В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БУРАНОВ ЖАМШИД ИМАМҚУЛОВИЧ

ФУНКЦИОНАЛ–ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ТУРҒУНЛИК МАСАЛАЛАРИ УЧУН ТАҚҚОСЛАШ УСУЛИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

УДК: 517.925.4

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Буранов Жамшид Имамқулович
Функционал–дифференциал тенгламаларнинг турғунлик масалалари учун таққослаш усули..... 3

Буранов Жамшид Имамкулович
Метод сравнения для задач устойчивости функционально-дифференциальных уравнений.....…….. 23

Buranov Jamshid Imamqulovich
Comparison method for stability problems of functional differential equations…..…….....….. 43

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works 46

В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БУРАНОВ ЖАМШИД ИМАМҚУЛОВИЧ

ФУНКЦИОНАЛ–ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ТУРҒУНЛИК МАСАЛАЛАРИ УЧУН ТАҚҚОСЛАШ УСУЛИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.1.PhD/FM668 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В. И. Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар: **Хусанов Джумма Хусанович**
физика-математика фанлари доктори, доцент

Расмий оппонентлар: **Дурдиев Дурдимурод Қаландарович**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Мамадалиев Нўъмонжон Олимжонович
физика-математика фанлари доктори, доцент

Етакчи ташкилот: **Ульяновск давлат университети (Россия)**

Диссертация ҳимояси В. И. Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил « 29 » июл соат 17:30 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В. И. Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (144-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2022 йил « 15 » июл куни тарқатилди.
(2022 йил « 15 » июлдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У. А. Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж. К. Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

А. А. Азамов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раиси
ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Ляпунов турғунлиги назарияси замонавий математиканинг муҳим ва долзарб йўналишларидан бири ҳисобланади. Бу назария дифференциал тенгламаларни сифатли таҳлил қилишда муҳим аҳамиятга эга. У дифференциал тенгламалар орқали моделлаштирилган тизим ва жараёнларнинг динамик хусусиятларини тадқиқот қилишда, физика, биология, автоматлаштирилган бошқарув тизимлари, иқтисодиёт, фан ва техниканинг бошқа йўналишларида муҳим амалий масалаларни ечишда кенг қўлланилади. Бу турғунлик назариясининг амалда қўлланиладиган дифференциал ва бошқа тенглама синфларининг сезиларли кенгайиши, ҳамда ишончлилик, аниқлик ва бошқа замонавий талаблар билан ечиладиган амалий масалаларнинг ўсиб бориши билан боғлиқ омиллар, мураккаб модел тенглама ечимларининг сифат хусусиятларини тадқиқот қилишда қатъий математик усуллардан фойдаланиш ва ишлаб чиқишни талаб этилиши билан изоҳлаш мумкин. Мазкур назариянинг назарий ва амалий ривожланишига бағишланган илмий тадқиқотлар кўп бўлишига қарамай, ушбу соҳадаги тадқиқотлар долзарблигича қолмоқда.

Ҳозирги кунда амалий масалаларни ечишда турғунлик назариясияда олинган маълум назарий натижаларни қўллаш бўйича етарли даражада қийинчиликлар мавжуд. Хусусан, Ляпунов тўғри усулининг умумий теоремаларини қўллашдаги қийинчиликлар бу теорема шартларини қаноатлантирувчи Ляпунов функциялари ва функционалларини қуриш алгоритмларининг йўқлиги билан боғлиқдир. Тегишли ечимларга Ляпунов функцияси ва функционалига қўйилган талабларни кучсизлантириш, тадқиқот қилинаётган тизим ёки жараённинг динамик хусусиятларига қараб фойдаланилаётган функция ва функционалларнинг синфини кенгайтириш йўли билан тўғри усулни ривожлантириш орқали эришилади. Бу борада: автоном бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг квазиинвариантлик хоссасини топиш ва мусбат лимит тўпламининг локализацияси ҳақидаги теоремасининг исботлаш, ундан ташқари Ляпуновнинг вектор-функцияси орқали қисм бўйича система ечимининг турғунлигини ва асимптотик турғунлигини аниқлаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда сўнгги йилларда илмий ва амалий татбиғига эга бўлган фундаментал ва аниқ фанларга алоҳида эътибор қаратилди. Унинг муҳим бўлимларидан бири дифференциал тенгламалар ҳисобланади. Амалдаги қонун хужжатларда «математик анализ, дифференциал тенгламалар назарияси, математик физика, математик моделлаштириш, алгебра ва турғунликнинг математик назарияси» бўйича илмий тадқиқотларни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга эканлиги таъкидланган[1]. Қарор ижросини таъминлашда турғунлик назарияси тадбиқ этиладиган дифференциал тенгламалар сифат назарияси бўйича илмий тадқиқотларни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сон Фармони, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сон Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологияларни ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Дифференциал тенгламалар сифат назариясида эришилган ютуқларни фан ва техниканинг турли соҳаларида кенг қўлланиши бўйича, турли мамлакатларнинг, шу жумладан, Ўзбекистон олимларнинг ҳам илмий тадқиқотларини эътироф этиш мумкин (академиклар И.С. Куклис ва А.А. Аъзамов, профессорлар Ш.Р. Шарипов ва Х.Р. Латипов ва бошқ.). Дифференциал тенгламалар сифат назариясининг муҳим бўлимларидан бири турғунлик назарияси бўлиб, унга А. М. Ляпуновнинг ишлари асос бўлган. Таққослаш усули нафақат дифференциал тенгламалар сифат назариясининг, балки турғунлик назариясининг ҳам самарали усулларидан бири ҳисобланиб, унинг яратилишига С.А. Чаплигин ва Т. Важевскийларнинг ишларида асос солинган. Кейинчалик, скаляр ва вектор Ляпунов функциялари ёрдамида дифференциал тенгламалар турғунлигини тадқиқот қилишда таққослаш усулини қўллаш, уларни турли техник тизимлар ва объектларни бошқаришнинг муҳим амалий масалаларни ечишда назарий тадқиқотларни Р. Беллман, К. Кордуняну, В. М. Матросов, Ф.Н. Бейли, В. Лакшмикантам ва бошқаларнинг илмий ишларида учратиш мумкин.

Турғунлик назариясининг янги йўналишларидан бири – ўзгарувчилар қисми бўйича турғунликдир. Ўзгарувчилар қисми бўйича турғунликнинг ривожланишига В.В. Румянцев, К. Кордуняну, Л. Хатвани, А. С. Озиранер, В.И. Воротников ва бошқаларнинг ишлари хизмат қилди. Булар космодинамика масалаларини ечишда, мураккаб механик тизимларни бошқаришда муҳим амалий аҳамиятга эга. Дифференциал тенгламаларнинг етарлича катта синфи фазавий системалардан иборат. Ю.Н. Бакайев, Е.А. Барбашин, Г.А. Леонов ва бошқалар илмий тадқиқотлари тизимлар динамикасининг турли масалаларига, жумладан: турғунлик масалаларига, уларни синхронизация, радиолокация ва баллистик ракеталарни бошқариш тизимларида қўллашга бағишлашган.

XX аср бошида В. Волтерранинг тадқиқотларида функционал-дифференциал тенгламалар тизимли равишда ўрганилган. Р. Беллман, А.Д.Мишкис, Н.Н. Красовский, Ж. Хейл, Т.А. Бартон ва бошқалар ўз тадқиқотларини ушбу тенгламалар назариясига бағишлашган. Ўзбекистонлик Н.Н. Назаров, Ф. Бадалов, А.Н. Филатов, Д.Х. Хусанов ва бошқаларнинг ишлари сифат назариясининг Вольтерра типидаги интегро-дифференциал тенгламаларнинг ривожланишига катта ҳисса қўшишди. Функционал–дифференциал тенгламаларнинг турғунлигини тадқиқот қилишнинг тўғри функционаллар усули ва Ляпунов функциялари усулига бўлинади. Ляпунов функционалларининг асосий усули функционал фазода функционал-дифференциал тенгламаларнинг ечимларини ифодалашдан иборат. Унинг ривожланишига Н.Н. Красовский, Ж. Хейл, Т.А. Бартон, Л.Хатвани, Д.Х. Хусанов ва бошқа олимларнинг тадқиқотлари бағишланган. Функционал–дифференциал тенгламалар учун Ляпунов функциялари усули оддий дифференциал тенгламалар учун Ляпуновнинг турғунлик теоремаларининг модификациясини ифодалайди. Бу модификациялар Н.Н.Красовский, Б.С. Разумихин, Ж. Хэддок ва Ж.Терек ва бошқа олимларнинг ишларида олинган. Турғунлик назарияси соҳасидаги тадқиқотлар робототехника тизимлари бошқарувининг амалий масалалари учун ривожлантирилди ва ривожланишда давом этмоқда. Бундай тизимлар робот-манипуляторлар учун бошқарув тузилмаларини лойиҳалашнинг математик усуллари С.Аримото, М.Спонга, Р.Томея, А.Лориа ишларида асослаб берилган бўлса ҳам, ҳали ҳам кўплаб илмий тадқиқотларнинг марказий мавзуси бўлиб қолмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация иши В.И. Романовский номидаги Математика институтининг илмий-тадқиқот ишлари режалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади автоном бўлмаган оддий дифференциал ва функционал-дифференциал тенгламалар система ечимларининг турғунлик хоссаларини аниқлашда Ляпунов функциялари усулини ишлаб чиқиш ва бу усулни робот-манипуляторларнинг ҳаракатини бошқариш масалаларига қўллаш.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

оддий дифференциал тенгламалар ечимларининг ўзгарувчилар қисми бўйича турғунлик хоссаларини тадқиқот қилишда Ляпунов вектор-функцияси билан таққослаш усулини ишлаб чиқиш;

чекли кечикувчи функционал-дифференциал тенгламаларнинг ўзгарувчилар қисми бўйича турғунлик хоссаларини тадқиқот қилишда Ляпунов функциялари усулини ишлаб чиқиш;

икки бўғинли робот-манипуляторни бошқариш масаласига исботланган турғунлик теоремаларини қўллаш.

Тадқиқот объекти. Ляпунов тўғри усулини турғунлик назариясида чизиқли бўлмаган дифференциал ва функционал-дифференциал тенгламалар ва уни робототехника тизимларини бошқариш масалаларига қўллаш.

Тадқиқот предмети. Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси, турғунлик назарияси, функционал-дифференциал тенгламалар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда оддий дифференциал ва функционал-дифференциал тенгламаларни турғунлик ва бошқарув назариясида математик ва функционал анализнинг тегишли бўлимларидаги сифатли таҳлил усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги:

цилиндрик фазавий фазода оддий дифференциал тенгламаларнинг автоном бўлмаган системаси учун топологик динамикаси қурилган ҳамда квазиинвариантлик тамойили ва асимптотик турғунлиги теоремалари исботланган;

оддий дифференциал тенгламаларнинг автоном бўлмаган системаси учун турғунлик хоссаларини аниқлашда Ляпунов вектор-функциялар усулини ишлаб чиқиш амалга оширилган;

ўнг томонли вектор функционал-дифференциал тенгламанинг нол ечимининг қисмий турғунлигининг Ляпунов-Разумихин типидаги янги теоремалари исботланган;

икки бўғинли робот-манипулятор учун янги турли хилдаги бошқарув қонунлари тақдим этилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Икки бўғинли манипуляторнинг ўрнатилган ва дастурий ҳаракатларини мувозанатлаштирувчи масаланинг янги ечимларини аниқланганлиги ва ушбу натижаларнинг янгилиги фазали координаталари тўла ўлчанмаган бошқарувида ва цилиндрик фазавий фазода бошқарув ҳаракатларни моделлаштирилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик тасдиқларнинг қатъийлиги ва дифференциал тенгламаларнинг сифат ва турғунлик назариясидаги маълум усул ва натижаларни қўлланилганлиги билан асосланади. Икки бўғинли робот-манипулятор бошқарувининг янги қонунларини қуриш натижалари С++ тилида махсус ишлаб чиқилган дастурларга асосланган рақамли моделлаштириш билан тасдиқланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, диссертацияда олинган назарий натижалар чизиқли ва автоном бўлмаган оддий дифференциал ва функционал-дифференциал тенгламалар системаси ечимларининг сифат хоссаларини ҳисобга олган ҳолда турғунлигини тадқиқот қилишда Ляпунов функциялар усулини ишлаб чиқишганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти икки бўғинли манипулятор бошқарув масаласини ечишда ишлаб чиқилган усул кўп бўғинли манипулятор ва бошқа робототехника тизимлари учун бошқарув шаклини қуришда самарали қўллаш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Цилндрик фазавий фазода функционал–дифференциал тенгламаларнинг турғунлик масалалари учун таққослаш усуллари бўйича олинган натижалар асосида:

икки бўғинли робот-манипулятор учун тақдим этилган янги турли хилдаги бошқарув қонунларидан РФФИ №19-01-00791а рақамли «Механик тизимларнинг чизиқли бўлмаган бошқарув тузилмаларини лойиҳалашнинг математик асослари» ва РФФИ №20-31-90120 рақамли «Мобил робот-манипулятор-ларни лойиҳалаш усуллари, алгоритмлари ва бошқарув дастурлари» мавзуларидаги хорижий грант лойиҳаларида тегишли алгоритмлар ва бошқарув дастурлари ишлаб чиқишда фойдаланилган (Ульяновск давлат университетининг 2022 йил 16 майдаги 98/03-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланилиши мобил робот-манипуляторларнинг янги моделлари, тегишли алгоритмлар ва бошқарув дастурларини ишлаб чиқиш имконини берган;

цилиндрик фазавий фазода оддий дифференциал тенгламаларнинг автоном бўлмаган системаси учун асимптотик турғунлигидан №МД-758.2022.1.1 рақамли «Тебраниш жараёнлари ва тўйинганлик жараёнларини ўрганиш мақсадида каср динамикасининг математик моделларини ишлаб чиқиш» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида горизонтал манипуляторнинг турғун ҳаракатларини ишлаб чиқишда фойдаланилган (Камчатка давлат университетининг 2022 йил 23 майдаги 17-12-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланилиши манипулятор бўғинлари тезлигини ўлчаш ва фильтр ёрдамида ўлчовларсиз дастур ҳаракати турғунлигини таъминлайдиган чизиқли бошқарув тузилмасининг дастурий таъминотни яратиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 8 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 19 та илмий ишлар чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 114 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертациянинг **Кириш** қисми мавзунинг долзарблигини ва унинг Республика фан ва техника ривожланишининг устувор йўналишларига мувофиқлиги, шунингдек, диссертация тадқиқотини ўтказишнинг мақсадга мувофиқлигини асослашдан иборат. Шунингдек, диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар ҳақида умумий маълумот берилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси кўрсатилган, мақсад ва вазифалари, тадқиқот объекти ва предмети кўрсатилган, тадқиқот натижалари илмий янгилиги очиб берилган ва олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти, тадқиқот

натижаларини татбиқ этиш, нашр этилган ишлар ва тузилмаси ҳақида маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **«Турғунлик масалаларида таққослаш усули»** деб номланган биринчи бобида асосий тадқиқот объекти

$$\dot{x} = X(t,x),\ X(t,0) \equiv 0 \qquad (1)$$

кўринишидаги оддий дифференциал тенгламалар системаси бўлиб, бу ерда $t \in R,\ R-$ҳақиқий сонлар ўқи, $x \in R^n,\ R^n - \|x\|$ нормага эга n ўлчовли вектор фазо, $\dot{x} = \frac{dx}{dt},\ X(t,x) = \left(X_1(t,x), X_2(t,x), ..., X_n(t,x)\right)^T -$вектор функция, $(\cdot)^T -$ транспонирлаш амали, $X_k(t,x)\ (k = 1,2,...,n) - X(t,x)$ фунциянинг ташкил этувчилари бўлиб, (1) система ечими $(t_0, x_0) \in R \times R^n$ да боғлиқлилиги, $t_0 \in R^+$ - мусбат ҳақиқий сонлар тўплами учун $t \geq t_0$ да уларнинг давомийлиги, мавжудлик, ягоналик, узлуксизлик шартларни қаноатлантирувчи $(t,x) \in R \times R^n$ бўйича аниқланган ва узлуксиз.

