikki fazali masalaga bag‘ishlangan. $D_1 = \{(x,t) : -l < x < s(t), 0 < t \le T\}$, $D_2 = \{(t,x) : s(t) < x < l, 0 < t \le T\}$, $D = D_1 \cup D_2$ sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $s(t)$, $v(x,t)$, $u(x,t)$ funksiyalar topilsin:

$$d_1(u)u_t - u_{xx} - c_1 u_x = u(a_1 - b_1 u), \quad (t,x) \in D_1,$$

$$d_2(v)v_t - v_{xx} - c_2 v_x = v(a_2 - b_2 v), \quad (t,x) \in D_2,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad -l < x \le 0, \; v(x,0) = v_0(x), \quad 0 \le x < l,$$

$$u(-l,t) = \varphi_1(t), \; u(s(t),t) = v(s(t),t) = 0, \quad v(l,t) = \varphi_2(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$\dot{s}(t) = -\alpha u_x(s(t),t) + \beta v_x(s(t),t), \; 0 \le t \le T,$$

bu yerda $x = s(t) -$ noma’lum (noma’lum) chegara $u(x,t)$, $v(x,t)$ funksiyalar bilan birga aniqlanadi; α, β, a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 1,2$ - musbat o‘zgarmas sonlar.

XULOSA

Dissertatsiya fazalar o‘zgarishlari bilan kechuvchi biologiya va ekologiya masalalarida noma’lum chegarali aralash ikki fazali reaksiya-diffuziya modellarini o‘rganishga bag‘ishlangan bo‘lib, bu invaziya va yirtqich-o‘lja bilan bog‘liq biologik jarayonlarni o‘rganish imkonini berdi. Shuningdek ko‘p fazali ekologik muammolar tadqiq etildi va quyidagi natijalarga erishildi:

lokal konkurent yashash muhitiga yangi turning kirib kelishini ifodalovchi nochiziqli matematik noma’lum chegarali model taklif etildi. Tabiiy biologik jarayon invaziya bilan bog‘liq bo‘lganligi sababli, ko‘chish va yangi “biologik sig‘im” omilidan foydalangan holda modelga ko‘chish va yangi “biologik sig‘im” hadlari kiritildi;

fazoviy o‘zgaruvchilar nuqtai nazaridan neftning suv yuzasida tarqalishi dinamikasining noma’lum chegarali bo‘lgan uch fazali matematik modeli qurildi. Neft tarqalishini noma’lum chegarali bo‘lgan sohasi tabiati o‘rganildi. Yechim uchun Shauder tipidagi aprior baholar o‘rnatildi, ular asosida masalaning bir qiymatli yechiluvchanligi isbotlandi;

yirtqich turlarning geterogen muhitda tarqalishini tasvirlash uchun ishlatilishi mumkin bo‘lgan Lesli-Gauer tipidagi yirtqich-o‘lja modeli uchun masalalar ko‘rib chiqildi. Dastlab, yirtqich lokal doimiy yashash muhitiga kiritiladi. Taqqoslash prinsipi, mavjudlik va yagonalik teoremalari isbotlangan, hamda masalan yechimlari uchun ba’zi aprior baholar o‘rnatilgan. Noma’lum chegaralar yirtqich turlarning tarqalish frontini ifodalaydi. Tarqalish fronti klassik Stefan tipidagi shart bilan ifodalanadi;

fazali o‘zgarishlar bilan bog‘liq bo‘lgan reaksiya-diffuziya tenglamalari uchun noma’lum chegarali bo‘lgan ikki fazali masalalar o‘rganildi. Ko‘rib chiqilayotgan vaqt oralig‘ida noma’lum chegaraning tabiati o‘rganildi, masalaning global yechilishi uchun zarur bo‘lgan aprior baholar o‘rnatildi.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЭЛМУРОДОВ АЛИМАРДОН НУРИДДИНОВИЧ

МНОГОФАЗНЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РЕАКЦИЯ ДИФФУЗИЯ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2023 г.

Тема диссертации доктора философии (DoctorofPhilosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за №B2021.4.PhD/FM307.

Диссертация выполнена в Институте математики им. В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz/ и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» по адресу www.ziyonet.uz

Научный руководитель:	**Тахиров Жозил Останович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ашуров Равшан Раджабович** доктор физико-математических наук, профессор
	Апаков Юсупжон Пулатович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организации:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «04» июля 2023 года в 16:00 часов на заседании Научного совета Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазрский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)207-91-40, e-mail: kengash@mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за №162). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазрский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «19» июня 2023 года.
(протокол рассылки № 2 от «19» июня 2023 года).

У.А. Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К. Адашев
Научный секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.А. Азамов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Диффузионно-переносные явления со свободными границами имеют место во внушительном числе процессов, связанных с промышленностью, биологией, медициной, окружающей средой и т. д. Построено и изучено достаточное количество математических моделей медицинских, биологических и экологических процессов, и в то же время важное значение имеют математические модели поведения биологических популяций, модели конкуренции, распространения эпидемии и экологических проблем. Одной из существенных особенностей задач со свободными границами является то, что области априори неизвестны и должны быть определены как часть задачи из-за набора свободных граничных условий, которые выводятся из определенных физических законов или других ограничений, управляющих фазовым переходом.

К настоящему времени проблема однозначной разрешимости задач со свободной границей для параболических уравнений типа реакция-диффузия в какой-то мере себя исчерпала. Но вопросы разрешимости и исследования поведения неизвестных границ в многофазных задачах со свободной границей для систем параболических уравнений типа реакция-диффузия остаются нерешенными. Поэтому требуется обобщить известные результаты в следующих направлениях: рассмотреть случай нелинейной диффузии и адвективного переноса в системах уравнений, предложить новые методы доказательства однозначной разрешимости и построить новые модели. Поэтому разработка и развитие новых математических моделей и их применение в мониторинге и прогнозировании медико-биологических и экологических процессов является актуальной исследовательской задачей.

В нашей стране возрастает интерес к актуальным направлениям фундаментальных наук инновационного характера, имеющих научное и практическое применение. Получение научных результатов на уровне международных требований в приоритетных областях математических наук, а именно, дифференциальных уравнениях и математической физике, прикладной математике и математическом моделировании, является одной из основных задач и направлений деятельности Института математики[1].

Тема и объект исследования настоящей диссертационной работы соответствуют поручениям, обозначенным в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и №ПП-4387

[1]Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

от 09 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполненов соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Возникновение современной дисциплины прикладного характера во многом обязано известной проблеме Стефана, описывающей совместную эволюцию жидкой и твердой фаз. С 1970-х годов наблюдается непрерывный прогресс в разработке все большего числа моделей, некоторые из которых стали классикой теории задач со свободной границей. Основы теории задач со свободной границей (в основном для параболических и эллиптических уравнений) были разработаны и развиты в трудах A.Friedman, L.Rubinstein, J.Cannon, J.Hill, W.Kyner (USA), A.Fasano, M.Primecerio (Italy), О.Олейника, С.Каменомосткой, А.Мейрманова, И.Данилюка (Россия) и других.

В последние десятилетия мы наблюдаем быстрое расширение предметной области за счет включения важных тем со свободными границами, происходящих из разных областей. Интенсивно ведется изучение задач со свободной границей с различных сторон (численных и теоретических), тематика постоянно находит новые основания для приложений, продолжают возникать современные фундаментальные теоретические вопросы. Эти результаты, в частности, требуют разработки новых аналитических и численных методов, а также усовершенствования существующих алгоритмов и аппаратов для решения чрезвычайно сложных задач. В настоящее время во многих ведущих научных центрах мира ведутся активные работы по построению и исследованию диффузионно-логистических моделей со свободной границей, и они широко используются при математическом моделировании различных экологических, медико-биологических и им подобных процессов.

