V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

MERAJOVA SHAHLO BERDIYEVNA

ARALASH PARABOLO-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN MANBANI ANIQLASH TESKARI MASALALARINING KORREKTLIGINI TADQIQ ETISH

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

Buxoro – 2023

UDK: 517.958

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

MERAJOVA SHAHLO BERDIYEVNA

ARALASH PARABOLO-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN MANBANI ANIQLASH TESKARI MASALALARINING KORREKTLIGINI TADQIQ ETISH

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

Buxoro – 2023

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestastiya komissiyasida B2022.4.PhD/FM695 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Buxoro davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (https://kengash.mathinst.uz) va «Ziyonet» ta'lim axborot tarmog'ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Karchevskiy Andrey Leonidovich fizika-matematika fanlari doktori, professor (Rossiya)
Yetakchi tashkilot:	**Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil " 14 " mart soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.:(+99871)- 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot–resurs markazida tanishish mumkin (156-raqam bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 140104100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.:(+99871) 207-91-40)

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil " 28 " fevral kuni tarqatildi.

(2023 yil " 28 " fevraldagi dagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A.Roziqov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f-m.f.d., professor

J.K.Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy
kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A.A.A'zamov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash qoshidagi
Ilmiy seminar raisi,
f-m.f.d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda aralash tipdagi xususiy hosilali differensial tenglama uchun manbani aniqlash teskari masalalarining korrektligini tadqiq qilishga keltiriladi. Bugungi kunda xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalalar geologiya, elektrodinamika, gazodinamika, to‘lqin tarqalish jarayonlari, geofizika va boshqa ko‘plab sohalardagi tadqiqotlarning eng ko‘p o‘rganilayotgan asosiy masalasi hisoblanadi. To‘g‘ri masala yechimi haqida qo‘shimcha ma’lumotga asoslanib, teskari masala yechimini aniqlash, to‘g‘ri va teskari masalalarni sonli yechish masalasiga doir tadqiqotlarni olib borish bugungi kunda matematik fizikaning muhim vazifalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahon miqyosida matematik fizikaning eng tez rivojlanayotgan sohasi – teskari masalalarni tadqiq qilish usullariga alohida e’tibor qaratilmoqda. Bu soha fizika va texnik fanlardagi eng muhim muammolardan biriga aylandi, chunki ularni hal qilish bevosita aniqlab bo‘lmaydigan parametrlarni topishga imkon beradi. Bu yo‘nalish juda ko‘p sohalarda tadbiqqa ega. Aralash tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalar qo‘llanish nuqtai nazaridan dolzarbdir. Shunday qilib, aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun qo‘yilgan to‘g‘ri va teskari masalalarning korrektligini isbotlash zarurati bor. Tadbiqlarda aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun qo‘yilgan to‘g‘ri va teskari masalalarni yechimini topish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi. Aynan shu tipdagi dolzarb ilmiy tadqiqotlar ushbu dissertatsiya ishida qaraldi.

Respublikamizda fundamental fanlardan ilmiy va amaliy tadbiqiga ega bo‘lgan matematik fizikaning dolzarb yo‘nalishlariga e’tibor kuchaytirildi. Jumladan, oxirgi yillarda gazodinamikadagi jarayonlarni ifodalovchi aralash parabolo-giperbolik tipdagi differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni tadqiq etish, ular uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni yechish orqali amaliy muammolarni hal etishga alohida e’tibor qaratildi. Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun manbani aniqlash teskari masalalari yechimining mavjudligi, yagonaligini isbotlashga va uni sonli yechishga oid salmoqli natijalarga erishildi. “Differensial tenglamalar, matematik fizika va funksional analiz” fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalar va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi[1]. Bu borada matematik fizikaning aralash tipdagi tenglamalar uchun teskari masalalar nazariyasini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son Farmoni, 2019 yil 9 iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqot muassasalari faoliyatini tahkil etish to‘g‘risida”gi 292-sonli qarori.

Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387-son Qarori va 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarori hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ–huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ko‘p hollarda ma’lum tabiat hodisalarini o‘rganish matematik fizikaning tenglamalari deb ataladigan xususiy hosilali differensial tenglamalarning yechimlarini topishga olib kelinadi. Matematik fizika tenglamalari uchun klassifikatsiyalash mavjud. Giperbolik, elliptik va parabolik tipdagi tenglamalarga nisbatan aralash tipdagi tenglamalar nazariyasi kam tarixga ega. Ikkita erkli o‘zgaruvchili aralash tipdagi tenglamalar birinchi marta italyan matematiklari F.Trikomi va M. Chibrario tomonidan tizimli tadqiq qilingan. Bundan tashqari, aralash tipdagi tenglamalar ko‘plab matematiklar tomonidan o‘rganilgan, xususan, M.A.Lavrentyev, A.V.Bistadze, V.N.Vragov, M.S.Salaxitdinov va T.D.Jo‘rayev ilmiy maktablarida katta e’tibor berilgan. Aralash oqimlar odatda aralash tipdagi elliptiko-giperbolik tipdagi tenglamalar bilan aniqlanadi, shuning uchun transtovushli gaz dinamikasi masalalarini o‘rganish, aralash tipdagi tenglamalar nazariyasining rivoji bilan chambarchas bog‘liq.

Aralash tipdagi tenglamalar xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, amaliy xarakterdagi ko‘plab masalalarni hal qilishda uchraydi. Ushbu tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalar aniq bir tipdagi tenglamalar uchun qo‘yilgan mos masalalarga nisbatan kamroq o‘rganilgan. Shunga qaramay, bunday masalalar amaliy tadbiq nuqtai nazaridan dolzarbdir. Masalan, A.N.Tixonov va A.A.Samarskiy ishlarida bir jinsli muhitda, uning o‘tkazuvchanligi past bo‘lgan taqdirda, elektromagnit maydon kuchlanganligi to‘lqin tenglamasini qanoatlantiradi, ammo nisbatan yuqori o‘tkazuvchanlik holatida, elektromagnit maydon kuchlanganligi uchun ko‘rsatilgan qiymat issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini qanoatlantiradi. I.M.Gelfand va F.I.Frankl ilmiy ishlarida gaz dinamikasiga oid ko‘rib chiqilgan hodisa: g‘ovakli devorlari bo‘lgan yopiq kanaldagi gaz harakati to‘lqin tenglamasi bilan, uning tashqarisida esa diffuziya tenglamasi bilan tavsiflanadi. Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalarga qo‘yilgan to‘g‘ri masalalar F.Trikomi, G.Fiker, T.D.Jo‘rayev, K.B.Sabitov, B.I.Islomov va boshqalarning ilmiy ishlarida o‘rganilgan. To‘rtburchak sohada aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun boshlang‘ich chegaraviy masalalarda o‘ng tomonni yoki boshlang‘ich funksiyani aniqlashning teskari masalalari K.B. Sabitov, E.M. Safin, S.N. Sidirov va boshqalarning ilmiy ishlarida ko‘rib chiqilgan bo‘lib, bu tadqiqotlarda teskari

masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi spektral usul asosida isbotlangan.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial parabolik, giperbolik va elliptik tipdagi tenglamalar uchun tenglama koeffistientlarini, o‘ng tomonlarini aniqlashning turli xil teskari masalalari V.G.Romanov, A.M.Denisov, S.I.Kabanixin, R.R.Ashurov, S.Z.Djamolov, A.I.Prilepko, D.G.Orlovskiy, I.A.Vasin va boshqalarning ishlarida o‘rganilgan. Giperbolik integro-differensial tenglamalarda yadroni tiklash teskari masalalari V.G.Romanov, D.K.Durdiyev, J.D.Totiyeva, A.A.Raxmonov, U.D.Durdiyev, Z.R.Bozorov va boshqalar ilmiy ishlarida o‘rganilgan. Boshqa tomondan, juda oz sonli ishlar teskari masalalarni sonli yechish usullariga bag‘ishlangan. Ushbu yo‘nalishda V.G.Romanov, V.A.Dedok, A.A.Duchkov, A.L.Karchevskiylarning ilmiy ishlarini ta’kidlash mumkin. Differensial tenglamalarning har bir sinfi uchun mos masalalar mavjud. Ushbu masalalarning o‘ziga xos xususiyati ularning korrektligidir. Ushbu dissertatsiya ishida aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun manbani aniqlash teskari masalalarining korrektligi o‘rganilgan va sonli yechilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Buxoro davlat universitetining M-02.2018 raqamli “Matematik fizikaning teskari masalalari” (2020-2022 yy.) mavzusidagi ilmiy-tadqiqot yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarning korrektligini isbotlash hamda ularni sonli yechishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

parabolo-giperbolik tipdagi tenglamaga qo‘yilgan aralash masala uchun ayirmali sxema qurish, chekli ayirmali sxemaning turg‘unligini isbotlash va approksimatsiya tartibini aniqlash;

ikki o‘lchamli aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamaga silindrik sohada qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala va teskari masalalar yechimining yagonaligi va mavjudligini isbot qilish;

aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamaga to‘g‘ri to‘rtburchakli sohada qo‘yilgan teskari masalaning bir qiymatli yechilishini isbot qilish;

aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun manbani aniqlash teskari masalasini sonli yechish algoritmlarini qurish.

Tadqiqotning ob’ekti. Bir o‘lchovli va ikki o‘lchovli aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun teskari masalalardan iborat.

Tadqiqotning predmeti. Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalar, Furye-Bessel va Furye qatorlari, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya natijalarini hal qilishda funksional analiz, differensial tenglamalar, xususiy hosilali differensial tenglamalar va integral

tenglamalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan. Furye, Furye-Bessel qatorlarining yaqinlashish shartlari qo‘llanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamaga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala uchun ayirmali sxema qurilgan, hamda chekli ayirmali sxemaning turg‘unligi va approksimatsiya tartibi haqidagi teoremalar isbotlangan;

Bessel operatorli aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun noma’lum manbani topishga oid teskari masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan;

aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamaga qo‘yilgan teskari masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun manbani aniqlash teskari masalasini sonli yechish uchun uchta algoritmlar qurilgan va bu algoritmlarni aprobatsiya qilish uchun bir qator misollar keltirilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Tadqiqot natijalaridan seysmologiyada, gazodinamikada hamda yuqori bosqich bakalavriat va magistratura talabalari uchun matematik fizika tenglamalari fanidan maxsus kurslar o‘qishda foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Matematik analiz, funksional analiz, differensial tenglamalar, xususiy hosilali differensial tenglamalar, integral tenglamalar va teskari masalalar nazariyasi usullaridan foydalanilganligi hamda matematik mulohazalarning qat’iyligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati matematik fizikaning aralash tipdagi tenglamalari uchun teskari masalalar nazariyasini yanada rivojlantirishi, bir o‘lchamli va ikki o‘lchamli bo‘lgan hollarda manbani aniqlash usullari qurilganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati seysmologiyada, gazodinamikada tadbiq etilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun manbani aniqlash teskari masalalarining korrektligiga oid olingan natijalar asosida:

Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun noma’lum manbani aniqlash to‘g‘ri va teskari masalalarining yechimni mavjud va yagonaligidan, aralash masalani sonli yechishdan OT-F4-14 raqamli “Suyuqlik oquvchi yer osti egri chiziqli quvurning tashqi kuchlari ta’sirida kuchlanish-deformatsiyalar holatini tadqiq qilish nazariyasini rivojlantirish va hisoblab chiqish” mavzusidagi fundamental loyihasida qovushqoq suyuqlik oquvchi ko‘p qatlamli kompozit quvurlar harorat va dinamik yuklanishlar ta’sirini aniqlashda qo‘llanilgan (Buxoro muhandislik-texnologiya institutining 2023 yil 25 yanvardagi № 01/04-87/125-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanishi qovushqoq suyuqlik oquvchi ko‘p qatlamli kompozit quvurlar egri chiziqli bo‘laklarining chiziqli bo‘lmagan dinamik kuchlanish-deformastiya holatini tekshirish imkonini bergan;

aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamaga qo‘yilgan teskari masalaning bir qiymatli yechilishi va tenglama uchun manbani aniqlash teskari masalasini yechish algoritmlaridan Ar05133873 raqamli “Gravimetriyada qo‘llaniladigan kasr tartibli elliptik operatorlarning matematik modellari uchun chiziqli bo‘lmagan teskari masalalarni yechishning sonli usullari va parallel algoritmlari” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida kasr tartibli elliptik operatorning birinchi tartibli evolyutsion tenglamasi uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni yechishda foydalanilgan (Xo‘ja Ahmad Yasaviy nomidagi xalqaro qozoq-turk universitetining 2022 yil 28 dekabrdagi №04/4173-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarni qo‘llanishi kasr tartibli elliptik operatorning birinchi tartibli evolyutsion tenglamasi uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni sonli yechish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 4 ta xalqaro va 7 ta respublika, jami 11 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 17 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestastiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalarini himoya qilishda tavsiya etilgan milliy nashrlarda 6 ta ilmiy maqola, jumladan 2 ta ilmiy maqola SCOPUS bazasidagi xorijiy jurnallarda e’lon qilingan va 4 tasi Respublika ilmiy jurnallarda chop qilingan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 90 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy va mahalliy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi **“Dastlabki ma’lumotlar”** deb ataladi. Bu bobda hisoblash usullari va Furye-Bessel qatorlaridan dissertatsiya natijalarini isbotlashda foydalanilgan asosiy tushunchalar keltirilgan. Shuningdek, aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamaga qo‘yilgan birinchi chegaraviy masala uchun turg‘un chekli ayirmali sxema qurilgan va qurilgan ayirmali sxemaning approksimatsiyasi va turg‘unligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

$D = \{(x,t): 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ sohada quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$Lu = K(t)u_{tt} - H(x)u_{xx} + a(x,t)u_t + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t), \quad (1)$$

bu yerda $K(t), H(x), a(x,t), b(x,t), c(x,t)$ – berilgan funksiyalar bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) $K(t) \in C^2([0,T]), t \neq 0$ da $K(t) > 0$ va $K(0) = 0$;

2) agar $x \in (0,l)\ H(x) \in C^2([0,l])$ bo‘lsa, u holda $H(x) > 0$ va $H(0) = H(l) = 0$;

3) $a(x,t), b(x,t) \in C^1(\bar{D}), c(x,t) \in C(\bar{D})$;

4) $\beta(x) = a(x,0) - K_t(0) > 0, x\epsilon[0,l]$;

C – uzluksiz funksiyalar fazosi, $\bar{D}$- D sohaning yopig‘i, $\Gamma = \partial D$ - D sohaning chegarasi.

(1) tenglama uchun quyidagi aralash masalani qaraymiz:

Aralash masala: D sohada (1) tenglamaning shunday yechimi aniqlansinki, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ x\epsilon[0,l], \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0, t > 0. \tag{3}$$

(1)-(3) aralash masalani yechish uchun taqribiy (sonli) usuldan foydalanamiz. Ushbu masalaga chekli-ayirmalar usulini qo‘llaymiz.