Фараз қилайлик, (1) тенгламалар системасидаги

$$X(t,x) = \left(X_1(t,x), X_2(t,x), ..., X_n(t,x)\right)^T$$

вектор функцияни $X_i(t,x),\ i = 1,2,...,n$ ҳақиқий функциялар $R \times R^n$ соҳасида аниқланган ва x ўзгарувчини $x^T = \left(y^T, z^T\right),\ y \in R^m,\ z \in R^s,\ m + s = n$ кўринишда бўлиш мумкин, бунда $X(t,x)$ функция z ўзгарувчи бўйича 2π даврий бўлади, яъни $X\left(t, y, z + 2\pi 1_j\right) = X(t,y,z),\ \left(z + 2\pi 1_j\right)_j = z_j + 2\pi;$ $\left(z + 2\pi 1_j\right)_i = z_i;\ i \neq j;\ i, j = 1,2,...,s.$ Бу системанинг ечимларини $R \times R^m \times P^s,\ P^s = \left\{z \in R^s : -\pi \leq z_j \leq \pi,\ j = 1,2,...,s\right\}$ цилиндрк фазавий фазода қараш мумкин.

R^m да y векторининг нормаси $\|y\|$, R^s да z векторининг нормаси $\|z\|$, $\|x\| = \|y\| + \|z\|$, $L^1 - \lambda : R \to R$ функциялар синфи локал интегралланувчи бўлсин.

$f : R \times R^n \to R^n$ функцияларнинг F тўпламини киритамиз, бунда $t \in R$ да фиксирланган $x \in R^n$ бўйича узлуксиз X функцияларга ўхшаш z бўйича даврийлиги 2π бўлган, $x \in R^n$ да фиксирланган t бўйича ўлчовли ва улар қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи: ҳар бир $K \subset R^m$ компакт тўпламда барча $(t,x), \left(t, x^{(1)}\right), \left(t, x^{(2)}\right) \in R \times K \times P^s$ учун $\lambda = \lambda_1(t, f, K)$ и $\lambda = \lambda_2(t, f, K)$ $\left(\lambda_1, \lambda_2 \in L^1\right)$ функциялар мавжуд бўлсин ва қуйидаги тенгсизликлар бажарилсин:

$$\|f(t,x)\| \leq \lambda_1(t, f, K),$$

$$\left\|f\left(t, x^{(2)}\right) - f\left(t, x^{(1)}\right)\right\| \leq \lambda_2(t, f, K)\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|,$$

бундан ташқари, $\lambda_1(t, f, K)$ функция R да ўртача текис узлуксиз, $\lambda_2(t, f, K)$ функция эса R да текис чегараланган.

Ҳар бир $f \in F$ функция учун

$$\dot{x} = f(t, x),$$

ечимларини $R \times R^m \times P^s$ фазода қараш мумкин бўлган тенгламалар системасини аниқлаш мумкин, ундан ташқари ҳар бир $(t_0, y_0, z_0) \in R \times R^m \times P^s$ бошланғич нуқта учун қандайдир бир $(\alpha(f, t_0, x_0), \beta(f, t_0, x_0))$ интервалда, яъни $\alpha < t_0 < \beta$ учун, агар $\alpha > -\infty$ (ёки $\beta < \infty$) бўлса, у ҳолда $t \to \alpha$ да $\|y(t, t_0, x_0)\| \to \infty$ ($t \to \beta$ да $\|y(t, t_0, x_0)\| \to \infty$) $x = x(t, t_0, x_0) = (y(t, t_0, y_0, z_0), z(t, t_0, y_0, z_0))^T$ ечим мавжуд, ягона ва давомий бўлади.

Агар ҳар бир $t \in R$ ва $x = (y, z) \in R^m \times P^s$ лар учун $k \to \infty$ да

$$\left\| \int_0^t \left(f^{(k)}(\tau, x) - f^*(\tau, x) \right) d\tau \right\| \to 0$$

бўлса, унда $\{f_k \in F\}$ кетма-кетлик $f^* \in F$ га яқинлашади. Бундай яқинлашувчига эга бўлган F фазо ўлчовли ва компактдир.

(1) системанинг X функцияси F тўпламга тегишли бўлсин. Унда, (1) системага лимит системалар оиласини мос қўйиш мумкин

$$\dot{x} = X^*(t, x), \quad X^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \to \infty} \int_0^t X(t_k + \tau, x) d\tau, \tag{2}$$

бу ерда $X^* \in F$ функция $t_k \to \infty$ кетма-кетлик орқали аниқланади.

1-таъриф. $p = \left(p^{(1)}, p^{(2)} \right) \in R^m \times P^s$ нуқта (1) система $x(t, t_0, x_0)$ ечимнинг мусбат лимит тўплами дейилади, агар шундай $t_k \to \infty$ ва $L^{(k)} = \left(l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, ..., l_s^{(k)} \right)$, $l_j^{(k)} \in Z$, $j = 1, 2, ..., s$ кетма-кетликлар мавжуд бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ да

$$y(t_k, t_0, x_0) \to p^{(1)}, \quad z(t_k, t_0, x_0) - 2\pi L^{(k)} \to p^{(2)} \tag{3}$$

ўринли. $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ тўпламнинг барча шундай нуқталари мусбат лимит тўпламдир.

2-таъриф. Агар $\forall p = \left(p^{(1)}, p^{(2)} \right) \in M$ учун (2) лимит система топилса, у ҳолда (α, β) ораликда аниқланган $x = x(t, 0, p)$ ечим $x(t, 0, p) \in M$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$ $(\alpha < 0 < \beta)$ бўлиб, $M \subset R^m \times P^s$ тўплам (1) системага нисбатан квазиинвариант дейилади.

1-теорема. Барча $t \geq t_0$ да y бўйича $K \subset R^m$ компакт билан чегараланган (1) системанинг қандайдир $x = x(t, t_0, x_0)$ ечими булсин, у ҳолда $x = x(t, t_0, x_0)$

ечимнинг мусбат лимит тўплами боғланган, компакт ва квазиинвариант бўлади.

(3) лимит тўпламлар киритилгандан сўнг, қуйидаги функция синфлари киритилади.

1. Ҳар бир $R^+ \times K_1$ ($K_1 = \{x \in R^n : \|x\| \le H_1 = const > 0\}$, $\|V\| - R^r$ да норма) тўпламда чегараланган ва текис узлуксиз бўлган $V = (V_1, V_2, ..., V_r)^T$, $V : R \times R^n \to R^r$ вектор функцияларнинг $\mathcal{K}_1$ синфи.

2. Чегараланган ва ҳар бир $K_2 = \{u \in R^r : \|u\| \le H_2 = const > 0\}$ тўпламда текис узлуксиз бўлган $U : R \times R^r \to R^r$ вектор функцияларнинг $\mathcal{K}_2$ синфи.

3. Учинчи ўзгарувчи 2π даврий, чегараланган ва ҳар бир $R \times K_1 \times P^s \times K_2$ тўпламда текис узлуксиз бўлган $W : R \times R^m \times P^s \times R^r \to R^r$ вектор функцияларнинг $\mathcal{K}_3$ синфи.

$X \in F$, $V \in \mathcal{K}_1$, $U \in \mathcal{K}_2$, $W \in \mathcal{K}_3$ функцияларнинг қандайдир (X, V, U, W) тўплами учун $\tau_k \to \infty$ кетма-кетликка нисбатан X^*, V^*, U^*, W^* функциялар аниқлансин. Мос келувчи $\{X^*, V^*, U^*, W^*\}$ функциялар тўпламини лимит тўплам деб атаймиз.

(1) система учун узлуксиз дифференциалланувчи $V \in \mathcal{K}_1$ функция топилсин, у ҳолда унинг система бўйича ҳосиласи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{gathered} \dot{V}(t,x) = U(t, V(t,x)) + W(t, x, V(t,x)), \\ V(t,0) = 0,\ U(t,0) = 0,\ W(t,0,0) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

бу ерда $U = U(t,u)$, $U \in \mathcal{K}_2$ квазимонотон ўсувчи ва $u \in R^r$ бўйича узлуксиз дифференциалланувчи, $W = W(t,x,u)$, $W \in \mathcal{K}_3$ ихтиёрий $(t,x,u) \in R^+ \times R^m \times P^s \times R^r$. учун $W_j(t,x,u) \le 0$ $(j = 1, 2, ..., r)$ тенгсизликларни қаноатлантиради.

(4) тенгликка кўра $V(t,x)$ функция таққослаш вектор-функция бўлиб,

$$\dot{u} = U(t,u) \tag{5}$$

система эса таққослаш системаси бўлади.

Агар $V = V(t,x)$ функция (4) тенгламани $V(t_0, x_0) = V_0$ қаноатлантириб, $u = u(t, t_0, V_0)$ эса $[t_0, t_0 + \beta)$, $\beta > 0$ интервалда аниқланган (5) нинг ечими бўлса, у ҳолда барча $t \in [t_0, t_0 + \beta)$ учун (1) система $x = x(t, t_0, x_0)$ ечимида $V(t, x(t, t_0, x_0)) \le u(t, t_0, V_0)$ тенгсизлик бажарилади.

$U \in \mathcal{K}_2$ бўлгани учун (5) система қисм компакт бўлади ва унинг учун

$$\dot{u} = U^*(t,u),\ U^* \in \mathcal{K}_2 \tag{6}$$

лимит таққослаш система оиласи мавжуд бўлади.

Ҳар қандай $K = K(H) = \{u \in R^r : \|u\| \le H > 0\}$ компакт учун ихтиёрий $(t, t_0, u_0) \in R^+ \times R^+ \times K$ учун Φ матрица

$$\|\Phi(t, t_0, u_0)\| \le M(K), \ \det \Phi(t, t_0, u_0) \ge \alpha(K) > 0 \qquad (7)$$

шартларни қаноатлантирувчи $M(K)$ ва $\alpha(K)$ сонлар мавжуд бўлсин.

2-теорема. $V \in \mathcal{K}_1$ Ляпунов вектор функцияси топилсин:

1) $(t, z) \in R^+ \times P^s \quad \|y\| \to \infty \quad \|V(t, y, z)\| \to \infty$;

2) $\|y\| \le H = const > 0$ да $V(t, y, z)$ чегараланган

$\|V(t, y, z)\| \le m(H), \ \forall (t, y, z) \in R^+ \times \{y \in R^m : \|y\| \le H\} \times P^s$;

3) $\dot{V}$ ҳосила (4) тенгликни қаноатлантиради;

4) (5) таққослаш система ечимлари (7) шартларни қаноатлантиради;

5) (5) таққослаш системанинг ҳар бир $u(t, t_0, u_0)$ ечими барча $t \ge t_0$ да чегараланган, яъни $\|u(t, t_0, u_0)\| \le m_0 = const \quad \forall t \ge t_0$.

У ҳолда (1) системанинг ҳар бир $x(t, t_0, x_0)$ ечими учун $\omega^+(x(t, t_0, x_0)) \subset M$ муносабат бажарилади, бу ерда $M - \{W^*(t, x, u^*(t)) = 0\}$ тўпламнинг максимал инвариант қисм тўплами, бунда $u^*(t)$, $p \in \omega^+(x(t, t_0, x_0))$ танланган нуқта учун $u^*(0) = V^*(0, p)$ бошланғич шартга кўра (6) лимит таққослаш системанинг мос ечими.

Қуйидаги муносабатга кўра $V = V(t, x)$, $V \in \mathcal{K}_1$ вектор-функция учун $\bar{V} = \bar{V}(t, x)$ скаляр функцияни аниқлаймиз:

$$\bar{V}(t, x) = \sum_{i=1}^{r} V_i(t, x).$$

$V \in \mathcal{K}_1$ шартга кўра V функция $\|V(t, x)\| \le a_2(\|x\|)$ тенгсизликни ҳам қаноатлантиради, бу ерда $a_2 \in \mathcal{K}$.