Многофазные задачи часто возникают в прикладных задачах, например в нефтяной промышленности. Другой проблемой является так называемый процесс разделения в логистических задачах реакции-диффузии, моделирующий конкуренцию между несколькими биологическими видами, а также модифицированные модели Лотки-Вольтерра. Теория этих проблем все еще находится в зачаточном состоянии.

В указанных направлениях основные результаты получены авторами: A. Friedman, C. Pao, Y. Du, Y. Tao, X.Chen, Z. Lin, C. Li, M. Wang и другие (см.гл.1).

Мы постараемся влиться в этот бурный поток.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования (НИИ), где выполнялась диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по прикладному проекту ФА-Атех-2018-149 «Построение эффективных вычислительных алгоритмов и программных комплексов для исследования диффузионного и конвективного переноса вредных веществ в приземном пограничном слое атмосферы и многослойных пористых средах» (2018-2020**)** и фундаментальному проекту ОТ-Ф-4-85 «Разработка нелинейных математических моделей и эффективных вычислительных алгоритмов для исследования современных проблем биологии и экологии» (2017-2020 гг.), а также по научному направлению «Разработка и развитие математических моделей медико-биологических и физических процессов, построение математических методов исследования, мониторинга и прогнозирования» Института математики.

Целью исследования является построение и развитие теории многофазных логистических задач со свободной границей для параболических уравнений и систем типа реакция-диффузия-адвекция.

Задачи исследования:

исследование задачи конкуренции реакции-диффузии-адвекции для систем квазилинейных уравнений, описывающей проникновение нового вида в среду обитания локального конкурента и трехфазной задачи экологии;

исследование диффузионных моделей хищника-жертвы типа Лесли-Гауэра, которые моделируют распространение инвазивных видов хищников, когда свободная граница представляет собой расширяющийся фронт видов;

исследование двухфазных задач для параболических уравнений типа реакция-диффузия с неизвестными границами фазовых переходов;

разработка методов решения, установление априорных оценок, доказательство теорем единственности и существования решения, установление принципа сравнения, изучение поведения неизвестной границы.

Объектом исследования. Различные математические модели со свободной границей эколого-эпидемиологических и медико-биологических процессов.

Предмет исследования. Вопросы получения априорных оценок, доказательства теорем единственности и существования решения, установления принципов сравнения, а также изучения качественных свойств искомых функций.

Методы исследования. В исследованиях использованы элементы математического и функционального анализа, методы дифференциальных уравнений и математической физики, методы математического моделирования.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

разработан метод получения априорных оценок в нормах пространств Гёльдера для решения смешанно-двухфазной задачи со свободной границей для систем квазилинейных уравнений типа конкуренции реакции-диффузии-адвекции, описывающих проникновение новый вид в ареал местного конкурента, и на их основе доказана однозначная разрешимость задачи;

построена трехфазная математическая модель со свободными границами динамики растекания нефти по водной поверхности и установлены априорные оценки типа Шаудера, на основе которых доказана однозначная разрешимость задачи;

доказаны теоремы существования и единственности решения логистическо-диффузионных моделей хищник-жертва типа Лесли-Гауэра, моделирующих распространение инвазивных видов хищников, когда свободная граница представляет собой расширяющийся фронт видов;

доказана однозначная разрешимость двухфазных задач для параболических уравнений типа реакция-диффузия с неизвестными границами фазовых переходов.

Практические результаты исследования состоит в следующем:

Модифицированные математические модели в виде многофазных задач со свободной границей для параболических уравнений и систем типа реакция-диффузия, а также предложенные методы исследования могут быть применены при изучении различных биологических и экологических процессов.

Достоверность результатов исследования осуществлялась с использованием методов математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений и математической физики, методов математического моделирования и других новых результатов современной математики.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследований заключается в том, что они могут найти применение в теории дифференциальных уравнений и математической физике, в теории задач со свободной границей и при построении математических моделей различных биологических и экологических процессов.

Практическая значимость результатов обоснована возможностью применения при построении и исследовании моделей медико-биологических, физико-химических и экологических процессов.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по многофазным задачам со свободной границей для систем параболических уравнений типа реакция диффузия были внедрены в практику по следующим направлениям:

математическая модель со свободной границей для систем параболических уравнений использовалась в фундаментальных исследованиях по проекту ЁОТ-Фтех-2018-149 «Математическое моделирование процессов нелинейной фильтрации в двухкомпонентных средах с нелинейными граничными условиями» (Справка Национального Университета Узбекистана от 17 мая 2022 года № 04/11-2821728-22) при построении автомодельных решений систем фильтрации в двухкомпонентных средах. Применение научного результата позволило построить автомодельные решения и их асимптотику систем фильтрации в двухкомпонентных средах с нелинейными граничными условиями.

решение многофазной задачи со свободной границей для параболических уравнений типа реакция-диффузия использовано в исследованиях по проекту ФА-Атех-2018-414 «Разработка технологии гидротранспорта отходов, снижающей энергозатраты на перерабатывающих предприятиях». (Справка Института механики и сейсмостойкости сооружений от 22.05.2023 № 376-3) при исследовании течения жидкости по трубам на горно-металлургических предприятиях. Применение научного результата позволило определить специфические свойства сложных закономерностей физико-механических процессов и построить новые оптимальные алгоритмы.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были обсуждены на 5 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ , из них 6 статей опубликованы в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соисканий ученой степени доктора философии (PhD), в том числе 1 статья опубликована в зарубежном издании, 5 – в УзМЖ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 114 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности и востребованности темы диссертации, отмечено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, описана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи.

В первой главе диссертации под названием **«Некоторые сведения из теории нелинейных параболических уравнений и задач со свободной границей»**, приведены некоторые известные факты, которые будут использованы при изложении результатов диссертации.

Поскольку рассматриваемые в диссертации задачи со свободной границей являются нелинейными, основная цель состоит в том, чтобы получить априорные оценки, доказать (на их основе) теоремы об однозначной разрешимости в целом (во времени), изучить некоторые свойства решений и поведение свободной границы.

Вторая глава диссертации **«Реакционно-диффузионные модели со свободными границами в задачах биологии и экологии»,** посвящена изучению задачи конкуренции реакции-диффузии-адвекции для систем квазилинейных уравнений, описывающей проникновение нового вида в среду обитания локального конкурента и трехфазной задачи экологии.

В первом параграфе второй главы исследована краевая задача со свободной границей: Требуется найти функции $u(t,x)$, $v(t,x)$ и $s(t)$ удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} a(u)u_t - d_1u_{xx} - k_1u_x = u(a_1 - b_1u - c_1v), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < s(t), \\ b(v)v_t - d_2v_{xx} - k_2v_x = v(a_2 - b_2u - c_2v), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < l, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \le x \le s_0 = s_0 < l, \; v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u_x(t,0) = v_x(t,0) = v(t,l) = 0, \quad 0 < t \le T, \\ \dot{s}(t) = -\mu u_x(t,s(t)), t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = s(t)$ называется свободной границей, которая определяется вместе с u и v; все параметры a_i, b_i, c_i, d_i, $k_i (i = 1,2)$ и μ заданные положительные константы. Коэффициенты биоемкости $a(u)$, $b(v)$ и функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ удовлетворяют определенным условиям гладкости и положительности.

Эта модель описывает, как новый вид с плотностью популяции u вторгается в среду обитания местного конкурента v.

Основным результатом параграфа является установление глобального существования классического решения задачи (1) и исследование поведения решения. Предлагается метод установления априорных оценок типа Шаудера для нового класса задач со свободной границей для смешанно-двухфазных уравнений. Доказан принцип сравнения.