$\bar{D} = \{(x,t): 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ sohada, qadamlari $\Delta t = h_t, \Delta x = h_x,$ $(T = mh_t, l = nh_x)$ bo‘lgan ayirmali to‘rni quramiz.

u_i^k orqali aralash masalaning (t^k, x_i) nuqtadagi taqribiy yechimini belgilaymiz. Bu yerda (t^k, x_i) – $t = t^k = kh_t, x = x_i = ih_x$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo‘lgan tugun nuqta. Siljish va ayirmali $\varphi, \psi, \tau, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}$ operatorlarni quyidagi shaklda kiritamiz:

$$\varphi u_i^k = u_i^{k+1} = u^{k+1} = \hat{u},\ \ \varphi^{-1}u_i^k = u_i^{k-1} = u^{k-1} = \check{u},\ \ \psi^{\pm 1}u_i^k = u_{i\pm 1}^k = u_{i\pm 1},$$

$$\tau = \varphi - 1, \qquad \bar{\tau} = 1 - \varphi^{-1}, \qquad \xi = \psi - 1, \qquad \bar{\xi} = 1 - \psi^{-1}, \qquad r = \frac{\Delta}{\Delta_x}.$$

(1)-(3) masalani quyidagi chekli-ayirmali sxema bilan approksimatsiyalaymiz:

$$L^h u \equiv \left[K^k \frac{\tau\bar{\tau}}{{h_t}^2} - H_i \frac{\xi\bar{\xi}}{h_x^2} + a_i^k \frac{\bar{\tau}}{h_t} + b_i^k \frac{\bar{\xi}}{h_x} + c_i^k\right] u = f_i^k, k = \overline{1,m}; i = \overline{0,n}, \tag{4}$$

$$u_i^0 = 0, u_i^1 = 0, u_0^k = u_n^k = 0, i = \overline{0,n}, k = \overline{0,m}. \tag{5}$$

(4)-(5) ayirmali sxema yopiq emas. Bu uchun qo‘shimcha chegaraviy va boshlang‘ich shartlarni berish talab qilinadi. Oddiylik uchun, quyidagi shartlardan foydalanamiz:

$$u_{-1}^k = u_0^k, \qquad u_{n+1}^k = u_n^k, \qquad k = \overline{0,m.} \tag{6}$$

(4)-(6) ayirmali sxema approksimatsiya tartibi aniqlanib, quyidagi teorema isbotlangan.

1-teorema. (4)-(6) *chekli-ayirmali sxema* (1)-(3) *aralash masalani* h_t, h_x *ga nisbatan birinchi tartib bilan approksimatsiyalaydi va u uchun quyidagi baho o‘rinli*

$$\|\delta f\| \le O(h_t + h_x).$$

Qurilgan ayirmali sxemaning turg‘unligi uchun quyidagi teorema o‘rinli.

2-teorema. *Agar ayirmali sxemaning qadamlari uchun quyidagi shartlar bajarilsa*

$$h_t < \min\left(\frac{rK}{M_2}, \frac{2\delta_0}{M_1}\right), \qquad h_x < \frac{2H}{M_3}, \qquad i = \overline{1, N-1}, \qquad k = \overline{-m+1,0},$$

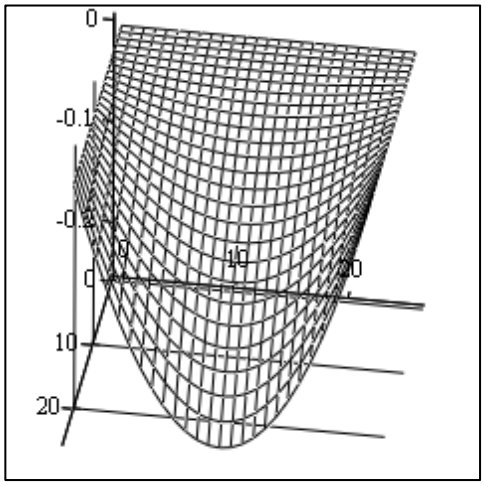
u holda (1)-(3) aralash masala uchun qurilgan (4)-(6) ayirmali sxema turg‘un va u uchun

$$h_t \cdot h_x \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}(L^h u)(2u) \geq h_t \cdot h_x \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{(2K - h_t M_2)\left(\frac{\tau u}{h_t}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + (2H - h_x M_3)\left(\frac{\xi u}{h_x}\right)^2 + (2\delta_0 - h_t M_1)u^2\right\}$$

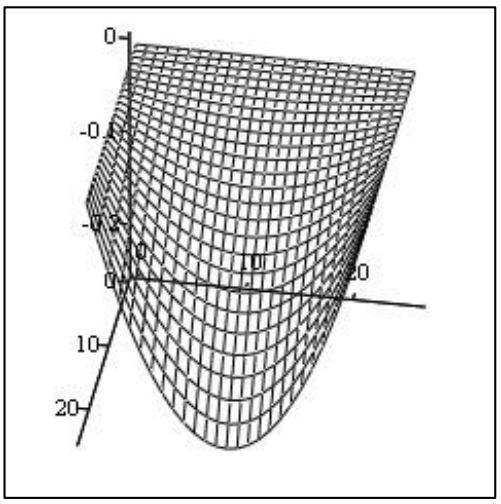
baho o‘rinli, bu yerda M_i, $i = \overline{1,3}$ – $|a|, |b|, |K'(t)|, |H'(x)|, |a_{tt}|, |b_{xx}|, \left|K^{(4)}(t)\right|, \left|H^{(4)}(x)\right|$ *orqali chegaralangan musbat sonlar.*

Simulyatsiyalangan berilganlar uchun masala qaralgan va u sonli yechilgan. $\max_{i,k}|y - M| < 10^{-3}, i = \overline{0,n}, k = \overline{0,M}$ – sonli usulning absolyut xatoligi. Qo‘yilgan masalani sonli yechish uchun matritsaviy haydash usulidan foydalanildi.



y

1-rasm: *y – taqribiy yechim, M – aniq yechim.*



M

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi **“Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun teskari masalalar”** deb nomlanadi, unda Bessel operatorli va turli koeffistientli aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun noma’lum o‘ng tomonni aniqlashga doir teskari masalalar o‘rganilgan. O‘zgaruvchilarni ajratish metodi asosida, ushbu masalalar noma’lum funksiyalarni ortonormallangan nolinchi tartibli birinchi tur Bessel va sinus funksiyalari bo‘yicha Furye va Furye-Bessel qatorlariga yoyilmasining koeffistientlariga nisbatan oddiy differensial tenglamalarga qo‘yilgan masalalarga keltiriladi. Qo‘yilgan masalalar yechimlari uchun yagonalik va mavjudlik teoremalari isbotlangan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida Bessel operatorli aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamaga qo‘yilgan teskari masala o‘rganilgan.

$G = \{(x, y, t): x^2 + y^2 < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$ silindrda quyidagi aralash parabolo-giperbolik tenglamani qaraymiz:

$$\begin{cases} Du_t - \Delta u = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), & t > 0, \\ c^2 u_{tt} - \Delta u = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), & t < 0, \end{cases} \tag{7}$$

bu yerda α, β, c, D – berilgan musbat sonlar, Δ - x va y o‘zgaruvchilar bo‘yicha Laplas operatori.

Quyidagi masalani qaraylik: Shunday $u(x,y,t)$ va $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ funksiyalar topilsinki, ular G sohada (7) tenglamani va quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

chegaraviy shartlar:

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \langle (x,y), \nabla u \rangle = 0,\ u|_{x^2+y^2=1} = 0, -\alpha \le t \le \beta, \tag{8}$$

boshlang‘ich shart:

$$u(x,y,-\alpha) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\ \ x^2+y^2 \le 1, \tag{9}$$

$t = 0$ skleyka sharti:

$$\lim_{t\to -0} u(x,y,t) = \lim_{t\to +0} u(x,y,t),$$

$$\lim_{t\to -0} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \lim_{t\to +0} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t},\ x^2+y^2 \le 1, \tag{10}$$

bu yerda $\varphi(\cdot)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiya.

$G_+ = G \cap \{t > 0\}, G_- = G \cap \{t < 0\}$ belgilash kiritamiz.

