В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ШЕРМАТОВА ЗАРИНА ҲАКИМ ҚИЗИ

БЕШ ЎЛЧАМЛИ ЕЧИЛУВЧАН ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИ ВА БАЪЗИ ТЎЛА ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ТАСНИФИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

УДК: 512.554

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ШЕРМАТОВА ЗАРИНА ҲАКИМ ҚИЗИ

БЕШ ЎЛЧАМЛИ ЕЧИЛУВЧАН ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИ ВА БАЪЗИ ТЎЛА ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ТАСНИФИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2021.4.PhD/FM443 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Каримжанов Иқболжон Абдулазизович физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон Миллий университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «29» март соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (132-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2022 йил «11» март куни тарқатилди.
(2022 йил «11» мартдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

Б.А.Омиров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти. Жаҳон миқёсида назарий физика фани каби математиканинг ҳам кўплаб объектлари ноассоциатив алгебра усуллари орқали ўрганилмоқда. Жумладан, Ли ва Йордан алгебралари квант механикасининг предмети сифатида вужудга келган. Бошқа томондан эса Ли алгебралари ноассоциатив алгебра бўлиб, Ли группаларининг муҳим хусусиятларини ўзида акс эттиради. Дастлаб, Ли алгебралари назариясини ривожлантиришда улар асосан Ли группаларининг татбиқлари сифатида қаралган бўлса, кейинчалик мустақил характерга эга назария бўлиб шаклланди. Ли группаларида мавжуд бўлган кўплаб тушунча ва хусусиятлар Ли алгебралари учун ҳам аниқланиб, кейинчалик улар Ли алгебраларининг бир қатор умумлашмалари учун ҳам кенгайтирилган. Ли алгебраларининг муҳим умумлашмаларидан бири бўлган Лейбниц алгебралари тўлалигини аниқлаш, уларнинг ички ва ташқи дифференциаллашларини топиш ва таснифлаш масалалари замонавий алгебранинг долзарб ва муҳим вазифаларидан бири бўлиб келмоқда.

Ҳозирги вақтда Лейбниц алгебралари кўпхиллигида барча тўла Ли алгебраларини ўз ичига олувчи бир қанча синфлар мавжуд бўлганлиги учун тўла Лейбниц алгебралари тушунчасини аниқлашда бир нечта омилларга таянишга тўғри келади. Шунинг учун ҳам тўла Лейбниц алгебралари тушунчасини киритишда бир нечта олимлар томонидан турлича ёндашувлар бўлиб, кейинчалик Ли алгебраларида бўлгани каби барча дифференциаллашлари ички ҳамда маркази тривиал бўлган Лейбниц алгебраларини тўла деб аташ қабул қилинган. Бундай алгебралар когомологик нуқтаи назардан ҳам муҳим бўлиб, кўплаб тўла Лейбниц алгебралари когомологик қаттиқ алгебралар синфига тегишлидир. Бу борада: тўла Лейбниц алгебраларини таснифлаш, тўла идеалга эга бўлган Лейбниц алгебраларини ажраладиган эканини кўрсатиш, берилган алгебраларнинг ташқи дифференциаллашларга эгалигини исботлаш, Лейбниц алгебраларини тавсиф қилиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган математика, физика, геология ва биология фанларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, ноассоциатив алгебраларга оид фундаментал тадқиқотларнинг ривожланишига ҳам алоҳида эътибор қаратилди. Ушбу фундаментал тадқиқотлар доирасида тўла Лейбниц алгебраларини ўрганиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифаси ва фаолият йўналиши этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида тўла

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

Лейбниц алгебралари назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Барча дифференциаллашлари ички ва маркази нолга тенг бўлган Ли алгебралари биринчи марта М.Готонинг ишларида фойдаланилган, лекин бу вақтда бундай ҳусусиятга эга алгебралар кам сонли бўлганлиги учун уларнинг аҳамияти етарли даражада тушунилмаган. Э.Шенкман томонидан ўрганилган қисм инвариантлар назарияси ёрдамида тўла Ли алгебраларининг ҳосил бўлиши бундай алгебраларни ўрганишга туртки бўлган дастлабки муҳим қадамлардан бири ҳисобланади. Тўла Ли алгебраси атамаси Н.Жекобсон томонидан илк марта қўлланилган бўлиб, тўла идеалга эга бўлган ихтиёрий чекли ўлчамли Ли алгебраси ажраладиган бўлиши исботланган. Сўнгги йилларда турли олимлар тўла Ли алгебраларининг таснифи ҳамда структуравий хусусиятларига эътибор қаратдилар. Д.Менг ихтиёрий чекли ўлчамли тўла Ли алгебрасини содда тўла идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ёйиш мумкинлигини ҳамда бу ёйилма идеаллар тартиби аниқлигида ягоналигини исботлаган. Й.Гао ҳамда Д.Менг нильрадикали l-даражали алгебрадан иборат бўлган ечилувчан Ли алгебрасининг тўла бўлиши учун зарурий ва етарлилик шартларини ва ечилувчан бўлмаган тўла Ли алгебрасини қуриш усулини берган.

Ли алгебрасига ўхшаш тарзда Ж.М.Анкочеа ва Р.Кампоамор-Стурсберг томонидан тўла Лейбниц алгебраси тушунчаси киритилган. Улар томонидан нильрадикали нол-филиформ алгебрага изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраси тўла бўлиши исботланган. Кейинчалик, Ж.К.Адашев ва бошқалар томонидан нильрадикали табиий усулда градуирланган p-филиформ алгебра, шу билан бирга нильрадикалнинг ко-ўлчами максимал бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тўлалиги кўрсатилган. Бундан ташқари, Б.А.Омиров ва Ў.Х.Мамадалиевлар томонидан нильрадикали ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга бўлган тўла ечилувчан Лейбниц

алгебралари таснифланган. Шунингдек, Қ.К.Абдурасулов томонидан нильрадикалининг ко-ўлчами ҳосил қилувчи элементлар сонига тенг бўлган ихтиёрий ечилувчан Лейбниц алгебраси тўла эканлиги кўрсатилган.

Лейбниц алгебраларининг структуравий назариясида уларнинг ҳар қандай синфини изоморфизм аниқлигида таснифлаш асосий муаммолардан бири ҳисобланади. Икки ва уч ўлчамли Лейбниц алгебралари Ж.-Л.Лоде, Б.А.Омиров, Ж.М.Казас ва бошқалар томонидан таснифланган. А.Х.Худойбердиев ва Э.М.Каньете томонидан эса барча тўрт ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифи олинган. Таъкидлаш жоизки, беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг нильрадикали уч ёки тўрт ўлчамли бўлиб, нильрадикали уч ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тавсифи А.Х.Худойбердиев, И.С.Рахимов ва Ш.К.Саид Ҳусейнларнинг ишларида келтирилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номидаги Математика институтининг «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизикли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос + Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва сиртларнинг глобал инвариантлари назарияси ва унинг механикага татбиқлари» (ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87, 2017-2019 йиллар) мавзусидаги фундаментал лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади кичик ўлчамли ечилувчан ва тўла идеалга эга бўлган чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларининг структурасини аниқлаш ҳамда Лейбниц алгебраларининг марказий ва нильпотент дифференциаллашларини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

нильрадикали тўрт ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлаш;

чекли ўлчамли Лейбниц алгебралари дифференциаллаш алгебраларининг нильпотентлик хоссаларини ҳамда Лейбниц алгебраларининг марказий ва ташқи дифференциаллашларини топиш;

тўла радикалга эга бўлган Лейбниц алгебраларини қуриш.

Тадқиқотнинг объекти. Чекли ўлчамли Лейбниц алгебралари, ечилувчан Лейбниц алгебралари, Лейбниц алгебраларининг дифференциаллашлар алгебраси.

Тадқиқотнинг предмети. Чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларининг структуравий назарияси, ечилувчан ва нильпотент Лейбниц алгебралари назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда структуравий ўзгармаслар ҳамда классификациялаш усуллари, индукция усули, шунингдек инвариантлар назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

нильрадикали тўрт ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц

алгебралари таснифланган;

Лейбниц алгебраларининг бир вақтда марказий ва ички дифференциаллашлари топилган ҳамда нотривиал марказга эга бўлган Лейбниц алгебрасида марказий дифференциаллашлар тўплами ички дифференциаллашлар тўплами билан устма-уст тушиши учун Лейбниц алгебраси метабел алгебра бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботланган;

ечилувчан идеалининг нильрадикали ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга нильпотент алгебрага изоморф бўлган Лейбниц алгебраси ажраладиган эканлиги исботланган;

радикали нильрадикалнинг максимал кенгайтмасидан иборат бўлган Лейбниц алгебраси идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодаланиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Диссертацияда олинган натижалар ва фойдаланилган методларни олий ўқув юртлари магистрантлари ва таянч докторантлари учун махсус курсларда ўқитиш мумкин. Шунингдек, қаралган баъзи тўла радикалга эга бўлган Лейбниц алгебраларининг структураси ихтиёрий тўла идеалли Лейбниц алгебралари ҳақидаги гипотезани текширишга имкон беради.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги натижалар дифференциаллашлар назариясини, алгебранинг бошқа синфларини текширишдаги маълум методларни, алгебралар назариясидаги фундаментал натижаларини қўллаш орқали олинганлиги билан изоҳланади. Олинган натижаларнинг исботлари математик жиҳатдан тўғри.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, ишда олинган натижалардан турли алгебраларнинг кўпхиллигини тадқиқ қилишда, хусусан, диссертацияда келтирилган усул ва методларни қўллаб, тўла идеалга эга бўлган ихтиёрий Лейбниц алгебрасининг ажраладиган бўлиши ҳақидаги тасдиқни ҳал қилишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти шундан иборатки, диссертацияда олинган натижалар тўла Лейбниц алгебраларининг таснифлари ва хоссалари ҳақида гипотезалар яратишга имкон бериши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари ва баъзи тўла Лейбниц алгебраларининг таснифи бўйича олинган натижалар асосида:

Нильрадикали тўрт ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифидан ОТ–Ф4–31 рақамли «Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар» мавзусидаги фундаментал лойиҳада нильрадикали квази-филиформ алгебрадан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университетининг 2022 йил 17-январдаги 04/11–229-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши, нилрадикали берилган кичик ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлаш

имконини берган;

Лейбниц алгебраларининг ташқи дифференциаллашлари учун олинган натижалардан ОТ-4-27 рақамли «Йордан учликлари олд қўшма фазолари, сиғимлар фазолари тавсифлари ва функцияларни голоморф давом эттириш» мавзусидаги фундаментал лойиҳада чекли ўлчамли филиформ Лейбниц алгебраларининг деярли ички дифференциаллашларини ўрганишда фойдаланилган (Қорақалпоқ давлат университетининг 2022 йил 17-январдаги 01-21-04/46-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши, Лейбниц алгебраларининг деярли ички дифференциаллашлари таснифини олиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 4 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 14 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та илмий мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 86 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ҳамда диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг “**Нильрадикали тўрт ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари**” деб номланувчи биринчи бобида диссертация ишида фойдаланилган зарурий тушунчалар киритилган ҳамда нильрадикали тўрт ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифлари берилган.

