В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ТОШТЕМИРОВ БАҲОДИРЖОН ҲАЁТЖОН ЎҒЛИ

КАСР ТАРТИБЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОПЕРАТОРЛАР ҚАТНАШГАН ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ СИНГУЛЯР ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ТЎҒРИ ВА ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

УДК: 517.951

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ТОШТЕМИРОВ БАҲОДИРЖОН ҲАЁТЖОН ЎҒЛИ

КАСР ТАРТИБЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОПЕРАТОРЛАР ҚАТНАШГАНХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ СИНГУЛЯР ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ТЎҒРИ ВА ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.3.PhD/FM744 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Каримов Эркинжон Тўлқинович** физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим
Расмий оппонентлар:	**Дурдиев Дурдимурод Қаландарович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Карел Ван Бокстал математика фанлари доктори, PhD (Белгия)
Етакчи ташкилот:	**Урганч давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил « 6 » декабр соат 17:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (150-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2022 йил « 16 » ноябр куни тарқатилди.
(2022 йил « 16 » ноябрдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

Ш.А.Мирахмедов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раис ўринбосари, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

А.А. Азамов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси математиканинг муҳим бўлимларидан бири бўлиб, у суюқлик оқими, иссиқлик ёки товушнинг тарқалиши, эластиклик, электростатика, электродинамика каби кўп ўзгарувчили функциялар билан боғлиқ физикавий ва бошқа масалаларни математик тарзда баён қилиш ва ҳал қилишда фойдаланилади. Чегара қиймат, бошланғич қиймат ва бошланғич-чегаравий масалалар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун қўйиладиган асосий уч турдаги масалалардир. Шунингдек, эътибор беришимиз керакки, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар гиперболик, параболик, эллиптик ва аралаш типдаги тенгламалар, хусусан, аралаш параболик-гиперболик, параболик-эллиптик ва аралаш эллиптик-гиперболик синфларга ажратилиши мумкин (маълумот учун А.В.Бицадзе ва Ж.Рассиасларнинг китобларини қаранг).

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганишда уларни иккита катта синфга ажратишимиз мумкин, яъни тўғри ва тескари масалалар. Тўғри масалаларда одатда ечимларни топиш назарда тутилади, лекин агар изланаётган ечим билан бирга тенгламадаги коэффициентлар ёки тенгламанинг ўнг томони (манбаа ҳади иссиқлик тарқалиш тенгламаси мисолида), бошланғич ёки чегаравий шарт, тенгламанинг тартиби аниқланиши талаб қилинса, бундай масалалар тескари масалалар дейилади. В. Исаков келтириб ўтганидек, тескари масалалар инсон ҳаётининг кўпгина жабҳаларида учраши мумкин. Масалан, биология, тиббиёт, фойдали қазилмаларни қидириш, саноат товарлари сифатини назорат қилиш ва бошқалар. Бу борада каср тартибли интегро-дифференциал операторлар қатнашган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни ечиш дифференциал тенгламалар назариясининг мақсадли тадқиқот йўналишларидан бири ҳисобланади.

Кейинги йилларда Ўзбекистонда илм-фанни, хусусан, математика, физика, биология ва геологияни ривожлантириш борасида зарур ва муҳим ислоҳотлар амалга оширилмоқда. Масалан, математик физика муаммоларини ўрганиш, хусусан, каср тартибли дифференциал операторлар билан аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни таҳлил ва тадқиқ қилишни жадаллаштиришга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Бундан ташқари, математиканинг дифференциал тенгламалар ва математик физика, динамик системалар ва оптимал бошқарув, амалий математика ва математик моделлаштириш, математик анализ ва функциялар назарияси, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, алгебра ва геометрия фанларининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математик олимларнинг асосий

вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгилаб берилган[1]. Ушбу вазифаларни бажариш учун хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, хусусан, каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал масалаларни (тўғри) ва тескари масалаларни қўйиш ва тадқиқ қилиш жуда муҳимдир.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон “Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Сўнгги йилларда каср тартибли аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганиш уларнинг математик физиканинг кўплаб соҳаларида қўлланилиши сабабидан катта қизиқиш уйғотмоқда. Ҳаётимиздаги кўпгина ҳодисаларни моделлаштириш нуқтаи-назаридан умумийроқ каср тартибли дифференциал операторлардан фойдаланиш тадқиқот сифатини ошириш имкониятини беради. И.М.Гельфанд томонидан аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ёрдамида ғовакли муҳит билан ўралган каналдаги газнинг динамикаси ва ҳаракатини текшириш таклиф қилинган. Шунингдек, кейинчалик мураккаб электр тармоқларида тебранишларнинг тарқалишини ўрганишни аралаш турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ёрдамида тушунтириш мумкинлигини кўрсатилди.

Аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар бўйича самарали текширувларнинг бошланиши ўтган асрга тўғри келади. Муҳим ва қизиқарли натижалар Чаплигин, Трикоми, Гельфанд ва бошқалар томонидан олинган. Кейинчалик, параболик-гиперболик тенгламалар учун фундаментал

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида” ги 292-сон қарори

натижалар М.С.Салоҳиддинов, Т.Ж.Жўраев, А.М.Нахушев, В.Н.Врагов ва Н.Ю.Капустинлар томонидан ишлаб чиқилган. Ҳозирги вақтда каср тартибли, иккинчи ва учинчи тартибли параболик-гиперболик хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун жуда кўп ишлар олиб борилмоқда. Хусусан, Ш. Алимов, Р. Ашуров, Ж. Тохиров, А. Бердишев, А. Псху, К. Сабитов, М. Садибеков, Э. Каримов, А. Ўринов, Ю. Апаков, А. Нагорний ва бошқалар типи ўзгарувчан, чизиқли параболик-гиперболик тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ этишган бўлиб, бунда ушбу тенгламалар учун турли чегаравий масалаларнинг спектрал хоссалари ҳам ўрганилган. Бундан ташқари, каср тартибли дифференциал операторларни ўз ичига олган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун ҳар-хил турдаги масалаларни таклиф қилиш ва ўрганиш математикларда катта қизиқиш уйғотмоқда. Жумладан, бундай тенгламалар устида М.Ямамото, Р.Ашуров, М.Слодичка, Ю.Лучко, В.Кирякова, Б.Турметов, Б.Кадиркулов, Н.Токмагамбетов, Х.М.Сривастава, М.Киране, Э.Каримов, Н.Салти, Д. Дурдиев, М. Ружанский ва бошқалар тадқиқот ишларини олиб бормоқда.

Каср тартибли дифференциал операторларни ўз ичига олган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тескари масалаларни ўрганиш ҳам математикада олиб бориладиган тадқиқотларнинг муҳим қисмидир, чунки бундай тенгламалар фан ва техникада кўп қўлланилади. Тескари масалалар борасида хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар тартибини аниқлаш бўйича Р.Ашуров томонидан муҳим натижалар олинган бўлса, вақтга боғлиқ манба топиш учун тескари манбаа муаммоси М.Слодичка, С.Малик, А.Хазани ва бошқалар томонидан текширилган. Ушбу тадқиқотларга қарамай, ҳали ҳам қизиқарли татбиқларга эга бўлган баъзи очиқ масалалар мавжуд. Олинган натижалар катта илмий ходим Э. Т. Каримов (Математика Институти, Ўзбекистон) ва профессор М. Ружанский (Гент Университети, Белгия)ларнинг илмий маслаҳатлари ва тавсиялари асосида олинган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий – тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В. И. Романовский номидаги Математика Институти илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ “Дифференциал тенгламалар ва унга турдош математик соҳаларнинг долзарб муаммолари” дастури доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади каср тартибли интегро-дифференциал операторлар қатнашган сингуляр хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

регулярланган Капуто маъносидаги гипер-Бессел каср тартибли дифференциал оператори қатнашган хусусий ҳосилали аралаш дифференциал тенглама учун Трикоми масаласи аналогининг ягона ечимини қуриш;

шу аралаш тенглама учун Франкл типидаги масалани характеристик учбурчак ва тўртбурчаклардан иборат соҳада бир қийматли ечилишини

исботлаш;

регулярланган Капуто маъносидаги гипер-Бессел каср тартибли дифференциал оператори қатнашган субдиффузия ва қўш тартибли Хилфер ҳосиласи қатнашган каср тартибли тўлқин тенгламаларини ўз ичига олган сингуляр коэффициентли(сиз) хусусий ҳосилали аралаш дифференциал тенглама учун нолокал масалаларни коррект қўйиш ва тадқиқ этиш;

қўш тартибли Хилфер ҳосиласи билан ҳосил қилинган Лангевин типидаги хусусий ҳосилали бузиладиган дифференциал тенглама учун тўғри ва тескари масалаларни ўрганиш;

2D Ландау Гамилтон ва қўш тартибли Ҳилфер каср тартибли ҳосиласи қатнашган псевдопараболик тенглама учун тўғри ва тескари масалаларни тадқиқ этиш.

Тадқиқотнинг объекти регулярланган Капуто маъносидаги каср тартибли дифференциал оператор ва қўш тартибли Хилфер каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган аралаш хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва псевдо-параболик дифференциал тенгламалар ҳисобланади.

Тадқиқотнинг предмети регулярланган Капуто маъносидаги каср тартибли дифференциал оператор ва қўш тартибли Хилфер каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган аралаш хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал масалалар ва псевдо-параболик дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда бир нечта усуллар қўлланилган. Мисол учун, ечимнинг ягоналигини кўрсатиш учун иккинчи бобдаги масалаларда энергия интегралли усули қўлланилган бўлса, қолган боблардаги масалаларда хос функциялар системасининг тўлалик хоссасига таянилади. Ечимнинг мавжудлигини кўрсатиш учун ўрганилган масалалар асосан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эквивалент равишда келтирилади. Бундан ташқари, Миттаг-Леффлер функцияси ва Фурье-Бессел, Фурье-Лежандр қаторларининг хоссаларидан ҳам фойдаланилади.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ихтиёрий бошланғич нуқтали регулярланган Капуто маъносидаги гипер-Бессел каср тартибли дифференциал операторининг янги таърифи киритилди ва мос Коши масаласининг ечими топилган;

субдиффузия тенгламаси ва тўлқин тенгламасини ўз ичига олган аралаш дифференциал тенглама учун Трикоми масаласи аналоги ва Франкл типидаги масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланган;

ўнг томонли қўш тартибли Хилфер каср тартибли ҳосиласи қатнашган оддий касрли тартибли дифференциал тенглама учун Коши типидаги масаланинг ягона ечими ошкор кўринишда топилган ва аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал масалаларнинг ечимларини ягоналиги исботланган;

қўш тартибли Хилфер каср тартибли ҳосила қатнашган псевдо-параболик тенглама учун тўғри ва тескари масалаларнинг бир қийматли

ечилиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

Олинган натижалар ва диссертацияда қўлланилган усуллар олий ўқув юртларида магистратура талабалари ва докторантлар учун ўқув курс сифатида ўқитилиши мумкин. Бундан ташқари, каср тартибли дифференциал операторлар иштирокидаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар ва тескари манбаа масалаларининг бир қийматли ечилишига оид диссертация натижаларидан физика ва амалий фанларда жараёнларнинг математик моделларини ишлаб чиқиш нуқтаи-назаридан фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Диссертацияда келтирилган натижалар глобал Фурье анализ, спектрал назария, энергия интеграли ва интеграл тенгламалар усулларидан фойдаланиб топилган бўлиб, дедуктив хулосалар қабул қилинганлиги ҳамда теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботланганлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун ҳар хил турдаги масалаларни тадқиқ қилинда фойдаланилади. Бундан ташқари, ушбу турдаги масалаларни умумлаштиришда муҳим рол ўйнайдиган махсус каср тартибли дифференциал операторлардан фойдаланилган.

Диссертациянинг амалий аҳамияти физикавий ҳодисаларнинг бир нечта моделларининг махсус алоҳида ҳолатларига мос бўлиши билан изоҳланади. Масалан, ғовакли муҳит билан ўралган каналдаги газ ҳаракати аралаш параболик-гиперболик типдаги тенглама билан тушунтирилади, чунки каналнинг ички ҳаракати тўлқин тенгламаси ғовакли муҳитда диффузия тенгламаси билан тавсифланади ва ушбу моделлар билан боғлиқ бу турдаги масалаларни умумлаштириш мумкин. Бундан ташқари, олинган натижалар доимий магнит майдон таъсирида квант заррасининг икки ўлчамдаги ҳаракатини тавсифловчи моделни ишлаб чиқиш учун ишлатилиши мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Каср тартибли интегро-дифференциал операторлар қатнашган хусусий ҳосилали сингуляр дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар бўйича олинган натижалар асосида:

субдиффузия тенгламаси ва тўлқин тенгламасини ўз ичига олган аралаш дифференциал тенглама учун Трикоми масаласи аналоги ва Франкл типидаги масалаларнинг ечилиш усулларидан №AP09259394 рақамли «Мусбат операторлар қатнашган эволюцион тенгламалар учун тескари масалалар» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида учинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечимини қуришда фойдаланилган (Математика ва математик моделлаштириш институтининг 2022 йил 10 октябрдаги №01-06/130-сонли маълумотномаси, Қозоғистон). Илмий натижани қўлланилиши каср тартибли дифференциал тенгламалар учун тескари масалаларнинг бир қийматли ечилишини исботлаш имконини

берган;

гипер-Бессел каср тартибли дифференциал оператори ҳамда қўш тартибли Хилфер каср тартибли дифференциал оператори қатнашган аралаш тенглама учун нолокал масалаларнинг ечилиш усулларидан ORG/SQU/CB13/030 рақамли «Виско-эластикликда муҳитларда деярли текис турғун функциялари» мавзусидаги ҳорижий грант лойиҳасида каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал тескари масалаларни ечишда фойдаланилган (Султон Қобус университетининг 2022 йил 6 октябрдаги маълумотномаси, Оман). Илмий натижани қўлланилиши берилган маълумотларга маълум шартлар қўйилганда қатор кўринишида аниқланган ечимнинг абсолют ва текис яқинлашишини исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 4 та халқаро ва 3 та республика илмий ва илмий – амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларини нашр қилиш. Диссертация мавзуси бўйича жами 13 та илмий ишлар чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 4 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган ва 7 таси конференция материалларидир.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, тўртта боб, хулоса ва адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 135 бетдан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби тўртта параграфдан иборат бўлиб, кейинги бобларда қўлланиладиган каср тартибли интегро-дифференциал операторларининг зарур таърифлари ва асосий хоссалари қисқача келтириб ўтилган. Шунингдек, биз ушбу диссертацияда фойдаланилган асосий белгилашларини ва каср тартибли дифференциал ҳисобнинг қисқача муқаддимасини баён қиламиз. Демак, каср тартибли дифференциал ҳисобнинг тарихий тадқиқи ва функционал фазоларнинг таърифлари ҳақида қисқача маълумот беришдан бошлаймиз.