1-ta’rif. *(7)-(10) masalaning yechimi deb,* $C(\bar{G}) \cap C^1(G) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\})$ *sinfga tegishli bo‘lib,* G *sohada (7) tenglamani va (8)-(10) shartlarni qanoatlantiruvchi* $u(x,y,t)$ *funksiyaga aytiladi*.

Agar φ, f funksiyalar ma’lum bo‘lsa, u vaqtda (7)-(10) munosabatlardan $u(x,y,t)$ yechimni topish masalasiga to‘g‘ri masala deyiladi.

Endi silindrik sohada teskari masalani qo‘yamiz.

Teskari masala: Agar (7) - (10) to‘g‘ri masalaning yechimi haqida quyidagi qo‘shimcha ma’lumot berilgan bo‘lsa:

$$u(x,y,\beta) = \psi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \tag{11}$$

$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ – funksiya aniqlansin.

2-ta’rif. *(7)-(11) teskari masalaning yechimi deb mos ravishda* $C(\bar{G}) \cap C^1(G) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\})$ *va* $C[0,1]$ *sinflarga tegishli bo‘lib, (7)-(11) tengliklarni qanoatlantiruvchi* $u(x,y,t)$ *va* $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ *funksiyalarga aytiladi.*

(7) tenglamaning o‘ng tomoni, (9) va (11) ga kiritilgan funksiyalar $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ masofaga bog‘liq, shuning uchun $u(x,y,t) = u(\rho,t)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, ya’ni biz osesimmetrik holga kelamiz.

Qutb koordinatalar sitemasida (7)-(11) **teskari masala** quyidagicha ifodalanadi: $G := \{(\rho,t) : 0 < \rho < 1, -\alpha < t < \beta\}$ sohada shunday $u(\rho,t)$ ва $f(\rho)$ funksiyalar aniqlansinki, ular quyidagi aralash parabolo-giperbolik tenglamani

$$\theta(t) D \frac{\partial u}{\partial t} + \theta(-t) c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + f(\rho),\ (\rho,t) \in (0,1) \times (-\alpha,\beta), \tag{12}$$

(bu yerda $\theta(t)$ — Xevisayda funksiyasi) va quyidagi shartlarni:

chegaraviy shartlar:

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{\partial u(\rho,t)}{\partial\rho}=0,\quad u|_{\rho=1}=0,\quad -\alpha\le t\le\beta, \tag{13}$$

$t = 0$ da skleyka sharti:

$$u(\rho,+0)=u(\rho,-0),\lim_{t\to+0}\frac{\partial u}{\partial t}(\rho,t)=\lim_{t\to-0}\frac{\partial u}{\partial t}(\rho,t),\quad 0\le\rho\le 1, \tag{14}$$

boshlang‘ich shartni

$$u(\rho,-\alpha)=\varphi(\rho),\quad 0\le\rho\le 1, \tag{15}$$

shuningdek qo‘shimcha shartni

$$u(\rho,\beta)=\psi(\rho), \tag{16}$$

qanoatlantirsin.

Shunday qilib, (7)-(11) to‘g‘ri masala (12)-(15) munosabatlardan $u(\rho,t)$ funksiyani aniqlashga keltirildi, teskari masala esa $u(\rho,t)$ va $f(\rho)$ funksiyalarni (12)-(16) munosabatlardan foydalanib topish masalasiga keltirildi.

Dastlab (12) tenglamaning xususiy yechimlarini Furye usulidan foydalanib, $f(\rho)=0$ bo‘lganda quyidagi ko‘rinishda qidiramiz:

$$u(\rho,t)=R(\rho)T(t).$$

$R(\rho)$ funksiya uchun:

$$R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)+\lambda^2R(\rho)=0, \tag{17}$$

chegaraviy sharti quyidagicha bo‘lgan:

$$\lim_{\rho\to 0}(\rho R'(\rho))=0\,,R(1)=0, \tag{18}$$

masalani hosil qilamiz.

1-izoh. *(17)-(18) masala o‘z-o‘ziga qo‘shma masala.*

(17) tenglamaning yechimi birinchi tur nolinchi tartibli Bessel funksiyalari bo‘ladi:

$$R(\rho)=J_0(\lambda_k\rho),\ k=1,2,3,\ldots$$

Ular (17)-(18) masalaning xos funksiyalari bo‘ladi. (19) chegaraviy shartlardan foydalanib, $J_0(\lambda_k)=0$ tenglamaning musbat ildizlarini, xos sonlarni topamiz. Ular quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\lambda_k=k\pi-\frac{\pi}{4}.$$

Endi qidirilayotgan funksiyani va tenglamaning o‘ng qismini $J_0(\lambda_k\rho)$ funksiyalar bo‘yicha Furye-Bessel qatoriga yoyamiz, ya’ni

$$u(\rho,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)J_0(\lambda_k\rho), \tag{19}$$

$$f(\rho)=\sum_{k=1}^{\infty}f_kJ_0(\lambda_k\rho), \tag{20}$$

bu yerda

$$u_k(t)=\frac{2}{J_1^2(\lambda_k)}\int_0^1\rho u(\rho,t)J_0(\lambda_k\rho)d\rho,$$

$$f_k = \frac{2}{J^2_{1(\lambda_k)}} \int_0^1 \rho f(\rho) J_0(\lambda_k \rho) d\rho.$$

Qo‘yilgan masalani yechimi uchun quyidagi teorema o‘rinli:

3-teorema. *Agar* (12)-(16) *masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, bu yechim* $\alpha = 4cp,\ p \in N$ *yoki* $\alpha = 4c\frac{n}{m},\ n, m \in N,\ EKUB(n,m) = 1$ *va barcha* $\beta > 0$ *qiymatlarda yagona bo‘ladi.*

Bu bobning ikkinchi paragrafida (12)-(16) teskari masala yechimi uchun mavjudlik teoremasi isbotlandi.

$u_k(t)$ va f_k koeffitsiyentlarni (19), (20) ga qo‘yib, formal yechimni quyidagi qatorlar ko‘rinishida olamiz:

$$u(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha,\beta}(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{D}t} + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha,\beta}(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{D}\beta} \right] J_0(\lambda_k \rho),\ \ t > 0, \qquad (21)$$

$$u(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha,\beta}(k)} cos\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) - c\frac{\lambda_k}{D}\frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha,\beta}(k)} sin\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) + \right.$$
$$\left. + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha,\beta}(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{D}\beta} \right] J_0(\lambda_k \rho), t < 0, \qquad (22)$$

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left[\psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta 1_k(\alpha,\beta)} \right] J_0(\lambda_k \rho). \qquad (23)$$

Qatorlarning umumiy hadlari uchun quyidagi baho o‘rinli:

$$max\left\{ \max_{\rho\in[0,1]} |f_k|, \max_{(\rho,t)\in G_+} |u_k(\rho,t)|, \max_{(\rho,t)\in G_-} |u_k(\rho,t)|, \max_{(\rho,t)\in G_+} \left|\frac{\partial u_k(\rho,t)}{\partial t}\right|, \right.$$
$$\left. \max_{(\rho,t)\in G_-} \left|\frac{\partial^2 u_k(\rho,t)}{\partial t^2}\right|, \max_{(\rho,t)\in G_+} \left|\frac{\partial^2 u_k(\rho,t)}{\partial \rho^2}\right|, \max_{(\rho,t)\in G_-} \left|\frac{\partial^2 u_k(\rho,t)}{\partial \rho^2}\right| \right\} \leq$$
$$\leq N \frac{\lambda_k^3}{\lambda_k^{2s-\frac{1}{2}}},$$

bu yerda $N-$ musbat o‘zgarmas.