1-таъриф. $\mathbb{F}$ майдон устида аниқланган L алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги Лейбниц айнияти бажарилса,

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],$$

L алгебра Лейбниц алгебраси дейилади, бу ерда [-,-] – L алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

Диссертация ишида комплекс сонлар майдонида берилган чекли ўлчамли Лейбниц алгебралари қаралади. Берилган Лейбниц алгебрасининг элементлари квадратларидан тузилган $I = \mathrm{span}\{[x,x] \mid x \in L\}$ қисм фазо Лейбниц алгебрасининг идеали бўлади. Бу I идеал L/I фактор-алгебра Ли алгебраси бўладиган энг кичик идеалдир.

Берилган Лейбниц алгебраси учун қуйидаги *ўнг аннулятор* ва *марказ* деб аталувчи идеалларни аниқлаймиз:

$$Ann_r(L) = \{x \in L \mid [y,x] = 0,\ \forall y \in L\},$$
$$Center(L) = \{x \in L \mid [x,y] = [y,x] = 0,\ \forall y \in L\}.$$

Лейбниц алгебрасининг марказида ётувчи идеалга алгебранинг *марказий идеали* дейилади.

Ихтиёрий $x, y \in L$ элементлар учун $d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)]$ муносабатни қаноатлантирувчи $d : L \to L$ чизиқли акслантиришга Лейбниц алгебрасининг *дифференциаллаши* дейилади. Лейбниц алгебрасининг барча дифференциаллашлар тўплами $\mathrm{Der}(L)$ коммутатор амалига нисбатан Ли алгебрасини ҳосил қилади, яъни,

$$[d,d'] = d \circ d' - d' \circ d,\ \forall d,d' \in \mathrm{Der}(L).$$

Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий x элементи учун R_x ўнгдан кўпайтириш оператори дифференциаллаш бўлиб, бундай дифференциаллашлар *ички дифференциаллашлар* деб аталади. Лейбниц алгебрасининг барча ички дифференциаллашлари тўпламини $\mathrm{InnDer}(L)$ орқали белгилаймиз. Ички бўлмаган дифференциаллашга эса *ташқи дифференциаллаш* дейилади.

2-таъриф. Агар L Лейбниц алгебрасида аниқланган d дифференциаллаш учун $d(L) \subseteq Center(L)$ шарт бажарилса, бундай дифференциаллашга марказий дифференциаллаш дейилади.

Лейбниц алгебрасининг барча марказий дифференциаллашлари тўплами $\mathrm{CDer}(L)$ орқали белгиланади. Таъкидлаш жоизки, $\mathrm{CDer}(L)$ тўплам $\mathrm{Der}(L)$ Ли алгебрасининг идеали бўлади.

3-таъриф. Маркази тривиал ва барча дифференциаллашлари ички бўлган Ли алгебрасига тўла алгебра дейилади.

1-мисол. a) Характеристикаси нолга тенг бўлган майдон устида берилган ярим содда Ли алгебралари тўладир.

b) Ўлчами 2 га тенг бўлган абел бўлмаган Ли алгебраси тўладир.

$$r_2 : [e_1,e_2] = -[e_2,e_1] = e_1.$$

4-таъриф. Тўла идеалга эга бўлмаган тўла Ли алгебрасига содда тўла алгебра дейилади.

Характеристикаси нолга тенг бўлган майдон устида берилган содда Ли алгебралари ва r_2 алгебралар содда тўла бўлади.

Тўла Лейбниц алгебраларининг таърифи Ли алгебраларига ўхшаш тарзда Ж.М.Анкочеа ва Р.Кампоамор-Стурсберглар томонидан киритилган.

5-таъриф. Маркази тривиал ва барча дифференциаллашлари ички бўлган Лейбниц алгебрасига тўла алгебра дейилади.

Энди содда тўла Лейбниц алгебраларининг таърифини киритамиз.

6-таъриф. Тўла идеалга эга бўлмаган L тўла Лейбниц алгебрасига содда тўла алгебра дейилади.

Ихтиёрий L Лейбниц алгебраси учун қуйи марказий ҳамда ҳосилавий қаторлар деб аталувчи қуйидаги идеаллар кетма-кетлигини аниқлаймиз:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1, \qquad L^{[1]} = L,\ L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}],\ k \geq 1.$$

7-таъриф. Агар L Лейбниц алгебраси учун шундай s натурал сон мавжуд бўлиб, $L^s = \{0\}$ (мос равишда, $L^{[m]} = \{0\}$) ўринли бўлса, у ҳолда L Лейбниц алгебрасига нильпотент (мос равишда, ечилувчан) алгебра дейилади. Шундай шартни қаноатлантирувчи энг кичик s сонга L алгебранинг нильпотентлик индекси дейилади.

Лейбниц алгебрасининг максимал нильпотент (мос равишда, ечилувчан) идеали алгебранинг нильрадикали (мос равишда, радикали) дейилади.

Кейинги таърифда характеристик кетма-кетлик тушунчасини келтирамиз. Нильпотент бўлган L Лейбниц алгебрасида $L\backslash L^2$ тўпламдан олинган ихтиёрий x элементи учун R_x чизиқли операторнинг Жордан катаклари ўлчамларини камайиш тартибида ёзишдан ҳосил бўлган $C(x)$ кетма-кетликни аниқлаймиз. Бундай кетма-кетликлар тўпламида лексикографик тартибни қараймиз.

8-таъриф. Қуйида берилган кетма-кетликка

$$C(L) = \max_{x \in L\backslash L^2} C(x)$$

L нильпотент Лейбниц алгебрасининг характеристик кетма-кетлиги дейилади.

9-таъриф. $C(L) = (n-p, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p})$ характеристик кетма-кетликка эга бўлган L Лейбниц алгебрасига p-филиформ Лейбниц алгебраси дейилади.

Агар p=0 бўлса, L Лейбниц алгебрасини *нол-филиформ*, p=1 бўлганда эса *филиформ* алгебра деб аталади. Ш.А. Аюпов ва Б.А. Омировлар томонидан ихтиёрий n-ўлчамли нол-филиформ Лейбниц алгебраси қуйидаги алгебрага изоморфлиги исботланган:

$$NF_n: \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Энди Лейбниц алгебралари учун соддалик ва ярим соддалик тушунчалари таърифларини келтирамиз.

Фақатгина $\{0\}$, I, L идеалларга эга бўлиб, $L^2 \neq I$ шартни қаноатлантирувчи L Лейбниц алгебрасига *содда* дейилади.

10-таъриф. Радикали I идеалдан иборат бўлган Лейбниц алгебрасига ярим содда алгебра дейилади.

2012 йилда Д. Барнс томонидан Лейбниц алгебралари учун Леви теоремаси исботланган бўлиб, ихтиёрий чекли ўлчамли комплекс Лейбниц алгебраси ечилувчан радикал ва ярим содда Ли алгебрасининг ярим тўғри йиғиндиси кўринишида ёйилиши кўрсатилган. Шунинг учун чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларни қуришда ечилувчан Лейбниц алгебралари муҳим аҳамиятга эга.

Биринчи бобнинг асосий мақсади беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларини тасниф қилишдан иборат. Маълумки, беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари нилрадикалининг ўлчами уч ёки тўртга тенг бўлади. А.Х.Худойбердиев ва бошқалар томонидан нильрадикали уч ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланганлиги учун биз нильрадикал тўрт ўлчамли бўлган ҳолатни қараймиз. Нильиндекси 5 ёки 4 га тенг бўлган алгебралар мос равишда нол-филиформ ёки филиформ Лейбниц алгебраси ҳисобланиб, И.А.Каримжанов ва бошқаларнинг ишларида нильрадикали нол-филиформ ёки филиформ алгебрадан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифлари берилган, шу билан бир қаторда Ж.К.Адашев томонидан нильрадикали абел алгебраси бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган. Шунинг учун биз нильрадикалнинг нильпотентлик индекси 3 га тенг бўлган ҳолни қараймиз.

Маълумки, нильпотентлик индекси 3 га тенг бўлган ихтиёрий тўрт ўлчамли нильпотент Ли алгебраси қуйидаги алгебрага изоморф бўлади:

$$\nu: \quad [e_1,e_2]=e_3, \quad [e_2,e_1]=-e_3.$$

Биз қуйидаги теоремада нильрадикали ν алгебрадан иборат бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифини берамиз.