3-теорема. (1) система учун шундай $V = V(t, x)$ вектор-функция топилсин:

1) $\alpha \to \infty$ да $a_1(\|y\|) \le \bar{V}(t, x) \le a_2(\|x\|)$ $\forall (t, y, z) \in R^+ \times R^m \times P^s$, $a_1, a_2 \in \mathcal{K}$, $a_1(\alpha) \to \infty$;

2) 2-теореманинг 3- ва 4-шарталари бажарилади;

3) (5) таққослаш системанинг $u = 0$ ечими текис турғун;

4) ҳар бир $\{X^*, V^*, U^*, W^*\}$ лимит тўплам учун $\{W^*(t, x, u^*(t)) = 0\} \cap \{\bar{V}^*(t, x) > 0\}$ тўплам (2) система бутун ечимларини ўз ичига олмайди, бу ерда $u^*(t) \ne 0$ (6) системанинг ихтиёрий нол бўлмаган ечими.

У ҳолда (1) системанинг $x=0$ ечими y бўйича глобал текис асимптотик турғундир.

4-теорема. (1) система учун 3-теорема 1-3-шартлари бажариладиган $V=V(t,x)$ вектор функция топилсин, шунингдек:

4) $V\left(t,0,z+2\pi 1_j\right),\ \ j=1,2,...,s$;

5) ҳар бир $\left\{X^*,V^*,U^*,W^*\right\}$ лимит тўплам учун $\left\{W^*\left(t,x,u^*(t)\right)=0\right\}\setminus\left\{x\in R^n: y=0,\ z=\pi L^{(k)}\right\}$ тўплам (2) система ечимларини ўз ичига олмайди, бу ерда $u^*(t)\neq 0$ (6) системанинг ихтиёрий нол бўлмаган ечими.

У ҳолда:

1) $x=0$ ечим ва (1) система $\left\{x\in R^n: y=0,\ z=2\pi L^{(k)}\right\}$ мувозанат ҳолатлар тўплами y бўйича текис асимптотик турғун;

2) (1) система $\left\{x\in R^n: y=0,\ z=\pi L^{(k)}\right\}$ мувозанат ҳолатлар тўплами y бўйича глобал тортишувчи.

«Функционал-дифференциал тенгламаларнинг қисм ўзгарувчилари бўйича турғунлик» деб номланган иккинчи боби Ляпунов функцияси билан таққослаш усулига асосланиб, қисм ўзгарувчилари бўйича автоном бўлмаган функционал-дифференциал тенгламаларнинг (ФДТ) чекли кечикувчили кечикувчи типдаги турғунлик масаласи ўрганилган.

Қуйидаги белгилашлар киритилади: $R^n-|x|$ норма билан берилган $x\in R^n$ векторларнинг n ўлчовли ҳақиқий фазо, $h>0-$ихтиёрий сон, $C-$ $\|\varphi\|=\max\left\{|\varphi(s)|,\ -h\le s\le 0\right\}$ норма билан берилган $\varphi:[-h,0]\to R^n$ узлуксиз функцияларнинг Банах фазоси. $x:R\to R^n$ узлуксиз функция ва ҳар бир $t\in R$ учун $x_t\in C$ функция $x_t(s)=x(t+s),\ -h\le s\le 0$ тенглик билан берилади.

Чекли кечикувчили кечикувчи типдаги ФДТ системаси қаралади:

$$\dot{x}=X(t,x_t),\ \ X(t,0)=0, \tag{8}$$

бу ерда $x\in R^n,\ t\in R^+,\ \ X=X(t,\varphi),\ X:R^+\times C\to R^n$ функция, $R^+\times C$ соҳада узлуксиз аниқланиб, қуйидаги фаразлар ўринлидир.

1-фараз. (8) системанинг ўнг томони $X=X(t,\varphi)$ φ ўзгарувчи бўйича Липшиц шартини t га нисбатан қаноатлантирсин. Бошқача қилиб айтганда, $\forall K\subset C$ ($K-$компакт тўплам) учун $\exists L=L(K):\forall\varphi_1,\varphi_2\in K$ ва $\forall t\in R^+$ бўлганда, қуйидаги муносабат ўринли

$$\left|X(t,\varphi_2)-X(t,\varphi_1)\right|\le L\left\|\varphi_2-\varphi_1\right\|. \tag{9}$$

2-фараз. (8) системанинг ўнг томони $X=X(t,\varphi)$ $\forall K\subset C$ ($K-$компакт тўплам) учун чегараланган ва $(t,\varphi)\in R^+\times K$ ўзгарувчилар бўйича текис

узлуксиз, яъни $\forall K \subset C$ учун $\exists M = M(K)$ ва $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$: $\forall (t,\varphi) \in R^+ \times K$, $\forall (t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K : |\varphi_2 - \varphi_1| < \delta$, бўлганда

$$|X(t,\varphi)| \le M, \quad |X(t_2,\varphi_2) - X(t_1,\varphi_1)| < \varepsilon,$$

муносабатлар ўринли.

1-Фараздан $x_\alpha = \varphi$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи, ягона ва давомий бўлмаган, ундан ташқари агар $t \ge \alpha - h$ да $|x(t,\alpha,\varphi)| \le r$ бўлганда, у ҳолда $\beta = +\infty$ ва $\{x_t(\alpha,\varphi) : t \ge \alpha\}$ функциялар оиласи $\bar{C}_r$, $\bar{C}_r = \{\varphi \in C : \|\varphi\| \le r\}$ да қисм компакт бўлган барча $t \in [\alpha - h, \beta)$ $(\beta > \alpha)$ учун (8) тенгламанинг $\forall (\alpha,\varphi) \in R^+ \times C$ да $x = x(t,\alpha,\varphi)$ ечими топилади.

$j \to \infty$ да $r_j \to \infty$ қатъий ўсиб борувчи $\{r_j\}$ сонлар кетма-кетлигини аниқлаймиз. $\forall r_j$ учун ихтиёрий $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$ да

$$|\varphi(s)| \le r_j, \qquad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \le L(|s_2 - s_1|)$$

тенгсизликлар бажарилади ва барча $\varphi \in C$ функцияларнинг $K_j \subset C$ тўпламини аниқлаймиз.

$\Gamma = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$ бўлсин ва $F = \{ f : R \times \Gamma \to R^n \}$ узлуксиз функциялар тўпламини киритамиз. Ҳар бир $f \in F$ ва ҳар қандай $\tau \in R^+$ учун $f^\tau(t,\varphi) = f(\tau + t, \varphi)$ муносабатга кўра $f^\tau \in F$ силжишни аниқлаймиз. $f \in F$ функция учун $F_0 = \{ f^\tau : \tau \in R^+ \} \subset F$ унинг силжишлар оиласини аниқлаймиз.

F фазода компакт очиқ топологияда қуйидагича яқинлашувчиликни киритиш мумкин. Агар $\forall K' \subset R \times \Gamma$ (K' – компакт тўплам) ва $\forall \varepsilon > 0$ учун $\forall l > N = N(\varepsilon)$ ва $\forall (t,\varphi) \in K'$ да $|f_l(t,\varphi) - f(t,\varphi)| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\{f_l \in F\}$ кетма-кетлик $f \in F$ га яқинлашади. Бундай яқинлашиш ҳар бир $K' \subset R \times \Gamma$ компакт тўпламда текис бўлади.

1-лемма. 1- ва 2-Фаразлар бажарилсин. У ҳолда (8) система ўнг томонининг $\{X^\tau : \tau \in R^+\}$ силжишлар тўплами F фазода қисм компакт бўлади.

3-таъриф. Агар F да $X^{(l)}(t,\varphi) = X(t_l + t, \varphi)$ $\exists t_l \to +\infty$ да $X^*(t,\varphi)$ га лимити бўлса, у ҳолда $X^* : R \times \Gamma \to R^n$ функция X нинг лимити дейилади. F да $\{X^\tau : \tau \in R^+\}$ оиланинг туташуви $S^+(X)$ қобиғи дейилади. Ушбу

$$\dot{x}(t) = X^*(t, x_t) \tag{10}$$

тенглама (8) нинг лимити деб аталади.

Чегараланган ва барча $\forall R \times K$ ($K \subset R^n$ – компакт тўплам) учун текис узлуксиз $V = V(t,x)$, $V : R \times R^n \to R$ функцияларнинг K_1 синфи, чегараланган ва текис узлуксизлиги $(t,u) \in R \times K_1$ ва $(t,\varphi) \in R \times K_2$ бўйича $\forall K_1 \subset R$ ва $\forall K_2 \subset C$ (K_1

ва K_2–компакт тўпламлар) учун мос равишда $U: R^+ \times R \to R$ функциялар ва $W: R \times C \to R$ функционалларнинг $K_{\mathbb{2}}$ ва $K_{\mathbb{3}}$ синфларини киритамиз.

(8) системани кўриб чиқамиз ва унинг $V = V(t,x),\ V: R^+ \times S_H \to R,\ V \in K_{\mathbb{1}}$ Ляпунов функциясини қурамиз.

(8) системага кўра $V(t,x)$ функциянинг вақт бўйича ҳосиласини қуйидаги формула бўйича аниқлаймиз:

$$\dot{V}(t,\varphi) = \frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial t} + \left(\left. \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} \right|_{x=\varphi(0)} \right)^T X(t,\varphi).$$

$\dot{V}(t,\varphi)$ функционал қуйидаги кўринишда ифодалансин:

$$\dot{V}(t,\varphi) = U\big(t, V(t,\varphi(0)\big) + W(t,\varphi) \tag{11}$$

бу ерда $U \in K_{\mathbb{2}}$ функция, $W = W(t,\varphi),\ W \in K_{\mathbb{3}}$ функционал $\Omega_t[V,u] = \{\varphi \in C_H :\ V\big(t+s,\varphi(s)\big) \le u\big(t+s,t,V(t,\varphi(0))\big),\ -h \le s \le 0\}$ тўпламда $W \le 0$ тенгсизликни қаноатлантирди.

Бу ерда $u(t,\alpha,u_0)$

$$\dot{u} = U(t,u) \tag{12}$$

тенгламанинг барча $t \in R$ да аниқланган ва $(\alpha,u_0) \in R^+ \times R$ нуқтадан ўтувчи ечим.

$U \in K_{\mathbb{2}}$ ва $W \in K_{\mathbb{3}}$ функциялар учун $\{U^*\}$ лимит функциялар ва $\{W^*\}$ лимит функционаллар тўпламларини аниқлаймиз.

(12) тенгламага мос равишда лимит тенгламалар тўпламини қўямиз:

$$\dot{u} = U^*(t,u),\ U^* \in K_{\mathbb{2}}. \tag{13}$$

3-фараз. Қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) $\forall (t_0,u_0) \in R^+ \times R$ учун (12) тенгламанинг $u(t,t_0,u_0)$ ечимлари ягона бўлсин;

2) $\Phi(t,u_0) = \dfrac{\partial u(t,0,u_0)}{\partial u_0},\ \ d_1 \le \Phi(t,u_0) \le d_2$ функция мавжуд, бу ерда $d_1, d_2 > 0$ – қандайдир доимийлар, унда $\Phi\big(t,u_0\big)$ функция $\forall t \ge 0$ ва $\forall u_0 \in R$ учун узлуксиз ва чегараланган бўлади.

$x = x\big(t,\alpha,\varphi\big)$ (8) системанинг чегараланган қандайдир ечими бўлсин, яъни $H > 0 \quad \forall t \ge \alpha - h \quad \big|x(t,\alpha,\varphi)\big| < H$.

$$V\big(t,x\big) = u\big(t,0,w(t,x)\big) \tag{14}$$

тенгликдан $w\big(t,x\big)$ ёрдамчи функцияни аниқлаймиз.

Параметрларнинг чизиқли бўлмаган вариация усулини қўллаб ва $u\big(0\big) = u_0$ бошланғич шарт ва барча $\forall t \ge 0$ да аниқланган (12) тенгламанинг $u\big(t,0,u_0\big)$ ечими ягона эканлигини ҳисобга олган ҳолда $w\big(t,x\big)$ функцияни топиш мумкин.

(8) системага кўра (14) тенгликнинг иккала қисмини вақт бўйича дифференциаллаймиз:

$$\dot{V}(t,\varphi)=\left.\frac{\partial u(t,0,u_0)}{\partial t}\right|_{u_0=w(t,\varphi(0))}+\left.\frac{\partial u(t,0,u_0)}{\partial u_0}\right|_{u_0=w(t,\varphi(0))}\cdot\dot{w}(t,\varphi).$$

Бунда, (11) тенгликни ҳисобга олган ҳолда $\dot{w}(t,\varphi)=\dfrac{W(t,\varphi)}{\Phi\left(t,w(t,\varphi(0))\right)}$ оламиз.

$w(t,x)$ функция узлуксиз дифференциалланувчи эканлигидан, бу функция учун, худди $V(t,x)$ функцияда бўлгани каби $V^*(t,x)=u^*\left(t,w^*(t,x)\right)$ муносабатни бажарувчи $\left\{w^*(t,x)\right\}$ лимит функциялар тўпламини топиш мумкин.

Ҳар бир $c\in R$ сон ва ихтиёрий $t\in R$ учун

$$N(t,c)=\left\{\varphi\in\Gamma:\ \sup_{-h\le s\le 0} w^*\left(t+s,\varphi(s)\right)=c\right\},\quad M(t,c)=\left\{\varphi\in N(t,c):\ w^*\left(t,\varphi(0)\right)=c\right\}$$

тўпламларни аниқлаймиз.

5-теорема. (8) системанинг $x(t,\alpha,\varphi_0)$ ечими барча $t\ge\alpha-h$ учун қандайдир $K\subset R^n$ компакт билан чегараланган бўлсин ва (11) муносабатни бажарувчи $V=V(t,x),\ V\in K_{\mathbb{1}}$ Ляпунов функцияси мавжуд бўлсин.

У ҳолда $k\to\infty$ да айнан $t_k\to+\infty$ кетма-кетлик билан аниқланувчи $\exists c\in R$ ва $\forall\varphi^*\in\omega^+(\alpha,\varphi_0)$ $\exists\left(X^*,V^*,w^*,U^*,W^*\right)$ лимит функциялар, ундан ташқари $x_t^*\left(0,\varphi^*\right)\in N(t,c)$ ва $\forall\tau\in R$ $\exists\nu\in[\tau-h,\tau]:x_\nu^*\left(0,\varphi^*\right)\in M(\nu,c)$ ва $x_\nu^*\left(0,\varphi^*\right)\in\left\{\varphi\in C_H:W^*(\nu,\varphi)=0\right\}$ да (10) лимит тенгламанинг $x=x^*\left(t,0,\varphi^*\right)$ ечими мавжуд.