1-таъриф. *Фараз қилайлик* $\Omega=[a,b]$ *ва* $m\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,...,\}$ *бўлсин.*

$[a,b]$ *да аниқланган* g *функцияларнинг* $C_\gamma[a,b]$ *вазнли фазоси қуйидагича киритилади*

$$C_\gamma[a,b]=\left\{g(t):\|g\|_{C_\gamma}=\left\|(t-a)^\gamma g(t)\right\|_C<\infty\right\}$$

яъни $(t-a)^\gamma g(t)\in C[a,b]$.

$[a,b]$ *да аниқланган функцияларнинг* $C_\gamma^n[a,b]$ *вазнли фазоси эса қуйидагича аниқланади*

$$C_\gamma^n[a,b]=\left\{g:[0,T]\to\mathbb{R}, g^{n-1}(t)\in C[a,b]; g^n(t)\in C_\gamma[a,b]\right\}$$

бунда норма

$$\|g\|_{C_\gamma^n}=\sum_{k=0}^{n-1}\left\|g^{(k)}\right\|_{C[a,b]}+\left\|g^{(n)}\right\|_{C_\gamma[a,b]}.$$

Шунингдек, биз Димовски томонидан 1966 йилда биринчи марта гипер-Бессел дифференциал оператори учун операцион ҳисоб-китобларга бағишланган мақолаларида киритилган $C[a,b]\,(n\in\mathbb{N}_0)$ фазосининг вазнли модификациясидан фойдаланамиз:

$$C_\mu^{(n)}:=\left\{f(t)=t^p f_1(t),\ f_1(t)\in C^{(n)}[0,\infty)\right\},\ C_\mu:=C_\mu^{(0)},\ \nu\in\mathbb{R}$$

бунда $\mu\ge -1$ учун $p>\mu$ мавжуд деб фараз қилинади. Равшанки, C_μ вектор фазодир ва C_μ фазолар тўплами қуйидагича киритишлар орқали тартибланган

$$C_\mu\subset C_\delta\Leftrightarrow\mu\ge\delta.$$

2-таъриф. *Айтайлик* $I_{a+}^{(1-\mu)(1-\beta)}f(t)\in AC^n[a,b]$ *ва* $I_{b-}^{(1-\mu)(1-\beta)}f(t)\in AC^n[a,b]$ *бўлсин. У ҳолда* $\alpha\,(n-1<\alpha\le n)$ *ва* $\beta\,(n-1<\beta\le n)$ *тартибли* $\mu\in[0,1]$ *типли чап томон ва ўнг томон қўш тартибли Хилфер каср тартибли ҳосила қуйидагича аниқланади:*

$$D_{a+}^{(\alpha,\beta)\mu}f(t)=I_{a+}^{\mu(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{(1-\mu)(n-\beta)}f(t),$$

$$D_{b-}^{(\alpha,\beta)\mu}f(t)=I_{b-}^{\mu(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dt}\right)^n I_{b-}^{(1-\mu)(n-\beta)}f(t).$$

Ушбу масалани қарайлик

$$\begin{cases} a\,D_t^{(\alpha,\beta)\mu}u(t)+b\,u(t)=f(t),\\ \lim\limits_{t\to 0+}I_{0+}^{(1-\mu)(1-\beta)}u(t)=u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Бу масала ечими қуйидаги лемма келтирилган:

1-лемма. Агар $f\in C_{1-\gamma}[0,T]$, у ҳолда (1) масаланинг $u\in C_{1-\gamma}[0,T]$ ечими қуйидагича аниқланади

$$u(t)=u_0t^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}\left(-\frac{b}{a}t^\delta\right)+\frac{1}{a}\int_0^t(t-s)^{\delta-1}E_{\delta,\delta}\left[-\frac{b}{a}(t-s)^\delta\right]f(s)ds,$$

бу ерда $\delta = \beta + \mu(\alpha - \beta)$, $\gamma = \beta + \mu(1 - \beta)$.

Роберто Гарра ва бошқалар стандарт мувозанатга қайтиш жараёнини куч-қонун турининг хотира таъсирини ва характерли коэффициентнинг вақт ўзгарувчанлигини ҳисобга олган ҳолда умумлаштириш учун мос бўлган махсус операторни ўргандилар. Улар Бессел типидаги операторларнинг каср даражаларининг Макбрайд-Ламб назариясини қўлладилар ва натижада Эрдейи-Кобер ва Адамар интеграллари кўринишида каср тартиби операторининг аниқ ифодасини олдилар.

3-таъриф. *Э-К интеграли ёки ҳосиласи кўринишида аниқланган* $0 < \alpha \le 1$ *тартибли маълум бир гипер-Бессел оператори қуйидагича аниқланади*

$$\left(t^{\theta}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} f(t) = \begin{cases} (1-\theta)^{\alpha} t^{-\alpha(1-\theta)} I_{1-\theta}^{0,-\alpha} f(t), \text{ if } \theta < 1, \\ (\theta-1)^{\alpha} I_{1-\theta}^{-1,-\alpha} t^{(1-\theta)\alpha} f(t), \text{ if } \theta > 1. \end{cases}$$

Шуни таъкидлаймизки, $I_{\beta}^{\gamma,-\alpha} := D_{\beta}^{\gamma-\alpha,\alpha}$ - бу манфий тартиб учун Э-К интегралининг талқини, яъни

$$I_{\beta}^{\gamma,-\alpha} := (\gamma - \alpha + 1) I_{\beta}^{\gamma,1-\alpha} f(t) + \frac{1}{\beta} I_{\beta}^{\gamma,1-\alpha}\left(t\frac{d}{dt} f(t)\right).$$

4-таъриф. *Регулярланган Капуто маъносидаги Гипер-Бессел дифференциал оператори* $\theta < 1$ *учун Э-К каср тартибли оператори орқали қуйидагича аниқланади*

$$^{C}\left(t^{\theta}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} f(t) = (1-\theta)^{\alpha} t^{-\alpha(1-\theta)} I_{1-\theta}^{0,-\alpha}\left[f(t) - f(0)\right]$$

ёки гипер-Бессел дифференциал оператор маъносида эса

$$^{C}\left(t^{\theta}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} f(t) = \left(t^{\theta}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} f(t) - \frac{f(0) t^{-\alpha(1-\theta)}}{(1-\theta)^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)},$$

бунда $f(0)$ - *бошланғич шарт*.

Диссертациянинг **«Гипер-Бессел дифференциал оператори қатнашган аралаш тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилиши»** деб номланган иккинчи боби иккита параграфдан иборат. Бунда регулярланган Капуто маносидаги гипер-Бессел оператори қатнашган аралаш тенглама учун Трикоми масаласининг аналоги ва Франкл типидаги масалалар тадқиқ қилинган.

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AB$ соҳада қуйидаги аралаш тенгламани қарайлик

$$0 = \begin{cases} ^{C}\left(t^{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} u(x,t) - u_{xx}(x,t), & t > 0, \\ u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t), & t < 0 \end{cases} \qquad (2)$$

бу ерда α, θ, T лар шундай ҳақиқий сонларки, $0 < \alpha < 1$, $\theta < 1$, $T > 0$,

$\Omega_1 = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, $AB = \{(x,t): t = 0, 0 < x < 1\}$,

$$\Omega_2 = \left\{ (x,t) : -t < x < t+1, -\frac{1}{2} < t < 0 \right\}.$$

Т масала. Ω соҳада (2) тенгламанинг шундай $u(x,t)$ ечимини топингки, у $\overline{\Omega}$ да узлуксиз, унинг гипер-Бессел каср тартибли ҳосиласи Ω_1 да узлуксиз ва x бўйича иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари Ω_1 ва Ω_2 соҳаларда узлуксиз бўлсин ва шу билан бирга у қуйидаги чегаравий шартларни

$$u(0,t) = 0, \;\; u(1,t) = 0, \;\; 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x/2, -x/2) = \psi(x), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

ҳамда AB да қуйидаги улаш шартини қаноатлантирсин:

$$\lim_{t \to +0} t^{1-(1-\theta)\alpha} u_t(x,t) = \gamma_1 u_t(x,-0) + \gamma_2 \int_0^1 u_t(z,-0) P(x,z)\, dz, \; 0 < x < 1. \tag{5}$$

Қуйидаги тасдиқ Т масаланинг бир қийматли ечилишини таъминлайди.

1-теорема. Агар $\gamma_2 \le 0$,

$$\frac{\partial}{\partial z} P(x,z) = P_1(x) P_1(z), \tag{6}$$

шартлар бажарилса, у ҳолда Т масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

2-теорема. *Айтайлик 1-теореманинг барча шартлари бажарилсин. Агар* $\psi(x) \in C^1[0,1]$ *ва* $P(x,z)$ *функция* $[0,1]\times[0,1]$ *соҳада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда Т масаланинг ечими мавжуд бўлади ва қуйидаги кўринишда аниқланади:*

$$u(x,t) = 2\Theta(t) \int_0^1 \left[F(\xi) + \int_0^1 F(z) R(\xi,z)\, dz \right] \sum_{k=1}^{\infty} E_{\alpha,1}\left(-\frac{(k\pi)^2}{(1-\theta)^2} t^{(1-\theta)\alpha} \right) \sin(k\pi\xi) \sin(k\pi x)\, d\xi$$

$$+ \frac{\Theta(-t)}{2} \left\{ F(x+t) + F(x-t) \int_0^1 F(\xi) \left[R(x+t,\xi) + R(x-t,\xi) \right] d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{x-t}^{x+t} \left[F''(z) + \int_0^1 F(\xi) \frac{\partial^2 R(z,\xi)}{\partial z^2} d\xi - 2\psi'(z) \right], dz \right\} \tag{7}$$

бу ерда $A = \gamma_1 \Gamma(\alpha)(1-\theta)^{\alpha}$, $t > 0$ учун $\Theta(t) = 1$ ва $t < 0$ учун $\Theta(t) = 0$, $R(x,\xi)$ эса ядро резолвентаси

$$K(x,\xi) = -A\gamma_2 \int_0^1 G_0(x,\xi) \frac{\partial P(\xi,z)}{\partial z} dz,$$

$$F(x) = -2A\gamma_1 \int_0^1 G_0(x,\xi) \psi'(\xi) d\xi - 2A\gamma_2 \int_0^1 G_0(x,\xi) d\xi \int_0^1 \psi'(\xi) P(\xi,z)\, dz,$$

$$G_0(x,\xi)=\frac{1}{A\left[e^{Ax}-e^{A(x-1)}\right]}\begin{cases}\left(1-e^{A\xi}\right)\left(1-e^{A(x-1)}\right), & 0\le\xi\le x,\\ \left(1-e^{Ax}\right)\left(1-e^{A(\xi-1)}\right), & x\le\xi\le 1.\end{cases}$$

Бу бобнинг иккинчи параграфида юқоридаги (2) тенглама учун Франкл типидаги масаланинг бир ечимини ягоналиги ва мавжудлиги ўрганилган.

Масала Ф. (2) тенгламанинг шундай $u(x,t)$ ечимини топингки, у қуйидаги регулярлик шартларини

1) $u(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\overline{\Omega}_2\right)\cap C^2(\Omega_2)$, $^C\left(t^\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha u\in C(\Omega_1)$, $u_{xx}\in C(\Omega_1)$;

2) ва нолокал шартларни

$$a_1(z)u(0,z)+b_1(z)u(z/2,-z/2)=c_1(z),\ 0\le z\le 1, \tag{8}$$

$$a_2(z)u(1,z)+b_2(z)u((z+1)/2,(z-1)/2)=c_2(z),\ 0\le z\le 1, \tag{9}$$

$$a_3(z)u(0,z)+b_3(z)u(1,z)=c_3(z),\ 0\le z\le 1; \tag{10}$$

3) ҳамда қуйидаги улаш шартини қаноатлантирсин:

$$\lim_{t\to+0}t^{1-\alpha(1-\theta)}u_t(x,t)=\lim_{t\to-0}u_t(x,t). \tag{11}$$

Бу ерда $0<\alpha<1$, $\theta<1$, $a_i(z),b_i(z),c_i(z)\left(i=\overline{1,3}\right)$ берилган функциялар бўлиб, ушбу шартларни қаноатлантиради

$$a_1^2(z)+a_2^2(z)\ne 0,\ a_1^2(z)+a_3^2(z)\ne 0,\ b_1^2(z)+b_2^2(z)\ne 0,$$

$$b_1^2(z)+b_3^2(z)\ne 0,\ a_j^2(z)+b_j^2(z)+c_j^2(z)\ne 0,\ j=1,2,$$

Асосий натижа қуйидаги теоремада ўз тасдиғини топади.

3-теорема. *Агар* $d_2'(z)>0$, $d_2(z)\ne 0$ *ва* $a_i(z)$, $b_i(z)$, $c_i(z)\in C(0,1)\cap C^1[0,1]$, *бўлиб* $a_i(z)\ne 0$, $b_i(z)\ne 0$, $z\in[0,1]$, $a_1(0)\ne -b_1(0)$ *бўлса, у ҳолда Ф масаланинг ягона ечими мавжуд бўлади, бу ерда*

$$d_2(z)=\left(a_1(z)b_2(z)b_3(z)\right)\cdot\left(a_2(z)a_3(z)b_1(z)\right)^{-1}$$

Бу икки масалаларда ечимнинг ягоналигини исботлашда энергия интеграллари усулидан фойдаландик.