1-теорема. Айтайлик, R нильрадикали ν алгебрадан иборат бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда R алгебра қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$R_1(\alpha,\beta,\sigma_3,\sigma_4):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=\alpha e_3+\beta e_4,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [x,x]=\sigma_3 e_3+\sigma_4 e_4,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=-e_2.\end{cases}$$

$$R_2(\beta,\sigma):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=e_4,\\ [e_1,x]=e_1+\beta e_4, & [x,e_1]=-e_1,\\ [e_2,x]=-e_2-e_4, & [x,e_2]=e_2,\\ & [x,x]=\sigma e_3.\end{cases}$$

$$R_3(\alpha,\sigma):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=e_4,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_2, & [x,x]=\sigma e_3,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=\alpha e_3.\end{cases}$$

$$R_4(\alpha,\beta,\sigma):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=-[x,e_4]=\alpha e_3+\beta e_4,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+\sigma e_4, & [x,x]=e_3,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=-e_2.\end{cases}$$

$$R_5(\alpha,\beta,\sigma):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_1,x]=e_2,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=\alpha e_3, & [x,e_1]=-e_2-\beta e_3,\\ [e_4,x]=-[x,e_4]=e_4, & [x,x]=\sigma e_3.\end{cases}$$

$$R_6(\alpha):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=\alpha e_3,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [x,e_4]=e_3,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=-e_2.\end{cases}$$

$$R_7(\beta):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=-[x,e_4]=e_4,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+\beta e_4, & [x,x]=e_3,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=-e_2-e_4.\end{cases}$$

$$R_8(\alpha,\beta,\gamma,\alpha_{4,4},\sigma):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_3,x]=-[x,e_3]=\alpha e_3,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+\beta e_4, & [e_4,x]=\alpha_{4,4}e_4,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=(\alpha-1)e_2+\gamma e_4, & [x,x]=\sigma e_4.\end{cases}$$

$$R_9(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_2,x]=\alpha e_4,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+\delta e_4, & [x,e_2]=\beta e_4,\\ [e_3,x]=-[x,e_3]=e_3, & [e_4,x]=\gamma e_4,\\ & [x,x]=\sigma e_4,\end{cases}$$

бу ерда алгебралар синфидаги параметрлар қуйидагича ўзгаради:

$R_1(\alpha,\beta,\sigma,\delta)$: $(0,0,0,1)$; $(1,0,0,0)$; $(1,0,0,1)$; $(0,\beta,0,0),\ \beta\neq 0$; $(0,\beta,1,0)$.

$R_2(\alpha,\beta)$: $(0,0)$; $(1,0)$; $(0,1)$; $(1,1)$.

$R_3(\alpha,\sigma)$: $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,\sigma)$.

$R_4(\alpha,\beta,\sigma)$: $(\alpha,0,0),\ \alpha\neq 0$; $(0,\beta,0),\ \beta\neq 0$.

$R_5(\alpha,\beta,\sigma)$: $(0,1,0)$; $(0,\beta,1)$; $(1,\beta,\sigma)$.

$R_6(\alpha)$: $\alpha\neq -1$.

$R_7(\beta)$: $\{0\}$; $\{1\}$.

$R_8(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma)$: $(2,1,0,0,1)$; $(2,1,0,\delta,0),\ \delta\neq 0$; $(\alpha,0,0,0,1),\ \alpha\neq\{0;1;2\}$; $(\alpha,0,0,\delta,0),\ \alpha\neq\{0;2\},\ \delta\neq 0$.

$R_9(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma)$: $(0,0,1,1,0)$; $(1,\beta,0,0,\sigma)$; $(\alpha,-\alpha,0,0,\sigma)$.

Биз қуйида нильиндекси 3 га тенг бўлган барча тўрт ўлчамли нильпотент Лейбниц алгебралар рўйхатини келтирамиз.

λ_1: $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_4$, $[e_2,e_2]=-e_3$;

$\lambda_2(\alpha)$: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_2,e_1]=-\alpha e_3$, $[e_2,e_2]=-e_4$;

λ_3: $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_2,e_1]=-e_4$, $[e_3,e_3]=e_4$;

λ_4: $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]=-e_3$, $[e_2,e_2]=-2e_3+e_4$;

$\mu_1(\alpha)$: $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=\alpha e_4$, $[e_2,e_1]=-\alpha e_4$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_3]=e_4$;

μ_2: $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_2,e_1]=-e_4$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$;

$$\mu_3: \quad [e_1,e_2]=e_3, \quad [e_2,e_1]=e_4;$$
$$\mu_4: \quad [e_1,e_1]=e_4, \quad [e_1,e_2]=e_3, \quad [e_2,e_1]=-e_3;$$
$$\mu_5: \quad [e_1,e_1]=e_3, \quad [e_1,e_2]=e_4;$$
$$\mu_6: \quad [e_1,e_2]=e_4, \quad [e_2,e_1]=-e_4, \quad [e_3,e_3]=e_4.$$
$$\mu_7(\alpha): \quad [e_1,e_2]=e_4, \quad [e_2,e_1]=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}e_4, \quad [e_2,e_2]=e_3, \quad \alpha\neq 1.$$

Навбатдаги тасдиқда нильрадикали λ_1, $\lambda_2(\alpha)$, λ_3, λ_4 алгебралардан бирига изоморф бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари билан боғлиқ натижани келтирамиз.

1-тасдиқ. Нильрадикали λ_1, $\lambda_2(\alpha)$, λ_3, λ_4 алгебралардан бирига изоморф бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраси мавжуд эмас.

2-теорема. Айтайлик, R нильрадикали $\mu_1(\alpha)$ алгебрага изоморф бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда R қуйидаги алгебрага изоморф бўлади:

$$I_1(\alpha):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_4, & [e_1,x]=e_1-\alpha e_2, & [x,e_1]=-e_1+\alpha e_2,\\ [e_1,e_2]=\alpha e_4, & [e_2,x]=\alpha e_1+e_2, & [x,e_2]=-\alpha e_1-e_2,\\ [e_2,e_1]=-\alpha e_4, & [e_3,x]=e_3, & [x,e_3]=-e_3,\\ [e_2,e_2]=e_4, & [e_4,x]=2e_4, & [e_3,e_3]=e_4.\end{cases}$$

Юқоридаги теоремага ўхшаш тарзда нильрадикали тўрт ўлчамли бўлган барча беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифи олинган:

- нильрадикали μ_2 алгебрага изоморф бўлган битта беш ўлчамли ечилувчан алгебра мавжуд;
- нильрадикали μ_3 бўлган иккита алгебра мавжуд;
- нильрадикали μ_4 бўлган тўртта алгебра мавжуд;
- нильрадикали μ_5 бўлган иккита алгебра мавжуд;
- нильрадикали μ_6 бўлган учта алгебра мавжуд;

Диссертациянинг **“Баъзи Лейбниц алгебраларининг ташқи, нильпотент ва марказий дифференциаллашлари”** деб номланган иккинчи боби Лейбниц алгебралари дифференциаллашлар алгебрасининг нильпотентлигини, ташқи ва марказий дифференциаллашларини ўрганишга бағишланган. Биз ушбу бобда ажраладиган Лейбниц алгебраларининг дифференциаллашларини қараймиз ҳамда ташқи дифференциаллашлар мавжудлигидан баъзи тўла бўлмаган Лейбниц алгебраларни ҳосил қиламиз. Лейбниц алгебраларининг марказий дифференциаллашлар тўплами билан ички дифференциаллашлар тўпламини таққослаш орқали Лейбниц алгебраларининг хоссаларини аниқлаймиз.

3-теорема. Айтайлик, L Лейбниц алгебраси A идеал ва M қисм алгебраларнинг йиғиндиси кўринишида $L=M+A$ каби тасвирланган бўлсин. Агар A идеал учун $A^2=\{0\}$ ва $A\neq[A, Ann_r(M)]$ шартлар ўринли бўлса, у ҳолда L Лейбниц алгебраси ташқи дифференциаллашга эга бўлади.

Энди характеристик нильпотент Лейбниц алгебралар тушунчасини келтирамиз.

11-таъриф. Барча дифференциаллашлари нильпотент бўлган Лейбниц алгебрасига характеристик нильпотент алгебра дейилади.

2-тасдиқ. Агар L характеристик нильпотент Лейбниц алгебраси бўлса, у ҳолда қуйидаги муносабатлар ўринли:

(1) L алгебранинг маркази L^2 қисм алгебрада ётади;

(2) $L^3 \neq \{0\}$.

4-теорема. L нильпотент Лейбниц алгебраси бўлсин. Агар L иккита идеалларнинг тўғри йиғиндиси кўринишида ифодаланган ҳамда идеалларидан бири марказий идеал бўлса, у ҳолда $\mathrm{Der}(L)$ алгебра нильпотент бўлмайди.

5-теорема. L Лейбниц алгебраси бўлсин. Агар L алгебранинг маркази L^2 қисм алгебрада ётмаса, у ҳолда $\mathrm{Der}(L)$ алгебра нильпотент бўлмайди.

Энди биз Лейбниц алгебраларининг ҳам ички, ҳам марказий бўлган дифференциаллашларини ўрганамиз, бундай дифференциаллашлар учун қуйидаги тасдиқни келтирамиз.

3-тасдиқ. L Лейбниц алгебраси бўлсин. Агар R ва R_1 мос равишда L ҳамда L^2 алгебраларнинг радикаллари бўлса, у ҳолда қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$\mathrm{InnDer}(L) \cap \mathrm{CDer}(L) = \mathrm{InnDer}(Z_1)$, бу ерда $Z_1 = \{l \in L \,|\, [L,l] \subseteq Center(L)\}$.

$\mathrm{InnDer}(L) \cap \mathrm{CDer}(L) \subset \mathrm{InnDer}(Z_2)$, бу ерда $Z_2 = \{r \in R \,|\, [R_1,r] = 0\}$.