6-теорема. y ўзгарувчи бўйича аниқ мусбат $V=V(t,x),\ V\in K_{\mathbb{1}}$ Ляпунов фунцияси аниқлансин:

1) $\dot{V}(t,\varphi)$ ҳосила (11) муносабатни қаноатлантиради;

2) (12) таққослаш тенгламанинг $u=0$ нол ечими турғун;

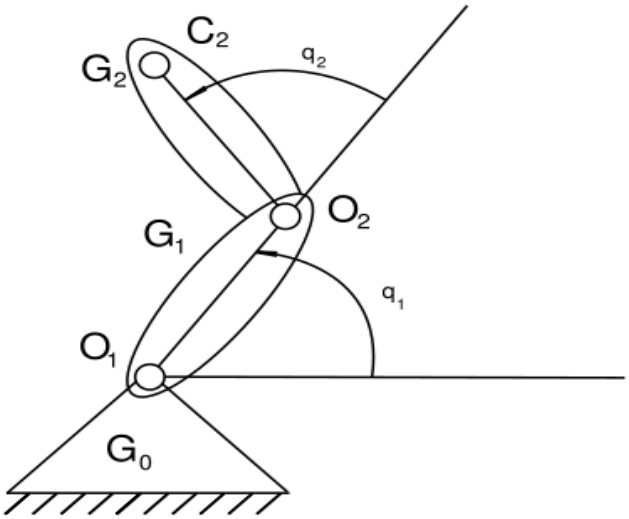
3) $\forall\left(X^*,U^*,W^*,V^*\right)$ ва $\forall c\ge 0$ учун (10) тенгламанинг y ўзгарувчи бўйича $x=x^*\left(t,0,\varphi^*\right)$ ечимнинг нол бўлмаган ечими мавжуд эмас: $x_t^*\left(0,\varphi^*\right)\in N(t,c)$ $\forall t\in R$ ва $\forall\tau\in R$ учун $\exists\nu\in[\tau-h,\tau]:x_\nu^*\left(0,\varphi^*\right)\in M(\nu,c)$ ва $W^*\left(\nu,x_\nu^*\left(0,\varphi^*\right)\right)=0$.

У ҳолда (8) системанинг $x=0$ нол ечими асимптотик y турғундир.

Ундан ташқари, агар (12) тенгламанинг $u=0$ нол ечими текис турғун бўлса, у ҳолда (8) системанинг $x=0$ нол ечими текис асимптотик y турғун бўлади.

1-изоҳ. 5- ва 6-Теоремалар чекли кечикувчи ФДТ ечимлари турғунлиги ҳақидаги маълум теоремаларнинг умумлашмасини ва ривожлантиришини ифода этади.

«Икки бўғинли манипуляторнинг ҳаракатини бошқариш» деб номланган учинчи бобда икки бўғинли робот-манипуляторнинг ҳаракатини бошқариш масаласи кўриб чиқилади. Унинг модели 1-Расмда кўрсатилган бўлиб, G_1 биринчи бўғин G_0 асоси ҳаракатсиз бўлган O_1 мукаммал цилиндрсимон шарнир ёрдамида уланган. G_2 иккинчи бўғин O_2 шарнир билан биринчи бўғинга бириктирилган. Манипуляторнинг бўғинлари мутлақо қаттиқ жисмлар бўлиб, ҳаракат йўналиши фақат горизонтал текисликда ёки вертикал бўлиши мумкин. G_i бўғинларнинг оғирлик марказларини C_i орқали белгилаймиз $(i=1,2)$. C_1 нуқта O_1O_2 нурида ётади, C_2 нуқта эса O_2 нуқта билан устма-уст тушмайди.



1-расм. Асоси ҳаракатсиз икки бўғинли манипулятор.

1-Расмда кўрсатилганидек, манипулятор бўғинларининг $q_i\,(i=1,2)$ бурилиш бурчакларини киритамиз. O_i шарнирлардан G_i оғирлик марказларигача бўлган масофани l_i орқали белгилаймиз $(i=1,2)$. O_1O_2 кесма узунлиги l орқали белгиланади. Бўғин массалари m_i орқали белгиланиб, тегишли шарнирларнинг ўқларига нисбатан уларнинг инерция моментлари эса $I_i\ (i=1,2)$ орқали белгиланади.

Манипуляторнинг ҳаракати иккинчи тур Лагранж тенгламалари билан ифодаланиб, қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 - 2m_2ll_2\dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2 - m_2ll_2\dot{q}_2^2\sin q_2 = U_1 + M_1,$$

$$a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + m_2ll_2\dot{q}_1^2\sin q_2 = U_2 + M_2,$$

$$a_{11}(q_2) = m_2l^2 + I_1 + I_2 + 2m_2ll_2\cos q_2,\quad a_{12}(q_2) = I_2 + m_2ll_2\cos q_2,\quad a_{22} = I_2,$$

бу ерда M_i–гравитация моменти, U_i–бошқарув кучлари томонидан яратилган момент $(i=1,2)$, вертикал текисликда айланадиган манипулятор учун

$$M_1 = -\left(m_1 l_1 + m_2 l\right) g \cos q_1 - m_2 l_2 g \cos\left(q_1 + q_2\right), \quad M_2 = -m_2 l_2 g \cos\left(q_1 + q_2\right),$$

ўринли бўлиб, бу ерда g –эркин тушиш тезланиши.

$U = U^o\left(t\right)$ дастурий бошқарув томонидан амалга ошириладиган манипуляторининг қандайдир $q^o\left(t\right)$ дастурий ҳаракатини танлаймиз:

$$U_1^0\left(t\right) = a_{11}\left(q_2^0(t)\right)\ddot{q}_1^0(t) + a_{12}\left(q_2^0(t)\right)\ddot{q}_2^0(t) - 2m_2 l l_2 \dot{q}_1^0(t)\dot{q}_2^0(t)\sin q_2^0(t) -$$

$$-m_2 l l_2 \sin q_2^0(t)\left(\dot{q}_1^0(t)\right)^2 - M_1^0(t), \tag{15}$$

$$U_2^0\left(t\right) = a_{12}\left(q_2^0(t)\right)\ddot{q}_1^0(t) + I_2\ddot{q}_2^0(t) - M_2^0(t),$$

бу ерда $M_1^0(t) = M_2^0(t) = 0$ горизонтал текисликдаги манипулятор ҳолати учун, манипулятор вертикал текисликдаги ҳоли учун эса

$$M_1^0\left(t\right) = -\left(m_1 l_1 + m_2 l\right) g \cos q_1^0\left(t\right) - m_2 l_2 g \cos\left(q_1^0\left(t\right) + q_2^0\left(t\right)\right),$$

$$M_2^0\left(t\right) = -m_2 l_2 g \cos\left(q_1^0\left(t\right) + q_2^0\left(t\right)\right). \tag{16}$$

$$x_k = q_k - q_k^0(t), \ k = 1, 2$$

дастурий ҳаракатнинг четланишларни киритамиз.

Дастурий ҳаракатнинг четланишларида системанинг $\dot{x} = x = 0$ нол ечимининг текис асимптотик турғунлигини таъминловчи таъсир қилувчи бошқарувини қуриш масалалари ўрганилган

$$U^{(1)} = U - U^0(t) = U^{(1)}(t, x, \dot{x}), \quad U^{(1)}(t, 0, 0) \equiv 0 .$$

Бошқача айтганда,

$$U = U^0(t) + U^{(1)}\left(t, q - q^0(t), \dot{q} - \dot{q}^0(t)\right)$$

бошқарувни, бу ерда манипуляторнинг $q^o\left(t\right)$ дастурий ҳаракат мувозанатини таъминлаб берувчи $U^0(t)$ (15) ва (16) га мувофиқ аниқланади.

Дастлабки икки бобнинг теоремаларига асосланиб, робот манипуляторининг дастурий ҳаракатларининг турли типлари учун масалаларни ечувчи янги бошқарув турлари асосланади.

$$U = U_r(t, x) + U_{st}(x, w) \tag{17}$$

кўринишдаги чиқувчи тескари алоқа асосида динамик бошқарув қонунини қуриш орқали манипуляторнинг $q_0(t)$ дастурий ҳаракат тезликларини ўлчамасдан мувозанатлаштириш масаласининг ечими алоҳида аҳамиятга эга бўлиб, бу ерда $U_r(t, x)$–дастурий бошқарув, $U_{st}(x, w)$ эса бошқарувнинг мувозантлаштирувчи қисмини ифодалайди ва уни қуйидаги кўринишда қидирамиз:

$$U_{st}(x, w) = -B_1 s(x) - B_2 w . \tag{18}$$

Бунда $B_1, B_2 \in R^{2\times 2}$ матрицалар вақтнинг бўлакли-узлуксиз функциялари бўлиб, $w \in R^2$ вектор

$$\dot{w} = -a\left(w + b\dot{x} + cs(x)\right), \tag{19}$$

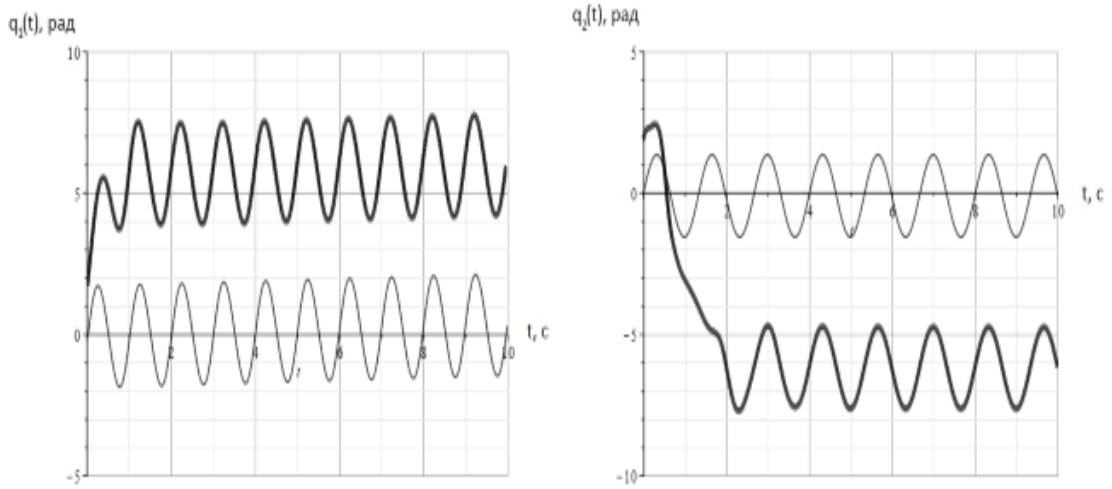
дифференциал тенгламани интеграллаш йўли билан топилади, бу ерда a, b ва c – қандайдир мусбат доимийлар, $s = s(x)$ функция эса $|s(x)| \le s_{m1}$, $\left\| \dfrac{\partial s(x)}{\partial x} \right\| \le s_{m2}$.

2- ва 3-Расмларда қуйида бошқарув параметрлари учун рақамли моделининг натижалари келтирилган: $a = 10$, $b = 0,5$, $c = 5$.

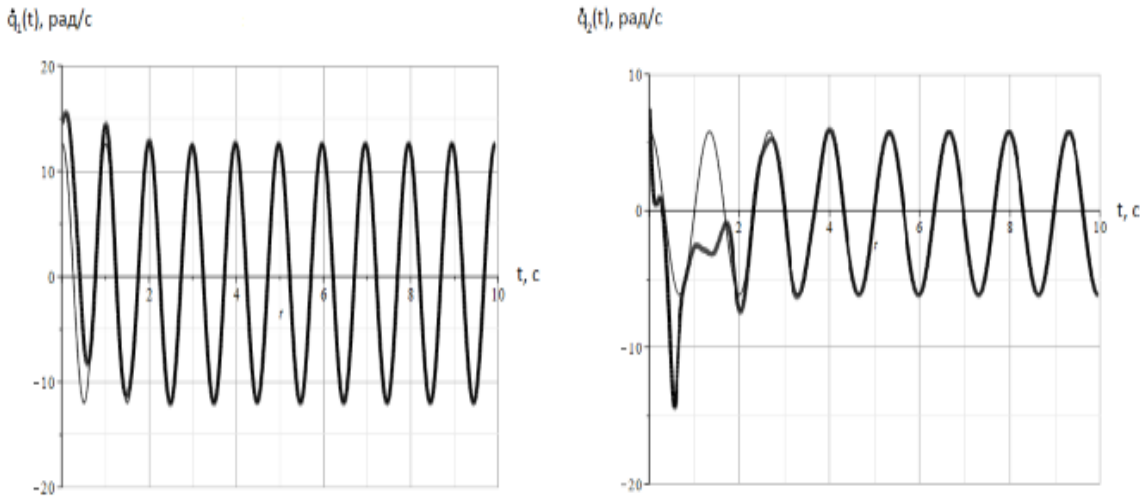
Дастурий ҳаракат қуйидаги кўринишда танланади:

$$q_{10}(t) = 2\sin 2\pi t \text{ рад}, \; q_{20}(t) = 1,5\sin 1,5\pi t \text{ рад}.$$

Бошланғич қийматлари қуйидагича танланади: $q_1(0) = 2$ рад, $q_2(0) = 2$ рад, $\dot{q}_1(0) = 2 + \dot{q}_{10}(0)$ рад/с, $\dot{q}_2(0) = 2 + \dot{q}_{20}(0)$ рад/с.



2-расм. Вақт ва дастурий ҳаракатга боғлиқ манипулятор бўғинларининг бурчак координаталарининг графиклари.



3-расм. Манипулятор бўғинларининг бурчак ва дастурий тезликларининг графиклари.

2- ва 3-Расм графикларини таҳлил қилиб, (17), (18), (19) бошқарув моменти таъсири остида манипуляторнинг ҳақиқий ҳаракати дастурга нисбатан 2π га каррали силжиш ҳаракатига интилишини хулоса қилишимиз мумкин.

Икки бўғинли манипулятор бошқаруви барча асосланган самарали типлари тегишли график натижалар тақдимоти рақамли моделлаштириш орқали ифода этилди.