Лемма 1. *Пусть* $(u,v,s(t))$ *-решение задачи* (1) *для* $t \in [0,T]$, *Тогда*

$$0 < u(t,x) \le \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \| u_0 \|_\infty\right\} = M_1, \quad 0 < \mathrm{t} \le \mathrm{T}, \quad 0 < x < \mathrm{s(t)};$$

$$0 < v(t,x) \le \max\left\{\frac{a_2}{c_2}, \| v_0 \|_\infty\right\} = M_2, \quad 0 < \mathrm{t} \le \mathrm{T}, \quad 0 < x < \mathrm{l};$$

$$0 < \dot{s}(t) \le M_3, \quad 0 < \mathrm{t} \le \mathrm{T},$$

Чтобы установить априорные оценки введем преобразование $t = t$, $y = \dfrac{x}{s(t)}$. Тогда области D соответствует область $\Omega = \{(t,y) : 0 < t < T, \; 0 < y < 1\}$, а ограниченные функция $U(t,y) = u(t,x)$, $V(t,y) = v(t,x)$ являются решениями задач

$$\begin{cases} U_t = A_1(s(t))U_{yy} + F_1(U,V,U_y), & (t,y) \in \Omega, \\ U(0,y) = U_0(y), & 0 \le y \le 1, \\ U_y(t,0) = 0, & 0 \le t \le T, \\ U(t,1) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} V_t = A_2(s(t))V_{yy} + F_2(U,V,V_y), & (t,y) \in Q, \\ V(0,y) = V_0(y), & 0 \le y \le l, \\ V_y(t,0) = 0, & 0 \le t \le T, \\ V(t,l) = 0, & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{3}$$

где вид коэффициентов понятны.

Введем обозначения $\Omega^\delta = \{(t,y) : 0 < \delta \le t \le T, \; 0 < \delta \le y \le l - \delta\}$.

Теорема 1. *Пусть функция* $U(t,y)$ *непрерывна в* $\bar{\Omega}$ *вместе с* U_y *и удовлетворяет условиям задачи* (2) *в* Ω. *А также, предположим, что* $\sup_{\bar{\Omega}}|U_{yy}|<+\infty$. *Тогда* $|U_y(t,y)|\le M_4(M_1,M_2,A_{10},\delta),\quad (t,y)\in Q^\delta$.

Если $U|_{\Gamma(t=0,y=0,y=1)}=0$, *то для* $(t,y)\in\bar{\Omega}$, $|U_y(t,y)|\le M_4(M_1,M_2,A_{10})$, *где* $A_{10}=\min_{\bar{Q}}A_1$, $\Gamma(t=0,y=0,y=1)$ *– параболическая граница.*

Теорема 2. *Пусть непрерывная в* $\bar{\Omega}$ *функция* $U(t,y)$ *удовлетворяет условиям задачи* (2). *Предположим, что непрерывные функции* $A_1(t,s(t),U)$, $F_1(U,V,U_y)$ *для* $(t,y)\in\bar{\Omega}$, $|U|\le M_1$, $|V|\le M_2$ *и произвольных* U_y *удовлетворяют условиям*

$$\frac{|F_1(U,V,U_y)|}{A_1(t,s(t),U)}\le K_1(U_y^2+1),\quad K_1>0.$$

Кроме того, если $A_1(t,s(t),U)\le A_{11}$ *в области* $\{(t,y)\in\bar{\Omega},|U|\le M_1,|V|\le M_2,|U_y|\le M_4\}$ *то* $|U|_{\frac{2}{3}}^{Q^\delta}\le M_5(M_1,M_2,A_{11},K_1,\delta)$. (4)

И если еще известно, что $U(t,y)$ *обладает в* $\bar{\Omega}$ *суммируемыми с квадратом обобщенными производными* U_{ty}, U_{yy}, *то*

$$|U|_{1+\gamma}^{Q^\delta}\le M_6(M_1,M_2,A_{11},A_{21},K_1,\delta),\quad 0<\gamma<1, \tag{5}$$

где $A_{11}=\max_{\bar{Q}}A_1$, $A_{21}=\max_{\bar{Q}}A_2$. *Если* $U|_{\Gamma(t=0,y=0,y=1)}=0$, *то* (4)- (5) *справедливы и в* $\bar{Q}$.

Теоремы доказываются при помощи результатов работы [1].

Далее находим новое представление для неизвестной границы, которое используется при доказательстве единственности решения.

$$\frac{d_1}{\mu}s(t)=\frac{d_1}{\mu}s_0+k_1\int_0^t u(\eta,0)d\eta-\int_0^{s(\eta)}q(u)d\xi+\int_0^{s_0}q(u_0)d\xi+\iint_{D_t}f(u,v)d\xi d\eta, \tag{6}$$

где $f(u,v)=u(a_1-b_1u-c_1v)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда решение задачи* (1) *единственно.*

Доказательство. Пусть $s_1(t)$, $v_1(t,x)$, $u_1(t,x)$ и $s_2(t)$, $v_2(t,x)$, $u_2(t,x)$ являются решениями задачи (1), и, кроме того, $y(t)=\min(s_1(t),s_2(t))$, $h(t)=\min(s_1(t),s_2(t))$. Тогда, с учетом (6), имеем

$$\frac{d}{\mu}|s_1(t)-s_2(t)|\le k_1\int_0^t|u_1(\eta,0)-u_2(\eta,0)|d\eta+\int_0^{y(t)}|q(u_1(\eta,\xi))-q(u_2(\eta,\xi))|d\xi+$$

$$+\int_{y(t)}^{h(t)}|q(u_i(\eta,\xi))|d\xi+\int_0^t d\eta\int_0^{y(t)}|f(u_i,v_i)|d\xi+\int_0^t d\eta\int_{y(t)}^{h(t)}|f(u_1,v_1)-f(u_2,v_2)|d\xi, \tag{7}$$

[1] Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. Тр.ММО., Т.16. 1967. С.~329-346.

где u_i, v_i - решение между $y(t)$ и $h(t)$, т.е.

$$(u_i, v_i) = \begin{cases} u_1(t,x), v_1(t,x) & \text{если} \quad s_2(t) < s_1(t), \\ u_2(t,x), v_2(t,x) & \text{если} \quad s_1(t) < s_2(t), \end{cases} \quad f(u_i, v_i) = u_i(a_i - b_i u_i - c_i v_i), i = 1,2.$$

Из леммы 1 имеем

$$|u_i(t,x)| \le N(y(t) - x), \ |u_1(t, y(t)) - u_2(t, y(t))| \le N|s_1(t) - s_2(t)|.$$

Теорема доказывается с помощью принципа максимума и теоремы сравнения.

Существование решения. Для доказательства разрешимости нелинейной задачи можно использовать различные теоремы из теории нелинейных уравнений, помня, что для нее имеет место теорема единственности классического решения. Мы применим принцип Лерэ-Шаудера, установленные априорные оценки $|\cdot|^{Q}_{1+\alpha}$ для всех возможных решений нелинейных задач и теоремы разрешимости в классах Гельдера для линейных задач. При этом теоремы существования для систем так же, как теорема для случая одного уравнения, так как каждое из уравнений можно рассматривать как линейное уравнение относительно $u(t,x)$ и $v(t,x)$ с непрерывными по Гельдеру коэффициентами.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда существует в* $D \subset Q$ *решение* $u(t,x) \in C^{2+\alpha}(\overline{D})$, $v(t,x) \in C^{2+\alpha}(\overline{Q})$, $s(t) \in C^{1+\alpha}$, $(0 \le t \le T)$ *задачи.*

Принцип сравнения. Доказывается обобщенный принцип сравнения.

Следующее утверждение представляет собой принцип сравнения, связанный с задачей со свободной границей (1).

Функции (f, g) предполагаются непрерывными по Гёльдеру в $Q_T \times J_1 \times J_2$ для некоторого ограниченного подмножества $J_1 \times J_2 \subset R^2$. Подмножество $J_1 \times J_2$ определяется соответствующими верхными и нижними решениями в зависимости от квазимонотонности функции (f, g)[1].