Диссертациянинг **«Каср тартибли аралаш хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий масалалар»** деб номланган учинчи боби учта параграфдан иборат бўлиб, субдиффузия ва каср тартибли тўлқин тенгламаларидан ташкил топган аралаш тенгламалар учун чегараланган соҳаларда нолокал чегаравий масалаларни баён қилиш ва ўрганишга бағишланган.

Хусусан, биринчи параграфда $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup Q$ соҳада қуйидаги тенглама учун нолокал масалани қараймиз:

$$f(x,t)=\begin{cases}^C\left(t^\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha u(x,t)-u_{xx}(x,t), & (x,t)\in\Omega_1,\\ D_t^{(\gamma,\beta)\mu}u(x,t)-u_{xx}(x,t), & (x,t)\in\Omega_2,\end{cases} \tag{12}$$

бу ерда $\Omega_1=\{(x,t):0<x<1, a<t<b\}$, $\Omega_2=\{(x,t):0<x<1, 0<t<a\}$, $Q=\{(x,t):0<x<1, t=a\}$, $a, b\in\mathbb{R}^+$ яъни $a<b$, $0<\alpha\le 1$, $\theta<1$, $1<\gamma,\beta<2$, $0\le\mu\le 1$, $f(x,t)$ берилган функция.

Масала. Ω соҳада (12) тенгламанинг шундай ечими топилсинки, у қуйидаги ругулярлик шартларини

$$u(\cdot,t)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\quad {}^C\left(t^\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha u(x,\cdot)\in C[a,b],$$

$$t^{2-q}u,\ t^{2-q}u_x\in C(\overline{\Omega}_2),\ t^{2-q}D_t^{(\gamma,\beta)\mu}u(x,t)\in C(\overline{\Omega}_2),\ u_{xx}\in C(\Omega)$$

ва бошланғич-чегаравий шартларни

$$u(0,t)=0,\ 0\le t\le b,\qquad u(1,t)=0,\ 0\le t\le b, \tag{13}$$

$$\lim_{t\to 0+} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\beta)}u(x,t)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1, \tag{14}$$

ҳамда ушбу улаш шартларини қаноатлантирсин:

$$\lim_{t\to a-} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\beta)}u(x,t)=\lim_{t\to a+}u(x,t),\quad 0\le x\le 1, \tag{15}$$

$$\lim_{t\to a-}\frac{d}{dt}I_{0+}^{(1-\mu)(2-\beta)}u(x,t)=\lim_{t\to a+}(t-a)^{1-(1-\theta)\alpha}u_t(x,t),\quad 0<x<1, \tag{16}$$

бунда $\varphi(x)$ - берилган функция, $q=\beta+\mu(2-\beta)$.

Бу параграфда, биз ихтиёрий бошланғич нуқтали ругулярланган Капуто маъносидаги гипер-Бессел каср тартибли дифференциал операторни қўллаб Ω_1 соҳада Коши масаласини ечимини аниқлаймиз. Қуйидаги теоремада ўз аксини топган (12)-(16) масаланинг ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги теоремалари исботланган.

4-теорема. Қуйидаги шартлар бажарилсин

1) $\Delta_k\ne 0$, $k=1,2,3,\ ...$ 2) $\varphi\in C[0,1]$ ва $\varphi'\in L^2(0,1)$,

3) $f(\cdot,t)\in C^3[0,1]$ ва $f(x,\cdot)\in C^1(0,a)$, $f(x,\cdot)\in C_\mu(a,b)$, бунда $f(0,t)=f(1,t)=0$, $f_{xx}(0,t)=f_{xx}(1,t)=0$ ва $\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(\cdot,t)\in L^1(0,1)$, у ҳолда (12)-(16) масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади, бу ерда

$$\Delta_k=E_{\delta,1}(-\lambda_k a^\delta)+\frac{\lambda_k a}{\Gamma(\alpha)p^{\alpha-1}}E_{\delta,2}(-\lambda_k a^\delta).$$

Кейинги параграфда, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup Q$ соҳада қуйидаги регулярланган Капуто маносидаги гипер-Бессел операторини ва қўш тартибли Хилфер каср тартибли дифференциал операторларини ўз ичига олган сингуляр коэффициентли аралаш тенгламани қараймиз:

$$f(x,t)=\begin{cases}{}^C\left(t^\theta\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_1}u(x,t)-\dfrac{1}{x}u_x(x,t)-u_{xx}(x,t), & (x,t)\in\Omega_1,\\ D_{0-}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu}u(x,t)-\dfrac{1}{x}u_x(x,t)-u_{xx}(x,t), & (x,t)\in\Omega_2,\end{cases} \tag{17}$$

бунда $\Omega_1 = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, $\Omega_2 = \{(x,t): 0 < x < 1, -T < t < 0\}$,
$Q = \{(x,t): 0 < x < 1, t = 0\}$, $0 < \alpha_1 \le 1$, $\theta < 1$, $1 < \alpha_2, \beta_2 \le 2$, $0 \le \mu \le 1$,
$D_{0-}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu}$ эса ўнг томон қўш тартибли Хилфер каср тартибли дифференциал оператори.

Масала. Ω соҳада (17) тенгламанинг шундай ечимини топингки, у қуйидаги ругулярлик шартларини

$$u(x,t) \in C(\overline{\Omega} \setminus Q),\ u(\cdot,t) \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

$$C\left(t^{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_1} u(x,t) \in C(\Omega_1),\ D_{0-}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu} u(x,t) \in C(\Omega_2)$$

чегаравий шартларни

$$\lim_{t\to 0+} x u_x(x,t) = 0,\quad u(1,t) = 0,\ -T \le t \le T, \tag{18}$$

ва нолокал шартни

$$\sum_{i=1}^{m} \zeta_i I_{0-}^{(1-\mu)(2-\beta_2)} u(x,\xi_i) = u(x,T),\ 0 \le x \le 1, \tag{19}$$

ва ҳамда улаш шартларини қаноатлантирсин:

$$\lim_{t\to 0-} I_{0-}^{(1-\mu)(2-\beta_2)} u(x,t) = \lim_{t\to 0+} u(x,t),\ 0 \le x \le 1, \tag{20}$$

$$\lim_{t\to 0-} \frac{d}{dt} I_{0-}^{(1-\mu)(2-\beta_2)} u(x,t) = \lim_{t\to 0+} t^{1-(1-\theta)\alpha_1} u_t(x,t),\ 0 < x < 1, \tag{21}$$

бу ерда $-T \le \xi_1 < \xi_2 < .... < \xi_m < 0$, $f(x,t)$ - берилган функция.

Масаланинг асосий тадқиқотларига ўтишдан аввал ўнг томон қўш тартибли Хилфер каср тартибли оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласини ўрганиб чиқамиз.

Ниҳоят қаралаётган асосий масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги баён қилинадиган теоремани келтирамиз.

5-теорема. $\Delta_k \ne 0$ *ва* $\sum_{i=1}^{m} \frac{\zeta_i}{\Gamma(\alpha_1) p^{\alpha_1} \Gamma(2-\delta_2)} > 0$ *бажарилсин ва шунингдек,* $f(x,t) \in C(\Omega)$ *учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:*

- $f(0,t) = f_x'(0,t) = ... = f_x'''(0,t) = 0$;
- $f(1,t) = f_x'(1,t) = f_x''(1,t) = 0$;
- $\frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x,t)$ *чегараланган;*

у ҳолда қаралаётган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади ва у қуйидагича аниқланади:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) J_0(\lambda_k x),$$

бу ерда

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \left[E_{\delta_2,1}\left(-\lambda_k^2(-\xi_i)\right) + \frac{\lambda_k^2 \xi_i}{p^{\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)} E_{\delta_2,2}\left(-\lambda_k^2(-\xi_i)\right) \right] - E_{\alpha_1,1}\left(-\frac{\lambda_k^2}{p^{\alpha_1}} T^{\alpha_1 p}\right)$$

$$U_k(t)=\begin{cases}\tau_k E_{\alpha_1,1}(-\dfrac{\lambda_k^{\,2}}{p^{\alpha_1}}t^{p\alpha_1})+G_k(t), & t>0,\\ \varphi_k(-t)^{\gamma_2-2}E_{\delta_2,\gamma_2-1}[-\lambda_k^2(-t)^{\delta_2}]-\psi_k(-t)^{\gamma_2-1}E_{\delta_2,\gamma_2}[-\lambda_k^2(-t)^{\delta_2}]+\\ \qquad+\int\limits_t^0(z-t)^{\delta_2-1}E_{\delta_2,\delta_2}[-\lambda_k^2(z-t)^{\delta_2}]f_k(z)dz, & t<0,\end{cases}$$

бунда $p=1-\theta$ ва

$$G_k(t)=\frac{1}{p^{\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t^p-\tau^p)^{\alpha_1-1}f_k(\tau)d(\tau^p)-$$

$$-\frac{\lambda_k^{\,2}}{p^{2\alpha_1}}\int_0^t\left(t^p-\tau^p\right)^{2\alpha_1-1}E_{\alpha_1,2\alpha_1}\left[-\frac{\lambda_k^{\,2}}{p^{\alpha_1}}\left(t^p-\tau^p\right)^{\alpha_1}\right]f_k(\tau)d(\tau^p).$$

Учинчи бобнинг охирги параграфида биз аввалги иккита параграфларда ўрганилган масалаларнинг баъзи элементларидан олиб гибрид шаклдаги нолокал чегаравий масалани таҳлил қиламиз. Субдиффузия ва каср тартибли тўлқин тенгламалари қўш тартибли Хилфер каср тартибли хосилаларидан ташкил топган қуйидаги аралаш тенгламани $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup AB$ соҳада қараймиз

$$f(x,t)=\begin{cases}L_1u\equiv D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1}u(x,t)-u_{xx}(x,t), & t>0,\\ L_2u\equiv D_{0-}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2}u(x,t)-u_{xx}(x,t), & t<0,\end{cases}\tag{23}$$

бу ерда $f(x,t)$ берилган функция, $i-1<\alpha_i,\beta_i<i$, $0\le\mu_i\le1$, $i=\overline{1,2}$, $\Omega_1=\{(x,t):0<x<l,\ 0<t<T\}$, $\Omega_2=\{(x,t):0<x<l,\ -T<t<0\}$, $T>0$, $AB=\{(x,t):0<x<l,\ t=0\}$.

Ω соҳада (23) тенглама учун нолокал чегаравий масала қуйидагича баён қилинади:

Б масала. (23) тенламанинг шундай $u(x,t)$ ечими топилсинки, у регулярлик шартларини

$$t^{1-\gamma_1}u(x,t),\ t^{1-\gamma_1}D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1}u(x,t)\in C(\overline{\Omega}_1),\ (-t)^{2-\gamma_2}u(x,t)\in C(\overline{\Omega}_2),$$

$$(-t)^{2-\gamma_2}D_{0-}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2}u(x,t)\in C(\overline{\Omega}_2),\ u_{xx}\in C(\Omega_1\cup\Omega_2),$$

ва чегаравий шартларни

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\in[-T,0)\cap(0,T]\tag{23}$$

ҳамда нолокал шартни қаноатлантирсин

$$u(x,-T)=u(x,T)+\psi(x),0\le x\le l,\tag{24}$$

ва шунингдек, унинг AB да қуйидаги улаш шартларига ҳам бўйсиниши талаб қилинади

$$\lim_{t\to+0}I_{0+}^{1-\gamma_1}u(x,t)=\lim_{t\to-0}I_{0-}^{2-\gamma_2}u(x,t),0\le x\le l,\tag{25}$$

$$\lim_{t\to+0}t^{1-\delta_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}I_{0+}^{1-\gamma_1}u(x,t)\right)=\lim_{t\to-0}\frac{\partial}{\partial t}I_{0-}^{1-\gamma_2}u(x,t)0<x<l.\tag{26}$$

Бу ерда $\gamma_i = \beta_i + \mu_i(i-\beta_i)$ $\delta_i = \beta_i + \mu_i(\alpha_i - \beta_i)$, $(i=\overline{1,2})$, $\psi(x)$ берилган функция бўлиб, $\psi(0)=\psi(l)=0$ бўлсин.

Ниҳоят, бу параграфнинг асосий натижаси бўлган қуйидаги теоремани келтирамиз.

6-теорема. *Фараз қилайлик қуйидаги шартлар бажарилсин:*

$\Delta_n \neq 0$; $\psi(x) \in C[0,l] \cap C^4(0,l)$ *бунда* $\psi(0)=\psi(l)=0$, $\psi''(0)=\psi''(l)=0$, $\psi^{(4)}(0)=\psi^{(4)}(l)=0$ ва $\psi^{(5)}(x) \in L^2(0,l)$;

$f(x,t) \in C[0,l]\times[-T,T] \cap C^{2,1}(0,l)\times(-T,T)$ *бунда* $f(0,t)=f(l,t)=0$, $f_{xx}(0,t)=f_{xx}(l,t)=0$, $f_x^{(3)}(\cdot,t) \in L^2(0,l)$; *у ҳолда қаралаётган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади,* бу ерда

$$\Delta_n = T^{\gamma_2-2}E_{\delta_2,\gamma_2-1}\left(-\lambda_n T^{\delta_2}\right) + \frac{\lambda_n T^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\delta_1)}E_{\delta_2,\gamma_2}\left(-\lambda_n T^{\delta_2}\right) - T^{\gamma_1-1}E_{\delta_1,\gamma_1}\left(-\lambda T^{\delta_1}\right).$$

Айтиш жоизки, учинчи бобда келтирилган масалаларнинг ечимлари ягоналиги исботи бу масалаларда келтрилган хос функциялар системасининг тўлалик хоссаларига асосланади.