Ихтиёрий абел бўлмаган нильпотент Ли алгебраси учун $\mathrm{InnDer}(L) \cap \mathrm{CDer}(L) \neq \{0\}$ шарт ўринли бўлиб, Лейбниц алгебраларида эса бу шарт ҳар доим ҳам ўринли бўлавермайди.

6-теорема. Айтайлик, радикали R ва $\mathrm{CDer}(L) \subset \mathrm{InnDer}(L)$ шартни қаноатлантирувчи L Лейбниц алгебраси берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

(1) Агар R радикал абел алгебраси бўлса, у ҳолда $Center(L)=\{0\}$ ёки $L=L^2$ тенгликлардан бири бажарилади.

(2) Агар $Center(L)\neq\{0\}$ ва $\mathrm{CDer}(L)\neq\{0\}$ бўлса, у ҳолда R радикал абел алгебраси бўлмайди.

7-теорема. L Лейбниц алгебраси бўлсин. Ушбу алгебра учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

(1) $\mathrm{InnDer}(L) \subset \mathrm{CDer}(L) \Leftrightarrow L^3 = \{0\}$.

(2) Агар $Center(L)\neq\{0\}$ ва $\mathrm{InnDer}(L)=\mathrm{CDer}(L)$ бўлса, у ҳолда $L^2=Center(L)$ ва $\dim Center(L)=1$ тенгликлар бажарилади.

(3) $\mathrm{Der}(L)=\mathrm{CDer}(L) \Leftrightarrow L$ – абел алгебра.

Диссертациянинг “**Тўла идеалга эга бўлган Лейбниц алгебралари**” деб номланган 3-боби тўла Лейбниц алгебраларига бағишланган. Биз ушбу бобда радикали тўла алгебрадан иборат бўлган баъзи тўла Лейбниц алгебраларини қурамиз ҳамда тўла Лейбниц алгебраларининг тўғри йиғиндиси тўла бўлишини исботлаймиз. Ли алгебралар назариясидан маълумки, тўла идеалга эга бўлган Ли алгебраси ажраладиган бўлади. Биз ушбу натижани Лейбниц алгебралари учун муҳокама қилиб, Лейбниц

алгебраларининг баъзи синфлари учун бу натижа ўринли эканини кўрсатамиз.

8-теорема. L Лейбниц алгебраси иккита идеалларнинг тўғри йиғиндиси кўринишида тасвирланган бўлсин, яъни,

$$L = L_1 \oplus L_2.$$

У ҳолда

1) $Center(L)$ қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Center(L) = Center(L_1) \oplus Center(L_2).$$

2) Агар $Center(L)=\{0\}$ шарт ўринли бўлса, у ҳолда қуйидаги муносабат бажарилади:

$$\mathrm{InnDer}(L) = \mathrm{InnDer}(L_1) \oplus \mathrm{InnDer}(L_2),$$

$$\mathrm{Der}(L) = \mathrm{Der}(L_1) \oplus \mathrm{Der}(L_2).$$

3) L алгебра тўла бўлиши учун L_1 ва L_2 алгебраларининг тўла бўлиши зарур ва етарлидир.

Тўла Лейбниц алгебралари учун қуйидаги гипотезани келтирамиз.

Гипотеза. Агар L Лейбниц алгебраси R тўла идеалга эга бўлса, у ҳолда шундай S идеал мавжудки, $L = R \oplus S$ муносабат ўринли бўлади.

Айтайлик, R нильрадикали NF_n нол-филиформ алгебрадан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлсин. И.А. Каримжанов томонидан ушбу R алгебрада кўпайтмалар жадвали қуйидаги кўринишга эга бўладиган $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, x\}$ базис мавжудлиги исботланган:

$$R(NF_n): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_i, x] = ie_i, & 1 \le i \le n. \end{cases}$$

Анкочеа ва бошқалар томонидан эса $R(NF_n)$ ечилувчан Лейбниц алгебраси тўла эканлиги кўрсатилган.

Кейинги теоремада $L = R(NF_n) + \mathfrak{sl}_2$ кўринишга эга бўлган L Лейбниц алгебралари идеалларнинг тўғри йиғиндисига ёйилиши келтирилган. Бунинг маъноси шундан иборатки, ярим содда қисми $\mathfrak{sl}_2$ алгебра ҳамда тўла идеали $R(NF_n)$ ечилувчан алгебралардан иборат бўлган L Лейбниц алгебралари учун юқоридаги гипотеза бажарилади.

9-теорема. Айтайлик, L Лейбниц алгебраси $L = R + \mathfrak{sl}_2$ кўринишдаги ёйилмага эга бўлсин. Агар R – нильрадикали NF_n нол-филиформ алгебрадан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлса, у ҳолда $L = R \oplus \mathfrak{sl}_2$ ўринли бўлади.

Характеристик кетма-кетлиги $(m_1, \ldots, m_s)$ ва кўпайтмалар жадвали қуйидагича бўлган нильпотент алгебрани қараймиз:

$$[e_i^t, e_1^1] = e_{i+1}^t, \quad 1 \le t \le s, \ 1 \le i \le m_t - 1.$$

Ушбу алгебра одатда $N_{m_1,\ldots,m_s}$ кўринишда белгиланади. Ў.Х. Мамадалиев ва Б.А. Омировларнинг ишларида нильрадикали $N_{m_1,\ldots,m_s}$ алгебра ҳамда нильрадикалнинг ко-ўлчами s га тенг бўлган ечилувчан Лейбниц

алгебрасининг қуйидагича таснифи олинган:

$$R(N_{m_1,\dots,m_s},s):\begin{cases}[e_i^t,e_1^1]=e_{i+1}^t, & 1\le t\le s,\ 1\le i\le m_t-1,\\ [e_i^1,x_1]=ie_i^1, & 1\le i\le m_1,\\ [e_i^t,x_1]=(i-1)e_i^t, & 2\le t\le s,\ 2\le i\le m_t,\\ [e_i^t,x_t]=e_i^t, & 2\le t\le s,\ 1\le i\le m_t,\\ [x_1,e_1^1]=-e_1^1, & \end{cases}$$

бу ерда $\{x_1,\dots x_s\}$ – нильрадикалнинг тўлдирувчи қисм фазосининг базиси.

Бундан ташқари, улар томонидан $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ ечилувчан Лейбниц алгебраси тўла эканлиги исботланган.

10-теорема. Айтайлик, L Лейбниц алгебраси $L=R+\mathfrak{sl}_2$ кўринишдаги ёйилмага эга бўлсин. Агар R ечилувчан идеал $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ алгебрадан иборат бўлса, у ҳолда $L=R\oplus\mathfrak{sl}_2$ ўринли бўлади, яъни L идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ёйилади.

Бизга $R=N\oplus Q$ кўринишда тасвирланган ечилувчан Лейбниц алгебраси берилган бўлиб, ушбу $\dim Q=\dim N/N^2=k$ шарт ўринли бўлсин. Қ.К.Абдурасулов томонидан ушбу R алгебра учун шундай $\{e_1,e_2,\dots,e_n,x_1,x_2,\dots,x_k\}$ базис мавжуд бўлиб, ундаги кўпайтмалар жадвали қуйидаги кўринишда бўлиши кўрсатилган:

$$\begin{cases}[e_i,e_j]=\sum\limits_{t=k+1}^{n}c_{i,j}^te_t, & 1\le i,j\le n,\\ [e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k,\\ [x_i,e_i]=(b_i-1)e_i, & b_i\in\{0,1\},\quad 1\le i\le k,\\ [e_i,x_j]=a_{i,j}e_i, & k+1\le i\le n,1\le j\le k,\\ [x_j,e_i]=\sum\limits_{t=1}^{q}b_{j,i}^{i_t}e_{i_t}, & k+1\le i\le n,1\le j\le k,\end{cases}$$

бу ерда $a_{i,j}$ сони e_i, $i=k+1,...,n$ элементнинг ҳосил бўлишидаги e_j, $j=1,...,k$ элементнинг неча маротаба иштирок этишини билдиради.

Шунингдек, Қ.К.Абдурасулов томонидан $\dim Q=\dim N/N^2$ шартни қаноатлантирувчи $R=N\oplus Q$ кўринишда тасвирланган ечилувчан Лейбниц алгебраси тўла эканлиги ҳам исботланган.

Кейинги теоремада ярим содда қисми $\mathfrak{sl}_2$ алгебра ҳамда радикали $R=N\oplus Q$ кўринишга эга бўлган $\dim Q=\dim N/N^2$ шартни қаноатлантирувчи ечилувчан алгебрасидан иборат бўлган L Лейбниц алгебраси учун юқоридаги гипотеза бажарилиши келтирилган.