Для данной пары функций $\underline{U} = (\underline{u}, \underline{v})$, $\overline{U} = (\overline{u}, \overline{v})$ обозначим $[\underline{U}, \overline{U}] = \{U := (u,v) \in [C([0,T] \times [0,\infty))]^2 : (\underline{u}, \underline{v}) \le (u,v) \le (\overline{u}, \overline{v})\}$, где $(u_1, v_1) \le (u_2, v_2)$ имеется в виду $u_1 \le u_2$ и $v_1 \le v_2$. Пара функций $(f, g) = (f(u,v), g(u,v))$ называется квазимонотонно невозрастающей, если при фиксированном u f не возрастает по v, и при фиксированном v g не возрастает по u[1]; например этому удовлетворяют функции $f = u(a_1 - b_1 u - c_1 v)$ и $g = v(a_2 - b_2 u - c_2 v)$ в (1).

Лемма 2. *Пусть* (f, g) *квазимонотонно невозрастающая и липшицева в* $[\underline{U}, \overline{U}]$, *причем* $f(0,v) = g(u,0) \equiv 0$. *Предположим, что* $T \in (0,\infty)$, $\underline{s}, \overline{s} \in C^1([0,T])$, $\underline{u} \in C(\overline{D}_T^*) \cap C^{1,2}(D_T^*)$ *с* $D_T^* = \{(t,x) \in R^2 : t \in (0,T], x \in (0, \underline{s}(t))\}$, $\overline{u} \in C(\overline{D}_T^{**} \cap C^{1,2}(D_T^{**}))$ *с* $D_T^{**} = \{(t,x) \in R^2 : t \in (0,T], x \in [0, \overline{s}(t))\}$, $\underline{v}$, $\overline{v} \in (L^\infty \cap C)([0,T] \times [0,\infty)) \cap C^{1,2}((0,T] \times [0,\infty))$ *и*

$$a(\overline{u})\overline{u}_t - d_1 \overline{u}_{xx} - k_1 \overline{u}_x \ge f(\overline{u}, \underline{v}), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < \overline{s}(t),$$

[3] Pao C. V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. Plenum Press, New York, 1992. 728.

$$a(\underline{u})\underline{u}_t - d_1\underline{u}_{xx} - k_1\underline{u}_x \le f(\underline{u},\overline{v}),\quad 0<t\le T,\quad 0<x\le \underline{s}(t),$$
$$b(\overline{v})\overline{v}_t - d_1\overline{v}_{xx} - k_2\overline{v}_x \ge g(\underline{u},\overline{v}),\quad 0<t\le T,\quad 0<x<l,$$
$$b(\underline{v})\underline{v}_t - d_1\underline{v}_{xx} - k_2\underline{v}_x \le g(\overline{u},\underline{v}),\quad 0<t\le T,\quad 0<x<l,$$
$$\overline{u}_x(t,0)=\underline{v}_x(t,0)=\overline{u}(t,\overline{s}(t))=\underline{v}(t,l)=0,\qquad 0<t\le T,$$
$$\underline{u}_x(t,0)=\overline{v}_x(t,0)=\underline{u}(t,\underline{s}(t))=\overline{v}(t,l)=0,\quad 0<t\leqslant T,$$
$$\underline{s}'(t)\le -\mu\underline{u}_x(t,\underline{s}(t)),\quad \overline{s}'(t)\ge -\mu\overline{u}_x(t,\overline{s}(t)),\quad 0<t\le T,$$
$$\underline{u}(0,x)\le u_0(x)\le\overline{u}(0,x),\quad 0\le x\le s_0,\ \underline{s}(0)\le s_0\le\overline{s}(0),$$
$$\underline{v}(0,x)\le v_0(x)\le\overline{v}(0,x),\quad 0\le x\le l.$$

Пусть (u,v,s)*-единственное ограниченное решение* (1). *Тогда* $s(t)\le\overline{s}(t)$ *в* $(0,T]$, $u(t,x)\le\overline{u}(t,x)$, $v(t,x)\ge\underline{v}(t,x)$, $s(t)\ge\underline{s}(t)$ *в* $(0,T]$, $u(t,x)\ge\underline{u}(t,x)$, $v(t,x)\le\overline{v}(t,x)$, *в закрытых областях общего определения.*

Поведения решений при при неограниченном возрастании времени

Мы исследуем случай, когда u является слабым конкурентом, а именно:

$$\frac{a_1}{a_2}<\min\left\{\frac{b_1}{b_2},\frac{c_1}{c_2}\right\}. \tag{8}$$

Теорема 5. *Пусть, что выполняется* (8) $v_0(x)\ge\delta>0,\quad 0\le x\le s_0,$ $\frac{\mu}{d_1}c_1A_0+s_0<l$, *где* $A_0>a(u)>a_0$. *Тогда* $s_\infty<l$.

Во втором параграфе второй главы рассматривается экологическая проблема, связанная с аварийными разливами нефти и нефтепродуктов.

Пусть $u(t,x)$, $v(t,x)$ и $w(t,x)$ концентрации нефтепродуктов в атмосфере, воде и донных отложениях. Задача определения концентрации нефтепродуктов в каждой из трех фаз и неизвестных подвижных границ между фазами сводится к следующей краевой задаче:

Требуется найти функции $u(t,x)$, $v(t,x)$, $w(t,x)$, $g(t)$, $h(t)$ удовлетворяющие условиям

$$u_t=u_{xx}+c_1u_x+u(a_1-b_1u),\qquad (t,x)\in D_1 \tag{9}$$
$$v_t=v_{xx}+c_2v_x+v(a_2-b_2v),\qquad (t,x)\in D_2 \tag{10}$$
$$w_t-w_{xx}-c_3w_x=w(a_3-b_3w),\qquad (t,x)\in D_3 \tag{11}$$
$$u(0,x)=u_0(x),\qquad 0\le x\le g_0=g(0), \tag{12}$$
$$v(0,x)=v_0(x),\qquad g_0\le x\le h_0=h(0), \tag{13}$$
$$w(0,x)=w_0(x),\qquad h_0\le x\le l, \tag{14}$$
$$u_x(t,0)=u(t,g(t))=v(t,g(t))=v(t,h(t))=w(t,h(t))=w_x(t,l)=0,\ 0\le t\le T, \tag{15}$$
$$\dot{g}(t)=-\mu u_x(t,g(t))+\mu v_x(t,g(t)),\ \dot{h}(t)=\mu v_x(t,h(t))-\mu w_x(t,h(t)),\ 0\le t\le T. \tag{16}$$

где $D_1=\{(t,x):0<t\le T,0<x<g(t)\}$, $D_2=\{(t,x):0<t\le T,g(t)<x<h(t)\}$, $D_3=\{(t,x):0<t\le T,h(t)<x<l\}$.

Здесь $x=g(t)$ и $x=h(t)$ представляют фронт распространения загрязнения и определяются вместе с концентрациями, g_0, h_0, μ, a_i, b_i, c_i $(i=1,2,3)$ -положительные постоянные, c_i-коэффициенты переноса, реакционно-диффузионные члены в уравнениях описывают процессы

уменьшения концентрации нефтепродуктов за счет химического и биологического окисления.

Основная цель работы обеспечить уменьшения концентраций и площадь области D_2. Это обеспечивается путем установления верхних оценок для концентраций и монотонности свободных границ ($g(t)$-возрастает, $h(t)$-убывает). Далее доказывается единственность и существования решения задачи.

Априорные оценки. В этом разделе установим некоторые априорные оценки, которые будут применены при доказательстве единственности и глобального существования решения.

Теорема 6. *Пусть* $c_2 \geq 1$ *функции* $g(t)$, $h(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$, $w(t,x)$ *являются решением задачи* (9)-(16). *Тогда справедливы неравенства*

$$0 < u(t,x) \leq M_1,\ (t,x) \in D_1,\ 0 < v(t,x) \leq M_2,\ (t,x) \in D_2,\ 0 < w(t,x) \leq M_3,\ (t,x) \in D_3,$$

$$0 \leq \dot{g}(t) \leq M_4,\ \ D_1 \cup D_2,\ 0 \leq -\dot{h}(t) \leq M_5,\ D_2 \cup D_3.$$

где $M_i = \frac{a_i}{b_i}(i = 1,2,3)$, *а* $M_j, j = 4,5-$ *выражаются через данные и эти постоянные не зависят от* T.