ХУЛОСА

Диссертациянинг асосий хулосалари қуйидагилардан иборат.

1. Цилиндрик фазавий фазода оддий дифференциал тенгламалар системасининг топологик динамикаси қурилиб, бунда система ечимларининг муҳим сифат хоссаларини, яъни чегараланган ечимнинг мусбат лимит тўпламининг квазиинвариантлик хоссасини олишга имкон берди.
2. Қурилган динамика асосида бундай системанинг квазиинвариантлик тамойили, асимптотик турғунлиги ҳақидаги теоремалари исботланди.
3. Чекли кечикувчи автоном бўлмаган функционал дифференциал тенгламанинг турғунлик хоссаларини ўрганишда Ляпуновнинг скаляр функциясини қўллашда янги натижалар олинган.
4. Ушбу функция томонидан аниқланувчи интеграл эгри чизиқли кесмалари тўпламида мусбат бўлмаган ҳосилали Ляпунов функцияси мавжудлик фаразида тенглама ечимининг мусбат лимит тўпламининг локализацияси бўйича янги теоремалар, шунингдек, қисман асимптотик турғунлик ҳақидаги теорема исботланган.
5. Тасдиқланган теоремалар асосида икки бўғинли манипуляторнинг янги бошқарув моделлари ишлаб чиқилди. Бундай манипулятор бўғинларининг горизонтал ва вертикал жойлашуви билан дастурий ҳаракатини мувозанатлаштириш масаласи келтирилган.
6. Горизонтал манипуляторнинг ўрнатилган ҳаракатларини ярим глобал мувозанатини ва глобал тортишишни таъминлайдиган чизиқли бўлмаган регуляторнинг янги шакли асосланган.
7. Манипулятор бўғинларининг ўзгаришига қараб, дастурий ҳаракат тезлигини ўлчаш билан ва бундай ўлчашларсиз фильтрдан фойдаланиб мувозанатни таъминловчи чизиқли бўлмаган бошқарув тизими асослаб берилди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БУРАНОВ ЖАМШИД ИМАМКУЛОВИЧ

МЕТОД СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.1.PhD/FM668.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И. Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный рководитель:	**Хусанов Джумма Хусанович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
	Мамадалиев Нумонжон Олимжонович доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Ульяновский государственный университет (Россия)**

Защита диссертации состоится « 29 » июля 2022 года в 17:30 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 144). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 15 » июля 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от « 15 » июля 2022 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.А. Азамов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Теория устойчивости по Ляпунову представляет собой значительную область качественного анализа дифференциальных уравнений. Она получила большое применение в изучении динамических свойств систем и процессов, моделируемых этими уравнениями, в решении важных прикладных задач физики, биологии, автоматического управления, экономики и других разделов науки и техники. Несмотря на огромное количество публикаций, посвященных теоретическому и прикладному развитию этой теории, исследования в этой области остаются актуальными. Это объясняется значительным расширением классов дифференциальных и других уравнений, для которых применяется теория устойчивости, а также значительным ростом прикладных задач, эффективное решение которых при современных требованиях надежности, точности и других факторах требует использования и разработки строгих математических методов исследования качественных свойств решений сложных модельных уравнений.

При этом имеются достаточные сложности в применении уже известных теоретических результатов по теории устойчивости в решении прикладных задач. В частности, трудности применения общих теорем прямого метода Ляпунова связаны с отсутствием алгоритмов построения функций и функционалов Ляпунова, удовлетворяющих условиям этих теорем. Соответствующие решения достигаются развитием прямого метода путем ослабления требований к функции и функционалу Ляпунова, расширения класса используемых функций и функционалов в зависимости от динамических свойств исследуемой системы или процесса. В связи с этим: найти свойство квазиинвариантности неавтономных дифференциальных уравнений и доказать теорему о локализации положительного предельного множества, кроме того, определить устойчивость и асимптотическую устойчивость решения системы по части с помощью вектор-функции Ляпунова является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране особое внимание уделяется развитию фундаментальной и прикладной математики, одним из важных разделов которой являются дифференциальные уравнения. Научные исследования по качественной теории дифференциальных уравнений, в том числе, по одному из ее разделов – теории устойчивости, имеют широкое применение в различных областях науки и техники, таких, как экономика, механика, управление техническими системами и физическими процессами и другие. Такие исследования активно ведутся отечественными и зарубежными учеными и рассматриваются в качестве основной задачи фундаментальных исследований.[1]

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и № ПП4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и техники в республике. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Широкое применение дифференциальных уравнений, ее качественной теории в самых различных областях науки и техники стимулирует активные исследования многочисленных ученых разных стран, в том числе Узбекистана (академики И.С. Куклис и А.А. Азамов, профессоры Ш.Р. Шарипов и Х.Р. Латипов и др.). Одним из важных разделов качественной теории дифференциальных уравнений является теория устойчивости, основу которой являются труды А.М. Ляпунова. Одним из эффективных методов как качественной теории дифференциальных уравнений, так и теории устойчивости является метод сравнения, начало которой считается работы С.А. Чаплыгина и Т. Важевского. Теоретическим исследованиям по применению метода сравнения в исследовании устойчивости дифференциальных уравнений посредством скалярных и векторных функций Ляпунова и их применению для решения важных прикладных задач по управлению различными техническими системами и объектами посвящены работы известных ученых: Р. Беллман, К.Кордуняну, В.М. Матросов, В. Лакшмикантам, Ф.Н. Бейли и других.

Одно из новых направлений теории устойчивости – устойчивость по части переменных, развитию которого послужили работы В.В. Румянцева, К.Кордуняну, Л.Хатвани, А.С. Озиранера, В.И. Воротникова и других, имеет важные приложения в решении задач космодинамики, управления сложными механическими системами и других. Достаточно широкий класс дифференциальных уравнений составляют фазовые системы. Различным задачам по динамике этих систем, включая задачи об устойчивости, и их приложению к разработке систем синхронизации, радиолокации, управлению баллистическими ракетами посвящены работы Ю.Н. Бакаева, Е.А. Барбашина, Г.А. Леонова и других ученых.

В работах В. Вольтерра в начале XX века были систематически изучены функционально-дифференциальные уравнения. Основным положениям теории этих уравнений посвятили свои работы Р.Беллман, А.Д. Мышкис, Н.Н. Красовский, Дж.Хейл, Т.А. Бартон и другие известные ученые. Большой вклад в развитие качественной теории интегро-дифференциальных уравнений типа

Вольтерра внесли работы Н.Н. Назарова, Ф.Бадалова, А.Н.Филатова, Д.Х.Хусанова и других узбекских ученых. Прямой метод исследования устойчивости функционально-дифференциальных уравнений разделяют на метод функционалов и метод функций Ляпунова. Основной метода функционалов Ляпунова является представление решений функционально-дифференциальных уравнений в функциональном пространстве. Его развитию посвящены работы Н.Н.Красовского, Дж. Хейла, Т.А. Бартона, Л. Хатвани, Д.Х. Хусанова и других ученых. Метод функций Ляпунова для функционально-дифференциальных уравнений представляет собой соответствующую модификацию теорем Ляпунова об устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта модификация получена в работах Н.Н. Красовского, Б.С. Разумихина, Й.Хэддока и Й. Тереки и других ученых. Исследования в области теории устойчивости во многом стимулировались и продолжают стимулироваться в интересах прикладной проблемы управления робототехническими системами. Математические методы конструирования структур управления такими системами, в том числе, роботами-манипуляторами, обоснованные в работах С. Аримото, М. Спонга, Р. Томея, А. Лориа, продолжают оставаться предметом многочисленных исследований.

Связь темы диссертации с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в рамках планов научно-исследовательских работ Института математики имени В.И. Романовского.

Целью исследования является развитие метода функций Ляпунова в исследовании свойств устойчивости решений неавтономных систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений и применение этого метода к задачам управления движением роботов-манипуляторов.

Задачи исследования состоят в следующем:

развитие метода сравнения решений обыкновенных дифференциальных уравнений с вектор-функцией Ляпунова в исследовании свойств устойчивости по части переменных;

развитие метода функций Ляпунова в исследовании свойств устойчивости по части переменных функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием;

применение доказанных теорем об устойчивости в задаче об управлении двухзвенным роботом-манипулятором.

Объектом исследования является прямой метод Ляпунова в теории устойчивости нелинейных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений и его применения в задачах об управлении робототехническими системами.

Предметом исследования:

Качественная теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости, теория функционально-дифференциальных уравнений.

Методы исследования. В диссертации используются методы качественного анализа обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений в теории устойчивости и управления, соответствующих разделов математического и функционального анализа.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

построена топологическая динамика неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в цилиндрическом фазовом пространстве;

проведено развитие метода векторных функций Ляпунова в исследовании свойств устойчивости, указанной выше системы; доказаны теоремы о принципе инвариантности, асимптотической устойчивости и неустойчивости по всем и части переменных;

доказаны новые теоремы типа Ляпунова-Разумихина о частичной устойчивости нулевого решения векторного функционально-дифференциального уравнения с правой частью;

представлены различные новые законы управления двухзвенным роботом-манипулятором.

Практические результаты исследования. Обоснованы новые решения задачи о стабилизации установившихся и программных движений двухзвенного манипулятора. Новизна этих результатов состоит в управлении при неполном измерении фазовых координат и моделировании управляемых движений в цилиндрическом фазовом пространстве.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и использованием известных методов и результатов качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости. Результаты построения новых законов управления двухзвенным роботом-манипулятором подтверждены численным моделированием на основе специально разработанных программ на языке C++.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Полученные в диссертации теоретические результаты представляют собой развитие метода функций Ляпунова в исследовании устойчивости нелинейных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений с учетом качественных свойств их решений.

Разработанная методика решения задач управления двухзвенным манипулятором может иметь эффективное применение в построении структуры управления многозвенными манипуляторами и другими робототехническими системами.

Внедрение результатов исследования. На основе результатов, полученных методами сравнения для задач устойчивости функционально-дифференциальных уравнений в цилиндрическом фазовом пространстве:

из нового многообразия законов управления, представленного для двухзвенного робота-манипулятора, следует, что в зарубежных грантовых проектах РФФИ №19-01-00791а «Математические основы конструирования

структур нелинейного управления механическими системами» и РФФИ №20-31-90120 «Методы конструирования, алгоритмы и программы управления мобильными роботами-манипуляторами» разработаны соответствующие алгоритмы и программы управления. (справка Ульяновского государственного университета от 16 мая 2022 г. № 98/03, Россия). Применение научного результата позволило разработать новые модели мобильных роботов-манипуляторов, соответствующие алгоритмы и программы управления;

асимптотическая устойчивость для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в цилиндрическом фазовом пространстве была использована при разработке устойчивость движений горизонтального манипулятора в зарубежном грантовом проекте №МД-758.2022.1.1 «Развитие математических моделей дробной динамики с целью исследования колебательных процессов и процессов с насыщением» (справка Камчатского государственного университета от 23 мая 2022 г. № 17-12, Россия). Применение научного результата позволило измерить скорость звеньев манипулятора и создать программное обеспечение линейной структуры управления, обеспечивающего стабилизацию программного движения с измерением скоростей звеньев манипулятора и без такого измерения с использованием фильтра.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации изложено в научных докладах на 8 международных и 4-х республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 19 научных работ, из них 7 статей опубликованы в журналах, которые входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD), в том числе 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Объем диссертации 114 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснованы актуальность темы диссертации и его востребованность, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и техники в республике, приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, внесена научная новизна и изложен практический результат исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Метод сравнения в задачах об устойчивости»,** основным объектом исследования является система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = X(t,x),\ X(t,0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $t \in R$, $R-$вещественная ось, $x \in R^n$, $R^n - n-$мерное векторное пространство с некоторой нормой $\|x\|$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $X(t,x) = \left(X_1(t,x), X_2(t,x), ..., X_n(t,x)\right)^T -$вектор-функция, $(\cdot)^T -$операция транспонирования, $X_k(t,x)$ $(k = 1,2,...,n)-$составляющие функции $X(t,x)$, определенные и непрерывные по $(t,x) \in R \times R^n$, удовлетворяющие условиям существования, единственности, непрерывной зависимости решений системы (1) от $(t_0, x_0) \in R \times R^n$, их продолжимости при $t \geq t_0$ для $t_0 \in R^+$--множество действительных положительных чисел.

Система уравнений (1) рассматривается при дополнительном предположении: вектор-функция

$$X(t,x) = \left(X_1(t,x), X_2(t,x), ..., X_n(t,x)\right)^T$$

такова, что вещественные функции $X_i(t,x)$, $i = 1,2,...,n$ определены в области $R \times R^n$ и таковы, что переменную x можно разделить $x^T = \left(y^T, z^T\right)$, $y \in R^m$, $z \in R^s$, $m + s = n$ таким образом, что функция $X(t,x)$ является $2\pi-$периодической по переменной z, т.е. $X\left(t, y, z + 2\pi 1_j\right) = X(t,y,z)$, $\left(z + 2\pi 1_j\right)_j = z_j + 2\pi$; $\left(z + 2\pi 1_j\right)_i = z_i$; $i \neq j$; $i, j = 1,2,...,s.$ Решения этой системы можно рассматривать в цилиндрическом фазовом пространстве $R \times R^m \times P^s$, $P^s = \left\{z \in R^s : -\pi \leq z_j \leq \pi,\ j = 1,2,...,s\right\}$.

Положим, что $\|y\|$ есть некоторая норма вектора y в R^m, $\|z\|-$норма вектора z в R^s, $\|x\| = \|y\| + \|z\|$, L^1-класс функций $\lambda : R \to R$, интегрируемых локально.