11-теорема. Айтайлик, L Лейбниц алгебраси $L=R+\mathfrak{sl}_2$ кўринишдаги ёйилмага эга бўлсин. Агар $R=N\oplus Q$ – ечилувчан Лейбниц алгебраси учун $\dim Q=\dim N/N^2$ шарт ўринли бўлса, у ҳолда $L=R\oplus\mathfrak{sl}_2$ ўринли бўлади, яъни L идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ёйилади.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация тўла идеалга эга бўлган чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларини таснифлашга ҳамда Лейбниц алгебраларининг марказий ва нильпотент дифференциаллашларини топишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Нильрадикали тўрт ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган;
2. Маркази ҳосилавий қисм алгебрада ётмайдиган Лейбниц алгебраси учун дифференциаллаш алгебрасининг нильпотент бўлмаслиги ҳамда бундай Лейбниц алгебраси ташқи дифференциаллашга эгалиги исботланган;
3. Лейбниц алгебралари учун бир вақтда марказий ва ички бўладиган дифференциаллашлар кўриниши топилган;
4. Нотривиал марказга эга бўлган Лейбниц алгебрасида марказий дифференциаллашлар тўплами ички дифференциаллашлар тўплами билан устма-уст тушиши учун Лейбниц алгебраси метабел алгебра бўлиши зарур ва етарли шарт эканлиги исботланган;
5. $\mathfrak{sl}_2$ алгебра ва нильрадикали ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга бўлган ечилувчан идеалнинг ярим тўғри йиғиндисидан иборат бўлган Лейбниц алгебраси идеалларнинг тўғри йиғиндиси кўринишида тасвирланиши исботланган;
6. Ечилувчан идеали нильрадикалининг максимал кенгайтмасидан иборат бўлган Лейбниц алгебраси ажраладиган эканлиги исботланган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

SHERMATOVA ZARINA KHAKIM QIZI

CLASSIFICATION OF FIVE-DIMENSIONAL SOLVABLE LEIBNIZ ALGEBRAS AND CERTAIN COMPLETE LEIBNIZ ALGEBRAS

01.01.06-Algebra

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.4.PhD/FM443.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Ayupov Shavkat Abdullayevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician
Official opponents:	**Kudaybergenov Karim Kadirbergenovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professeor
	Karimjanov Iqboljon Abdulazizovich Doctor of Philosophy (PhD) physical and mathematical sciences
Leading organization:	**National University of Uzbekistan**

Defense will take place "29" March 2022 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered №132). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «11» March 2022 year
(Mailing report № 2 on «11» March 2022 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

B.A.Omirov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD dissertation)

Actuality and demand of the theme of the dissertation. In the world, as well as theoretical physics, many objects of mathematics are studied through non-associative algebraic methods. In particular, Lie and Jordan algebras arose as a tool of quantum mechanics. On the other hand, Lie algebras, being non-associative, reflect the essential properties of Lie groups. At the beginning of the development of the theory of Lie algebras, the theory developed exclusively as an application of Lie groups, later it acquired an independent character. Many concepts and properties that exist in Lie groups were also determined for Lie algebras, and then they were extended to a number of generalizations of Lie algebras. Problems of defining the completeness of Leibniz algebras, which are one of the important generalizations of Lie algebras, finding their inner and outer derivations and classification of Leibniz algebras have become one of the actual and important tasks of modern algebra.

At the moment, since varieties of Leibniz algebras have some classes including all complete Lie algebras, it is necessary to take into account several factors to defining the concept of complete Leibniz algebras. Therefore, some scientists used different approaches to introduce the notion of complete Leibniz algebras, and later it was accepted that a Leibniz algebra is called complete if its center is trivial and all derivations are inner, as in Lie algebras. Such algebras are also important from a cohomological point of view and many complete Leibniz algebras belong to the class of cohomologically rigid algebras. In this regard, the main problems are: to classify complete Leibniz algebras, to show that Leibniz algebra with complete ideal is split, to prove that the given algebras have outer derivations, to describe Leibniz algebras.

In our country much attention has been paid to mathematics, physics, geology and biological sciences, which have scientific and practical applications of fundamental sciences. In particular, special attention was paid to the development of fundamental research on non-associative algebras. Within the frame of this fundamental research, significant results have been obtained in the study of complete Leibniz algebras. Conducting research[2] at the level of international standards on the priority areas “Algebra and Functional Analysis” is the main task and direction of activity of mathematics. To ensure the implementation of the task, it is important to develop the theory of complete Leibniz algebras for the application of scientific results in the relevant field of science.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees of the President of the Republic of Uzbekistan UP-4947 of February 7, 2017 “On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan”, UP-2789 dated February 17, 2017 “On measures to further improvement of the activities of the Academy of Sciences, organization,

[2] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017 year 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

management and financing of research activities", PP-3682 from April 27, 2018 "On measures to further improve the system of practical implementation of innovative ideas, technologies and projects" and PP-4387 from July 9, 2019 "On measures to further development of mathematical education and science, and also root improvement of the activity of the Uzbekistan Academy of Sciences V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics", as well as in other regulations related to basic science.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, Mathematics, Mechanics and Computer Science .

The degree of scrutiny of the problem. Lie algebras, which all derivations are inner and the center is zero, appeared in M.Goto's work, although at that time, there were few algebras of this kind, therefore, their meaning could not be understood very well. The first important result on complete Lie algebras was given in the context of E.Schenkman's theory of subinvariant Lie algebras. The term of "complete Lie algebras" was firstly used by N.Jacobson, it was proved that arbitrary Lie algebra with a complete ideal is split. In recent years, various authors have focused on the classification and structural properties of complete Lie algebras. D.J.Meng has proved that any finite-dimensional complete Lie algebra can be decomposed into the direct sum of simple complete ideals, and such a decomposition is unique up to the order of the ideals. Also, Y.C.Gao and D.J.Meng first gave a necessary and sufficient condition for some solvable Lie algebras with l-step nilradicals to be complete and a method for constructing non-solvable complete Lie algebras.

By analogy with Lie algebras, the definition of complete Leibniz algebras was introduced by J.M.Ancochea and R.Campoamor-Stursberg. Authors proved the completeness of the solvable Leibniz algebra with the null-filiform nilradical. Later J.K.Adashev and others showed that solvable Leibniz algebra with the nilradical being naturally graded p-filiform Leibniz algebra of maximal codimension is complete. Moreover, B.A.Omirov and U.X.Mamadaliyev classified complete solvable Leibniz algebras with the nilradical of an arbitrary characteristic sequence. Also, K.K.Abdurasulov proved the completeness of a solvable Leibniz algebra with the nilradical of codimension equals the number of generators of the nilradical.

In the structural theory of Leibniz algebras, one of the main problems is the classification of arbitrary classes up to isomorphism. Low-dimensional Leibniz algebras were classified by J.-L.Loday, B.A.Omirov, J.M.Casas and others. Classification of four-dimensional solvable Leibniz algebras was obtained by A.Kh.Khudoyberdiyev and E.M.Canete. It should be noted that the dimension of the nilradical of five-dimensional solvable Leibniz algebras is three or four. A description of a five-dimensional solvable Leibniz algebra with the three-dimensional nilradical has been given by A.Kh.Khudoyberdiyev, I.S.Rakhimov and Sh.K.Said Husain.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The dissertation work is carried out in accordance with the given topic of scientific research OT-F4-82 + OT-F4-87 «Local derivations and automorphisms of operator and nonassociative algebras, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems» + «The theory of global invariants of curves and surfaces in Euclidean and pseudo-Euclidean spaces and its applications in mechanics» at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (2017-2019).

The aim of research work is to determine the structure of low-dimensional solvable Leibniz algebras and finite-dimensional Leibniz algebras with a complete ideal and to find central and nilpotent derivations of Leibniz algebras.

Research problems:

to classify five-dimensional solvable Leibniz algebras with the four-dimensional nilradical;

to find the properties of nilpotency of derivation algebras, central and outer derivations of finite-dimensional Leibniz algebras;

to construct Leibniz algebras with the complete radical.

The research object: Finite-dimensional Leibniz algebras, solvable Leibniz algebras, derivations algebras of Leibniz algebras.

The research subject: Structural theory of finite-dimensional Leibniz algebras, the theory of solvable and nilpotent Leibniz algebras.

Research methods: In the dissertation the methods of structural constants, classification methods, inductive method, as well as the methods of invariant theory are applied.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

five-dimensional solvable Leibniz algebras with the four-dimensional nilradical is classified;

the forms of the derivations of Leibniz algebras which are both inner and central are found and it is proved that the set of all central derivations of a Leibniz algebra with non-trivial center coincide with the set of all inner derivations if and only if the Leibniz algebra is metabelian;

it is proved that if a Leibniz algebra L whose its complete ideal is a solvable algebra with the nilradical of an arbitrary characteristic sequence, then L is split;

it is proved that if L is a Leibniz algebra whose its radical is the maximal extension of the nilradical, then L is the direct sum of ideals.

Practical results of the research. The obtained results and used methods in the dissertation can be taught as a graduate course for masters and PhD students of higher education institutions. In addition, the results of the dissertation concerning the structure of Leibniz algebras with some complete radicals allow to verify hypothesis about Leibniz algebras with an arbitrary complete ideal.

The reliability of the results of the study. Our results have been obtained by using derivation theory, the known methods of investigation of other classes of algebras, fundamental results of the theory of algebras. The proofs of obtained results are mathematically correct.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the results is explained by the fact that the obtained results in the work can be used for further research of varieties of other algebras. In particular, the techniques and methods developed in this dissertation can be used to solve the proposition on an arbitrary Leibniz algebra with a complete ideal to be split.

The practical significance of the research results is explained by the fact that they allow to create hypotheses about the description and properties of complete Leibniz algebras.

Implementation of the research results. The results were used in the following scientific studies:

the results on the classification of five-dimensional solvable Leibniz algebras with the four-dimensional nilradical were used to describe solvable Leibniz algebras with quasi-filiform nilradical in the project “Non-commutative modules, Leibniz algebras and polynomial cascades on simplexes”, No. OT-F4-31 (Reference from National University of Uzbekistan dated January 17, 2022, № 04/11-229). The scientific results allowed to classify low-dimensional solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform algebra;

obtained results which were in the dissertation about outer derivations of finite-dimensional Leibniz algebras were used in the project OT-4-27 “Description of predual spaces of Jordan triples, spaces of capacities and holomorphic continuation of functions” (Reference from Karakalpak State University dated January 17, 2022, № 01-21-04/56). The application of the scientific result allowed to describe almost inner derivations of finite-dimensional filiform Leibniz algebras.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 4 international and 4 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation, 14 scientific papers were published, 6 of which are included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of thesis of the Doctor of Philosophy, including 2 of them published in international journals and 4 in national scientific journals and 8 abstracts.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of the introduction, three chapters with conclusions, general conclusion and bibliography. The total volume of the work is 86 pages.

MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In **introduction** the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic are given, we present degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we give the theoretical and practical importance of the obtained results, and also give information on the implementation of the research results, the published works and the structure of dissertation.