Berilgan teskari masala yechimi mavjudligi uchun quyidagi teorema o‘rinli:

4-teorema. $\{\varphi(\rho), \psi(\rho)\} \in C^6[0,1]$ *bo‘lib,* $\left|\delta_{\alpha,\beta}(k)\right| \geq \mathrm{C}_0 > 0$ *o‘rinli bo‘lsin, bu yerda* $\delta_{\alpha,\beta}(k) = e^{-\frac{\lambda_k^2}{D}\beta} - \left(cos\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right) + \frac{c\lambda_k}{D} sin\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right)\right)$. *Shuningdek quyidagi tengliklar bajarilsin:*

$\varphi^{(i)}(0) = 0,\ \psi^{(i)}(0) = 0,\ \ (i = \overline{0,5});\ \varphi^{(i)}(1) = 0,\ \ \psi^{(i)}(1) = 0,\ \ (i = \overline{0,4})$ *va* $\varphi^{(6)}(\rho),\ \psi^{(6)}(\rho)$ *chegaralangan. U holda (12)-(16) teskari masalaning (21), (22), (23) qatorlar yordamida aniqlanadigan yagona yechimi mavjud, bu yerda* $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(i)}$ *–* φ *va* ψ *funksiyalarning i-hosilalari.*

Ushbu bobning uchinchi paragrafida turli koeffitsiyentli aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun teskari masala qaralgan.

$G := \{(x,t): 0 < x < l; -\alpha < t < \beta\}$ to‘rtburchak sohada quyidagi aralash parabolo-giperbolik tenglamani qaraymiz:

$$c^2\theta(-t)u_{tt} + \theta(t)u_t = \widehat{D}u_{xx} + f(t)g(x), \quad (24)$$

bu yerda l, α, β – berilgan musbat sonlar, $\widehat{D} = \begin{cases} D, & t > 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$, θ- Xevisayda funksiyasi, D, c –doimiylar.

(24) tenglama uchun teskari masalani qo‘yamiz.

Teskari masala. Quyida funksional sinflardan:

$$u(x,t) \in C\left(\overline{G}\right) \cap C_{x,t}^{2,1}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\}), \quad (25)$$

$$g(x) \in C[0,l], \quad (26)$$

chegaraviy shartlar:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, -\alpha \le t \le \beta, \quad (27)$$

nolakal shart:

$$u(x,\beta) - u(x,-\alpha) = \varphi(x), 0 \le x \le l, \quad (28)$$

$t = 0$ skleyka sharti:

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = \lim_{t\to-0} u(x,t), \lim_{t\to+0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lim_{t\to-0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, x \in [0,l], \quad (29)$$

shu bilan birga tenglamaning yechimi haqida quyidagi qo‘shimcha ma’lumot berilgan bo‘lsa:

$$u(x,\beta) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \quad (30)$$

G sohada (24) tenglamaning $u(x,t)$ yechimi va tenglamaning noma’lum o‘ng tomonidagi $g(x)$ funksiya aniqlansin, bu yerda $f(t)$, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar, $G_+ = G \cap \{t > 0\}$, $G_- = G \cap \{t < 0\}$.

Agar $\varphi(x), g(x)$ funksiyalar va c, D o‘zgarmaslar ma’lum bo‘lsa, u vaqtda (24)-(29) munosabatlardan $u(x,t)$ yechimni topish masalasiga to‘g‘ri masala deyiladi.

Faraz qilaylik $f(t) = 1$ bo‘lsin. U holda (24)-(30) masalaning yechimini olamiz:

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{-1}\varphi_k e^{-D\omega_k^2 t} + \frac{g_k}{\omega_k^2} d_k(t)\right) \sin(\omega_k x), & 0 < t < \beta, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\lambda_k^{-1}\left(\varphi_k - \frac{g_k}{\omega_k^2}\mu_k\left(\frac{1}{D} - 1\right)\right) + \frac{g_k}{\omega_k^2}\left(\frac{1}{D} - 1\right)\right) cos\left(\frac{\omega_k}{c}t\right) - \right. & (31) \\ \left. -Dc\omega_k\lambda_k^{-1}\left(\varphi_k - \frac{g_k}{\omega_k^2}\mu_k\left(\frac{1}{D} - 1\right)\right) sin\left(\frac{\omega_k}{c}t\right) + \frac{g_k}{\omega_k^2}\right] \sin(\omega_k x), -\alpha < t < 0 \end{cases}$$

va

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \left(\frac{\psi_k}{d_k(\beta)} - \frac{\lambda_k^{-1}\varphi_k}{d_k(\beta)} e^{-D\omega_k^2\beta}\right) \sin(\omega_k x). \quad (32)$$

bo‘ladi.

2-izoh. *Qaralayotgan (24)-(30) masala amaliy tadbiqqa ega va gazning truba ichida va undan tashqaridagi harakatini ifodalaydi bu yerda D –diffuziya koeffitsiyenti,* $\frac{1}{c^2}$ *esa gaz tezligi.*

3-izoh. (31), (32) *yechim mavjud bo‘lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:*

$$\lambda_k \neq 0 \; va \; d_k(\beta) \neq 0,$$

bu yerda

$$\lambda_k = e^{-D\omega_k^2\beta} - cos\left(\frac{\omega_k}{c}\alpha\right) - Dc\omega_k sin\left(\frac{\omega_k}{c}\alpha\right),$$

$$d_k(t) = \frac{1}{D} - \mu_k\lambda_k^{-1}\left(\frac{1}{D} - 1\right)e^{-D\omega_k^2 t}.$$

Quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsin:

$$|\mu_k| = \left|1 - cos\left(\frac{\omega_k}{c}\alpha\right)\right| \leq 2, \qquad e^{-D\omega_k^2\beta} \leq 1, \;\; \left|\lambda_k^{-1}\right| \leq C_0,$$

$$|d_k(\beta)| \geq C_1 > 0,$$

bu yerda

$$\mu_k = 1 - cos\left(\frac{\omega_k}{c}\alpha\right).$$

Teskari masalaning yechimi uchun quyidagi teorema o‘rinli:

5-teorema. *Faraz qilaylik, 3-izohdagi va quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsin:*

(B_1) $\varphi \in C^3[0,l], \varphi^{(4)} \in L_2(0,l) \; va \;\; \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,$

$$\varphi_k{}^{(4)} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi^{(4)}(x)\sin(\omega_k x)\,dx.$$

(B_2) $\psi \in C^3[0,l], \;\; \psi^{(4)} \in L_2(0,l) \; u \; \psi(0) = \psi(l) = 0, \psi''(0) = \psi''(l) = 0,$

$$\psi_k{}^{(4)} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi^{(4)}(x)\sin(\omega_k x)\,dx.$$

U holda (24)-(30) *teskari masala yagona yechimga ega va bu yechim (33)-(34) qator ko‘rinishida ifodalanadi, shuningdek $g(x)$ funksiya uchun quyidagi baho o‘rinli:*

$$\|g\|_{C[0,l]} \leq \overline{C_1}\left\|\psi^{(4)}\right\|_{L_2(0,l)} + \overline{C_2}\left\|\varphi^{(4)}\right\|_{L_2(0,l)}.$$

Dissertatsiyaning uchinchi bobi **“Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun o‘ng tomonni aniqlash haqidagi teskari masalani sonli yechish”** deb nomlanadi, unda nolokal shartli aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun o‘ng tomonni aniqlash haqidagi teskari masalani sonli yechish uchun algoritmlar taklif etilgan. Nolokal shartga kiradigan va qo‘shimcha shartga kirgan funksiyalar tajribalar asosida aniqlanganligi sababli, ular qandaydir xatolik bilan ma’lum bo‘ladi. Sonli yechish uchun uchta algoritm tavsiya etilgan. Taklif etilgan algoritmlarni aprobastiya qilish uchun bir qator sonli eksperimentlar o‘tkazilgan.