После установления исходных априорных оценок можно использовать известные результаты по нелинейной параболической теории. Здесь основные трудности возникают в связи с трехфазностью рассматриваемой задачи и наличием свободно подвижных границ перехода.

Используя замену переменных для каждого уравнения задачи, мы отдельно получаем соответствующую задачу для квазилинейных уравнений в фиксированной области. На основе установленных оценок коэффициенты этих уравнений являются ограниченными функциями.

В новых переменных $t = t$ и $y = \frac{2x - l - h(t)}{l - h(t)}$, области D_3 соответствует область $Q_3 = \{(t,y): 0 < t < T, -1 < y < 1\}$, а задача для функции $W(t,y) = w(t,x)$, примет вид

$$\begin{cases} W_t - A_3(t,h(t))W_{yy} + B_3\left(t,h(t),\dot{h}(t),W,W_y\right) = 0, & (t,y) \in Q_3, \\ W\left(0, \frac{l + h_0 + (l - h_0)y}{2}\right) = w_0\left(\frac{l + h_0 + (l - h_0)y}{2}\right), & -1 \leq y \leq 1, \\ W_y(t,1) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ W(t,-1) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{17}$$

$t = t, \quad y = \frac{2x - h(t) - g(t)}{h(t) - g(t)}$ области D_2 соответствует область $Q_2 = \{(t,y): 0 < t < T, -1 < y < 1\}$, а задача для функции $V(t,y) = v(t,x)$, примет вид

$$\begin{cases} V_t - A_2\left(t,h(t),g(t)\right)V_{yy} - B_2\left(t,h(t),g(t),\dot{h}(t),\dot{g}(t),V,V_y\right)=0, & (t,y)\in Q_2, \\ V\left(0,\dfrac{h_0+g_0+(h_0-g_0)y}{2}\right)=V_0\left(\dfrac{h_0+g_0+(h_0-g_0)y}{2}\right), & -1\le y\le 1, \\ V\left(t,1\right)=0, & 0\le t\le T, \\ V\left(t,-1\right)=0, & 0\le t\le T, \end{cases} \quad (18)$$

В новых переменных $t=t,\quad y=\dfrac{2x-g(t)}{g(t)}$, области D_1 соответствует область $Q_1=\left\{(t,y):0<t<T,-1<y<1\right\}$, а задача для функции $U(t,y)=u(t,x)$, примет вид

$$\begin{cases} U_t - A_1(t,g(t))U_{yy} - B_1(t,g(t),\dot{g}(t),U,U_y)=0, & (t,y)\in Q_1, \\ U\left(\dfrac{g_0(y+1)}{2},0\right)=u_0\left(\dfrac{g_0(y+1)}{2}\right), & -1\le y\le 1, \\ U\left(t,1\right)=0,\quad U_y\left(t,-1\right)=0, & 0\le t\le T, \end{cases} \quad (19)$$

Условия для неизвестных границ примет вид

$$\dot{g}(t)=-\frac{2\mu}{g(t)}U_y(t,1)+\frac{2\mu}{h(t)-g(t)}V_y(t,-1),\quad t>0,$$

$$\dot{h}(t)=\frac{2\mu}{h(t)-g(t)}V_y(t,1)-\frac{2\mu}{l-h(t)}W_y(t,-1),\quad t>0.$$

Для всех уравнений в задачах (17), (18) и (19) выполняются условие параболичности и условие подчинения младших членов, которые позволяют непосредственно применят результаты работы [1].

Теорему сформулируем для функции $V(t,y)$.

Аналогичные результаты справедливы и для $U(t,y),\quad W(t,y)$.

Теорема 7. *Пусть функция $V(t,y)$ непрерывна в $\bar{Q}$ вместе с V_y и удовлетворяет условиям задачи* (18) *в Q. А также, предположим, что $\sup\limits_{\bar{Q}}|V_{yy}|<+\infty$. Тогда $\left|V_y(\tau,y)\right|\le M_6\left(M_2,A_{10},\delta\right),\quad (\tau,y)\in Q^{\delta}$.*

Если $V\big|_{\Gamma(t=0,y=-1,y=1)}=0$, то для $(\tau,y)\in\bar{Q}$, $\left|V_y(t,y)\right|\le M_6\left(M_2,A_{10}\right)$, где $A_{10}=\min\limits_{\bar{Q}}A_2$, Г – *параболическая граница.*

Теорема 8. *Пусть выполнены все предположения теоремы 6. Пусть непрерывная в $\overline{Q_2}$ функция $V(\tau,y)$ удовлетворяет условиям задачи (18). Предположим, что непрерывные функции $A_2\left(h(\eta),g(\eta)\right)$, $B_2\left(h,g,V,V_y\right)$ для $(\tau,y)\in\overline{Q_2}$, $|V|\le M_2$ и произвольных V_y удовлетворяют условиям*

$$\frac{\left|B_2\left(h,g,V,V_y\right)\right|}{A_2(h,g)}\le K_1\left(V_y^2+1\right),\quad K_1>0.$$

Кроме того, если $A_2\left(g,h\right)\le a_{11}$ в области $\left\{(\tau,y)\in\overline{Q_2},|V|\le M_2,\left|V_y\right|\le P_{01}\right\}$, то

[1] Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. Тр.ММО., Т.16. 1967. С.~329-346.

$$|V|_{\frac{2}{3}}^{Q_2^{2\delta}} \le C(M_2, a_{10}, K_1, \delta). \qquad (20)$$

И если еще известно, что $V(\tau, y)$ *обладает в* $\overline{Q_2}$ *суммируемыми с квадратом обобщенными производными* $V_{\tau y}$, V_{yy}, *то*

$$|V|_{1+\alpha}^{Q_2^{2\delta}} \le K_2(M_2, a_{11}, P_{01}, K_1, \delta), \quad 0<\alpha<1,\ a_{11} = \max_{D_2} A_2(h, g). \qquad (21)$$

Если $V|_{\Gamma} = 0$, *то оценки* (20)-(21) *справедливы и в* $\overline{D_2}$.

Далее, как и в первом параграфе доказываются теоремы единственности и существования решения.

Третья глава диссертации "Смешанно-двухфазные задачи со свободной границей для модели хищник-жертва" посвящена исследованию математических моделей некоторых задач динамики взаимоотношений хищника и жертвы.

В первом параграфе третьей главы исследуется модель "хищник-жертва" типа Лесли-Гауэра с нелинейным адвекционным членом.

Требуется найти функции $u(t,x)$, $v(t,x)$ и $s(t)$ в области $(D \subset Q)$ $Q = \{(t,x): 0<t\leqslant T, 0<x<L\}$, $D = \{(t,x): 0<t\leqslant T, 0<x<s(t)\}$, удовлетворяющие условиям

$$u_t = u_{xx} + m_1 \cdot u \cdot u_x + u(1-u) - v\left(\frac{u}{u+m}\right), \quad (t,x) \in Q, \qquad (22)$$

$$v_t = dv_{xx} + m_2 \cdot v \cdot v_x + kv\left(1 - \frac{bv+p}{u+a}\right), \quad (t,x) \in D, \qquad (23)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \le x \le L, \quad v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le s_0 = s(0) \qquad (24)$$

$$u_x(t,0) = v_x(t,0) = u(t,L) = 0, \ 0 \le t \le T, \ v(t,x) = 0, s(t) \le x \le L, \qquad (25)$$

$$\dot{s}(t) = -\mu v_x(t, s(t)), \ 0 \le t \le T, \qquad (26)$$

где $s(t)$ – неизвестная граница, которая определяется вместе с $v(t,x)$. s_0, μ, m, p, m_1, m_2, d, a и b-положительные постоянные.