In the first chapter of the dissertation, titled "**Solvable five-dimensional Leibniz algebras with the four-dimensional nilradical**", we introduced necessary basic notions and concepts of Leibniz algebras which are used in dissertation and have given the classification of 5-dimensional solvable complex Leibniz algebras with 4-dimensional Lie and non-Lie nilradical.

Definition 1. A Leibniz algebra L is a vector space over $\mathbb{F}$ equipped with a bilinear map (multiplication) satisfying the Leibniz identity

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y]$$

for all $x,y,z\in L.$

From now on Leibniz algebras L will be considered over the field of complex numbers and with finite-dimension.

For a Leibniz algebra L, the subspace of squares of the elements $I=\mathrm{span}\{[x,x]\,|\,x\in L\}$ becomes an ideal due to the Leibniz identity. Then I is the minimal ideal with respect to the property that L/I is a Lie algebra.

For a given Leibniz algebra L we define the following two-sided ideals

$$Ann_r(L)=\{x\in L\,|\,[y,x]=0, \text{for all } y\in L\},$$
$$Center(L)=\{x\in L\,|\,[x,y]=[y,x]=0, \text{for all } y\in L\}$$

called the *right annihilator* and the *center* of L, respectively.

An ideal of a Leibniz algebra is called a *central ideal* if it is contained in the center of the Leibniz algebra.

A linear map $d:L\to L$ of a Leibniz algebra L is said to be a *derivation* if for all $x,y\in L,$ the following condition holds:

$$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)].$$

The set of all derivations of L (denoted by $\mathrm{Der}(L)$) forms a Lie algebra with respect to the commutator $[d,d']=d\circ d'-d'\circ d$ for $d,d'\in Der(L)$.

Note that the operator of right multiplication by an element $x\in L$ (further denoted by R_x) is a derivation, which is called an *inner derivation*. Derivations which are not inner are called *outer derivations*. The set $\mathrm{InnDer}(L)=\{R_x : x\in L\}$ inherits the Lie algebra structure from $\mathrm{Der}(L)$.

Definition 2. A derivation d of a Leibniz algebra L is called central if $d(L)\subseteq C(L).$

We denote by $\mathrm{CDer}(L)$ the set of all central derivations of L. It should be noted that $\mathrm{CDer}(L)$ is an ideal of $\mathrm{Der}(L)$.

Definition 3. A Lie algebra $\mathfrak{g}$ is called *complete* if $Center(\mathfrak{g})=\{0\}$ and all derivations of $\mathfrak{g}$ are inner.

Example 1. a) Semisimple Lie algebras over a field of characteristic 0 are complete.

b) The (unique) non-abelian Lie algebra of dimension 2 is complete.

$$r_2:[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_1.$$

Definition 4. A complete Lie algebra $\mathfrak{g}$ is called a simple complete, if any non-trivial ideal of $\mathfrak{g}$ is not complete.

Obviously, a simple Lie algebra over the field of characteristic 0 and the

algebra r_2 are simple complete Lie algebras.

By analogy with Lie algebras, now we give the definition of a complete Leibniz algebra that was first introduced by J.M.Ancochea and R.Campoamor-Stursberg.

Definition 5. A Leibniz algebra L is called *complete* if $Center(L)=\{0\}$ and all derivations of L are inner.

Now we introduce the notion of a simple complete Leibniz algebra.

Definition 6. A complete Leibniz algebra L is called a simple complete Leibniz algebra, if any non-trivial ideal of L is not complete.

We define the following sequences:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1, \qquad L^{[1]} = L,\ L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}],\ k \geq 1,$$

so-called *the lower central* and *the derived series* of L, respectively.

Definition 7. A Leibniz algebra L is called nilpotent (respectively, solvable), if there exists $s \in \mathbb{N}$ ($m \in \mathbb{N}$) such that $L^s = \{0\}$ (respectively, $L^{[m]} = \{0\}$). The minimal number s with such property is called the index of nilpotency of L.

The maximal nilpotent (respectively, solvable) ideal of a Leibniz algebra is said to be the *nilradical* (respectively, *radical*) of the algebra.

The next we give the notion of characteristic sequence. For a finite-dimensional nilpotent Leibniz algebra L and for the matrix of the linear operator R_x, denote by $C(x)$ the descending sequence of its Jordan blocks' dimensions with an arbitrary element from the set $L\backslash L^2$. Consider the lexicographical order on the set of such sequences.

Definition 8. The sequence

$$C(L) = \max_{x \in L\backslash L^2} C(x)$$

is said to be the characteristic sequence of the nilpotent Leibniz algebra L.

Definition 9. An n-dimensional Leibniz algebra L is called a p-filiform if the characteristic sequence is $C(L)= (n-p, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p})$.

Note that in the case of p=0, we say that L is null-filiform, and 1-filiform algebras we call just filiform. Sh.A. Ayupov and B.A. Omirov proved that an arbitrary n-dimensional null-filiform Leibniz algebra has a basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ such that the multiplication in the algebra has the form:

$$NF_n: \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

where the omitted products are equal to zero.

A Leibniz algebra L is called *simple* if it has only ideals are $\{0\}$, I, L and $L^2 \neq I$.

Definition 10. A Leibniz algebra L is called semisimple if its radical is equal to I.

In 2012 the analogue of Levi's theorem for Leibniz algebras has been proven by D.Barnes. He showed that any finite-dimensional complex Leibniz algebra is decomposed into a semidirect sum of the solvable radical and a semisimple Lie algebra. Therefore, the classification of solvable Leibniz algebras is important to construct finite-dimensional Leibniz algebras.

The focus of the first chapter is classification of five-dimensional solvable

Leibniz algebras. Let R be a five-dimensional solvable Leibniz algebra. Then it can be written in the form $R=N+Q$, where N is the nilradical and Q is the complementary subspace, we get $\dim N \geq 3$. Since the description of five-dimensional solvable Leibniz algebras with three-dimensional nilradical has been given in the A.Kh.Khudoyberdiyev's work, we consider the case of four-dimensional nilradical. If the index of nilpotency of the nilradical N equals 5 or 4, then N is the null-filiform or filiform algebra, respectively. Since solvable Leibniz algebras with null-filiform or filiform nilradicals were classified by I.A.Karimjanov and others, moreover, the classification solvable Leibniz algebras with abelian nilradicals is obtained by J.K.Adashev, we consider the case of index of nilpotency of the nilradical equals 3.

It is known that an arbitrary four-dimensional nilpotent Lie algebra with the index of nilpotency 3, is isomorphic to following algebra:

$$\nu: \quad [e_1,e_2]=e_3, \quad [e_2,e_1]=-e_3.$$

In the following theorem we give the description of the five-dimensional solvable Leibniz algebras with nilradical ν.

Theorem 1. Let R be five-dimensional non-Lie solvable Leibniz algebra with four-dimensional nilradical ν. Then R is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$R_1(\alpha,\beta,\sigma_3,\sigma_4): \begin{cases} [e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=\alpha e_3+\beta e_4, \\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [x,x]=\sigma_3 e_3+\sigma_4 e_4. \\ [e_2,x]=-[x,e_2]=-e_2, & \end{cases}$$

$$R_2(\beta,\sigma): \begin{cases} [e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=e_4, \\ [e_1,x]=e_1+\beta e_4, & [x,e_1]=-e_1, \\ [e_2,x]=-e_2-e_4, & [x,e_2]=e_2, \\ & [x,x]=\sigma e_3. \end{cases}$$

$$R_3(\alpha,\sigma): \begin{cases} [e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=e_4, \\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_2, & [x,x]=\sigma e_3. \\ [e_2,x]=-[x,e_2]=\alpha e_3, & \end{cases}$$

$$R_4(\alpha,\beta,\sigma): \begin{cases} [e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=-[x,e_4]=\alpha e_3+\beta e_4, \\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+\sigma e_4, & [x,x]=e_3. \\ [e_2,x]=-[x,e_2]=-e_2, & \end{cases}$$

$$R_5(\alpha,\beta,\sigma): \begin{cases} [e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_1,x]=e_2, \\ [e_2,x]=-[x,e_2]=\alpha e_3, & [x,e_1]=-e_2-\beta e_3, \\ [e_4,x]=-[x,e_4]=e_4, & [x,x]=\sigma e_3. \end{cases}$$

$$R_6(\alpha): \begin{cases} [e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=\alpha e_3, \\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1, & [x,e_4]=e_3. \\ [e_2,x]=-[x,e_2]=-e_2, & \end{cases}$$

$$R_7(\beta):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_4,x]=-[x,e_4]=e_4,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+\beta e_4, & [x,x]=e_3.\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=-e_2-e_4,\end{cases}$$

$$R_8(\alpha,\beta,\gamma,\alpha_{4,4},\sigma):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_3,x]=-[x,e_3]=\alpha e_3,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+\beta e_4, & [e_4,x]=\alpha_{4,4}e_4,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=(\alpha-1)e_2+\gamma e_4, & [x,x]=\sigma e_4.\end{cases}$$

$$R_9(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=e_3, & [e_2,x]=\alpha e_4,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1+\delta e_4, & [x,e_2]=\beta e_4,\\ [e_3,x]=-[x,e_3]=e_3, & [e_4,x]=\gamma e_4,\\ & [x,x]=\sigma e_4,\end{cases}$$

where the parameters in these families of algebras are follows:

$R_1(\alpha,\beta,\sigma,\delta)$: $(0,0,0,1)$; $(1,0,0,0)$; $(1,0,0,1)$; $(0,\beta,0,0)$, $\beta\neq 0$; $(0,\beta,1,0)$.

$R_2(\alpha,\beta)$: $(0,0)$; $(1,0)$; $(0,1)$; $(1,1)$.

$R_3(\alpha,\sigma)$: $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,\sigma)$.