Диссертациянинг тўртинчи боби турли татбиқларга эга бўлган каср тартибли псевдо-параболик тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни ўрганишга бағишланган. Ушбу бобнинг биринчи параграфида қуйидаги бузиладиган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани $\Omega=\{(x,t): -1<x<1, 0<t\le T\}$ соҳада қараймиз

$$D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1}\left(D_{0+}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)u_x(x,t)\right]\right) = f(x,t), \qquad (27)$$

бу ерда $D_{0t}^{(\alpha_s,\beta_s)\mu_s}$ қўш тартибли Хилфер каср тартибли дифференциал оператори бунда $n=1$ ва $0<\alpha_s,\beta_s<1$, $0\le\mu_s\le 1$, $s=\overline{1,2}$.

А масала. (27) тенгламанинг шундай $u(x,t)$ ечими топилсинки, у қуйидаги регулярлик шартларини

$$t^{1-\gamma_2}u,\ t^{1-\gamma_2}u_x \in C(\overline{\Omega}),\quad D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1}D_{0+}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2}u \in C(\Omega),\ u_{xx}\in C(\Omega)$$

ва бошлағич шартни

$$\lim_{t\to 0+} I_{0+}^{(1-\mu_2)(1-\beta_2)}u(x,t) = \psi(x), -1\le x\le 1, \qquad (28)$$

ҳамда нолокал шартни қаноатлантирсин

$$u(x,T) = \sum_{i=1}^{m} p_i I_{0+}^{q_i} D_{0+}^{\delta_2+\gamma_1}u(x,\tau_i), -1<x<1, \qquad (29)$$

бу ерда $\psi(x)$, $f(x,t)$ - берилган функциялар ва $q_i>0$, $\delta_j=\beta_j+\mu_j(\alpha_j-\beta_j)$, $\gamma_j=\beta_j+\mu_j(1-\beta_j)$, $j=\overline{1,2}$, $p_i\in\mathbb{R}$, $0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_m\le T$, ва шунингдек $0<\gamma_2-\gamma_1<\delta_2$ деб фараз қиламиз.

Ушбу масаланинг бир қийматли ечилишини ўрганамиз ва қуйидаги теоремада келтирилганидек ечимни Фурье-Лежандр қаторлари кўринишида

аниқлаймиз.

7-теорема. Агар $\Delta_k \neq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i \tau_i^{q_i-1}}{\Gamma(q_i)} > 0$, $\psi(x) \in C^1[-1,1]$, $\psi''(x) \in L^2(-1,1)$, $f(x,\cdot) \in C_{-1}^1[0,T]$ *ва* $f(\cdot,t) \in C[-1,1]$, $f_{xx}(\cdot,t) \in L^2(-1,1)$, *у ҳолда А масала ягона ечимга эга бўлади ва қуйидагича аниқланади*

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) P_k(x), \tag{30}$$

бу ерда

$$u_k(t) = \psi_k t^{\gamma_2-1} E_{\delta_2,\gamma_2}\left(-\lambda_k t^{\delta_2}\right) + C_0 t^{\delta_2+\gamma_1-1} E_{\delta_2,\delta_2+\gamma_1}(-\lambda_k t^{\delta_2} +$$

$$+\int_0^t (t-s)^{\delta_2+\delta_1-1} E_{\delta_2,\delta_2+\delta_1}\left[-\lambda_k (t-s)^{\delta_2}\right] f_k(s)ds,$$

$$\Delta_k = T^{\delta_2+\gamma_1-1} E_{\delta_2,\delta_2+\gamma_1}\left(-\lambda_k T^{\delta_2}\right) + \lambda_k \sum_{i=1}^{m} p_i \tau_i^{\delta_2+q_i-1} E_{\delta_2,\delta_2+q_i}\left(-\lambda_k \tau_i^{\delta_2}\right),$$

$\lambda_k = k(k+1)$, $k = 0,1,2,...$, ψ_k ва $f_k(t)$ лар эса мос равишда $\psi(x)$ ва $f(x,t)$ функцияларнинг Фурье-Лежандр коэффициентлари.

Лежандр полиномлари системасининг тўлалигига асосланиб масаланинг ечимини ягоналиги исботланади.

Иккинчи параграфда (27) тенглама вақтга боғлиқ манбани аниқлашга қаратилган тескари масалани кўриб чиқамиз ва бунда ҳисоб-китобларни соддароқ бўлиши учун (29) нолокал шарт ўрнига қулайроқ шарт оламиз. Фараз қилайлик $\gamma_1 < \gamma_2 - \delta_2$ ва $T > 0$ ихтиёрий фиксирланган бўлсин. $\Omega = \{(x,t) : -1 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ соҳада $\{u(x,t), a(t)\}$ функциялар жуфтлиги топишга қаратилган қуйидаги тескари манба масаласини кўриб чиқамиз

$$D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1}\left(D_{0+}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)u_x(x,t)\right]\right) = h(x)a(t),$$

$$\lim_{t\to 0+} I_{0+}^{(1-\mu_2)(1-\beta_2)} u(x,t) = \psi(x), -1 \leq x \leq 1, \tag{31}$$

$$\lim_{t\to 0+} I_{0+}^{1-\gamma_1-\delta_2} u(x,t) = \varphi(x), -1 \leq x \leq 1,$$

Тескари масаланинг бир қийматли ечилиши учун қўшимча шарт сифатида

$$\int_{-1}^{1} u(x,t)dx = E(t), \tag{32}$$

шартни оламиз, бу ерда $E(t) \in AC^2([0,T],\mathbb{R})$.

Шунингдек (31), (32) масаланинг ечими учун қуйидаги регулярлик шартларини бажарилишини талаб қиламиз

$$t^{1-\delta_2-\gamma_1} u \in C(\overline{\Omega}),\ t^{1-\delta_2-\gamma_1} u_x \in C(\overline{\Omega}),\ t^{1-\delta_2-\gamma_1} a(t) \in C[0,T],$$

$$D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1} D_{0+}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2} u \in C(\Omega),\ u_{xx} \in C(\Omega).$$

8-теорема. *Қуйидаги шартлар бажарилсин* $\gamma_1 < \gamma_2 - \delta_2$,

$0 < \left(\int_{-1}^{1} h(x)dx \right)^{-1} < M$ *бунда* $h^{(4)}(x) \in L^2(-1,1)$, $\psi''(x) \in L^2(-1,1)$, $\varphi''(x) \in L^2(-1,1)$, $E''(t) \in L^1(0,T)$, *у ҳолда (31)-(32) тескари масала ягона ечимга эга бўлади.*

Мазкур бобнинг учинчи параграфда эса 2D Ландау Гамильтон операторини ўз ичига олган псевдо-параболик тенглама учун тўғри ва тескари масалаларни ўрганамиз.

Дастлаб $\Omega = \{(t,x) : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^2\}$ соҳада қуйидаги Коши масаласини қарайлик

$$\begin{cases} D_t^{(\alpha,\beta)\mu} u(t,x) + (aD_t^{(\alpha,\beta)\mu} + q)\mathcal{H}u(t,x) = f(t,x), \ (t,x) \in \Omega, \\ \lim\limits_{t \to 0+} I_{0+}^{(1-\mu)(1-\beta)} u(t,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{33}$$

Бу ерда $a, q \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha, \beta \le 1$, $0 \le \mu \le 1$ ва $D_t^{(\alpha,\beta)\mu}$ қўш тартибли Хилфер каср тартибли дифференциал оператори бўлиб, $\alpha \in (0,1)$ ва $\beta \in (0,1)$ ҳамда $\mu \in [0,1]$, $\mathcal{H}$ эса $L^2(\mathbb{R}^2)$ аниқланган Ландау Гамильтон оператори

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\left(i\frac{\partial}{\partial x} - By \right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial y} - Bx \right)^2 \right). \tag{34}$$

$\mathcal{H}$ нинг спектри хилма-хил чексиз кўп сондаги хос сонларни ўз ичига олади (В. Фок ва Л. Ландауларнинг мақолаларига қаранг)

$$\lambda_n = (2n+1)B, n = 0,1,2,...,$$

ва ўша хос сонлар Евклид Ландау даражалари дейилади.

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}^2)$ орқали λ_n хос сонларга боғлиқ бўлган $\mathcal{H}$ нинг хос фазосини белгилаймиз, яъни

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}^2) = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}^2), \mathcal{H}\phi = \lambda_n \phi\}.$$

λ_n ларга мос бўлган хос функцияларни қуйидагича ёзиб оламиз

$$e_\xi^k := e_{j,n}^k \ \text{for} \ \xi = (j,n), \ j,n = 0,1,2,...; \ k = 1,2. \tag{35}$$

А. Хаими, Н. Неденмалм, Д. Абреу ва бошқаларнинг ишларида $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}^2)$ учун ортонормал базис ташкил этувчи функцияларни келтириб ўтишган.

М. Ружанский ва Н. Токмагамбетовлар Гамильтон оператори учун глобал Фурье анализини тақдим этишган ва ўша натижалардан фойдаланиб $\mathcal{H}$ га боғланган $H_{\mathcal{H}}(G)$ Соболев фазосини киритамиз. Шундай қилиб ихтиёрий $s \in \mathbb{R}$ учун $\|f\|_{H_H^s} := \| \square^{s/2} f \|_{L^2}$ норма билан булгилаймизки

$$H_{\mathcal{H}}^s(G) := \left\{ f \in \mathcal{D}'_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2) : \mathcal{H}^{s/2} f \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \right\}, \tag{36}$$

Планшерел айниятидан фойдаланиб, ушбуни ёзамиз

$$\| f \|_{H_{\mathcal{H}}^s} := \| \mathcal{H}^{s/2} f \|_{L^2} = \left(\| \sigma_{\mathcal{H}}(\xi)^{s/2} \hat{f}(\xi) \|_{HS}^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{\xi \in \mathbb{N}^2} (B + 2B\xi_2)^s \sum_{j=1}^{2} | \hat{f}(\xi)_{jj} |^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{\xi \in \mathbb{N}^2} (B + 2B\xi_2)^s \sum_{j=1}^{2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{e_\xi^j(x)} dx \right|^2 \right)^{1/2}. \qquad (37)$$

Бундан ташқари вазнли узлуксиз функциялар $C_{1-\gamma}([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))$ фазосини қуйидаги норма орқали киритамиз

$$\| u \|_{C_{1-\gamma}\left([0,T];L^2\left(\mathbb{R}^2\right)\right)} := \max_{t\in[0,T]} t^{1-\gamma} \| u(t,\cdot) \|_{L^2\left(\mathbb{R}^2\right)}. \qquad (38)$$

(33) тўғри масаланинг асосий натижалари мазкур теоремада келтирилган.

9-теорема. *Фараз қилайлик* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap H^1_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$ *ва* $f \in C_{1-\gamma}\left([0,T];L^2(\mathbb{R}^2)\right) \cap C_{1-\gamma}\left([0,T];H^{-1}_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2) \cap H^1_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)\right)$ *бўлсин. У ҳолда псевдо-параболик тенглама учун қўйилган Коши масаласи ягона* $u \in C_{1-\gamma}([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))$ *ечимга эга бўлади бунда* $\mathcal{H}u, D_t^{(\alpha,\beta)\mu} u \in C_{1-\gamma}([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))$ *бўлиб бу ечим қуйидагича ёзилади:*

$$u(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{N}^2} Tr\left(\hat{u}(t,\xi)\, e_\xi(x)\right) = \sum_{\xi\in\mathbb{N}^2} \left(\hat{u}(t,\xi)_{11}\, e^1_\xi(x) + \hat{u}(t,\xi)_{22}\, e^2_\xi(x)\right) \qquad (39)$$

бу ерда

$$\hat{u}(t,\xi)_{mm} = \hat{u}_0(\xi)_{mm} t^{\gamma-1} E_{\delta,\gamma}\left(-\frac{qB(1+2\xi_2)}{1+aB(1+2\xi_2)} t^\delta \right) +$$

$$\frac{1}{1+qB(1+2\xi_2)} \int_0^t (t-\tau)^{\delta-1} E_{\delta,\delta}\left(-\frac{qB(1+2\xi_2)}{1+aB(1+2\xi_2)} (t-\tau)^\delta \right) \hat{f}(\tau,\xi)_{mm} d\tau, \quad m = \overline{1,2}.$$

Бу параграфда шунингдек қуйидаги псевдо-параболик тенгламани қаноатлантирувчи $\{u(t,x), f(x)\}$ функциялар жуфтлигини топишга қаратилган тескари масалани ўрганиш билан шуғулланамиз

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu} u(t,x) + (aD_t^{(\alpha,\beta)\mu} + q)\mathcal{H}u(t,x) = f(x),\ (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^2, \qquad (40)$$

шу билан бирга бу функциялар бошланғич шартни қаноатлантирсин

$$\lim_{t\to 0+} I_{0+}^{(1-\mu)(1-\beta)} u(t,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^2, \qquad (41)$$

бунда $D_t^{(\alpha,\beta)\mu}$ қўш тартибли Хилфер каср тартибли хосила бўлиб, $0 < \alpha, \beta < 1$ ва $0 \le \mu \le 1$, $\mathcal{H}$ эса Ландау Гамильтон оператори.

Масалани бир қийматли ечиш учун биз қуйидаги қўшимча шартдан фойдаланамиз

$$u(T,x) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}^2, \qquad (42)$$

бу ерда $u_0(x)$, $\psi(x)$ - берилган функциялар.

Олинган асосий натижалар қуйидаги теоремада жамланган.

10-теорема. *Фараз қилайлик* $u_0 \in H^1_{\mathcal{H}}$, $\psi \in H^1_{\mathcal{H}}$. *У ҳолда (40),(41), (42) тескари масала ягона* $\{u(t,x), f(x)\}$ *ечимга эга бўлади ва у қуйидагича ёзилади*

$$u(t,x)=\sum_{\xi\in\mathbb{N}^2}Tr\left(\hat{u}(t,\xi)\,e_{\xi}(x)\right),\tag{43}$$

бу ерда

$$\hat{u}(t,\xi)=\hat{u}_0(\xi)t^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi t^{\delta}\right)+t^{\delta}E_{\delta,\delta+1}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi t^{\delta}\right)\frac{\left(\psi,e_{\xi}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}-\left(u_0,e_{\xi}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}T^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi T^{\delta}\right)}{T^{\delta}E_{\delta,\delta+1}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi T^{\delta}\right)},$$

$$f(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{N}^2}Tr\left(\hat{f}(\xi)\,e_{\xi}(x)\right),\tag{44}$$

бунда

$$\hat{f}(\xi)=\frac{q\left(\mathcal{H}\psi,e_{\xi}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\lambda_\xi\theta_\xi T^{\delta}E_{\delta,\delta+1}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi T^{\delta}\right)}-\frac{q\left(\mathcal{H}u_0,e_{\xi}\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}T^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi T^{\delta}\right)}{\lambda_\xi\theta_\xi T^{\delta}E_{\delta,\delta+1}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi T^{\delta}\right)},$$

яъни $\lambda_\xi=qB(1+2\xi_2)$ and $\theta_\xi=(1+aB(1+2\xi_2))^{-1}$.