Априорные оценки

Теорема 9. *Пусть* $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s(t)$ - *решение задачи* (22)-(26). *Тогда*

$$0 < u(t,x) \le \max\left\{1, \| u_0 \|_{\infty}\right\} = M_1 \quad \text{в} \quad \bar{Q}_T$$

$$0 < v(t,x) \le \left\{M_1 + a, \| v_0 \|_{\infty}\right\} = M_2 \quad \text{в} \quad \bar{D}_T, \ 0 < \dot{s}(t) \le \mu N = M_3, \qquad t > 0,$$

Следующее утверждение представляет собой принцип сравнения, связанный с задачей (22). Для данной пары функций $\underline{U} = (\underline{u}, \underline{v})$, $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v})$ обозначим $[\underline{U}, \bar{U}] = \{U := (u,v) \in [C([0,T]\times[0,\infty))]^2 : (\underline{u}, \underline{v}) \leqslant (u,v) \leqslant (\bar{u}, \bar{v})\}$, где $(u_1, v_1) \leqslant (u_2, v_2)$, причем $u_1 \leqslant u_2$ и $v_1 \leqslant v_2$.

Лемма 3. (Принцип сравнения). *Предположим, что* $\underline{u}$, $\bar{u} \in (L^{\infty} \cap C)([0,T]\times[0,\infty)) \cap C^{1,2}((0,T]\times[0,\infty))$ *и*

$$\bar{u}_t \geqslant \bar{u}_{xx} + m_1 \cdot \bar{u} \cdot \bar{u}_x - \bar{u}(1-\bar{u}), \quad 0<t\leqslant T, \quad 0<x<L,$$

$$\underline{u}_t \leqslant \underline{u}_{xx} + m_1 \cdot \underline{u} \cdot \underline{u}_x - \underline{u}(1-\underline{u}), \quad 0<t\leqslant T, \quad 0<x<L,$$

$$\bar{u}_x(t,0) = 0, \quad \bar{u}(t,L) = 0, \qquad 0<t\leqslant T,$$

$$\underline{u}_x(t,0)=0,\quad \underline{u}(t,L)=0,\quad 0<t\leqslant T,$$
$$\underline{u}(0,x)\leqslant u_0(x)\leqslant \bar{u}(0,x),\quad 0\leqslant x\leq L.$$

Пусть $u(t,x)$*-единственное ограниченное решение уравнения* (22). *Тогда* $u(t,x)\leq \bar{u}(t,x)$ *и* $u(t,x)\geq \underline{u}(t,x)$ *в* $\bar{Q}$.

Для каждого уравнения системы отдельно сформулируем соответствующую задачу:

$$\begin{cases} u_{xx}+b_1(u,v,u_x)-u_t=0 \quad \text{в} \quad Q, \\ u(0,x)=u_0(x),\quad 0\leqslant x\leq L, \\ u_x(t,0)=0,\quad u(t,L)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} dv_{xx}+b_2(u,v,v_x)-v_t=0 \quad \text{в} \quad D, \\ v(0,x)=v_0(x),\quad 0\leq x\leq s_0, \\ v_x(t,0)=v(t,s(t))=0,\quad 0\leq t\leq T, \end{cases} \tag{28}$$

Теорема 10. *Пусть непрерывная в* $\bar{Q}$ *функция* $u(t,x)$ *удовлетворяет условиям задачи* (27). *Предположим, что непрерывная функция* $b_1(u,v,u_x)$ *при* $(t,x)\in\bar{Q}$ *удовлетворяет неравенствам* $|u|\leq M_1$, $|v|\leq M_2$ *и производная* u_x *удовлетворяют условиям* $|b_1(x,u,v,u_x)|\leq K_1(u_x^2+1)$.

Тогда $|u_x(t,x)|\leq C_0(M_1,K_1,\delta),(t,x)\in Q^\delta.$ (29)

И если еще известно, что функция $u(t,x)$ *обладает свойством суммируемости с квадратом обобщенных производных* u_{tx} *и* u_{xx} *в* $\bar{Q}$, *то*

$$|u|^{Q^\delta}_{1+\gamma}\leq C_1(M_1,C_0,K_1,\delta),\quad 0<\gamma<1,\quad |u|^{Q^\delta}_{2+\beta}\leq C_2(M_1,C_1,\delta),\quad 0<\beta<1, \tag{30}$$

где $Q^\delta=\{(t,x):0\leq t\leq T,\delta\leq x\leq L-\delta\}$. *Если* $u|_\Gamma=0$, *то* (29)-(30) *справедливы в* $\bar{Q}$

Теорема 11. *Пусть выполнены все предположения теоремы 9. Пусть непрерывная в* $\bar{D}$ *функция* $v(t,x)$ *удовлетворяет условиям задачи* (28). *Предположим, что непрерывная функция* $b_2(t,x,u,v,v_x)$ *для* $(t,x)\in\bar{D}$, $|u|\leq M_1$, $|v|\leq M_2$ *и произвольных* v_x *удовлетворяют условиям* $|b_2(t,x,u,v,v_x)|\leq K_2(v_x^2+1)$.

Тогда $|v_x(t,x)|\leq P_{01}(M_2,a_{10},K_2,\delta),\quad (t,x)\in D^\delta.$ (31)

И если еще известно, что $v(t,x)$ *обладает в* $\bar{D}$ *суммируемыми с квадратом обобщенными производными* v_{tx}, v_{xx}, *то* $|v|^{D^{2\delta}}_{1+\alpha}\leq C(M_2,P_{01},K_2,\delta),\quad 0<\alpha<1.$

Если $v|_\Gamma=0$, *то оценки* (31) *справедливы и в* $\bar{D}$.

Априорные оценки $|u|^{\bar{Q}}_{2+\alpha}\leq C$, $|v|^{\bar{D}}_{2+\gamma}\leq C$ устанавливаются при помощи результатов работы [1].

Теорема 12. *Пусть* $v_0(x)\geq\delta>0$, $0\leqslant x\leqslant s_0$, $\frac{\mu}{d}c_1+s_0<L$. *Тогда* $s_\infty<L$.

Далее, как и в первом параграфе гл.2 доказываются теоремы единственности и существования решения.

---

[1] Ладыженская О.А., Солонников В.А. и Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967. –736 с.

Во **втором параграфе** третьей главы рассматривается квазилинейная модель хищник-жертва типа Лесли-Гауэра.

В области $(D \subset Q)$ $Q=\{(t,x): 0<t\leqslant T, 0<x<l\}$, $D=\{(t,x): 0<t\leqslant T, 0<x<s(t)\}$ рассматривается задача

$$
\begin{aligned}
&a(u)u_t = u_{xx} + m_1 \cdot u_x + u(1-u) - v\left(\frac{u}{u+m}\right), \qquad (t,x)\in Q,\\
&b(v)v_t = dv_{xx} + m_2 \cdot v_x + kv\left(1-\frac{bv+p}{u+a}\right), \qquad (t,x)\in D,\\
&u(0,x)=u_0(x),\ 0\le x\le l,\ \ v(0,x)=v_0(x), \quad 0\le x\le s_0=s(0)<l, \qquad (32)\\
&u_x(t,0)=u(t,l)=v_x(t,0)=v(t,s(t))=0, \quad 0\le t\le T,\\
&\dot{s}(t)=-\mu v_x(t,s(t)), \quad 0\le t\le T,
\end{aligned}
$$

где $s(t)$ свободная граница, которая определяется вместе с $v(t,x)$, все параметры s_0, k, μ, p, m, m_1, m_2, d, a и b положительные постоянные.