$R_4(\alpha,\beta,\sigma)$: $(\alpha,0,0)$, $\alpha\neq 0$; $(0,\beta,0)$, $\beta\neq 0$.

$R_5(\alpha,\beta,\sigma)$: $(0,1,0)$; $(0,\beta,1)$; $(1,\beta,\sigma)$.

$R_6(\alpha)$: $\alpha\neq -1$.

$R_7(\beta)$: $\{0\}$; $\{1\}$.

$R_8(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma)$: $(2,1,0,0,1)$; $(2,1,0,\delta,0)$, $\delta\neq 0$; $(\alpha,0,0,0,1)$, $\alpha\neq\{0;1;2\}$; $(\alpha,0,0,\delta,0)$, $\alpha\neq\{0;2\}$, $\delta\neq 0$.

$R_9(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma)$: $(0,0,1,1,0)$; $(1,\beta,0,0,\sigma)$; $(\alpha,-\alpha,0,0,\sigma)$.

Below we present the list of all four-dimensional non-Lie nilpotent Leibniz algebras with the index of nilpotency equal to 3.

λ_1: $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_4$, $[e_2,e_2]=-e_3$;

$\lambda_2(\alpha)$: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_2,e_1]=-\alpha e_3$, $[e_2,e_2]=-e_4$;

λ_3: $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_2,e_1]=-e_4$, $[e_3,e_3]=e_4$;

λ_4: $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]=-e_3$, $[e_2,e_2]=-2e_3+e_4$;

$\mu_1(\alpha)$: $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=\alpha e_4$, $[e_2,e_1]=-\alpha e_4$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_3]=e_4$;

μ_2: $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_1,e_3]=e_4$, $[e_2,e_1]=-e_4$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$;

μ_3: $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_4$;

μ_4: $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]=-e_3$;

$$\mu_5: \quad [e_1,e_1]=e_3, \quad [e_1,e_2]=e_4;$$
$$\mu_6: \quad [e_1,e_2]=e_4, \quad [e_2,e_1]=-e_4, \quad [e_3,e_3]=e_4.$$
$$\mu_7(\alpha): \quad [e_1,e_2]=e_4, \quad [e_2,e_1]=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}e_4, \quad [e_2,e_2]=e_3, \quad \alpha\neq 1.$$

In the next proposition we point out the five-dimensional solvable Leibniz algebra with the nilradical $\lambda_1,\ \lambda_2(\alpha),\ \lambda_3,\ \lambda_4$.

Proposition 1. Five-dimensional solvable Leibniz algebras with the four-dimensional nilradicals $\lambda_1,\ \lambda_2(\alpha),\ \lambda_3,\ \lambda_4$ do not exist.

Theorem 2. Let R be a five-dimensional solvable Leibniz algebra with the nilradical $\mu_1(\alpha)$. Then R is isomorphic to the following algebra:

$$I_1(\alpha):\begin{cases}[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=\alpha e_4, & [e_1,e_1]=e_4,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1-\alpha e_2, & [e_2,e_2]=e_4,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=\alpha e_1+e_2, & [e_3,e_3]=e_4,\\ [e_3,x]=-[x,e_3]=e_3, & [e_4,x]=2e_4.\end{cases}$$

Similarly, we obtain the description of five-dimensional solvable Leibniz algebras with the following four-dimensional nilradicals:

- There exist one five-dimensional solvable Leibniz algebra with nilradical μ_2.
- There exist two algebras with nilradical μ_3.
- There exist four algebras with nilradical μ_4.
- There exist two algebras with nilradical μ_5.
- There exist three algebras with nilradical μ_6.

The second chapter, titled "**Outer, nilpotent and central derivations of some Leibniz algebras**" is devoted to investigate nilpotency of derivation algebras, central and outer derivations of Leibniz algebras. In this chapter we consider derivation of split Leibniz algebras and present some classes of Leibniz algebras which are not complete, since they admit outer derivation. We determine the properties of Leibniz algebras by comparing the set of central derivations with the inner derivations.

Theorem 3. Let L be a Leibniz algebra such that $L=M\dotplus A$, where M is a subalgebra, A is an ideal and $A^2=\{0\}$, $A\neq[A, Ann_r(M)]$. Then L has outer derivation.

Definition 11. A nilpotent Leibniz algebra is called characteristically nilpotent if all its derivations are nilpotent.

Proposition 2. If L is a characteristically nilpotent Leibniz algebra, then

(1) the center of L is contained in L^2;

(2) $L^3\neq\{0\}$.

Theorem 4. Let L be a nilpotent Leibniz algebra. If L is the direct sum of two non-zero ideals, such that one of them is central, then the Lie algebra Der(L) is not nilpotent.

Theorem 5. Let L be a Leibniz algebra. If the center of algebra L is not contained in L^2, then Der(L) is not nilpotent.

We study the derivations of a Leibniz algebra which are both inner and central. We will prove the following proposition.

Proposition 3. Let L be a Leibniz algebra, R and R_1 are the radicals of L and L^2, respectively. Then:

1. $\mathrm{InnDer}(L) \cap \mathrm{CDer}(L) = \mathrm{InnDer}(Z_1)$, where $Z_1 = \{l \in L \mid [L,l] \subseteq Center(L)\}$.

2. $\mathrm{InnDer}(L) \cap \mathrm{CDer}(L) \subset \mathrm{InnDer}(Z_2)$, where $Z_2 = \{r \in R \mid [R_1,r] = 0\}$.

It should be noted that $\mathrm{InnDer}(L) \cap \mathrm{CDer}(L) \neq \{0\}$ for any non-abelian nilpotent Lie algebra. But there exists non-Lie nilpotent Leibniz algebra, such that $\mathrm{InnDer}(L) \cap \mathrm{CDer}(L) = \{0\}$.

Now we will study the Leibniz algebras with the condition $\mathrm{CDer}(L) \subset \mathrm{InnDer}(L)$. We have the following result:

Theorem 6. Let L be a Leibniz algebra with radical R satisfying $\mathrm{CDer}(L) \subset \mathrm{InnDer}(L)$. The following assertions are valid.

(1) If R is abelian, then either $Center(L)=\{0\}$ or $L=L^2$.

(2) If $Center(L)\neq\{0\}$ and $\mathrm{CDer}(L)\neq\{0\}$, then R is not abelian.

We consider the Leibniz algebras whose all inner derivations are central.

Theorem 7. Let L be a Leibniz algebra. Then:

(1) $\mathrm{InnDer}(L) \subset \mathrm{CDer}(L)$ if and only if $L^3=\{0\}$.

(2) If $Center(L)\neq\{0\}$ and $\mathrm{InnDer}(L)=\mathrm{CDer}(L)$, then $L^2=Center(L)$ and $\dim Center(L) =1$.

(3) $\mathrm{Der}(L)=\mathrm{CDer}(L)$ if and only if L is abelian.

The third chapter of the dissertation, titled "**Leibniz algebras with complete ideal**" is devoted to the so-called complete Leibniz algebras. We construct some complete Leibniz algebras with the complete radical and prove that the direct sum of complete Leibniz algebras is also complete. It is known that a Lie algebra with a complete ideal is split. We discuss the analogue of this result for the Leibniz algebras and show that it is true for some classes of Leibniz algebras.

In the following theorem we investigate the center and derivations of split Leibniz algebras.

Theorem 8. Let a Leibniz algebra L be decomposed into the direct sum of two ideals, i.e.,

$$L = L_1 \oplus L_2.$$

Then we have

1) $Center(L)$ has the decomposition

$$Center(L) = Center(L_1) \oplus Center(L_2).$$

2) If in addition, $Center(L)=\{0\}$, then

$$\mathrm{InnDer}(L) = \mathrm{InnDer}(L_1) \oplus \mathrm{InnDer}(L_2),$$

$$\mathrm{Der}(L) = \mathrm{Der}(L_1) \oplus \mathrm{Der}(L_2).$$

3) L is complete if and only if both L_1 and L_2 are complete.

We formulate the following conjecture for complete Leibniz algebra.

Conjecture. If a complete Leibniz algebra R is an ideal in the Leibniz algebra L, then $L = R \oplus S$, where S is an ideal in L.

Let R be a solvable Leibniz algebra whose nilradical is NF_n. It was proved that there exists a basis $\{e_1,e_2,\ldots,e_n,x\}$ of the algebra R such that the multiplication

table of R with respect to this basis has the following form:

$$R(NF_n):\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-1,\\ [x,e_1]=-e_1,\\ [e_i,x]=ie_i, & 1\le i\le n.\end{cases}$$

By J.M.Ancochea and others it is showed that the solvable Leibniz algebra $R(NF_n)$ is complete.

Then we show that the above conjecture is true for a Leibniz algebra whose semisimple part is $\mathfrak{sl}_2$ and the complete ideal is the solvable algebra with the null-filiform nilradical.

Theorem 9. Let L be a Leibniz algebra such that $L=R\dotplus\mathfrak{sl}_2$ be its Levi decomposition, where R is a complete solvable ideal whose nilradical is NF_n. Then $L=R\oplus\mathfrak{sl}_2$ in other words, L is the direct sum of ideals.

Let N be a nilpotent Leibniz algebra with the characteristic sequence $(m_1,\ldots,m_s)$, and multiplication table

$$N_{m_1,\ldots,m_s}:[e_i^t,e_1^1]=e_{i+1}^t,\quad 1\le t\le s,\ 1\le i\le m_t-1.$$

Consider a solvable Leibniz algebra L with the nilradical $N_{m_1,\ldots,m_s}$ and codimension of nilradical is s. In the U.X.Mamadaliyev and B.A.Omirov's work the description of maximal solvable extension of a nilpotent Leibniz algebra with an arbitrary characteristic sequence was given, i.e., it was proved that arbitrary solvable Leibniz algebra with nilradical $N_{m_1,\ldots,m_s}$ of codimension s is isomorphic to the algebra:

$$R(N_{m_1,\ldots,m_s},s):\begin{cases}[e_i^t,e_1^1]=e_{i+1}^t, & 1\le t\le s,\ 1\le i\le m_t-1,\\ [e_i^1,x_1]=ie_i^1, & 1\le i\le m_1,\\ [e_i^t,x_1]=(i-1)e_i^t, & 2\le t\le s,\ 2\le i\le m_t,\\ [e_i^t,x_t]=e_i^t, & 2\le t\le s,\ 1\le i\le m_t,\\ [x_1,e_1^1]=-e_1^1,\end{cases}$$

where $\{x_1,\ldots x_s\}$ is a basis of the complementary vector space.