ХУЛОСА

Ушбу диссертацияда каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганилган ва қуйидагилар олинган:

Регулярланган Капуто маъносидаги гипер-Бессел дифференциал оператори қатнашган субдиффузия ва тўлқин тенгламаларини ўз ичига олган аралаш тенгламалар учун масалалар қаралган ва ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлашда аралаш соҳалардан олинадиган функционал муносабатлардан ҳосил қилиш ва улардан оддий дифференциал тенгламаларга ёки Фредгольм интеграл тенгламасига олиб келишдан фойдаланилган.

Ўзгарувчиларни ажратиш усулидан фойдаланиш, ечимнинг ягоналигини исботлаш учун хос функциялар системасининг тўлалик хоссаси муҳим ўрин тутади. Ушбу масалалар уларда қатнашган каср тартибли дифференциал операторлар, чегаравий шартлар, қаралган соҳалар ва теоремаларни исботлаш усуллари билан бир-биридан фақланади.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

TOSHTEMIROV BAKHODIRJON KHAYOTJON UGLI

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR SINGULAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL ORDER INTEGRAL DIFFERENTIAL OPERATORS

01.01.02- Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.3.PhD/FM744.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Karimov Erkinjon Tulkinovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
Official opponents:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Karel Van Bockstal Doctor of Mathematical Sciences, PhD. (Belgium)
Leading organization:	**Urgench State University**

Defense will take place " 6 " December 2022 at 17:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered № 150). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on « 16 » November 2022 year
(Mailing report № 2 on « 16 » November 2022 year)

Sh.A.Mirakhmedov
Deputy Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

A.A.Azamov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academicain

INTRODUCTION (abstract of PhD dissertation)

Actuality and demand of the theme of the dissertation. The theory of partial differential equations (PDEs) is one of the important branches of mathematics which can be used to mathematically formulate and solve the physical and other problems involving functions of several variables, such as the fluid flow, propagation of heat or sound, elasticity, electrostatics, electrodynamics, etc. Boundary-value, initial-value and initial-boundary value problems are 3 major types of problems for PDEs. We also note that PDEs can be categorized according to the type as hyperbolic, parabolic and elliptic, and mixed type PDE such as parabolic-hyperbolic, hyperbolic-elliptic or parabolic-elliptic, we refer papers by A. V. Bitsadze, J. M. Rassias.

In terms of considering the boundary-value problems for PDEs, we can also divide them into two big classes, i.e. direct and inverse problems. The direct problems are usually specialized in finding solutions, however if it is required to determine the coefficients or right-hand side (the source term, in the case of the heat equation, for example), initial or boundary condition, order of the equation (in fractional order case) in a differential equation additionally to the sought solution based on some additional given data, then such problems are known as inverse problems. V. Isakov presented the information on inverse problems may appear in various areas of human activity, for instance, biology, medicine, mineral exploration, quality control of industrial goods and others. In this case, studying direct and inverse problems for partial differential equations involving fractional integral –differential operators is one of the target directions of the theory of differential equations.

In recent years, the necessary and important reforms have been carried out in Uzbekistan to develop science, particularly, mathematics, physics, biology and geology. For instance, studying the problems in mathematical physics, in particular, analysying the direct and inverse problems for mixed PDEs with fractional order differential operators are being encouraged. Moreover, investigating and involving the problems at the level of international scientific standards in the research areas of mathematics such as, mathematical physics, dynamic systems and optimal control, applied mathematics and mathematical modeling, mathematical analysis and theory of functions, theory of probability and mathematical statistics, algebra and geometry are identified[1] as a main tasks and activities for mathematicians. In order to fulfill those tasks it is crucial to formulate and investigate nonlocal problems for partial differential equations especially, mixed type PDEs with farctional order differential operators.

We note that the subject and object of research carried out in this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees of the President of the Republic of Uzbekistan UP-4947 of February 7, 2017 “On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan”, UP-2789 dated February 17, 2017 “On measures to further improvement of the activities of the Academy of Sciences,

[1] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017-year 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017

organization, management and financing of research activities", PP-3682 from April 27, 2018 "On measures to further improve the system of practical implementation of innovative ideas, technologies and projects" and PP-4387 from July 9, 2019 "On measures to further development of mathematical education and science, and also root improvement of the activity of the Uzbekistan Academy of Sciences V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics", as well as in other regulations related to basic science

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, "Mathematics, Mechanics and Computer Science".

The degree of scrutiny of the problem: In recent years studying boundary value problems for mixed FPDEs become of interest in connection with their applications in many branches of mathematical physics. Using more general fractional differential operators gives us a chance to improve the quality of research in terms of modeling real-life phenomena. Investigating the dynamics and movements of gas in the channel surrounded by a porous medium with the help of the mixed-type partial differential equations was proposed by I.M. Gelfand. He also showed that studying the propagation of vibrations in complicated electrical networks can be explained by means of mixed-type PDEs.

The beginning of effective investigations on mixed PDEs dates back to years in the last century. The interesting results were taken by Chaplygin, Tricomi, Gelfand and others. Later, the fundamental results for parabolic-hyperbolic equations were developed by Salahitdinov, Juraev, Nakhushev, Vragov, and Kapustin. Currently, a huge number of works have been carrying out for fractional order, second, and third-order parabolic-hyperbolic PDEs. In particular, Sh. Alimov, R. Ashurov, J. Tokhirov, A. Berdyshev, A. Pskhu, K. Sabitov, M. Sadybekov, E. Karimov, A.Urinov, Y. Apakov, A. Nagornyy and others studied local and nonlocal boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations with a characteristic line of type changing and investigated the spectral properties of various boundary value problems for such equations. In addition, proposing and studying various types of problems for PDEs involving the fractional order differential operators are being gained a great interest for mathematicians. In particular, M. Yamamoto, R. Ashurov, M. Slodicka, Y. Luchko, V. Kiryakova, B. Turmetov, B. Kadirkulov, N. Tokmagambetov, H.M.Srivastava, M. Kirane, E. Karimov, N. Salte, D. Durdiev, M. Ruzhansky and others are working on such equations.

Investigating inverse problems for PDEs involving fractional order differential operators is also important part of research carried out in mathematics because of its applications in science and engineering. While essential results have been obtained by R. Ashurov on determining the order of the PDEs in the inverse problems, the inverse source problem for finding time dependent source are investigated by M. Slodicka, S. Malik, A. Hazanee and others. Despite of those investigations, there are still some open problems which have interesting applications. The obtained results came out from discussions between associative professor E.T. Karimov (Institute of

Mathematics, Uzbekistan) and professor M. Ruzhansky (Ghent University, Belgium) during my visits for studying joint-PhD program in 2021-2022.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. This PhD thesis was carried out as part of the program "Current problems of differential equations and related mathematical fields" in accordance with the research plan of V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics.

The aim of research work: is to study direct and inverse problems for singular partial differential equations involving fractional order integral-differential operators.

Research problems: Construct unique solution for analogue of Tricomi problem for mixed PDE involving the regularized Caputo-like counterpart of hyper-Bessel fractional differential operator;

Studying inque solvability of the solution to the Frankl-type problem for that mixed equation in a domain consists of characteristic traingle and rectangle;

Proposing and investigating the nonlocal problems for mixed PDE with/without singular coefficient which involves the subdiffusion with hyper-Bessel fractional differential operator and fractional wave equation generated by the bi-ordinal Hilfer derivative;

Studying direct and inverse problems for Langevin-type PDE involving the bi-ordinal Hilfer derivative;

Analysing forward and backward problems for the pseudo-parabolic equation with 2D Landau Hamiltonian and the bi-ordinal Hilfer fractional derivative;

The research object: mixed PDEs involving regularized Caputo-like counterpart hyper-Bessel fractional operators and bi-ordinal Hilfer fractional derivative; pseudo-parabolic PDE generated by 2D Landau Hamiltonian operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative

The research subject: Boundary-value and nonlocal problems for mixed PDEs and direct and inverse problems for pseudo-parabolic equations

Research methods. In the dissertation several methods have been applied. For example, in order to show the uniqueness of the result, we mainly address the completeness property of the system of eigenfunctions while the method of energy integrals is applicable. To show the existence of the result we mostly analyze the second kind of Fredholm integral equation. Furthermore, properties of Mittag-Leffler function and Fourier-Bessel, Fourier-Legendre series are applied, as well.

Scientific novelty of the research work is presented as follows:

a new definition of a regularized Caputo-like counterpart of hyper-Bessel fractional differential operator with arbitrary starting point is introduced and the solution of Cauchy problem is presented;

the unique solvability of an analogy of the Tricomi problem and Frankl type problem for the mixed equation involving subdiffusion equation and wave equation are proved;

the unique solution of the Cauchy-type problem for ordinary fractional differential equation with the right hand-sided bi-ordinal Hilfer fractional derivative is found explicitly and the uniqueness and existence results for a non-local boundary

value problem which is formulated for mixed fractional PDEs are proved;

direct and inverse problems are investigated for the pseudo-parabolic equation involving with the bi-ordinal Hilfer fractional derivative and unique solvability of considered problems is proved.

Practical results of the research. The obtained results and applied methods in the dissertation can be taught as a graduate course for master and PhD students of higher education institutions. In addition, the results of the dissertation concerning the solvability of the boundary value problems and inverse source problems for PDEs involving fractional order differential operators can be used in terms of developing the mathematical models of processes in physics and applied sciences.

The reliability of the results of the study. The results presented in this thesis have been obtained by using the spectral theory, global Fourier analysis and other known methods of investigations to the problems for PDEs, fundamental results of the theory of calculus. The proofs of obtained results are mathematically correct.

Scientific and practical significance of the research results. The results of this thesis are mainly of theoretical significance. The results have a scientific impact to improve the quality of research in studying the different types of problems for mixed PDEs. Moreover, we have used specific fractional differential operators which play an essential role to generalize these kinds of problems.

When it comes to the practical significance of the thesis, it can be a particular cases of several models of physical phenomena. For example, a gas movement in a channel surrounded by porous medium will be governed by the mixed parabolic-hyperbolic type equation, because inside of the channel movement will be described by the wave equation, in porous media by diffusion equation. Our results can be an example in terms of generalizing these types of problems related to these models. Moreover, the results can be used to develop the model which describes the behaviour of a quantum particle in two dimensions under the influence of a constant magnetic field.

Implementation of the research results. The obtained results were used in the following scientific investigations:

from the methods of finding the solutions of the analogue of Tricomi problem and Frankl-type problem for mixed equation involving subdiffusion and wave equations, it is used to construct the solutions of the boundary value problem for the third order differential equations in the research project "Verification of the well-posedness of boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics" No. AP09259394 (Reference of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, dated October 10, 2022, № 01-06/130, Kazakhstan). The scientific results allowed to prove the existence of strong solution in functional spaces for second and third order hyperbolic-parabolic type equations;

from the methods of finding the solutions of nonlocal problems for the mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and the bi-ordinal Hilfer fractional differential operators it is used to state the nonlocal inverse problems for fractional partial differential equations and to prove unique

solvability of the problems in the project namely "Almost flat Relaxation Functions in Visco-elasticity", numbered by ORG/SQU/CB13/030 (Reference from Sultan Qaboos University, Sultanate Oman, dated October 6, 2022). Implementation of the results allowed to represent solutions in a series form and prove absolute and uniform convergence of these series imposing certain conditions to the given data.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 4 international and 3 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation, 13 scientific papers were published, 6 of which are included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of theses of the Doctor of Philosophy, including 4 of them were published in foreign journals and 2 in national scientific journals and 7 abstracts.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of the introduction, 4 chapters, summary and bibliography. The total volume of the thesis is 135 pages.

MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In **introduction** section, the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic are given, we have also presented the degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we have given the theoretical and practical importance of the obtained results, and also give information on the implementation of the research results, the published works and the structure of dissertation.

In the first chapter, we briefly give the necessary definitions, main properties of the fractional integral-differential operators which are used in further chapters. Also, we give main notations of this dissertation and a brief introduction to the fractional calculus, as well. We have started with giving a brief information about historical survey of fractional calculus and definitions of functional spaces.