Лемма 4. *Пусть* $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s(t)$ *-решение* (33) *при* $t\in[0,T]$, $T>0$. *Тогда*

$$
\begin{gathered}
0<u(t,x)\leqslant \max\left\{1, \| u_0 \|_\infty\right\} = M_1 \quad \text{в} \quad \bar{Q}_T\\
0<v(t,x)\leqslant \left\{M_1+a, \| v_0 \|_\infty\right\} = M_2 \quad \text{в} \quad \bar{D}_T,\\
0<\dot{s}(t)\leqslant \mu N = M_3, \qquad t>0,
\end{gathered}
$$

Для каждого уравнения системы сформулируем соответствующую задачу:

$$
\begin{cases}
u_t = A_1(t,x,u)u_{xx} + F_1(t,x,u,v,u_x), \quad (t,x)\in Q,\\
u(0,x)=u_0(x), \quad 0\le x\le l,\\
u_x(t,0)=0, \quad u(t,l)=0, \quad t>0,
\end{cases} \qquad (33)
$$

$$
\begin{cases}
v_t = A_2(t,x,v)v_{xx} + F_2(u,v,v_x), \quad (t,y)\in D,\\
v(0,x)=v_0(x), \quad 0\le x\le s_0,\\
V_x(t,0)=0, \quad V(t,1)=0,
\end{cases}
$$

Теорема 13. *Пусть выполнены условия леммы 4, и пусть непрерывная по* $\bar{Q}$ *функции функция* $u(t,x)$ *удовлетворяет условиям* (33). *Если* $u(t,x)$ *имеет производные* u_{tx}, u_{xx} *интегрируемые с квадратом в* Q, *то*

$$
|u_x(t,x)|\le M_4(M_1,u_0), \qquad (t,x)\in\bar{Q}, \ |u|^{\bar{Q}}_{1+\gamma}\le M_5(M_4), \qquad |u|^{\bar{Q}}_{2+\beta}\le M_6(M_5).
$$

Теорема 14. *Пусть* $v_0(x)\geqslant\delta>0$, $0\leqslant x\leqslant s_0$, $1+a\le p$ *и* $\dfrac{\mu c_1 A_0}{d_2}+s_0<l$, *где* $B_0>b(v)>b_0$. *Тогда* $s_\infty<l$ *равномерно в [0, l].*

Далее, как и в первом параграфе гл.2 доказываются теоремы единственности и существования решения.

Четвертая глава диссертации под названием «Двухфазные задачи типа Стефана» посвящена исследованию задач для параболических уравнений типа реакция-диффузия с неизвестными границами фазовых переходов.

В первом параграфе четвертой главы рассматривается задача Коши-Стефана в следующей постановке: Требуется найти функции $s(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$ в области $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(t,x):\ -\infty < x \le s(t),\ 0 < t \le T\}$, $D_2 = \{(t,x):\ s(t) \le x < +\infty,\ 0 < t \le T\}$ удовлетворяющие условиям

$$u_t - u_{xx} + c_1 u_x = u(a_1 - b_1 u),\ (t,x) \in D_1, \tag{34}$$

$$v_t - v_{xx} + c_2 v_x = v(a_2 - b_2 v),\ (t,x) \in D_2, \tag{35}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ -\infty < x \le 0,\quad v(0,x) = v_0(x),\ 0 \le x < \infty, \tag{36}$$

$$u(t,s(t)) = v(t,s(t)) = 0,\ \dot{s}(t) = -\alpha u_x(t,s(t)) + \beta v_x(t,s(t)),\ t > 0, \tag{37}$$

где $x = s(t)$-свободная граница, которая представляет линия раздела соприкасающихся сред и определяется вместе с решениями уравнений (34), (35), причем $u(t,x)$, $v(t,x)$ концентрация компонент среды. $u_0(x)$, $v_0(x)$-начальные концентрации.

При исследовании задачи воспользуемся представлением решения в виде суммы потенциалов. Для обеспечения сходимости интегралов нужно потребовать, чтобы начальная функция и правая часть уравнении не росли при $|x| \to \infty$ слишком быстро; достаточно потребовать, чтобы они росли не быстрее функции e^{kx^2}. Мы будем рассматривать задачу (34)-(37) только в классе ограниченных функций.

Исследована поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, установлены априорные оценки, необходимые для глобальной разрешимости задачи. Задача сведена к системе нелинейных интегральных уравнений, разрешимость которой доказана при помощи принципа неподвижных точек.

Априорные оценки и поведение свободной границы

Теорема 15. *Пусть функции* $s(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$ *являются решением задачи* (34)-(37) *в областях* D_1, D_2 *и существует постоянные* N_1, N_2 *такие, что* $N_1 \ge \max\limits_x \left\{ -\dfrac{u_0(x)}{x}, \dfrac{-a_1^2}{b_1 c_1} \right\}$, $N_2 \ge \max\limits_x \left\{ \dfrac{v_0(x)}{x}, \dfrac{a_2^2}{b_2 c_2} \right\}$, $0 < u_0(x) \le \dfrac{a_1}{b_1}$, $0 < v_0(x) \le \dfrac{a_2}{b_2}$. *Тогда существуют положительные постоянные* M_1, M_2, *независящие от* T, *для которых справедливы неравенства*

$$0 < u(t,x) \le M_1,\quad |u_x(t,x)| \le M_4,\quad (t,x) \in D_1,$$

$$0 < v(t,x) \le M_3,\quad |v_x(t,x)| \le M_5,\quad (t,x) \in D_2,$$

$$0 < \dot{s}(t) \le M_2,\qquad D_1 \cup D_2.$$

Теорема доказывается с использованием принципа максимума и теорем сравнения. Далее, используя представление решения в виде суммы потенциалов, задача сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра. Однозначная разрешимость этой системы доказана при помощи принципа неподвижной точки.

Второй параграф четвертой главы посвящен двухфазной задаче со свободной границей для квазилинейных параболических уравнений типа

реакции-диффузии. Требуется найти функции $s(t)$, $v(x,t)$, $u(x,t)$ в области , $D_1=\{(x,t):-l<x<s(t),0<t\le T\}$, $D_2=\{(t,x):s(t)<x<l,0<t\le T\}$

$$d_1(u)u_t-u_{xx}-c_1u_x=u(a_1-b_1u),\quad (t,x)\in D_1,$$
$$d_2(v)v_t-v_{xx}-c_2v_x=v(a_2-b_2v),\quad (t,x)\in D_2,$$
$$u(x,0)=u_0(x),\quad -l<x\le 0,\ v(x,0)=v_0(x),\quad 0\le x<l,$$
$$u(-l,t)=\varphi_1(t),\ u(s(t),t)=v(s(t),t)=0,\quad v(l,t)=\varphi_2(t),\quad 0\le t\le T,$$
$$\dot{s}(t)=-\alpha u_x(s(t),t)+\beta v_x(s(t),t),\ 0\le t\le T,$$

где $x=s(t)$ – свободная (неизвестная) граница определяется вместе с $u(x,t)$, $v(x,t)$, α, β, a_i, b_i, c_i, d_i -положительные постоянные, $i=1,2$.

Установлены априорные оценки, исследовано поведение свободной границы и доказана однозначная разрешимость задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию смешанно-двухфазных реакционно-диффузионных моделей со свободными границами в задачах биологии и экологии с фазовыми превращениями, что позволило изучить биологические процессы, связанные с инвазией и хищником-жертвой, а также по изучению многофазных экологических проблем и были получены следующие результаты:

предложена нелинейная математическая модель со свободной границей, которая описывает, как новый вид вторгается в среду обитания местного конкурента. Поскольку естественный биологический процесс связан с инвазией, в модель добавлены члены, отражающие перенос и изменение концентрации, используя термин переноса и новый коэффициент “биоемкости”;

построена трехфазная математическая модель со свободными границами динамики растекания нефти по водной поверхности по пространственным переменным. Исследовано поведение свободных границ, являющихся фронтом распространения нефти. Устанавливаются априорные оценки типа Шаудера, на основании которых доказывается однозначная разрешимость задачи;

рассмотрены задачи для модели хищник-жертва Лесли-Гауэра, которые можно использовать для описания распространения видов-хищников в неоднородной среде. Первоначально хищника внедряют в какое-то локализованное место. Доказаны принцип сравнения и теоремы существования, единственности и установлены некоторые априорные оценки для решения задачи. Свободная граница представляет собой фронт распространения видов-хищников. Фронт распространения описывается классическим условием типа Стефана.