Введем множество F функций $f : R \times R^n \to R^n$, периодических по z с периодом 2π аналогично функции X, непрерывных по $x \in R^n$ при фиксированном $t \in R$, измеримых по t при фиксированном $x \in R^n$, и удовлетворяющих следующим условиям: для каждого компактного множества $K \subset R^m$ существуют функции $\lambda = \lambda_1(t, f, K)$ и $\lambda = \lambda_2(t, f, K)$ $\left(\lambda_1, \lambda_2 \in L^1\right)$ такие, что для всех $(t,x), \left(t, x^{(1)}\right), \left(t, x^{(2)}\right) \in R \times K \times P^s$ выполнены неравенства

$$\left\| f(t,x) \right\| \leq \lambda_1(t, f, K),$$

$$\left\| f\left(t, x^{(2)}\right) - f\left(t, x^{(1)}\right) \right\| \leq \lambda_2(t, f, K) \left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|,$$

при этом функция $\lambda_1(t, f, K)$ равномерно непрерывна в среднем на R, а $\lambda_2(t, f, K)$ равностепенно ограничена на R.

Для каждой функции $f \in F$ можно определить систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x),$$

решения которой можно рассматривать в пространстве $R \times R^m \times P^s$, при этом для каждой начальной точки $(t_0, y_0, z_0) \in R \times R^m \times P^s$ решение $x = x(t, t_0, x_0) = \left(y(t, t_0, y_0, z_0), z(t, t_0, y_0, z_0)\right)^T$ будет существовать, являться единственным и продолжимым на некотором интервале $\left(\alpha(f, t_0, x_0), \beta(f, t_0, x_0)\right)$, $\alpha < t_0 < \beta$, так, что если $\alpha > -\infty$ (или $\beta < \infty$), то $\left\|y(t, t_0, x_0)\right\| \to \infty$ при $t \to \alpha$ (соответственно, $\left\|y(t, t_0, x_0)\right\| \to \infty$ при $t \to \beta$).

Вводится сходимость: последовательность $\{f_k \in F\}$ сходится к $f^* \in F$, если для каждого $t \in R$ и каждого $x = (y, z) \in R^m \times P^s$

$$\left\| \int_0^t \left(f^{(k)}(\tau, x) - f^*(\tau, x) \right) d\tau \right\| \to 0$$

при $k \to \infty$. Пространство F с такой сходимостью метризуемо и компактно.

Предположим, что функция X исходной системы (1) принадлежит множеству F, $X \in F$. Соответственно, системе (1) можно сопоставить семейство предельных систем

$$\dot{x} = X^*(t, x), \quad X^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \to \infty} \int_0^t X(t_k + \tau, x) d\tau, \tag{2}$$

где функция $X^* \in F$ определяется в зависимости от последовательности $t_k \to \infty$.

Определение 1. Точка $p = \left(p^{(1)}, p^{(2)}\right) \in R^m \times P^s$ называется положительной предельной точкой решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), если существуют последовательности $t_k \to \infty$ и $L^{(k)} = \left(l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, ..., l_s^{(k)}\right)$, $l_j^{(k)} \in Z$, $j = 1, 2, ..., s$, такие, что

$$y(t_k, t_0, x_0) \to p^{(1)}, \quad z(t_k, t_0, x_0) - 2\pi L^{(k)} \to p^{(2)} \text{ при } k \to \infty. \tag{3}$$

Множество $\omega^+\left(x(t, t_0, x_0)\right)$ всех таких точек есть положительное предельное множество.

Определение 2. Множество $M \subset R^m \times P^s$ называется квазиинвариантным по отношению к системе (1), если $\forall p = \left(p^{(1)}, p^{(2)}\right) \in M$ найдется предельная система (2), такая, что ее решение $x = x(t, 0, p)$ таково, что $x(t, 0, p) \in M$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$ $(\alpha < 0 < \beta)$, где (α, β) – интервал определения этого решения.

Теорема 1. Пусть $x = x(t, t_0, x_0)$ есть некоторое решение системы (1), ограниченное по y компактом $K \subset R^m$ при всех $t \geq t_0$. Тогда положительное предельное множество решения $x = x(t, t_0, x_0)$ связно, компактно и квазиинвариантно.

После ввождения (3) множество предельнкх точек, водим следующие классы функций.

1. Класс $\mathcal{K}_1$ векторных функций $V = (V_1, V_2, ..., V_r)^T$, $V : R \times R^n \to R^r$, являющихся ограниченными и равномерно непрерывными на каждом множестве $R^+ \times K_1$, где $K_1 = \{x \in R^n : \|x\| \leq H_1 = const > 0\}$, $\|V\|$ – норма в R^r.

2. Класс $\mathcal{K}_2$ векторных функций $U : R \times R^r \to R^r$, ограниченных и равномерно непрерывных на каждом множестве $K_2 = \{u \in R^r : \|u\| \leq H_2 = const > 0\}$.

3. Класс $\mathcal{K}_3$ векторных функций $W : R \times R^m \times P^s \times R^r \to R^r$, 2π – периодических по третьему аргументу, ограниченных и равномерно непрерывных на каждом множестве $R \times K_1 \times P^s \times K_2$.

Пусть функции X^*, V^*, U^*, W^* определяются для некоторого набора (X, V, U, W) функций $X \in F$, $V \in \mathcal{K}_1$, $U \in \mathcal{K}_2$, $W \in \mathcal{K}_3$ относительно одной и той же последовательности $\tau_k \to \infty$. Соответствующий набор функций $\{X^*, V^*, U^*, W^*\}$ назовем предельной совокупностью.

Пусть для системы (1) найдется непрерывно дифференцируемая функция $V \in \mathcal{K}_1$, производная которой в силу этой системы представима в виде

$$\begin{gathered} \dot{V}(t, x) = U(t, V(t, x)) + W(t, x, V(t, x)), \\ V(t, 0) = 0, \ U(t, 0) = 0, \ W(t, 0, 0) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где функция $U = U(t, u)$, $U \in \mathcal{K}_2$, и является квазимонотонной по возрастанию и непрерывно дифференцируемой по $u \in R^r$, функция $W = W(t, x, u)$, $W \in \mathcal{K}_3$, и удовлетворяет неравенствам $W_j(t, x, u) \leq 0$ $(j = 1, 2, ..., r)$ для любых $(t, x, u) \in R^+ \times R^m \times P^s \times R^r$.

Из равенства (4) следует, что функция $V(t, x)$ является вектор-функцией сравнения, а система

$$\dot{u} = U(t, u) \tag{5}$$

является системой сравнения.

Если $V = V(t, x)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению (4), при этом $V(t_0, x_0) = V_0$, а $u = u(t, t_0, V_0)$ есть решение (5), определенное на интервале $[t_0, t_0 + \beta)$, $\beta > 0$, то для всех $t \in [t_0, t_0 + \beta)$ на решении $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) выполняется неравенство $V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq u(t, t_0, V_0)$.

Так как $U \in \mathcal{K}_2$, то система (5) является предкомпактной и для неё существует семейство предельных систем сравнения

$$\dot{u} = U^*(t,u),\ U^* \in \mathcal{K}_2. \tag{6}$$

Предположим, что для любого компакта $K = K(H) = \{u \in R^r : \|u\| \le H > 0\}$ существуют числа $M(K)$ и $\alpha(K)$, такие, что матрица Φ для любых $(t,t_0,u_0) \in R^+ \times R^+ \times K$ удовлетворяет условиям

$$\|\Phi(t,t_0,u_0)\| \le M(K),\ \det\Phi(t,t_0,u_0) \ge \alpha(K) > 0. \tag{7}$$

Теорема 2. Допустим, что найдется векторная функция Ляпунова $V \in \mathcal{K}_1$, такая, что

1) $\|V(t,y,z)\| \to \infty$ равномерно по $(t,z) \in R^+ \times P^s$ при $\|y\| \to \infty$;

2) $V(t,y,z)$ ограничена при $\|y\| \le H = const > 0$, $\left\|V(t,y,z)\right\| \le m(H)$ $\forall (t,y,z) \in R^+ \times \{y \in R^m : \|y\| \le H\} \times P^s$;

3) производная $\dot{V}$ удовлетворяет равенству (4);

4) решения системы сравнения (5) удовлетворяют условию (7);

5) каждое решение $u(t,t_0,u_0)$ системы сравнения (5) ограничено при всех $t \ge t_0$, т. е. $\left\|u(t,t_0,u_0)\right\| \le m_0 = const \quad \forall t \ge t_0$.

Тогда для каждого решения $x(t,t_0,x_0)$ системы (1) выполняется соотношение $\omega^+(x(t,t_0,x_0)) \subset M$, где M – максимальное инвариантное подмножество множества $\left\{W^*\left(t,x,u^*(t)\right) = 0\right\}$, $u^*(t)$ есть решение соответствующей предельной системы сравнения (6) с начальным условием $u^*(0) = V^*(0,p)$ для выбранной точки $p \in \omega^+\left(x(t,t_0,x_0)\right)$.

Для вектор-функции $V = V(t,x)$, $V \in \mathcal{K}_1$, определим скалярную функцию $\bar{V} = \bar{V}(t,x)$ согласно следующему соотношению

$$\bar{V}(t,x) = \sum_{i=1}^{r} V_i(t,x).$$

Заметим, что согласно условию $V \in \mathcal{K}_1$, функция V удовлетворяет также неравенству $\|V(t,x)\| \le a_2(\|x\|)$, где $a_2 \in \mathcal{K}$.

Теорема 3. Предположим, что для системы (1) можно найти векторную функцию $V = V(t,x)$, такую, что:

1) $a_1(\|y\|) \le \bar{V}(t,x) \le a_2(\|x\|)$ $\forall (t,y,z) \in R^+ \times R^m \times P^s$, $a_1, a_2 \in \mathcal{K}$, $a_1(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to \infty$;

2) выполнены условия 3 и 4 Теоремы 2;

3) решение $u = 0$ системы сравнения (5) равномерно устойчиво;

4) для каждой предельной совокупности $\left\{X^*, V^*, U^*, W^*\right\}$ множество $\left\{W^*\left(t, x, u^*(t)\right)=0\right\} \bigcap \left\{\bar{V}^*(t, x)>0\right\}$ не содержит целых решений системы (2), где $u^*(t) \neq 0$ есть любое ненулевое решение системы (6).

Тогда решение $x=0$ системы (1) глобально равномерно асимптотически устойчиво по y.

Теорема 4. Предположим, что для системы (1) можно найти векторную функцию $V=V(t, x)$, такую, что выполнены условия 1–3 Теоремы 3, а также:

4) $V\left(t, 0, z+2\pi 1_j\right), \quad j=1,2,\ldots,s$;

5) для каждой предельной совокупности $\left\{X^*, V^*, U^*, W^*\right\}$ множество $\left\{W^*\left(t, x, u^*(t)\right)=0\right\} \setminus \left\{x \in R^n : y=0,\ z=\pi L^{(k)}\right\}$ не содержит решений системы (2), где $u^*(t) \neq 0$ есть любое ненулевое решение системы (6).

Тогда:

1) решение $x=0$ и соответственно множество положений равновесия $\left\{x \in R^n : y=0,\ z=2\pi L^{(k)}\right\}$ системы (1) равномерно асимптотически устойчивы по y;

2) множество положений равновесия $\left\{x \in R^n : y=0,\ z=\pi L^{(k)}\right\}$ системы (1) является глобально притягивающим по y.

Во второй главе, названной **«Об устойчивости по части переменных функционально-дифференциальных уравнений»**, на основе метода сравнения с функцией Ляпунова исследуется задача об устойчивости по части переменных решений неавтономных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) запаздывающего типа с конечным запаздыванием.

Вводятся следующие обозначения: $R^n - n-$мерное действительное пространство векторов $x \in R^n$ с заданной нормой $|x|$, $h>0-$некоторое число, $C-$банахово пространство непрерывных функций $\varphi:[-h, 0] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\|=\max\left\{|\varphi(s)|,\ -h \leq s \leq 0\right\}$. Для непрерывной функции $x: R \to R^n$ и каждого $t \in R$ функция $x_t \in C$ задается с помощью следующего равенства $x_t(s)=x(t+s),\ -h \leq s \leq 0.$

Рассматривается система ФДУ запаздывающего типа с конечным запаздыванием

$$\dot{x}=X(t, x_t), \quad X(t, 0)=0, \tag{8}$$

где $x \in R^n$, $t \in R^+$, функция $X=X(t, \varphi)$, $X: R^+ \times C \to R^n$ определена, вполне непрерывна в области $R^+ \times C$ и такова, что имеет место следующие предположения.

Предположение 1. Правая часть системы (8) $X = X(t,\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной φ равномерно относительно t. Иными словами, $\forall K \subset C$ ($K-$компактное множество) $\exists L = L(K): \forall \varphi_1, \varphi_2 \in K$ и $\forall t \in R^+$ имеет место следующее соотношение

$$\left|X(t,\varphi_2) - X(t,\varphi_1)\right| \le L\left\|\varphi_2 - \varphi_1\right\|. \tag{9}$$

Предположение 2. Правая часть системы (8) $X = X(t,\varphi)$ является ограниченной и равномерно непрерывной функцией по переменным $(t,\varphi) \in R^+ \times K$ $\forall K \subset C$ ($K-$компактное множество), т.е. $\forall K \subset C$ $\exists M = M(K)$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$: $\forall (t,\varphi) \in R^+ \times K$, $\forall (t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2) \in R^+ \times K: \left|t_2 - t_1\right| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K: \left|\varphi_2 - \varphi_1\right| < \delta$, имеют место соотношения

$$\left|X(t,\varphi)\right| \le M, \quad \left|X(t_2,\varphi_2) - X(t_1,\varphi_1)\right| < \varepsilon.$$

Из Предположения 1 следует, что $\forall (\alpha,\varphi) \in R^+ \times C$ найдется решение уравнения (8) $x = x(t,\alpha,\varphi)$, которое определено для всех $t \in \left[\alpha - h, \beta\right)$ $(\beta > \alpha)$, удовлетворяет начальному условию $x_\alpha = \varphi$ и является единственным и непродолжаемым, при этом если $\left|x(t,\alpha,\varphi)\right| \le r$ при $t \ge \alpha - h$, то $\beta = +\infty$ и семейство функций $\{x_t(\alpha,\varphi): t \ge \alpha\}$ предкомпактно в $\bar{C}_r$, $\bar{C}_r = \left\{\varphi \in C: \left\|\varphi\right\| \le r\right\}$.