Definition 1. *Let* $\Omega=[a,b]$ *and* $m\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,...,\}$. *We introduce the weighted space* $C_\gamma[a,b]$ *of functions* g *on* $[a,b]$ *such that* $(t-a)^\gamma g(t)\in C[a,b]$ *in the similar meaning:*

$$C_\gamma[a,b]=\left\{g(t):\| g \|_{C_\gamma}=\| (t-a)^\gamma g(t) \|_C<\infty\right\}.$$

The weighted space $C_\gamma^n[a,b]$ *of functions* g *on [a, b] is defined by*

$$C_\gamma^n[a,b]=\left\{g:[0,T]\to\mathbb{R}, g^{n-1}(t)\in C[a,b]; g^n(t)\in C_\gamma[a,b]\right\}$$

with the norm

$$\| g \|_{C_\gamma^n}=\sum_{k=0}^{n-1}\| g^{(k)} \|_{C[a,b]}+\| g^{(n)} \|_{C_\gamma[a,b]}.$$

We also use a weighted modification of the space $C[a,b]\,(n\in\mathbb{N}_0)$ which was

introduced for the first time by Dimovski in his papers devoted to the operational calculus for the hyper-Bessel differential operator for the first time in 1966:

$$C_\mu^{(n)} := \left\{ f(t) = t^p f_1(t),\ \ f_1(t) \in C^{(n)}[0,\infty) \right\},\ C_\mu := C_\mu^{(0)} \text{ with } \nu \in \mathbb{R}$$

if there exists $p > \mu$ for fixed $\mu \geq -1$. Clearly, C_μ is a vector space and the set of spaces C_μ is ordered by inclusion according to

$$C_\mu \subset C_\delta \Leftrightarrow \mu \geq \delta.$$

Definition 2. *Let* $I_{a+}^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t) \in AC^n[a,b]$ *and* $I_{b-}^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t) \in AC^n[a,b]$. *Then the left-sided and right-sided bi-ordinal Hilfer fractional derivative of orders* $\alpha\,(n-1 < \alpha \leq n)$ *and* $\beta\,(n-1 < \beta \leq n)$ *type* $\mu \in [0,1]$ *are defined as follows:*

$$D_{a+}^{(\alpha,\beta)\mu} f(t) = I_{a+}^{\mu(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{(1-\mu)(n-\beta)} f(t),$$

$$D_{b-}^{(\alpha,\beta)\mu} f(t) = I_{b-}^{\mu(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n I_{b-}^{(1-\mu)(n-\beta)} f(t).$$

Let us consider the following problem

$$\begin{cases} a\, D_t^{(\alpha,\beta)\mu} u(t) + b\, u(t) = f(t), \\ \lim\limits_{t \to 0+} I_{0+}^{(1-\mu)(1-\beta)} u(t) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

which have a solution stated in the following lemma:

Lemma 1. If $f \in C_{1-\gamma}[0,T]$, then the solution $u \in C_{1-\gamma}[0,T]$ of the problem (1) can be found uniquely as follows

$$u(t) = u_0 t^{\gamma-1} E_{\delta,\gamma}\left(-\frac{b}{a} t^\delta \right) + \frac{1}{a} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} E_{\delta,\delta}\left[-\frac{b}{a} (t-s)^\delta \right] f(s) ds,$$

where $\delta = \beta + \mu(\alpha - \beta)$, $\gamma = \beta + \mu(1-\beta)$.

Roberto Garra et.al. considered a particular operator that is suitable to generalize the standard process of relaxation considering both memory effects of power law type and time variability of the characteristic coefficient. They applied the McBride-Lamb theory of the fractional powers of Bessel-type operators and as a result, they obtained an explicit representation of the fractional order operator in terms of Erdelyi-Kober and Hadamard integrals.

Definition 3. *A particular hyper-Bessel operator of order* $0 < \alpha \leq 1$ *identified in terms of E-K integral or derivative can be represented as follows*

$$\left(t^\theta \frac{d}{dt} \right)^\alpha f(t) = \begin{cases} (1-\theta)^\alpha t^{-\alpha(1-\theta)} I_{1-\theta}^{0,-\alpha} f(t), & \text{if } \theta < 1, \\ (\theta-1)^\alpha I_{1-\theta}^{-1,-\alpha} t^{(1-\theta)\alpha} f(t), & \text{if } \theta > 1. \end{cases}$$

We note that $I_\beta^{\gamma,-\alpha} := D_\beta^{\gamma-\alpha,\alpha}$ is the interpretation of E-K integral for negative order such that

$$I_\beta^{\gamma,-\alpha} := (\gamma - \alpha + 1) I_\beta^{\gamma,1-\alpha} f(t) + \frac{1}{\beta} I_\beta^{\gamma,1-\alpha} \left(t \frac{d}{dt} f(t) \right).$$

Definition 4. *A regularized Caputo-like counterpart of the hyper-Bessel*

operator is defined for $\theta < 1$ *in terms of E-K fractional order operator such that*

$$^{C}\left(t^{\theta}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} f(t) = (1-\theta)^{\alpha} t^{-\alpha(1-\theta)} I_{1-\theta}^{0,-\alpha}\left[f(t) - f(0)\right]$$

or in terms of the hyper-Bessel differential operator

$$^{C}\left(t^{\theta}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} f(t) = \left(t^{\theta}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} f(t) - \frac{f(0)t^{-\alpha(1-\theta)}}{(1-\theta)^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)},$$

where $f(0)$ is the initial condition.

The second chapter, titled "**Solvability of boundary value problems for mixed equations involving hyper-Bessel fractional differential operator**" is devoted to investigate the analogue of Tricomi problem and Frankl-type problem for the mixed equation with regularized Caputo-like counterpart of hyper-Bessel fractional differential operator.

In a domain $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AB$ let us consider the following mixed type equation

$$0 = \begin{cases} {}^{C}\left(t^{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} u(x,t) - u_{xx}(x,t), & t > 0, \\ u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t), & t < 0 \end{cases} \tag{2}$$

where α, θ, T are real numbers such that $0 < \alpha < 1$, $\theta < 1$, $T > 0$ conditions,

$$\Omega_1 = \left\{(x,t): 0 < x < 1,\ 0 < t < T\right\},\ AB = \left\{(x,t): t = 0, 0 < x < 1\right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{(x,t): -t < x < t+1, -\frac{1}{2} < t < 0\right\}.$$

Problem T. To find a function $u(x,t)$ which is continuous in $\overline{\Omega}$, its hyper-Bessel derivative is continuous in Ω_1 and it has continuous second order partial derivatives in Ω_2, and it satisfies Eq.(2) in Ω together with boundary conditions

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x/2, -x/2) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

conjugation condition on AB

$$\lim_{t \to +0} t^{1-(1-\theta)\alpha} u_t(x,t) = \gamma_1 u_t(x,-0) + \gamma_2 \int_0^1 u_t(z,-0) P(x,z)\, dz,\ 0 < x < 1. \tag{5}$$

The following statements provide the unique solvability of the Problem T.

Theorem 1. *If* $\gamma_2 \geqslant 0$,

$$\frac{\partial}{\partial z} P(x,z) = P_1(x) P_1(z), \tag{6}$$

are fulfilled, then Problem T has a unique solution.

Theorem 2. *Let all conditions of the Theorem 1 be valid. If* $\psi(x) \in C^1[0,1]$ *and* $P(x,z)$ *has continuous partial derivatives in* $[0,1]\times[0,1]$, *then there exist a unique solution of the Problem T represented as*

$$u(x,t)=2\Theta(t)\int_0^1\left[F(\xi)+\int_0^1 F(z)R(\xi,z)dz\right]\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}E_{\alpha,1}\left(-\frac{(k\pi)^2}{(1-\theta)^2}t^{(1-\theta)\alpha}\right)\sin(k\pi\xi)\sin(k\pi x)d\xi+$$

$$+\frac{\Theta(-t)}{2}\left\{F(x+t)+F(x-t)\int_0^1 F(\xi)\left[R(x+t,\xi)+R(x-t,\xi)\right]d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_{x-t}^{x+t}\left[F''(z)+\int_0^1 F(\xi)\frac{\partial^2 R(z,\xi)}{\partial z^2}d\xi-2\psi'(z)\right],dz\right\} \qquad (7)$$

where $A=\gamma_1\Gamma(\alpha)(1-\theta)^{\alpha}$, $\Theta(t)=1$ for $t>0$ and $\Theta(t)=0$ for $t<0$, $R(x,\xi)$ is the resolvent-kernel of

$$K(x,\xi)=-A\gamma_2\int_0^1 G_0(x,\xi)\frac{\partial P(\xi,z)}{\partial z}dz,$$

$$F(x)=-2A\gamma_1\int_0^1 G_0(x,\xi)\psi'(\xi)d\xi-2A\gamma_2\int_0^1 G_0(x,\xi)d\xi\int_0^1\psi'(\xi)P(\xi,z)dz,$$

$$G_0(x,\xi)=\frac{1}{A\left[e^{Ax}-e^{A(x-1)}\right]}\begin{cases}\left(1-e^{A\xi}\right)\left(1-e^{A(x-1)}\right), & 0\leqslant\xi\leqslant x,\\ \left(1-e^{Ax}\right)\left(1-e^{A(\xi-1)}\right), & x\leqslant\xi\leqslant 1.\end{cases}$$

In this chapter we consider Frankl-type problem for the equation (2) and proved the theorem about uniqueness and existence of solution.

Problem F. To find a solution $u(x,t)$ of the equation (2), which is

1) $u(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\overline{\Omega}_2\right)\cap C^2(\Omega_2)$, ${}^{C}\left(t^{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha}u\in C(\Omega_1)$, $u_{xx}\in C(\Omega_1)$;

2) and satisfies non-local conditions

$$a_1(z)u(0,z)+b_1(z)u(z/2,-z/2)=c_1(z),\ 0\le z\le 1, \qquad (8)$$

$$a_2(z)u(1,z)+b_2(z)u((z+1)/2,(z-1)/2)=c_2(z),\ 0\le z\le 1, \qquad (9)$$

$$a_3(z)u(0,z)+b_3(z)u(1,z)=c_3(z),\ 0\le z\le 1; \qquad (10)$$

4) $u(x,t)$ is subject to the following conjugating condition

$$\lim_{t\to+0}t^{1-\alpha(1-\theta)}u_t(x,t)=\lim_{t\to-0}u_t(x,t). \qquad (11)$$

Here $0<\alpha<1$, $\theta<1$, $a_i(z),b_i(z),c_i(z)\left(i=\overline{1,3}\right)$ are given continuous functions such that

$$a_1^2(z)+a_2^2(z)\neq 0,\ a_1^2(z)+a_3^2(z)\neq 0,\ b_1^2(z)+b_2^2(z)\neq 0,$$

$$b_1^2(z)+b_3^2(z)\neq 0,\ a_j^2(z)+b_j^2(z)+c_j^2(z)\neq 0,\ j=1,2,$$

It is known that Frankl problem has a specific nonlocal condition which connects

parts of boundary of the mixed domain.

The main result we formulate as the following statement:

Theorem 3. *If* $d_2'(z) > 0$, $d_2(z) \neq 0$ *and* $a_i(z), b_i(z), c_i(z) \in C(0,1) \cap C^1[0,1]$, *such that* $a_i(z) \neq 0$, $b_i(z) \neq 0$, $z \in [0,1]$, $a_1(0) \neq -b_1(0)$, *then a unique solution of the Problem F exists, where*

$$d_2(z) = \left(a_1(z) b_2(z) b_3(z)\right) \cdot \left(a_2(z) a_3(z) b_1(z)\right)^{-1}$$

In both problems, the energy integrals method is applied to show the uniqueness of a solution.

In the third chapter, we deal with studying the nonlocal boundary value problems for mixed equation consisted of fractional sub-diffusion and fractional wave equation. In particular, in section 3.1 we consider the nonlocal problem for the equation

$$f(x,t) = \begin{cases} {}^{C}\left(t^{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} u(x,t) - u_{xx}(x,t), & (x,t) \in \Omega_1, \\ D_t^{(\gamma,\beta)\mu} u(x,t) - u_{xx}(x,t), & (x,t) \in \Omega_2, \end{cases} \tag{12}$$

in a domain $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup Q$. Here $\Omega_1 = \{(x,t) : 0 < x < 1, a < t < b\}$, $\Omega_2 = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < a\}$, $Q = \{(x,t) : 0 < x < 1, t = a\}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ such that $a < b$, $0 < \alpha \leq 1$, $\theta < 1$, $1 < \gamma, \beta < 2$, $0 \leq \mu \leq 1$, $f(x,t)$ is a given function.

Problem. Find a solution of (12) in Ω, satisfying regularity conditions

$$u(\cdot,t) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \quad {}^{C}\left(t^{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha} u(x,\cdot) \in C[a,b],$$

$$t^{2-q}u,\ t^{2-q}u_x \in C(\overline{\Omega}_2),\ t^{2-q}D_t^{(\gamma,\beta)\mu}u(x,t) \in C(\overline{\Omega}_2),\ u_{xx} \in C(\Omega)$$

and the boundary-initial conditions

$$u(0,t) = 0,\ 0 \leq t \leq b, \qquad u(1,t) = 0,\ 0 \leq t \leq b, \tag{13}$$

$$\lim_{t \to 0+} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\beta)} u(x,t) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq 1, \tag{14}$$

as well as the gluing conditions

$$\lim_{t \to a-} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\beta)} u(x,t) = \lim_{t \to a+} u(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{15}$$

$$\lim_{t \to a-} \frac{d}{dt} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\beta)} u(x,t) = \lim_{t \to a+} (t-a)^{1-(1-\theta)\alpha} u_t(x,t), \quad 0 < x < 1, \tag{16}$$

where $\varphi(x)$ is a given function, $q = \beta + \mu(2-\beta)$.

In this section, we have applied the regularized Caputo-like counterpart of the hyper-Bessel operator with arbitrary starting point $t = a \geq 0$ and we have obtained the solution of the Cauchy problem in Ω_1.

The intention of this paper was to prove the uniqueness and existence of the solution to the problem (12)-(16), as we summarize in the following theorem.

Theorem 4. *If the following conditions*

1) $\Delta_k \neq 0$, for all $k = 1, 2, 3, \ldots$ 2) $\varphi \in C[0,1]$ and $\varphi' \in L^2(0,1)$,

3) $f(\cdot,t)\in C^3[0,1]$ and $f(x,\cdot)\in C^1(0,a)$, $f(x,\cdot)\in C_\mu(a,b)$, such that $f(0,t)=f(1,t)=0$, $f_{xx}(0,t)=f_{xx}(1,t)=0$ and $\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(\cdot,t)\in L^1(0,1)$ hold, then there exists a unique solution of the considered problem (12)-(17),

where $\Delta_k = E_{\delta,1}(-\lambda_k a^\delta)+\frac{\lambda_k a}{\Gamma(\alpha)p^{\alpha-1}}E_{\delta,2}(-\lambda_k a^\delta)$.