Quyidagi differensial tenglamani:

$$\theta(t)u_t(x,t) + \theta(-t)u_{tt}(x,t) - \sigma u_{xx}(x,t) = g(x), \;\; (x,t) \in (0,l) \times (-\alpha,\beta) \tag{33}$$

α, β, l, σ– berilgan musbat sonlar,
chegaraviy shartlar:

$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0, \;\; t \in [-\alpha,\beta], \tag{34}$$

$t = 0$ da skleyka sharti:

$$u(x,t+0)=u(x,t-0),\quad \lim_{t\to-0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\lim_{t\to+0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\quad x\in[0,l] \tag{35}$$

va quyidagi nolokal shart:

$$u(x,\beta)-u(x,-\alpha)=\phi(x),\quad x\in[0,l], \tag{36}$$

bilan qaraymiz. Bunda $g(x)$ uzluksiz va $g(0)=g(l)=0$ deb hisoblaymiz.

(33)-(36) munosabatlar to‘g‘ri masala, ya’ni agar $\phi(x), g(x)$ ma’lum funksiyalar va $\sigma>0$ – berilgan musbat son bo‘lsa, u holda $u(x,t)$ yechim (33)-(36) munosabatlardan aniqlanadi.

Teskari masala. (33)-(36) to‘g‘ri masalaning yechimi haqida quyidagi qo‘shimcha shart ma’lum bo‘lsa:

$$u(x,\beta)=\psi(x),\quad x\in[0,l], \tag{37}$$

(33) tenglamaning o‘ng tomonidagi $g(x)$ funksiya aniqlansin.

(33)-(36) to‘g‘ri masalaning yechimi qator ko‘rinishida ifodalanadi:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)sin(\omega_k x),\qquad \omega_k=\frac{\pi}{l}k.$$

Yechimni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$u(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\phi_k e^{-\sigma\omega_k^2 t}+\frac{g_k}{\lambda\omega_k^2}\right)\sin(\omega_k x),\ 0<t<\beta,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\phi_k cos(\sqrt{\sigma}\omega_k t)-\sqrt{\sigma}\omega_k\lambda_k\phi_k sin(\sqrt{\sigma}\omega_k t)+\frac{g_k}{\sigma\omega_k^2}\right)\sin(\omega_k x),\ -\alpha<t<0.\end{cases} \tag{38}$$

bu yerda $\lambda_k=\dfrac{1}{e^{-\sigma\omega_k^2\beta}-\left(cos(\sqrt{\sigma}\omega_k\alpha)+\sqrt{\sigma}\omega_k sin(\sqrt{\sigma}\omega_k\alpha)\right)}$.

Uchinchi bobning birinchi paragrafda o‘suvchi ko‘paytuvchili qatorning yig‘indisi hisoblangan.

(33)-(37) teskari masalaning yechimi quyidagi qator ko‘rinishida ifodalanadi:

$$g(x)=\sigma\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2\left(\psi_k-\lambda_k\phi_k e^{-\sigma\omega_k^2\beta}\right)sin(\omega_k x). \tag{39}$$

Ushbu qatorda o‘suvchi ko‘paytuvchi ω_k^2 bo‘lganligi uchun yig‘indisini hisoblash murakkablik tug‘diradi.

3-ta’rif. *Agar δ (mos metrikada, yetarlicha kichik miqdor) aniqlikda Furye qatori masalaning taqribiy berilganlariga asosan, masalaning ixtiyoriy ε aniqlikdagi yechimini bersa, Furye qatori yig‘indisini hisoblash turg‘un deyiladi.*

(36)-(40) masalaning sonli yechimi sifatida quyidagi qatorni olamiz:

$$g(x)=\sigma\sum_{k=1}^{N_\delta}\omega_k^2\left(\psi_k-\lambda_k\phi_k e^{-\sigma\omega_k^2\beta}\right)sin(\omega_k x),\quad j=\overline{0,N-1}. \tag{40}$$

Hisoblash natijalari 2-rasm (a) da keltirilgan. Ushbu sonli hisoblashda $N_\delta=7$, $N=300$.

Ikkinchi paragrafda dastlab (33)-(37) masala Fredgolmning 1-tur integral tenglamasiga keltiriladi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k^2} \sin(\omega_k) = \int_0^l K(x,s)g(s)ds,$$

bu yerda

$$K(x,s) = \begin{cases} s\left(1 - \frac{x}{l}\right), & s \le x, \\ x\left(1 - \frac{s}{l}\right), & s > x. \end{cases}$$

Natijada quyidagi Fredgolmning 1-tur integral tenglamasini olamiz:

$$\phi_\beta(x) = \int_0^l K(x,s)g(s)ds, \qquad (41)$$

bu yerda

$$\phi_\beta(x) = \sigma\psi(x) - \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k e^{-\omega_k^2 \beta} sin(\omega_k x).$$

4-izoh. (33)-(37) *teskari masala* (41) *Fredgolmning 1-tur integral tenglamasiga ekvivalent. (41) tenglamaning yadrosi simmetrik va uzluksiz bo‘lganligi uchun (41) tenglama yechimga ega.*

Fredgolmning 1-tur integral tenglamasini yechish uchun bir qator usullar mavjud. (41) integral tenglamani yechish uchun klassik usuldan – Tixonov regulyarizatsiyasi bilan funksionalni minimallashtirish usulidan foydalanamiz:

$$J[g] = \int_0^l \left[\int_0^l K(x,s)g(s)ds - \phi_\beta(x) \right] dx + \varepsilon \int_0^l [g^2(x) + p(g'(x))^2]dx,$$

bu yerda ε va p parametrlar – regulyarizatsiya parametrlari.

Quyidagi masalani

$$h \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} g_j = \phi_\beta(x_i), \qquad i = \overline{1, N-1},$$

sonli usulda xatolik funksionalini

$$J[g] = h \sum_{i=1}^{N-1} \left[h \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} g_j - \phi_\beta(x_i) \right]^2 + \epsilon h \sum_{i=1}^{N-1} g_j^2 +$$

$$+ \epsilon p h \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{2h} \right)^2,$$

minimallashtirish yordamida yechamiz.

Uchinchi paragafda qaralayotgan (33)-(37) masala quyidagi masalaga keltiriladi:

Teskari masala: Agar quyidagi to‘g‘ri masalaning

$$u_t(x,t) - \sigma u_{xx}(x,t) = g(x), \ \ (x,t) \in (0,l) \times (0, \ \beta), \qquad (42)$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \in [0,\beta], \tag{43}$$

$$u(x,0) = \phi_0(x) + \frac{1}{\sigma}\int_0^l K(x,s)g(s)ds, \tag{44}$$

yechimi haqida qo‘shimcha shart

$$u(x,\beta) = \psi(x),\quad x \in [0,l], \tag{45}$$

ma’lum bo‘lsa, $g(x)$ funksiya aniqlansin.