Moreover, it was shown that the Leibniz algebra $R(N_{m_1,\ldots,m_s},s)$ is also complete.

In the following theorem we show that the previous conjecture is true for a Leibniz algebra whose semisimple part is $\mathfrak{sl}_2$ and the complete ideal is a solvable Leibniz algebra with nilradical $N_{m_1,\ldots,m_s}$.

Theorem 10. Let L be a Leibniz algebra such that $L=R\dotplus\mathfrak{sl}_2$ be its Levi decomposition, where R is the complete solvable ideal $R(N_{m_1,\ldots,m_s},s)$, then $L=R\oplus\mathfrak{sl}_2$. In other words, L is the direct sum of ideals.

K.K.Abdurasulov derived that, let $R=N\oplus Q$ be a solvable Leibniz algebra such that $\dim Q=\dim N/N^2=k$, then R admits a basis $\{e_1,e_2,\ldots,e_n,x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ such that the table of multiplication in R has the following form:

$$\begin{cases} [e_i, e_j] = \sum_{t=k+1}^{n} c_{i,j}^{t} e_t, & 1 \le i, j \le n, \\ [e_i, x_i] = e_i, & 1 \le i \le k, \\ [x_i, e_i] = (b_i - 1)e_i, & b_i \in \{0,1\}, \quad 1 \le i \le k, \\ [e_i, x_j] = a_{i,j} e_i, & k+1 \le i \le n, 1 \le j \le k, \\ [x_j, e_i] = \sum_{t=1}^{q} b_{j,i}^{i_t} e_{i_t}, & k+1 \le i \le n, 1 \le j \le k, \end{cases}$$

where omitted products are equal to zero and $a_{i,j}$ is the number of entries of a generator basis element e_j involved in forming of non generator basis element e_i.

In addition, it was given that, *R* is also complete.

In the following theorem we present that if a Leibniz algebra with semisimple part $\mathfrak{sl}_2$ and whose complete ideal is a solvable Leibniz algebra such that the codimension of its nilradical is equal to the number of generators of the nilradical, then it satisfies the above conjecture.

Theorem 11. Let *L* be a Leibniz algebra such that $L = R \dot{+} \mathfrak{sl}_2$ be its Levi decomposition, which the complete solvable ideal $R = N \oplus Q$ such that dim*Q*=dim*N*/*N*^{2}. Then $L = R \oplus \mathfrak{sl}_2$ in other words, *L* is the direct sum of ideals.

CONCLUSION

The dissertation is devoted to classify finite-dimensional Leibniz algebras with complete ideal and to find central and nilpotent derivations of finite-dimensional Leibniz algebras.

The main results of the research are as follows:

1. We classified five-dimensional solvable complex Leibniz algebras with the four-dimensional nilradical;
2. It is proved that if the center of a Leibniz algebra is not contained in derived subalgebra of the Leibniz algebra then derivations algebra is not nilpotent and it has outer derivation;
3. We found the forms of the derivations of Leibniz algebras which are are both inner and central;
4. We proved that, the set of all central derivations of a Leibniz algebra with non-trivial center coincide with the set of all inner derivations if and only if the Leibniz algebra is metabelian;
5. We proved that if a Leibniz algebra *L* has semisimple part $\mathfrak{sl}_2$, and its complete ideal is a solvable algebra with the nilradical of an arbitrary characteristic sequence, then *L* is the direct sum of ideals;
6. It is proved that if *L* is a Leibniz algebra whose its solvable ideal is the maximal extension of the nilradical, then *L* is split.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ШЕРМАТОВА ЗАРИНА ХАКИМ КИЗИ

КЛАССИФИКАЦИЯ ПЯТИМЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА И НЕКОТОРЫЕ ПОЛНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА

01.01.06 –Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.4.PhD/FM443.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский(резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович** доктор физико-математических наук, профессор
	Каримжанов Икболжон Абдулазизович доктор философии по физико-математическим наукам (PhD)
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «29» марта 2022 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И. Романовского (зарегистрирована за № 132). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «11» марта 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от «11» марта 2022 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Б.А.Омиров
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Целью исследования является определение структуры маломерных разрешимых алгебр Лейбница и конечномерных алгебр Лейбница с полным идеалом, а также нахождение центральных и нильпотентных дифференцирований алгебр Лейбница.

Объект исследования: Конечномерные алгебры Лейбница, разрешимые алгебры Лейбница, алгебры дифференцирований алгебр Лейбница.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

описаны 5-мерные разрешимые алгебры Лейбница с 4-мерным нильрадикалом;

найдены формы дифференцирования алгебр Лейбница, которые являются как внутренними, так и центральными; доказано, что если центр алгебры Лейбница нетривиален, множество всех центральных дифференцирований совпадает с множеством всех внутренних дифференцирований тогда и только тогда, когда алгебра Лейбница метабелева;

доказано, что если алгебра Лейбница L, полный идеал которой является разрешимой алгеброй с нильрадикалом произвольной характеристической последовательности, то L разложимая;

доказано, что если L является алгебра Лейбница, радикал которой является максимальным расширением нильрадикала, то L является прямой суммой идеалов.

Внедрение результатов исследования. Результаты были использованы в следующих научных исследованиях:

результаты по классификации пятимерных разрешимых алгебр Лейбница с четырехмерным нильрадикалом были использованы для описания разрешимых алгебр Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом в проекте ОТ-Ф4-31 «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и каскады полиномов на симплексах», (справка Национального университета Узбекистана от 17 января 2022 года № 04/11-229). Научные результаты позволили классифицировать разрешимые алгебры Лейбница малых размерностей, нильрадикал которых является квази-филиформной алгеброй;

результаты, полученные в диссертации о внешних дифференцированиях конечномерных алгебр Лейбница, были использованы в проекте ОТ-4-27 «Описание предуальных пространств йордановых троек, пространств емкостей и голоморфных продолжений функции» (справка Каракалпакского Государственного университета от 17 января 2022 года № 01-21-04/56). Применение научного результата позволило описать почти внутренние дифференцирования конечномерных филиформных алгебр Лейбница.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Объем диссертации 86 страницы.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Khudoyberdiyev A.Kh., Shermatova Z.Kh. Description of solvable Leibniz algebras with four-dimensional nilradical.// Contemporary Mathematics. American Mathematical Society. – 2016. – vol. 672. – P. 217–225. (№ 3, Scopus).
2. Ayupov Sh.A., Khudoyberdiyev A.Kh., Shermatova Z.Kh. On complete Leibniz algebras. // International Journal of Algebra and Computation. – 2022. – DOI:10.1142/S0218196722500138 (№ 3, Scopus IF=0.719).
3. Khudoyberdiyev A.Kh., Shermatova Z.Kh. On Leibniz algebras with only inner derivations.// Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2021. – Vol. 4(3). – P. 12–18. (01.00.00; № 17).
4. Khudoyberdiyev A.Kh., Shermatova Z.Kh. Maximal torus of a class of quasi-filiform Leibniz algebras.// Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2020. – 5. – P. 20–24. (01.00.00; № 17).
5. Khudoyberdiyev A.Kh., Shermatova Z.Kh. Characteristically nilpotent Leibniz algebras.// Uzbek Mathematical Journal. – 2019. – 4.– P. 104–111. (01.00.00; №6).
6. Shermatova Z.Kh. A note on the derivations of finite-dimensional Leibniz algebras.// Uzbek Mathematical Journal. – 2019. – 2. – P. 123–126. (01.00.00; №6).

II бўлим (2 часть; part 2)

7. Shermatova Z.Kh. Derivations of Leibniz algebras.// XXXI Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolution Problems. – 2020. – 20-26 September. – Simferopol. – P. 40–43.
8. Shermatova Z.Kh. On some classes of Leibniz algebras.// Abstracts of the republican online-conference "Modern problems of Mathematics". – 2020. – 20 May. – Nukus. – P. 51–54.
9. Shermatova Z.Kh. On quasi-filiform Leibniz algebras.// The republican scientific conference "Modern problems of Mathematics and applied mathematics"– 2020. – 21 May. – Tashkent. – P. 280–283.
10. Shermatova Z.Kh. Characteristically nilpotent Leibniz algebras.// The International conference "Modern problems of Geometry and Topology and their applications". – 2019. – 21-23 November. – Tashkent. – P. 84–85.

11. Shermatova Z.Kh. Outer derivations of Leibniz algebras.// The Republican scientific conference "Actual problems and applications of Analysis". – 2019. – 4-5 October. – Karshi. – P. 234–235.
12. Shermatova Z.Kh. On the derivations of Leibniz algebras.// The International Conference "Inverse and ill-posed problems". – 2019. – 2-4 October. – Samarkand. – P. 35–36.
13. Shermatova Z.Kh. Classification of 5-dimensional solvable Leibniz algebras with 4-dimensional Lie nilradical.// The International Conference "Algebra, Analysis and Quantum Probability". – 2015. – 10-12 September. – Tashkent. – P. 102–105.
14. Shermatova Z.Kh. Classification of some 5-dimensional solvable Leibniz algebras.// The Republican conference "Modern problems of differential equations and their applications". – 2013. – 21-23 November. – Tashkent. – P. 339–340.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2022 йил 1 мартда таҳрирдан ўтказилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,5. Адади 100. Буюртма № 20/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.