Определим последовательность строго возрастающих чисел $\{r_j\}$, такую, что $r_j \to \infty$ при $j \to \infty$. $\forall r_j$ найдем множество $K_j \subset C$ всех функций $\varphi \in C$, таких, что для любых $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$ выполняются неравенства

$$\left|\varphi(s)\right| \le r_j, \qquad \left|\varphi(s_2) - \varphi(s_1)\right| \le L(\left|s_2 - s_1\right|).$$

Положим $\Gamma = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$ и введем множество непрерывных функций $F = \left\{f: R \times \Gamma \to R^n\right\}$. Для каждой функции $f \in F$ и любого $\tau \in R^+$ определим сдвиг $f^\tau \in F$ согласно соотношению $f^\tau(t,\varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Легко заметить, что для функции $f \in F$ семейство ее сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R^+\} \subset F$.

В пространстве F можно ввести сходимость в компактно открытой топологии следующим образом.

Последовательность $\{f_l \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R \times \Gamma$ ($K'-$ компактное множество) и $\forall \varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\left|f_l(t,\varphi) - f(t,\varphi)\right| < \varepsilon$ $\forall l > N = N(\varepsilon)$ и $\forall (t,\varphi) \in K'$. Такая сходимость является равномерной на каждом компактном множестве $K' \subset R \times \Gamma$.

Лемма 1. Пусть выполнены Предположения 1 и 2. Тогда множество сдвигов $\{X^\tau : \tau \in R^+\}$ правой части системы (8) является предкомпактным в пространстве F.

Определение 3. Функция $X^*: R\times\Gamma\to R^n$ называется предельной к X, если $\exists t_l\to+\infty$: $X^{(l)}(t,\varphi)=X(t_l+t,\varphi)$ сходится к $X^*(t,\varphi)$ в F. Замыкание семейства $\{X^\tau:\tau\in R^+\}$ в F называется оболочкой $S^+(X)$. Уравнение

$$\dot{x}(t)=X^*(t,x_t) \tag{10}$$

называется предельным к (8).

Вводятся: класс $K_{\mathbb{1}}$ функций $V=V(t,x)$, $V:R\times R^n\to R$, являющихся ограниченными и равномерно непрерывными $\forall R\times K$ ($K\subset R^n-$ компактное множество), и классы $K_{\mathbb{2}}$ и $K_{\mathbb{3}}$ функций $U:R\times R\to R$ и функционалов $W:R\times C\to R$ соответственно, ограниченных и равномерно непрерывных по $(t,u)\in R\times K_1$ и $(t,\varphi)\in R\times K_2$ $\forall K_1\subset R$ и $\forall K_2\subset C$ (K_1 и K_2 – компактные множества).

Рассмотрим систему (8) и построим для нее функцию Ляпунова $V=V(t,x)$, $V\in K_{\mathbb{1}}$.

Определим производную по времени функции $V(t,x)$ в силу системы (8) согласно следующей формуле

$$\dot{V}(t,\varphi)=\frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial t}+\left(\left.\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right|_{x=\varphi(0)}\right)^T X(t,\varphi).$$

Предположим, что функционал $\dot{V}(t,\varphi)$ можно представить в виде

$$\dot{V}(t,\varphi)=U\big(t,V(t,\varphi(0)\big)+W(t,\varphi), \tag{11}$$

где функция $U\in K_{\mathbb{2}}$, функционал $W=W(t,\varphi)$, $W\in K_{\mathbb{3}}$, удовлетворяет неравенству $W\le 0$ на множестве

$$\Omega_t[V,u]=\{\varphi\in C:\ V\big(t+s,\varphi(s)\big)\le u\big(t+s,t,V(t,\varphi(0))\big),\ -h\le s\le 0\}.$$

Здесь $u(t,\alpha,u_0)-$решение уравнения

$$\dot{u}=U(t,u), \tag{12}$$

проходящее через точку $(\alpha,u_0)\in R^+\times R,$ определенное при всех $t\in R.$

Для функций $U\in K_{\mathbb{2}}$ и $W\in K_{\mathbb{3}}$ определим множества предельных функций $\{U^*\}$ и предельных функционалов $\{W^*\}$.

Уравнению (12) поставим в соответствие множество предельных уравнений

$$\dot{u}=U^*(t,u),\ U^*\in K_{\mathbb{2}}. \tag{13}$$

Предположение 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) решения $u(t,t_0,u_0)$ уравнения (12) являются единственными $\forall(t_0,u_0)\in R^+\times R;$

2) существует функция $\Phi(t,u_0)=\dfrac{\partial u(t,0,u_0)}{\partial u_0}$, $d_1\le\Phi(t,u_0)\le d_2$,

где $d_1, d_2 > 0$ – некоторые постоянные, при этом функция $\Phi(t, u_0)$ является непрерывной и ограниченной $\forall t \geq 0$ и $\forall u_0 \in R$.

Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть некоторое ограниченное решение системы (8), т.е. найдется некоторое число $H > 0$ такое, что $|x(t, \alpha, \varphi)| < H \quad \forall t \geq \alpha - h$.

Определим вспомогательную функцию $w(t, x)$ из равенства

$$V(t, x) = u(t, 0, w(t, x)). \tag{14}$$

Используя метод нелинейной вариации параметров и учитывая, что $u(t, 0, u_0)$ является единственным решением уравнения (12) с начальным условием $u(0) = u_0$ и определенным $\forall t \geq 0$, функцию $w(t, x)$ можно найти.

Продифференцируем обе части равенства (14) по времени в силу системы (8), получим:

$$\dot{V}(t, \varphi) = \left.\frac{\partial u(t, 0, u_0)}{\partial t}\right|_{u_0 = w(t, \varphi(0))} + \left.\frac{\partial u(t, 0, u_0)}{\partial u_0}\right|_{u_0 = w(t, \varphi(0))} \cdot \dot{w}(t, \varphi).$$

Отсюда, учитывая равенство (11), получим $\dot{w}(t, \varphi) = \dfrac{W(t, \varphi)}{\Phi(t, w(t, \varphi(0)))}$.

Заметим, что функция $w(t, x)$ является непрерывно дифференцируемой. Отсюда следует, что для этой функции так же, как и для функции $V(t, x)$, можно найти множество предельных функций $\{w^*(t, x)\}$, такое, что

$$V^*(t, x) = u^*(t, w^*(t, x)).$$

Для каждого числа $c \in R$ и любого $t \in R$ определим множества

$$N(t, c) = \left\{\varphi \in \Gamma : \sup_{-h \leq s \leq 0} w^*(t + s, \varphi(s)) = c\right\}, \quad M(t, c) = \left\{\varphi \in N(t, c) : w^*(t, \varphi(0)) = c\right\}.$$

Теорема 5. Пусть решение $x(t, \alpha, \varphi_0)$ системы (8) ограничено некоторым компактом $K \subset R^n$ для всех $t \geq \alpha - h$, и существует функция Ляпунова $V = V(t, x)$, $V \in K_{\mathbb{1}}$, такая, что имеет место соотношение (11).

Тогда $\exists c \in R$ и $\forall \varphi^* \in \omega^+(\alpha, \varphi_0)$ $\exists(X^*, V^*, w^*, U^*, W^*)$ с предельными функциями, определяемыми одной и той же последовательностью $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, а также существует решение $x = x^*(t, 0, \varphi^*)$ предельного уравнения (10), такое, что $x_t^*(0, \varphi^*) \in N(t, c)$ и $\forall \tau \in R$ $\exists \nu \in [\tau - h, \tau] : x_\nu^*(0, \varphi^*) \in M(\nu, c)$ и $x_\nu^*(0, \varphi^*) \in \{\varphi \in C : W^*(\nu, \varphi) = 0\}$.

Теорема 6. Пусть найдется определенно-положительная по переменной y функция Ляпунова $V = V(t, x)$, $V \in K_{\mathbb{1}}$:

1) производная $\dot{V}(t, \varphi)$ удовлетворяет соотношению (11);

2) нулевое решение $u = 0$ уравнения сравнения (12) устойчиво;

3) $\forall\left(X^*,U^*,W^*,V^*\right)$ и $\forall c\geq 0$ не существует ненулевого по переменной y решения $x=x^*\left(t,0,\varphi^*\right)$ уравнения (10): $x_t^*\left(0,\varphi^*\right)\in N(t,c)$ $\forall t\in R$ и $\forall\tau\in R$ $\exists\nu\in\left[\tau-h,\tau\right]$: $x_\nu^*\left(0,\varphi^*\right)\in M(\nu,c)$ и $W^*\left(\nu,x_\nu^*\left(0,\varphi^*\right)\right)=0$.

Тогда нулевое решение $x=0$ системы (8) асимптотически $y-$устойчиво.

Если, кроме того, нулевое решение $u=0$ уравнения (12) равномерно устойчиво, то нулевое решение $x=0$ системы (8) равномерно асимптотически $y-$устойчиво.

Замечание 1. Теоремы 5 и 6 представляет собой развитие и обобщение известных теорем об устойчивости решений ФДУ с конечным запаздыванием.

В третьей главе, названной **«Управление движением двухзвенного манипулятора»**, рассмотрена задача об управлении движением двухзвенного робота-манипулятора, модель которого представлена на Рисунке 1. Первое звено G_1 соединено с неподвижным основанием G_0 при помощи идеального цилиндрического шарнира O_1. Второе звено G_2 прикреплено таким же шарниром O_2 к первому звену. Звенья манипулятора являются абсолютно жесткими телами и могут двигаться либо только в горизонтальной плоскости, либо только в вертикальной. Обозначим через C_i центр масс звена G_i $\left(i=1,2\right)$. Будем считать, что точка C_1 лежит на луче O_1O_2, а точка C_2 не совпадает с точкой O_2.

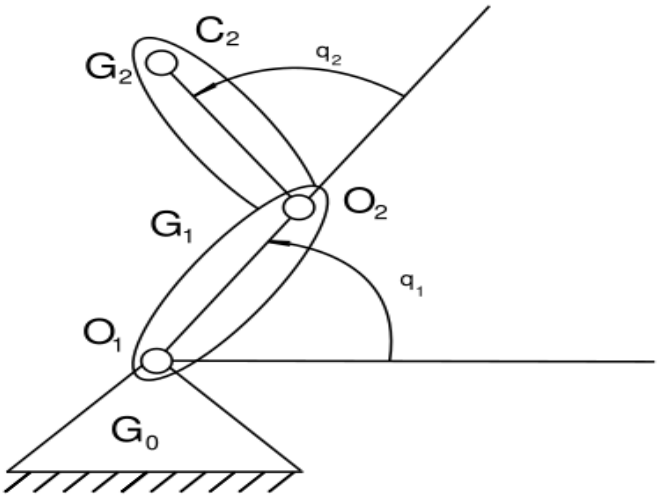


Рис. 1. Двухзвенный манипулятор на неподвижном основании

Введем углы поворотов звеньев манипулятора, как показано на Рисунке 1: $q_i\left(i=1,2\right)$. Обозначим через l_i расстояние от шарнира O_i до центра масс звена $G_i\left(i=1,2\right)$. Длину отрезка O_1O_2 обозначим через l. Массы звеньев обозначим через m_i, а их моменты инерции относительно соответствующих осей шарниров обозначим через I_i $\left(i=1,2\right)$.

Движение манипулятора описывается уравнениями Лагранжа второго рода, которые приводятся к виду:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 - 2m_2 l l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 - m_2 l l_2 \dot{q}_2^2 \sin q_2 = U_1 + M_1,$$
$$a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + m_2 l l_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 = U_2 + M_2,$$
$$a_{11}(q_2) = m_2 l^2 + I_1 + I_2 + 2m_2 l l_2 \cos q_2, \quad a_{12}(q_2) = I_2 + m_2 l l_2 \cos q_2, \quad a_{22} = I_2,$$
где M_i–гравитационный момент, U_i–момент, создаваемый управляющими силами $(i = 1,2)$, при этом для манипулятора, вращающегося в вертикальной плоскости, имеем
$$M_1 = -(m_1 l_1 + m_2 l) g \cos q_1 - m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2), \quad M_2 = -m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2),$$
где g–ускорение свободного падения.

Выберем какое-либо программное движение манипулятора $q^o(t)$, реализуемое программным управлением $U = U^o(t)$
$$U_1^0(t) = a_{11}\left(q_2^0(t)\right)\ddot{q}_1^0(t) + a_{12}\left(q_2^0(t)\right)\ddot{q}_2^0(t) - 2m_2 l l_2 \dot{q}_1^0(t)\dot{q}_2^0(t)\sin q_2^0(t) -$$
$$-m_2 l l_2 \sin q_2^0(t)\left(\dot{q}_1^0(t)\right)^2 - M_1^0(t), \tag{15}$$
$$U_2^0(t) = a_{12}\left(q_2^0(t)\right)\ddot{q}_1^0(t) + I_2 \ddot{q}_2^0(t) - M_2^0(t),$$
где $M_1^0(t) = M_2^0(t) = 0$ для случая манипулятора в горизонтальной плоскости, и
$$M_1^0(t) = -(m_1 l_1 + m_2 l) g \cos q_1^0(t) - m_2 l_2 g \cos\left(q_1^0(t) + q_2^0(t)\right),$$
$$M_2^0(t) = -m_2 l_2 g \cos\left(q_1^0(t) + q_2^0(t)\right) \tag{16}$$
в случае манипулятора, функционирующего в вертикальной плоскости.

Введем отклонения от программного движения:
$$x_k = q_k - q_k^0(t), \; k = 1,2.$$

Исследованы задачи построения управляющего воздействия
$$U^{(1)} = U - U^0(t) = U^{(1)}(t, x, \dot{x}), \quad U^{(1)}(t,0,0) \equiv 0,$$
обеспечивающего равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения $\dot{x} = x = 0$ системы в отклонениях от программного движения. Иными словами, управление
$$U = U^0(t) + U^{(1)}\left(t, q - q^0(t), \dot{q} - \dot{q}^0(t)\right),$$
где $U^0(t)$ определяется согласно (15) и (16), должно обеспечивать стабилизацию программного движения $q^o(t)$ манипулятора.