5-izoh. (33)-(37) *teskari masala* (42)-(45) *masalaga ekvivalent.*

(33)-(37) teskari masala to‘r funksiyasi uchun quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\tau} - \sigma\frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2} = g_i, i = \overline{1,N-1}, k = \overline{1,K-1}, \tag{46}$$

$$u_{0,k} = 0, u_{N,k} = 0, k = \overline{0,K}, \tag{47}$$

$$u_{i,0} = \phi_0(x_i) + \frac{h}{\sigma}\sum_{j=1}^{N-1} K_{ij}g_j,\ i = \overline{1,N-1}, \tag{48}$$

$$u_{i,K} = \psi(x_i), i = \overline{1,N-1}. \tag{49}$$

(46)-(49) masala quyidagi xatolik funksionalini minimallashtirish yordamida yechiladi:

$$J[g] = h\sum_{i=1}^{N-1}[u_{i,K} - \psi(x_i)]^2.$$

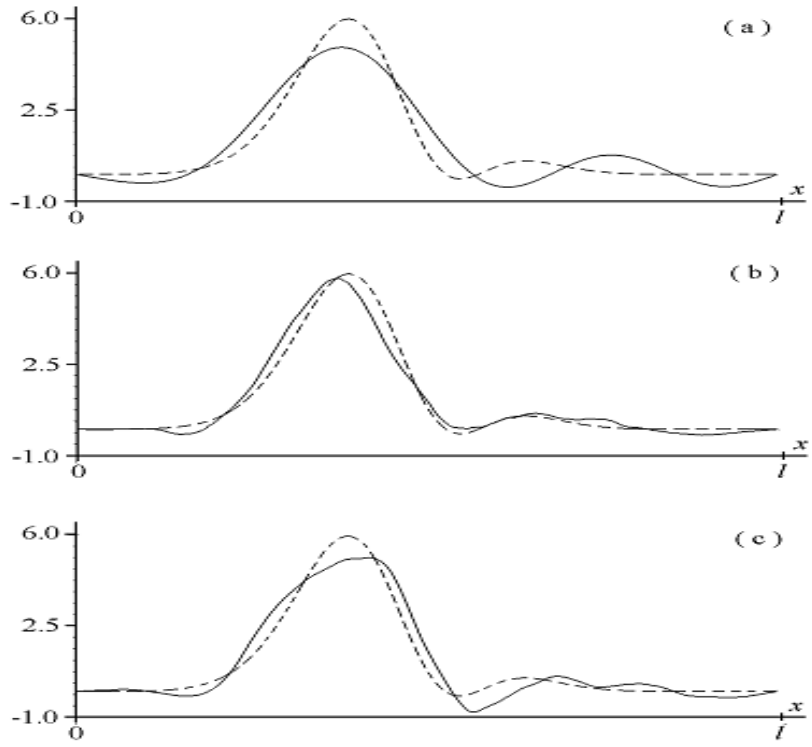
Uchinchi bobda teskari masalani yechish uchun uchta algoritm tavsiya etildi:

• 1-algoritm koeffitsiyentlari ω_k^2 o‘suvchi ko‘paytuvchiga ega Furye qatorini yig‘indisini regulyarizatsiyalashga asoslangan;

• 2-algoritm 1-tur Fredgolm integral tenglamasini Tixonov regulyarizatsiyasi bilan yechish usuliga asoslangan;

• 3-algoritm maxsus parabolik tenglamaga qo‘yilgan teskari masalani yechishga asoslangan.

Sonli hisoblash natijalari quyidagi rasmda keltirilgan.



2-rasm: g(x) funksiyani tiklash natijalari aniq yechim punktir chiziq bilan berilgan, uzluksiz chiziq bilan – tiklangani.
(a) –1-algoritm natijasi, (b) –2-algoritm natijasi, (c) –3-algoritm natijasi.

XULOSA

Dissertatsiyada aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun manbani aniqlash teskari masalalarining korrektligi tadqiq qilindi.

Asosiy tadqiqot natijalari quyidagilardan iborat:

1. Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamaga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala uchun ayirmali sxema qurilgan, chekli ayirmali sxemaning turg‘unligini va approksimatsiya tartibi haqidagi teoremalar isbot qilingan;
2. Bessel operatorli aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun noma’lum manbani aniqlash to‘g‘ri va teskari masalalari tadqiq etilgan. Yechimning yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremalar isbot qilingan;
3. aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglamaga qo‘yilgan teskari masalaning bir qiymatli yechilishi haqidagi teorema isbot qilingan;
4. Aralash parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun manbani aniqlash teskari masalasini sonli yechish uchun uchta algoritmdan foydalanilgan va algoritmlarni aprobatsiya qilish uchun bir qator sonli tajribalar o‘tkazilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕРАЖОВА ШАХЛО БЕРДИЕВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОБ ИСТОЧНИКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Бухара – 2023

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.4.PhD/FM695.

Диссертация выполнена в Бухарском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (https://kengash.mathinst.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ашуров Равшан Раджабович** доктор физико-математических наук, профессор
	Карчевский Андрей Леонидович доктор физико-математических наук, профессор (Россия)
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 14 » марта 2023 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathins.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математеки имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 156). (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел. (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 28 » февраля 2023 года.
(протокол рассылки № 2 от « 28 » февраля 2023 года).

У.А.Розиков
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м. н., старший научный сотрудник

А.А.Аъзамов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые в мировом масштабе, в некоторых случаях сводятся к исследованию корректности обратных задач по определению источника для смешанных дифференциальных уравнений в частных производных. На сегодняшний день в геологии, электродинамике, газодинамике, процессах распространения волн, геофизике и многих других областях обратные задачи для смешанных дифференциальных уравнений в частных производных составляют основу исследуемых задач. Определение решения обратной задачи основываясь на дополнительную информацию о решении прямой задачи, проведение исследований по численному решению прямых и обратных задач, на сегодняшний день остается одной из важных задач математической физики.

В настоящее время во всем мире проводятся исследования в бурно развивающемся направлении математической физики, посвященным методам исследования обратных задач. Эта область стала одной из важнейших проблем в физике и технических науках, поскольку решение этих проблем позволяют находить параметры, которые не могут быть определены напрямую. Это направление имеет применение во многих областях. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа являются актуальными с точки зрения приложений. Таким образом, возникает необходимость исследования корректности прямых и обратных задач для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. В приложениях нахождение решений прямых и обратных задач, поставленных для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа, являются целенаправленными научными исследованиями. Именно такие актуальные научные проблемы и исследуются в этой диссертационной работе.

В нашей Республике уделяется большое внимание современным направлениям математической физики, имеющим научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, в последние годы особое внимание уделяется прикладному применению путем исследования начально-граничных задач для дифференциальных уравнений смешанного параболо-гиперболического типа, описывающих процессы в газодинамике и решением для них прямых и обратных задач. Достигнуты значительные результаты по доказательству существования, единственности решения и по численному решению обратных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Проведение исследований на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Дифференциальные уравнения и математическая физика, теория динамических систем» обозначены как основные цели и направления деятельности исследователей[1]. В связи с этим представляется важным развитие теории обратных задач для

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

смешанных дифференциальных уравнений математической физики.

Исследования, проводимые в рамках данной диссертационной работы, соответствуют решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях ПП№4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии в республике. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Во многих случаях исследование тех или иных явлений природы можно привести к нахождению решений уравнений с частными производными, носящих название уравнений математической физики. Для уравнений математической физики существует классификация. По сравнению с уравнениями гиперболического, эллиптического и параболического типов, теория смешанных уравнений имеет сравнительно недолгую историю. Впервые смешанные уравнения с двумя независимыми переменными были систематически исследованы итальянскими математиками Ф. Трикоми и М. Чибрарио. Далее уравнения смешанного типа изучались многими математиками, в частности, им уделялось большое внимание в научных школах М.А.Лаврентьева, А.В. Бицадзе, М.С.Салахитдинова и Т.Д. Джураева. Уравнения смешанного типа нашли многочисленные применения — например, в задачах, связанных с трансзвуковой газовой динамикой.

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из центральных разделов теории уравнений в частных производных и встречается при решении многих важных вопросов прикладного характера. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа изучены относительно меньше, чем задачи для уравнений конкретного типа. Тем не менее, такие задачи являются актуальными с точки зрения приложений. Например, в работах А.Н. Тихонова и А.А. Самарского показано, что в однородной среде в случае её малой проводимости напряжённость электромагнитного поля удовлетворяет волновому уравнению, в случае же сравнительно большой проводимости, когда можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, упомянутая величина удовлетворяет уравнению теплопроводности. В работах И.М. Гельфанда и Ф.И. Франкля замечено, что процесс движение газа в закрытом канале с пористыми стенками описывается волновым уравнением, а вне его — уравнением диффузии. Прямые задачи для уравнений смешанного параболо-

гиперболического типа изучались в работах Ф. Трикоми, Г. Фикера, Т. Д. Джураева, В.Н. Врагова, М.С. Салахитдинова, К.Б. Сабитова, Б.И. Исломова и др. Обратные задачи об определении правой части или начальной функции в начально-краевых задачах для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области рассматривались в работах К.Б. Сабитова, Э.М. Сафина, С.Н. Сидирова и др., где на основе спектрального метода установлены критерии единственности и существования решения.