In the next section, we investigate the following fractional order mixed differential equation involving the regularized Caputo-like counterpart of the hyper-Bessel operator and the bi-ordinal Hilfer derivative:

$$f(x,t)=\begin{cases} {}^C\left(t^\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_1}u(x,t)-\frac{1}{x}u_x(x,t)-u_{xx}(x,t), & (x,t)\in\Omega_1,\\ D_{0-}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu}u(x,t)-\frac{1}{x}u_x(x,t)-u_{xx}(x,t), & (x,t)\in\Omega_2,\end{cases} \tag{17}$$

in $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup Q$ domain, where $\Omega_1=\{(x,t):0<x<1,0<t<T\}$, $\Omega_2=\{(x,t):0<x<1,-T<t<0\}$, $Q=\{(x,t):0<x<1,t=0\}$, $0<\alpha_1\le 1$, $\theta<1$, $1<\alpha_2,\beta_2\le 2$, $0\le\mu\le 1$,

$D_{0-}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu}$ is the right-sided bi-ordinal Hilfer fractional derivative defined in Definition 2.

Problem. Find a solution of Eq.(17) in Ω, which satisfies the following regularity conditions

$$u(x,t)\in C(\overline{\Omega}\setminus Q),\ u(\cdot,t)\in C^2(\Omega_1\cup\Omega_2),$$

$${}^C\left(t^\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_1}u(x,t)\in C(\Omega_1),\ D_{0-}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu}u(x,t)\in C(\Omega_2)$$

along with the boundary conditions

$$\lim_{t\to 0+}xu_x(x,t)=0,\quad u(1,t)=0,\ -T\le t\le T, \tag{18}$$

non-local condition

$$\sum_{i=1}^{m}\zeta_i I_{0-}^{(1-\mu)(2-\beta_2)}u(x,\xi_i)=u(x,T),\ 0\le x\le 1, \tag{19}$$

and the gluing conditions

$$\lim_{t\to 0-}I_{0-}^{(1-\mu)(2-\beta_2)}u(x,t)=\lim_{t\to 0+}u(x,t),\ 0\le x\le 1, \tag{20}$$

$$\lim_{t\to 0-}\frac{d}{dt}I_{0-}^{(1-\mu)(2-\beta_2)}u(x,t)=\lim_{t\to 0+}t^{1-(1-\theta)\alpha_1}u_t(x,t),\ 0<x<1, \tag{21}$$

where $-T\le\xi_1<\xi_2<....<\xi_m<0$, $f(x,t)$ is a given function.

Finally, we have proved the uniqueness and existence of the solution to the considered problem as stated in the following theorem.

Theorem 5. *Let* $\Delta_k\neq 0$ *and* $\sum_{i=1}^{m}\frac{\zeta_i}{\Gamma(\alpha_1)p^{\alpha_1}\Gamma(2-\delta_2)}>0$, *and also the following*

conditions hold for $f(x,t) \in C(\Omega)$ *such that*

- $f(0,t) = f_x'(0,t) = ... = f_x''(0,t) = 0$; • $f(1,t) = f_x'(1,t) = f_x''(1,t) = 0$;
- $\frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x,t)$ is bounded; then, there exist the unique solution of the considered problem which is represented by

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) J_0(\lambda_k x)$$

where

$$U_k(t) = \begin{cases} \tau_k E_{\alpha_1,1}(-\frac{\lambda_k^{\,2}}{p^{\alpha_1}} t^{p\alpha_1}) + G_k(t), \quad t > 0, \\ \varphi_k (-t)^{\gamma_2 - 2} E_{\delta_2, \gamma_2 - 1}[-\lambda_k^2 (-t)^{\delta_2}] - \psi_k (-t)^{\gamma_2 - 1} E_{\delta_2, \gamma_2}[-\lambda_k^2 (-t)^{\delta_2}] + \\ \qquad + \int_t^0 (z-t)^{\delta_2 - 1} E_{\delta_2, \delta_2}[-\lambda_k^2 (z-t)^{\delta_2}] f_k(z) dz, \ t < 0, \end{cases}$$

here $p = 1 - \theta$ and

$$G_k(t) = \frac{1}{p^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t^p - \tau^p)^{\alpha_1 - 1} f_k(\tau) d(\tau^p) -$$

$$- \frac{\lambda_k^{\,2}}{p^{2\alpha_1}} \int_0^t \left(t^p - \tau^p\right)^{2\alpha_1 - 1} E_{\alpha_1, 2\alpha_1}\left[-\frac{\lambda_k^{\,2}}{p^{\alpha_1}} \left(t^p - \tau^p\right)^{\alpha_1} \right] f_k(\tau) d(\tau^p),$$

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \left[E_{\delta_2,1}\left(-\lambda_k^2 (-\xi_i)\right) + \frac{\lambda_k^2 \xi_i}{p^{\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)} E_{\delta_2, 2}\left(-\lambda_k^2 (-\xi_i)\right) \right] - E_{\alpha_1,1}\left(-\frac{\lambda_k^2}{p^{\alpha_1}} T^{\alpha_1 p} \right).$$

In the last section of the third chapter, we analyze the hybrid nonlocal boundary-value problem made by combining two different elements of the problems considered in the sections 3.1 and 3.2. In the present section, we consider the following mixed PDE with fractional subdiffusion and fractional wave equation in both parts of the domain involving bi-ordinal Hilfer derivative:

$$f(x,t) = \begin{cases} L_1 u \equiv D_{0+}^{(\alpha_1, \beta_1)\mu_1} u(x,t) - u_{xx}(x,t), t > 0 \\ L_2 u \equiv D_{0-}^{(\alpha_2, \beta_2)\mu_2} u(x,t) - u_{xx}(x,t), t < 0 \end{cases} \tag{22}$$

in mixed domain $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AB$.

Where $f(x,t)$ is a given function, $i - 1 < \alpha_i, \beta_i < i$, $0 \le \mu_i \le 1$, $i = \overline{1,2}$, $\Omega_1 = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, $\Omega_2 = \{(x,t) : 0 < x < l,\ -T < t < 0\}$, $T > 0$, $AB = \{(x,t) : 0 < x < l,\ t = 0\}$.

Nonlocal BVP for Eq.(22) in Ω can be formulated as follows:

Problem B. Find a solution $u(x,t)$ of equation (22) which is subject to the following regularity conditions

$$t^{1-\gamma_1} u(x,t),\ \ t^{1-\gamma_1} D_{0+}^{(\alpha_1, \beta_1)\mu_1} u(x,t) \in C(\overline{\Omega}_1),\ \ (-t)^{2-\gamma_2} u(x,t) \in C(\overline{\Omega}_2),$$

$$(-t)^{2-\gamma_2} D_{0-}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2} u(x,t) \in C(\overline{\Omega}_2), \quad u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

submitted to the boundary conditions

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t \in [-T,0) \cap (0,T] \tag{23}$$

and non-local condition

$$u(x,-T) = u(x,T) + \psi(x), 0 \le x \le l, \tag{24}$$

and also it satisfies the conjugation conditions on AB

$$\lim_{t \to +0} I_{0+}^{1-\gamma_1} u(x,t) = \lim_{t \to -0} I_{0-}^{2-\gamma_2} u(x,t), 0 \le x \le l, \tag{25}$$

$$\lim_{t \to +0} t^{1-\delta_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} I_{0+}^{1-\gamma_1} u(x,t) \right) = \lim_{t \to -0} \frac{\partial}{\partial t} I_{0-}^{1-\gamma_2} u(x,t) 0 < x < l. \tag{26}$$

where $\gamma_i = \beta_i + \mu_i(i - \beta_i) \quad \delta_i = \beta_i + \mu_i(\alpha_i - \beta_i), \quad (i = \overline{1,2})$, $\psi(x)$ is a given function such that $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

All in all, we have just proved the following theorem.

Theorem 6. *Assume that the following conditions hold:*

$\Delta_n \neq 0$; $\psi(x) \in C[0,l] \cap C^4(0,l)$ such that $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(l) = 0$, $\psi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(l) = 0$ and $\psi^{(5)}(x) \in L^2(0,l)$;

$f(x,t) \in C[0,l] \times [-T,T] \cap C^{2,1}(0,l) \times (-T,T)$ such that $f(0,t) = f(l,t) = 0$, $f_{xx}(0,t) = f_{xx}(l,t) = 0$, $f_x^{(3)}(\cdot,t) \in L^2(0,l)$; then, there exists the unique solution of the considered problem,

where

$$\Delta_n = T^{\gamma_2 - 2} E_{\delta_2, \gamma_2 - 1}\left(-\lambda_n T^{\delta_2}\right) + \frac{\lambda_n T^{\gamma_2 - 1}}{\Gamma(\delta_1)} E_{\delta_2, \gamma_2}\left(-\lambda_n T^{\delta_2}\right) - T^{\gamma_1 - 1} E_{\delta_1, \gamma_1}\left(-\lambda T^{\delta_1}\right).$$

The uniqueness of solutions of the problems proposed in the third chapter is based on the completeness of the system of eigenfunctions.

The last chapter is devoted to studying of some direct and inverse problems for the fractional pseudo-parabolic equations which have various applications. In section 4.1, we are interested in investigating the following space-degenerate PDE

$$D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1} \left(D_{0+}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2) u_x(x,t) \right] \right) = f(x,t) \tag{27}$$

in the domain $\Omega = \{(x,t) : -1 < x < 1, 0 < t \le T\}$. Here $D_{0t}^{(\alpha_s,\beta_s)\mu_s}$ is a bi-ordinal Hilfer fractional derivative defined in definition 2 when $n = 1$ and $0 < \alpha_s, \beta_s < 1$, $0 \le \mu_s \le 1$, $s = \overline{1,2}$.

Problem A. Find a solution $u(x,t)$ of the equation (27) satisfying regularity conditions

$$t^{1-\gamma_2} u, \; t^{1-\gamma_2} u_x \in C(\overline{\Omega}),$$

$$D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1} D_{0+}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2} u \in C(\Omega), \; u_{xx} \in C(\Omega)$$

and initial condition

$$\lim_{t\to 0+} I_{0+}^{(1-\mu_2)(1-\beta_2)} u(x,t) = \psi(x), -1 \le x \le 1, \tag{28}$$

and subject to the nonlocal condition

$$u(x,T) = \sum_{i=1}^{m} p_i I_{0+}^{q_i} D_{0+}^{\delta_2+\gamma_1} u(x,\tau_i), -1 < x < 1, \tag{29}$$

where $\psi(x)$, $f(x,t)$ are given functions and $q_i > 0$, $\delta_j = \beta_j + \mu_j(\alpha_j - \beta_j)$, $\gamma_j = \beta_j + \mu_j(1-\beta_j)$, $j = \overline{1,2}$, $p_i \in \mathbb{R}$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_m \le T$, and also we assume that $0 < \gamma_2 - \gamma_1 < \delta_2$.

We investigate a unique solvability of this problem and present the solution in the form of Fourier-Legendre series as stated in the following theorem.

Theorem 7. *If* $\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i \tau_i^{q_i-1}}{\Gamma(q_i)} > 0$, $\psi(x) \in C^1[-1,1]$, $\psi''(x) \in L^2(-1,1)$, $f(x,\cdot) \in C_{-1}^1[0,T]$ *and* $f(\cdot,t) \in C[-1,1]$, $f_{xx}(\cdot,t) \in L^2(-1,1)$, *then the Problem A has a unique solution which can be represented as*

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) P_k(x). \tag{30}$$

Here $\lambda_k = k(k+1)$, $k = 0,1,2,...$, ψ_k and $f_k(t)$ are Fourier-Legendre coefficients of functions $\psi(x)$ and $f(x,t)$, respectively,

$$u_k(t) = \psi_k t^{\gamma_2-1} E_{\delta_2,\gamma_2}\left(-\lambda_k t^{\delta_2}\right) + C_0 t^{\delta_2+\gamma_1-1} E_{\delta_2,\delta_2+\gamma_1}(-\lambda_k t^{\delta_2} +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\delta_2+\delta_1-1} E_{\delta_2,\delta_2+\delta_1}\left[-\lambda_k (t-s)^{\delta_2}\right] f_k(s) ds,$$

$$\Delta_k = T^{\delta_2+\gamma_1-1} E_{\delta_2,\delta_2+\gamma_1}\left(-\lambda_k T^{\delta_2}\right) + \lambda_k \sum_{i=1}^{m} p_i \tau_i^{\delta_2+q_i-1} E_{\delta_2,\delta_2+q_i}\left(-\lambda_k \tau_i^{\delta_2}\right).$$

Using the fact of completeness property of system of Legendre polynomials we have proved the uniqueness of solution of the Problem A.

In section 4.2, we are also concerning with studying the time dependent inverse source problem for the equation (27) and we will take another more favorable condition in order to facilitate calculations instead of non-local condition (29).

Let $\gamma_1 < \gamma_2 - \delta_2$, $T > 0$ arbitrary fixed time and $\Omega = \{(x,t) : -1 < x < 1, 0 < t \le T\}$.

The inverse source problem (ISP) here is to find a pair $\{u(x,t), a(t)\}$ functions for given $h(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ such that

$$\begin{gathered} D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1}\left(D_{0+}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2) u_x(x,t)\right]\right) = h(x)a(t), \\ \lim_{t\to 0+} I_{0+}^{(1-\mu_2)(1-\beta_2)} u(x,t) = \psi(x), -1 \le x \le 1, \\ \lim_{t\to 0+} I_{0+}^{1-\gamma_1-\delta_2} u(x,t) = \varphi(x), -1 \le x \le 1, \end{gathered} \tag{31}$$

We provide the over-determination condition as a way to make the inverse problem

uniquely solved:

$$\int_{-1}^{1} u(x,t)dx = E(t), \tag{32}$$

where $E(t) \in AC^2([0,T],\mathbb{R})$.

We also consider the following regularity conditions for the solution of inverse source problem (31), (32)

$$t^{1-\delta_2-\gamma_1}u \in C(\overline{\Omega}),\ \ t^{1-\delta_2-\gamma_1}u_x \in C(\overline{\Omega}),\ \ t^{1-\delta_2-\gamma_1}a(t) \in C[0,T],$$

$$D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1} D_{0+}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2} u \in C(\Omega),\ u_{xx} \in C(\Omega).$$

Theorem 8. *Let* $\gamma_1 < \gamma_2 - \delta_2$, $0 < \left(\int_{-1}^{1} h(x)dx \right)^{-1} < M$ *such that*

$h^{(4)}(x) \in L^2(-1,1)$, $\psi''(x) \in L^2(-1,1)$, $\varphi''(x) \in L^2(-1,1)$, $E''(t) \in L^1(0,T)$, *then the unique solution of the inverse source problem (31)-(32) exists.*

In section 4.3, we dealt with studying direct and inverse source problem for the pseudo-parabolic equation with 2D Landau Hamiltonian operator.