Особенно важным является решение следующей задачи о стабилизации программного движения $q_0(t)$ манипулятора без измерения скоростей путем построения динамического закона управления по обратной связи по выходу вида
$$U = U_r(t, x) + U_{st}(x, w) \tag{17}$$
где $U_r(t, x)$–программное управление, составляющая $U_{st}(x, w)$ представляет собой стабилизирующую часть управления, которую будем искать в виде
$$U_{st}(x, w) = -B_1 s(x) - B_2 w. \tag{18}$$

Здесь матрицы $B_1, B_2 \in R^{2\times 2}$ являются некоторыми постоянными матрицами, вектор $w \in R^2$ находится интегрированием следующего дифференциального уравнения

$$\dot{w} = -a\left(w + b\dot{x} + cs(x)\right), \tag{19}$$

где a, b и c – некоторые положительные постоянные, функция $s = s(x)$, $|s(x)| \le s_{m1}$, $\left\|\dfrac{\partial s(x)}{\partial x}\right\| \le s_{m2}$.

На Рисунках 2 и 3 представлены результаты численного моделирования при следующих параметрах управления: $a = 10$, $b = 0.5$, $c = 5$.

Программное движение выбрано следующим:

$$q_{10}(t) = 2\sin 2\pi t \text{ рад}, \; q_{20}(t) = 1{,}5\sin 1{,}5\pi t \text{ рад}.$$

Начальные значения выбраны следующими: $q_1(0) = 2$ рад, $q_2(0) = 2$ рад, $\dot{q}_1(0) = 2 + \dot{q}_{10}(0)$ рад/с, $\dot{q}_2(0) = 2 + \dot{q}_{20}(0)$ рад/с.

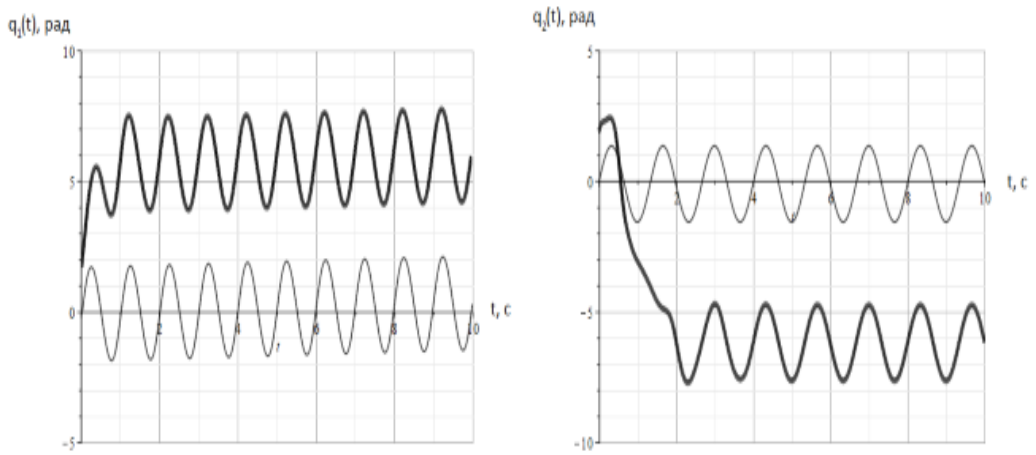


Рис. 2. Графики угловых координат звеньев манипулятора в зависимости от времени и программного движения

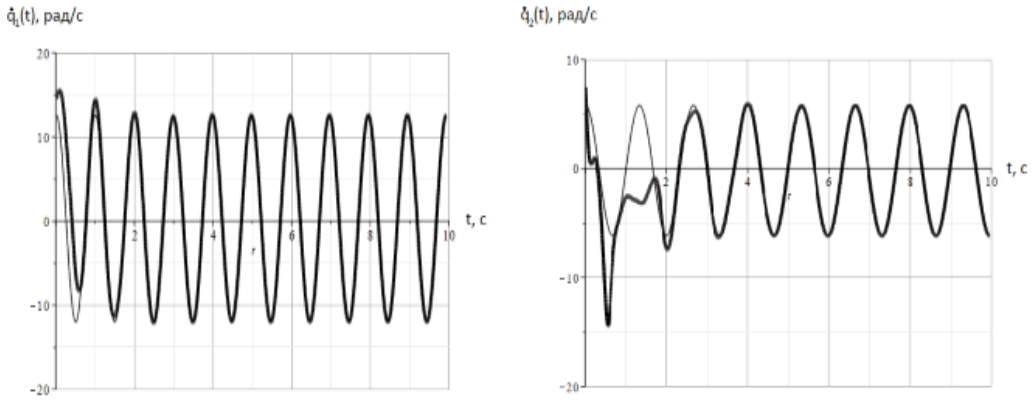


Рис. 3. Графики угловых скоростей звеньев манипулятора и программных скоростей

Анализируя графики на Рисунках 2 и 3, можно сделать вывод, что реальное движение манипулятора под действием управляющего момента (17), (18), (19) стремится к движению, смещенному относительно программного на величину, кратную 2π.

Эффективность всех обоснованных типов управления двухзвенным манипулятором демонстрируется численным моделированием с представлением соответствующих графических результатов.

ВЫВОДЫ

Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

1. Построена топологическая динамика системы обыкновенных дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, что позволило вывести важные качественные свойства решений такой системы, включая свойство квазиинвариантности положительного предельного множества ограниченного решения.
2. На основе построенной динамики доказаны принцип квазиинвариантности такой системы, теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения.
3. Получены новые результаты по применению скалярной функции Ляпунова в исследовании свойств устойчивости неавтономного функционально-дифференциального уравнения с конечным запаздыванием.
4. Доказаны новые теоремы о локализации положительного предельного множества решения уравнения в предположении существования функции Ляпунова с производной, являющейся неположительной на множестве отрезков интегральных кривых, определяемых этой функцией, а также теорема о частичной асимптотической устойчивости.
5. На основании доказанных теорем разработаны новые модели управления двухзвенным манипулятором. Дана постановка задачи о стабилизации программного движения такого манипулятора с горизонтальным и вертикальным расположением его звеньев.
6. Обоснована новая форма нелинейного регулятора, обеспечивающего полуглобальную стабилизацию и глобальное притяжение установившихся движений горизонтального манипулятора.
7. Обоснована структура нелинейного управления, обеспечивающего стабилизацию программного движения с измерением скоростей звеньев манипулятора и без такого измерения с использованием фильтра.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

BURANOV JAMSHID IMAMQULOVICH

COMPARISON METHOD FOR STABILITY PROBLEMS OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

01.01.02 – "Differential equations and Mathematical physics"

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of thesis of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.1.PhD/FM668.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Xusanov Djumma Xusanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Official opponents:	**Durdiyev Dirdimurod Qalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Mamadaliyev Numonjon Olimjonovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Leading organization:	**Ulyanovsk State University**

Defense will take place " 29 " July 2022 at 17:30 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy (is registered № 144). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on « 15 » July 2022 year
(Mailing report № 2 on « 15 » July 2022 year)

U. A. Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J. K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.-M.S.,
Senior Researcher

A.A. Azamov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees,
D.F.-M.S., Academician

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the study is to develop the method of Lyapunov functions in the study of the stability properties of solutions to non-autonomous systems of ordinary differential and functional-differential equations and the application of this method to the problems of controlling the motion of robotic manipulators.

The object of research is the direct Lyapunov method in the theory of stability of nonlinear differential and functional-differential equations and its application in problems of control of robotic systems.

Scientific novelty of the research work consists in the following:

the topological dynamics of a non-autonomous system of ordinary differential equations in a cylindrical phase space was constructed;

the development of the Lyapunov vector function method was carried out in the study of the stability properties of the system indicated above; theorems on the principle of invariance, asymptotic stability and instability in all parts of the variables were proved;

new theorems of the Lyapunov-Razumikhin type on the partial stability of the zero solution of a vector functional-differential equation with a right-hand side were proved;

new various laws of controlling a two-link robot-manipulator were presented.

Implementation of the research results. Based on the results obtained by comparison methods for stability problems of functional differential equations in a cylindrical phase space:

from the new variety of control laws presented for a two-link robot manipulator, it follows that in the foreign grant projects of RFFI No. 19-01-00791a “Mathematical foundations of the design of structures of nonlinear control of mechanical systems” and RFFI No. 20-31-90120 “Design methods, algorithms and control programs for mobile robot manipulators” the corresponding algorithms and control programs have been developed. (reference of Ulyanovsk State University No. 98/03 dated May 16, 2022, Russia). The application of the scientific result made it possible to develop new models of mobile robot manipulators, corresponding algorithms and control programs;

asymptotic stability for a non-autonomous system of ordinary differential equations in a cylindrical phase space was used in the development of stability of horizontal manipulator movements in the foreign grant project MD-758.2022.1.1 “Development of mathematical models of fractional dynamics with the aim of studying oscillatory processes and processes with saturation” (reference of Kamchatka State University dated May 23, 2022 No. 17-12, Russia). The application of the scientific result made it possible to measure the speed of the manipulator links and create software for a linear control structure that ensures the stabilization of program motion with the measurement of the speeds of the manipulator links and without such measurement using a filter.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a bibliography. The volume of the dissertation is 114 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (часть I, part I)

1. Dj.X. Khusanov, F.Sh. Berdiyorov, J.I. Buranov. Comparative method in stability problems in terms of variable solutions of ordinary differential equations // Бюллетень Института математики Узбекистана. 2020. № 4. С. 147-155. (01.00.00; №17)
2. Дж.Х. Хусанов, Ж.И. Буранов. Дифференциальные неравенства в задаче об асимптотической устойчивости // Доклады АН РУз. 2020. № 6. С. 26-28. (01.00.00; №7)
3. Д.Х. Хусанов, Д.Я. Хусаинов, Ж.И. Буранов. Об устойчивости динамических систем с определенными переключениями, состоящими из линейных подсистем без запаздывания // Доклады АН РУз. 2021. № 2. С. 26-31. (01.00.00; №7)
4. D.Kh. Khusanov, J.I. Buranov. On stability with respect to the part of variables of a non-autonomous system in a cylindrical phase space // Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva. Middle Volga Mathematical Society Journal. Scientific Journal. 2021. Vol. 23, No. 3. P. 273-284. (35. CrossRef)
5. D.Kh. Khusanov, J.I. Buranov. On the comparison method in the stability problem with respect to a part of variables for functional- differential equations with a finite delay // Uzbek Mathematical Journal. 2021. No 3. P.1-15. (01.00.00; №6)
6. Ж.И. Буранов. Об устойчивости по части переменных неавтономной системы в цилиндрическом фазовом пространстве // Доклады АН РУз, №4, 2021, с.3-7. (01.00.00; №7)
7. A. Akhmatov, J. Buranov, J. Khusanov, O. Peregudova. On Semi-Global Output Position Feedback Trajectory Tracking Control of a Multi- Link Revolute Joined Robotic Manipulator // 25th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), 2021, p. 290-295. (3. Scopus)

II бўлим (часть II, part II)

8. Д.Х. Хусанов, А.Ш. Бердияров, Ж.И. Буранов. Функционалы и функционально-дифференциальные уравнения. Устойчивость решений // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО’20): Материалы VII Международной конференции. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2020. С. 228-232.
9. А.С. Андреев, Дж.Х. Хусанов, Ж.И. Буранов. Метод сравнения в задачах устойчивости по части переменных решений обыкновенных

дифференциальных уравнений // Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики: тезисы докладов Международной научной конференции, Т.1, 12-13 марта 2020, г. Фергана, 2020. С. 292-296.
10. Дж.Х. Хусанов, А.Ш. Бердиеров, Ж.И. Буранов. Автономные уравнения и обыкновенные дифференциальные уравнения с периодической правой частью // National University of Uzbekistan, Holon Institute of Technology. Abstracts of the international online conference «Frontier in mathematics and computer science». October 12-15, 2020, Tashkent. P. 220-221.
11. Ж.И. Буранов, Д.Х. Хусанов, А.Ш. Бердияров. Управление вращательным движением рабочего органа манипулятора // Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математики и прикладной математики в эпоху глобализации», 1-2 июня 2021 г., Ташкент, С. 249-252.
12. А.Э. Каххаров, Ж.И. Буранов, Д.Х. Хусанов. Об устойчивости по части переменных решений дифференциальных уравнений различного типа // Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математики и прикладной математики в эпоху глобализации», 1-2 июня 2021 г., Ташкент, С. 300- 303.
13. Ж.И. Буранов, Е.В. Дороговцева, Л.В. Колегова. Управление движением двухзвенного горизонтального манипулятора // Материалы Международной научно-практической конференции «Цифровые технологии, инновационные идеи и перспективы их применения в сфере производства», 12 июня 2021 г., Андижан, С. 34-37.
14. Д.Х. Хусанов, Ж.И. Буранов. Об устойчивости по части переменных неавтономной системы в цилиндрическом фазовом пространстве. XV Международная научная конференция Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании МГУ им. Н.П. Огарёва, 15-18 июля 2021 г., Саранск, С.35-38.
15. Ж.И. Буранов, А.Ш. Бердияров, Д.Х. Хусанов. Построение периодических решений квазилинейных уравнений при резонансах в критическом случае первого порядка // Материалы XIV Международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики» приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета 16–19 сентября 2021 г., Махачкала, С.218-219.
16. Д.Х. Хусанов, Ж.И. Буранов. Принцип квазиинвариантности неавтономной системы в цилиндрическом фазовом пространстве // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Сарымсаковские чтения». 16–18 сентября 2021 г., Ташкент, С. 41-43.
17. А.А. Ахматов, Д.Х. Хусанов, Ж.И. Буранов. Об устойчивости нелинейной автоматической системы управления с запаздывающей обратной связью // Материалы Международной научной конференции «Порядковый

анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVI. Теория операторов и дифференциальные уравнения», 20-25 сентября 2021 г., Владикавказ, С. 64-65.
18. J. Buranov, A. Kahharov, Z. Yusupova. Investigation of stability of dynamic systems with switching // Abstracts of the VII International scientific conference conference «Modern problems of applied mathematics and information technologies AL-KHWARIZMI 2021», 15-17 November, 2021, Fergana, p.117.
19. Дж.Х. Хусанов, Ж.И. Буранов, А.Э. Каххаров. Равномерная асимптотическая устойчивость // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения». II том. 17-18 ноября 2020, Ташкент, С. 163-164.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
2021 йил 24 июнда таҳрирдан ўтказилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,75. Адади 100 дона. Буюртма № 53/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.