исследованы двухфазные задачи со свободной границей для уравнений реакции-диффузии, связанные с фазовыми превращениями. Исследована поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, установлены априорные оценки, необходимые для глобальной разрешимости задачи.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ELMURODOV ALIMARDON NURIDDINOVICH

MULTI-PHASE PROBLEMS WITH A FREE BOUNDARY FOR SYSTEMS OF PARABOLIC EQUATIONS OF THE REACTION DIFFUSION TYPE

01.01.02 – "Differential equations and Mathematical physics"

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOFHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number №B2021.4.PhD/FM307.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (http://kengash.mathinst.uz/) and in the webside of "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Takhirov Jozil Ostanovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Apakov Yusupjon Pulatovich Doktor of physical and mathematical sciences, professor
Leading organization:	**Samarkand state university**

Defense will take place «04» July 2023 at 4:00 p.m. at the meeting of Scientific Council number Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanosky (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail:uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at at Institute of Mathematics named after V.I.Romanosky (is registered №162). Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40.

Abstract of dissertation sent out on «19» June 2023 year.
(Mailing report № 2 -on «19» June 2023 year).

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., Professor

J.K. Adashev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., senior researcher

A.A. Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is to construct and develop the theory of multiphase logistic problems with a free boundary for parabolic equations and systems of the reaction-diffusion-advection type.

The objects of the research work are various mathematical models with a free boundary of ecological-epidemiological and biomedical processes.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

a method was developed for obtaining a priori estimates in the norms of Hölder spaces for solving a mixed-two-phase problem with a free boundary for systems of quasi-linear equations of the reaction-diffusion-advection competition type, which describe the penetration of a new species into the range of a local competitor, and on their basis the unique solvability of the problem was proved;

a three-phase mathematical model with free boundaries of the dynamics of oil spreading over the water surface was constructed and a priori estimates of the Schauder type were established, on the basis of which the unambiguous solvability of the problem was proved;

existence and uniqueness theorems were proved for Leslie-Gower-type logistic-diffusion predator-prey models that model the distribution of invasive predator species when the free boundary is an expanding front of species;

the unique solvability of two-phase problems for parabolic equations of reaction-diffusion type with unknown boundaries of phase transitions is proved.

Implementation of the research results. The results obtained in problems with a free boundary for parabolic equations and systems of the reaction-diffusion type have found practical application in the following areas:

a mathematical model with a free boundary for systems of parabolic equations was used in fundamental research under the EOT-Ftech-2018-149 project "Mathematical modeling of nonlinear filtration processes in two-component media described by nonlinear boundary conditions" (Certificate of the National University of Uzbekistan dated May 17, 2022 No. 04 / 11-2821728-22) when constructing self-similar solutions of filtration systems in two-component media. The application of the scientific result made it possible to construct self-similar solutions and their asymptotics of filtration systems in two-component media with nonlinear boundary conditions. Using scientific results on multiphase problems with a free boundary for systems of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type, self-similar solutions of filtration systems in two-component media with nonlinear boundary conditions are constructed and asymptotics of self-similar solutions are constructed;

the solution of a multi-phase problem with a free boundary for parabolic equations of the reaction-diffusion type was used in research under the FA-Atech-2018-414 project "Development of a waste hydro transport technology that reduces energy costs at processing enterprises". (Certificate of the Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures dated May 22, 2023 No. 376-3) in the study of fluid flow through pipes at mining and metallurgical enterprises. The application of the scientific result made it possible to determine the specific properties of complex patterns of physical and mechanical processes and build new optimal algorithms.

Approbation of the research results. The main results of the dissertation were discussed at 5 international and 4 republican scientific and practical conferences.

Publications of the research results. Publication of research results. 15 scientific papers have been published on the topic of the dissertation, of which 6 are included in the list of scientific publications recommended by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending dissertations for the degree of Doctor of Philosophy, including 1 of them published in foreign journals and 5 in republican scientific publications.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of the introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 114 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I, Part I)

1. Takhirov J.O., Elmurodov A. N. On a mathematical model with a free boundary for water basin pollution. Uzbek Mathematical Journal, 2020, № 4, pp. 44-57. (01.00.00, № 6).
2. Asrakulova D., Elmurodov A. N. A reaction-diffusion-advection competition model with a free boundary. Uzbek Mathematical Journal. 2021, V.-65, № 3, pp. 25-37. (01.00.00, № 6).
3. Elmurodov A. N., Rasulov M. S. On a uniqueness of solution for a reaction-diffusion type system with a free boundary. Lobachevskii journal of mathematics, 2022, 43:8, 2099-2106. (3. Scopus. IF=0,42)
4. Elmurodov A. N. A two-phase free boundary problem for system of reaction-diffusion equations. Uzbek Mathematical Journal, 2018, № 4, pp. 58-72. (01.00.00, № 6).
5. Elmurodov A.N. The two-phase Stefan problem for quasilinear parabolic equations. Uzbek Mathematical Journal, 2019, № 2, pp.39-48. (01.00.00, № 6).
6. Elmurodov A.N. The two-phase Stefan problem for parabolic equations. Uzbek Mathematical Journal, 2019, № 4, pp. 56-67. (01.00.00, № 6).

II bo‘lim (Часть II, Part II)

7. Elmurodov A. N. A Leslie-Gower predator-prey model with two free boundaries. Proceedings of the Uzbekistan-Malaysia international online conference “Computational Models and Technologies” August 24-25, Tashkent -2020. pp. 202-203.
8. Elmurodov, A. N. The Two-Phase Problem with a Free Boundary for the reaction - diffusion equation with a nonlinear convection term. Proceedings of the international conference “Frontier in mathematics and computer science”. October 12-15, Tashkent - 2020. pp. 38-39.
9. Takhirov J.O., Elmurodov A.N. Spreading-vanishing dichotomy in the predator-prey model with a free boundary. Proceedings of the International scientific conference “Modern problems of differential equations and related branches of mathematics”. March 12-13, Fergana-2020. pp. 279-280.
10. Элмуродов А. Н. Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения типа реакция-диффузия. Материалы международной научной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики”. 22-26 мая, Нальчик -2018 г. Ст. 290.
11. Элмуродов А.Н. Двухфазная задача со свободной границей для квазилинейных параболических уравнений типа реакция-диффузия. Материалы XI Всероссийская научная конференция с международным

участием «Математическое моделирование и краевые задачи». 27-30 мая, Самара -2019 г. Ст.106-109.
12. Элмуродов А.Н. Двухфазная задача Стефана для квазилинейных параболических уравнений. Материалы международной научно-практической конференции “Актуальные проблемы науки и образования в современном ВУЗе”. 23 – 25 мая, Стерлитамак-2019 г. Том II. Ст.189-193.
13. Элмуродов А.Н. Трехфазная задача со свободной границей для уравнений типа реакция-диффузия. Материалы международной научной конференции на Российско-Французский семинар “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование”. 25-29 августа, Ханты-Мансийск -2019 г. Ст.67.
14. Elmurodov, A. N. A free boundary problem for a predator-prey competition model. Proceedings of the international conference “Contemporary mathematics and its application”. November 19 - 21, Tashkent - 2021. pp. 86-87.
15. Elmurodov, A. N. A reaction-diffusion-advection competition model with a free boundary. Proceedings of VI international conference “non-local boundary value problems and related problems of mathematical biology, informatics and physics”. December 5-9, Nalchik-2021. pp. -224.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida
o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi nusxalari 2023-yil __iyunda tahrirdan o‘tkazilib,
o‘zbek, rus va ingliz tillardagi matnlari o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. “Times New Roman” garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 68/22.

Guvohnoma № 851684.
“Tipograff” MChJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.