In $\Omega = \{(t,x) : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^2\}$, we consider the following Cauchy-type problem for the fractional pseudo-parabolic equation involving the bi-ordinal Hilfer's derivative and a Landau Hamiltonian operator with initial-type conditions

$$\begin{cases} D_t^{(\alpha,\beta)\mu} u(t,x) + (aD_t^{(\alpha,\beta)\mu} + q)\mathcal{H}u(t,x) = f(t,x),\ (t,x) \in \Omega, \\ \lim\limits_{t \to 0+} I_{0+}^{(1-\mu)(1-\beta)} u(t,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{33}$$

where $a, q \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha, \beta \le 1$, $0 \le \mu \le 1$ and $D_t^{(\alpha,\beta)\mu}$ is the bi-ordinal Hilfer's fractional derivative of orders α and β of type μ, $\mathcal{H}$ is a Landau Hamiltonian operator acting on the $L^2(\mathbb{R}^2)$ defined by

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\left(i\frac{\partial}{\partial x} - By \right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial y} - Bx \right)^2 \right). \tag{34}$$

The spectrum of $\mathcal{H}$ contains the infinite number of eigenvalues with the infinite multiplicity of the form (see the papers by Fock V and Landau L)

$$\lambda_n = (2n+1)B, n = 0,1,2,...,$$

and those eigenvalues are called the Euclidean Landau levels.

Let us denote the eigenspace of $\mathcal{H}$ corresponding to the eigenvalue λ_n by $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}^2)$, i.e.

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}^2) = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}^2), \mathcal{H}\phi = \lambda_n \phi\}.$$

The eigenfunctions corresponding λ_n can be designated by

$$e_\xi^k := e_{j,n}^k \ \text{ for } \ \xi = (j,n),\ \ j,n = 0,1,2,...;\ \ k = 1,2. \tag{35}$$

In the papers of Haimi, A., Hedenmalm, H and Abreu L.D. et. al., showed functions presented as the orthonormal basis for $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}^2)$.

M. Ruzhansky and N. Tokmagambetov presented global Fourier analysis for

Landau Hamiltonian operator and using those results we define Sobolev space $H_{\mathcal{H}}(G)$ associated to $\mathcal{H}$. Thus, for any $s \in \mathbb{R}$, we set

$$H^s_{\mathcal{H}}(G) := \left\{ f \in \mathcal{D}'_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2) : \mathcal{H}^{s/2} f \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \right\}, \tag{36}$$

with the norm $\| f \|_{H^s_{\mathcal{H}}} := \| \mathcal{H}^{s/2} f \|_{L^2}$. Using the Plancherel's identity, we can write

$$\| f \|_{H^s_{\mathcal{H}}} := \| \mathcal{H}^{s/2} f \|_{L^2} = \left(\| \sigma_{\mathcal{H}}(\xi)^{s/2} \hat{f}(\xi) \|^2_{HS} \right)^{1/2} = \left(\sum_{\xi \in \mathbb{N}^2} (B + 2B\xi_2)^s \sum_{j=1}^{2} | \hat{f}(\xi)_{jj} |^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{\xi \in \mathbb{N}^2} (B + 2B\xi_2)^s \sum_{j=1}^{2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{e^j_\xi(x)} dx \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{37}$$

We define the space of the weighted continuous functions $C_{1-\gamma}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ furnished with the maximum norm

$$\| u \|_{C_{1-\gamma}\left([0,T]; L^2\left(\mathbb{R}^2\right)\right)} := \max_{t \in [0,T]} t^{1-\gamma} \| u(t,\cdot) \|_{L^2\left(\mathbb{R}^2\right)}. \tag{38}$$

Here is the main result of the forward problem (33).

Theorem 9. *Assume that* $f \in C_{1-\gamma}\left([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2)\right) \cap C_{1-\gamma}\left([0,T]; H^{-1}_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2) \cap H^1_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)\right)$ *and* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap H^1_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$. *Then the Cauchy type problem for the time-fractional pseudo-parabolic equation (4.3.2) has a unique solution* $u \in C_{1-\gamma}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ *such that* $\mathcal{H}u, D_t^{(\alpha,\beta)\mu} u \in C_{1-\gamma}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$ *in the following form:*

$$u(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{N}^2} Tr\left(\hat{u}(t,\xi)\, e_\xi(x) \right) = \sum_{\xi \in \mathbb{N}^2} \left(\hat{u}(t,\xi)_{11}\, e^1_\xi(x) + \hat{u}(t,\xi)_{22}\, e^2_\xi(x) \right) \tag{39}$$

In this section, we are also concerned with an inverse source problem of finding a pair of functions $\{u(t,x), f(x)\}$ for the following fractional pseudo-parabolic equation

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu} u(t,x) + (aD_t^{(\alpha,\beta)\mu} + q)\mathcal{H}u(t,x) = f(x), \ (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^2, \tag{40}$$

subject to the weighted initial condition

$$\lim_{t \to 0+} I_{0+}^{(1-\mu)(1-\beta)} u(t,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^2, \tag{41}$$

where $D_t^{(\alpha,\beta)\mu}$ stands for the bi-ordinal Hilfer's fractional derivative in time variable of orders $0 < \alpha, \beta < 1$ and type $0 \le \mu \le 1$, $\mathcal{H}$ denotes the Landau Hamiltonian in space variable in the form of (34).

In order to solve the problem uniquely, we use the following over-determination condition

$$u(T,x) = \psi(x), \ x \in \mathbb{R}^2, \tag{42}$$

where $u_0(x)$, $\psi(x)$ are given functions.

The main result for this section can be summarized in the following theorem.

Theorem 10. *Assume that* $u_0 \in H^1_{\mathcal{H}}$, $\psi \in H^1_{\mathcal{H}}$. *Then, the problem (40),(41),*

(42) has a unique pair of solutions $\{u(t,x), f(x)\}$ *determined by*

$$u(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{N}^2} Tr\left(\hat{u}(t,\xi)\, e_\xi(x)\right), \tag{43}$$

where

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)t^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi t^\delta\right) + t^\delta E_{\delta,\delta+1}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi t^\delta\right)\frac{\left(\psi,e_\xi\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \left(u_0,e_\xi\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} T^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi T^\delta\right)}{T^\delta E_{\delta,\delta+1}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi T^\delta\right)},$$

and

$$f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{N}^2} Tr\left(\hat{f}(\xi)\, e_\xi(x)\right), \tag{44}$$

where

$$\hat{f}(\xi) = \frac{q\left(\mathcal{H}\psi,e_\xi\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\lambda_\xi\theta_\xi T^\delta E_{\delta,\delta+1}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi T^\delta\right)} - \frac{q\left(\mathcal{H}u_0,e_\xi\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} T^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi T^\delta\right)}{\lambda_\xi\theta_\xi T^\delta E_{\delta,\delta+1}\left(-\lambda_\xi\theta_\xi T^\delta\right)},$$

here $\lambda_\xi = qB(1+2\xi_2)$ and $\theta_\xi = (1+aB(1+2\xi_2))^{-1}$.

CONCLUSION

In this thesis, we are concerned with studying the boundary value problems for fractional PDEs, particularly, mixed equations involving the subdiffusion involving hyper-Bessel fractional operator in Caputo sense and classical wave equation or sometimes wave with fractional order.

We investigate the existence and uniqueness of a solution in every case. Our main technique is to find the main functional relations from both domains and come to the ordinary differential equations and Fredholm integral equations. Moreover, the method of separation of variables is mostly used and using the completeness property of the system of eigenfunctions is applied in many cases.

The problems we have solved have differences from each other in the type of fractional differential operator, boundary conditions, domains on which the problems are considered, and the methods for proving the uniqueness result.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТОШТЕМИРОВ БАХОДИРЖОН ХАЁТЖОН УГЛИ

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.3.PhD/FM744.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский(резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Каримов Эркинжон Тулкинович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
	Карел Ван Бокстал доктор математических наук (Белгия)
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 6 » декабря 2022 года в 17:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И. Романовского (зарегистрирована за № 150). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 16 » ноября 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от « 16 » ноября 2022 года).

Ш.А.Мирахмедов
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.А.Азамов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Целью исследования является решение правильной и обратной задач для сингулярных дифференциальных уравнений с участием интегро-дифференциальных операторов дробного порядка.

Объект исследования: смешанные дифференциальные уравнения в частных производных, включающие регуляризованные дробные операторы гипер-Бесселя, подобные Капуто и двупорядковую дробную производную Хильфера; псевдопараболический дифференциальное уравнение в частных производных, порожденный двумерным оператором Гамильтона Ландау и двупорядковой дробной производной Хильфера.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

вводится новое определение регуляризованного в смысле Капуто дробно-дифференциального оператора гипер-Бесселя с произвольной начальной точкой и приведено решение задачи Коши;

доказана однозначная разрешимость аналога задачи Трикоми и задача типа Франкля для смешанного уравнения, включающего уравнение субдиффузии и волновое уравнение;

в явном виде найдено единственное решение задачи типа Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с правосторонней двупорядковой дробной производной Хильфера и доказаны результаты единственности и существования нелокальной краевой задачи, сформулированной для смешанных дробных дифференциальных уравнений в частных производных;

исследованы прямая и обратная задачи для псевдопараболического уравнения с двупорядковой дробной производной Хильфера и доказана однозначная разрешимость рассматриваемых задач.

Внедрение результатов исследования. Результаты были использованы в следующих научных исследованиях:

из методов нахождения решений аналога задачи Трикоми и задачи типа Франкля для смешанного уравнения с участием субдиффузионного и волнового уравнений используется для построения решений краевой задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка в исследовательском проекте «Обратные задачи для эволюционных уравнений с положительными операторами» № AP 09259394 (Справка Института математики и математического моделирования от 10 октября 2022 года № 01-16/130, Казахстан). Научные результаты позволили доказать существование сильных решений в функциональных пространствах для дифференциальных уравнений дробного порядка;

из методов нахождения решений нелокальных задач для смешанного уравнения, включающего гипер-Бесселевский дробно-дифференциальный оператор и двупорядковые дробно-дифференциальные операторы Хильфера, он используется для постановки нелокальных обратных задач для дробных дифференциальных уравнений в частных производных и для доказательства однозначной разрешимости задач в проекте, пронумерованные

ORG/SQU/CB13/030 (справка из Университета Султана Кабуса от 6 октября 2022 года, Султанат Оман). Реализация результатов позволила представить решения в виде рядов и доказать абсолютную и равномерную сходимость этих рядов, наложив определенные условия на заданные данные.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, резюме и библиографии. Общий объем диссертации составляет 135 страниц.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Karimov E. T., Toshtemirov B. H. Tricomi type problem with integral conjugation condition for a mixed type equation with the hyper-Bessel fractional differential operator. // Bulletin of the Institute of Mathematics. -2019. -Vol. 2(4). -P. 9-14 (01.00.00; № 17).
2. Toshtemirov B. Frankl-type problem for a mixed type equation associated hyper-Bessel differential operator. // Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics. -2021. -Vol. 3(3). -P. 327-333 (№ 20, General Impact Factor).
3. Karimov E. T., Toshtemirov B. H. Non-local boundary value problem for a mixed-type equation involving the bi-ordinal Hilfer fractional differential operators. // Uzbek Mathematical Journal. -2021. -Vol. 65(2). -P. 61-77. (01.00.00; № 6).
4. Karimov E., Ruzhansky M., Toshtemirov B. Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative. // Mathematical Methods in the Applied Sciences. -2022. -Vol. -P. 1-17. (3. Scopus. IF=0,702).
5. Toshtemirov B. On solvability of the non-local problem for the fractional mixed-type equation with Bessel operator.// Fractional Differential Calculus. -2022. -Vol. 12(1). -P. 63–76. (3. Scopus).
6. Karimov E., Toshtemirov B. On a time-nonlocal boundary value problem for time-fractional partial differential equation.// International Journal of Applied Mathematics. -2022. Vol. 35(3). -P. 423-438. (3. Scopus. IF=0,272).

II бўлим (2 часть; part 2)

7. Karimov E. T., Toshtemirov B. H. The analogy of Tricomi problem for the mixed-type equation involving hyper-Bessel fractional derivative operator with integral gluing condition. // Conference: Modern problems of mathematics and informatics. 23-24 May, -2019. Fergana, -P. 162-164.
8. Toshtemirov B. H. Frankl-type problem for a mixed-type equation with hyper-Bessel differential operator.// International scientific Conference: Modern problems of differential equations and related branches of mathematics. 12-13 March, -2020. Fergana, -P. 218-219.
9. Karimov E.T., Ruzhansky M., Toshtemirov B. H. Boundary-value problem for a mixed type equation with Hilfer's double-order derivative and hyper-Bessel fractional operator.// Conference: Actual problems of Stochastic Analysis. 20-21 February, -2021. Tashkent, -P. 212-214.

10. Karimov E.T., Toshtemirov B. H. Non-local boundary value problem for a mixed-type equation involving Hilfer's double order fractional operator.// Annual International April Mathematical Conference-2021. 5-8 April, -2021. Almaty, -P. 180-181.
11. Toshtemirov B. On solvability of the non-local problem for the fractional mixed-type equation with Bessel operator.// International Scientific Conference: Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021. 15-17 November, -2021. Fergana, -P. 155.
12. Karimov E., Toshtemirov B. Existence and uniqueness of a time-dependent inverse source problem for sub diffusion equation.// Annual International April Mathematical Conference-2022. 6-8 April, -2022. Almaty, -P. 141-142.
13. Karimov E. T, Toshtemirov B. H. Non-local boundary value problem for the space degenerate partial differential equation.// International Scientific and Practical Conference: Modern problems of applied mathematics and information technologies. 12-13 May, -2022. Bukhara, -P. 161-162.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
2022 йил 31 октябрда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги
матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3. Адади 100. Буюртма № 71/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.