Различные обратные задачи определения коэффициентов, правых частей отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, т. е. параболических, гиперболических и эллиптических уравнений, изучались во многих работах В.Г. Романова, А.М. Денисова, С.И. Кабанихина, Р.Р.Ашурова, С.З.Джамолова, А.И. Прилепко, Д.Г. Орловского, И.А. Васина и др. Обратные задачи восстановления ядра в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях исследовались в работах В.Г.Романова, Д.К. Дурдиева, Ж.Д. Тотиевой, А.А. Рахмонова У.Д. Дурдиева, З.Р. Бозорова и др. С другой стороны, весьма малое количество работ посвящено численным методам решения обратных задач. Можно отметить на эту тему работу В.Г. Романова, В.А. Дедок, А.А. Дучкова, А.Л. Карчевского и других. Для каждого класса дифференциальных уравнений имеются типичные постановки задач. Характерной чертой этих задач является их корректность. В этой диссертационной работе исследуется корректность обратных задач об источнике для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа, а также строятся алгоритмы численного решения.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами института, в котором выполняется диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ М-02.2018 «Обратные задачи математической физики» (2020-2022г.) Бухарского государственного университета.

Целью исследования является доказательство корректности прямых и обратных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа, а также их численное решение.

Задачи исследования:

построить разностную схему для смешанной задачи поставленной уравнению параболо-гиперболического типа. Доказать устойчивость построенной разностной схемы, найти порядок аппроксимации;

исследовать начально-краевую и обратные задачи, поставленные для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в двумерном случае в цилиндрической области. Доказать существование и единственность решения поставленной обратной задачи;

доказать существование единственного решения обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в четырехугольной области с разрывным коэффициентом;

численно исследовать решение обратной задачи по определению источника для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.

Объект исследования. Одномерные и двумерные обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.

Предмет исследования. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Ряды Фурье-Бесселя и Фурье, теория дифференциальных уравнений в частных производных.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории дифференциальных уравнений с частными производными и теории интегральных уравнений, теория численных методов, а также методы функционального анализа. Однозначная разрешимость прямых и обратных задач доказана методами спектрального анализа. Для доказательства использованы условия сходимости рядов Фурье и Фурье-Бесселя.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

построена разностная схема для начально-краевой задачи поставленной уравнению смешанного параболо-гиперболического типа и доказаны теоремы об устойчивости и о порядке аппроксимации разностной схемы;

доказаны теоремы о единственности и существования решения обратной задачи по определению функции источника для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с оператором Бесселя;

доказана теорема об однозначной разрешимости обратной задачи об определении правой части в начально-краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с разрывным коэффициентом;

предложены алгоритмы численного решения обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным условием по определению правой части уравнения и проведён ряд численных экспериментов по апробации предложенных алгоритмов.

Практические результаты исследования. Работа носит теоретический характер, однако существенно основывается на имеющихся экспериментальных данных. Результаты исследований могут быть использованы в сейсмологии, газодинамике и при чтении специальных курсов лекций по предмету математической физики для старших курсов бакалавриата и магистратуры.

Достоверность результатов исследования. Использовались методы математического и функционального анализа, элементы дифференциальных уравнений и теории обратных задач. Полученные результаты имеют строгие математические доказательства.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследований объясняется тем, что в них была развита теория обратных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа, построен численный метод определения правой части уравнения. Также для прямой задачи для уравнения смешанного типа построена устойчивая разностная схема.

Практическая значимость результатов исследований заключается в том, что их можно применить к моделям геофизических и сейсмических наблюдений, в газодинамике.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов

по обратным задачам для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа:

по существованию и единственности решения обратной задачи об источнике для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа и по численному решению смешанной задачи были использованы при выполнении научно-исследовательских работ по проекту ОТ-Ф4-14 «Разработка и расчет теории исследования состояния напряжений-деформаций под воздействием внешних сил трубы с жидкостью, протекающей под землей» (Справка Бухарского инженерно-технологического института за номером № 01/04-87/125 от 25 января 2023 года). Применение научного результата позволило проверить нелинейное динамическое напряженно-деформированное состояние криволинейных участков многослойных композитных труб, по которым течет вязкая жидкость.

методы и подходы решения обратных задач по определению неизвестного источника, а также численные методы решения обратной задачи для смешанного параболо-гиперболического типа были использованы при выполнении международного проекта AP05133873 «Численные методы и параллельные алгоритмы решения нелинейных обратных задач для математических моделей с дробными степенями эллиптических операторов с приложениями в гравиметрии» (Справка международного Казахско-Турецкого университета имени Ходжа Ахмеда Ясави за номером №04/4173 от 28 декабря 2022г., Казахстан). Использование научного результата позволило им численное решение прямых и обратных задач для эволюционного уравнения первого порядка с дробной степенью эллиптического оператора.

Апробации результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждены в 11 научно-практических конференциях, в том числе в 4 международных и 7 республиканских.

Опубликование результатов. По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, все статьи опубликованы в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии. Две статьи опубликованы в зарубежных журналах, входящих в базу SCOPUS и 4 статьи в республиканских журналах входящих в перечень научных изданий.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованных литератур. Объем диссертации составляет 90 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных и отечественных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические

результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется **«Подготовительные сведения»**. В этой главе приведены необходимые предварительные сведения для изложения этой диссертации из численных методов и рядов Фурье-Бесселя. Также построена устойчивая разностная схема для первой краевой задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа и доказаны теоремы об аппроксимации и об устойчивости построенной разностной схемы.

В области $D = \{(x,t): 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее уравнение:

$$Lu = K(t)u_{tt} - H(x)u_{xx} + a(x,t)u_t + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t), \quad (1)$$

здесь $K(t)$, $H(x)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ - заданные функции, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $K(t) \in C^2([0,T]), K(t) > 0$ при $t \neq 0$ и $K(0) = 0$.

2) $H(x) \in C^2([0,l])$ если $x \in (0,l)$, то $H(x) > 0$ и $H(0) = H(l) = 0$.

3) $a(x,t), b(x,t) \in C^1(\overline{D}), c(x,t) \in C(\overline{D})$.

4) $\beta(x) = a(x,0) - K_t(0) > 0, x\epsilon[0,l]$.

C - пространство непрерывных функций, $\overline{D}$- замыкание D.

$\Gamma = \partial D$ - граница области D.

Для уравнения (1) изучаем следующую смешанную задачу:

Смешанная задача: Найти решение уравнения (1) в области D и такое, что:

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ x\epsilon[0,l], \quad (2)$$

$$u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0, t > 0. \quad (3)$$

Для решения смешанной задачи (1) - (3) воспользуемся приближенным (численным) методом. Для этой задачи применим метод конечно-разностных схем.

В области $\overline{D} = \{(x,t): 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ строим разностную сетку с шагами $\Delta t = h_t, \Delta x = h_x, (T = mh_t, l = nh_x)$.

Через u_i^k обозначим приближенное решение смешанной задачи в точке (t^k, x_i). Здесь (t^k, x_i) – узловая точка, образованная пересечением прямых линий $t = t^k = kh_t, x = x_i = ih_x$. Введём операторы $\varphi, \psi, \tau, \bar{\tau}, \xi, \bar{\xi}$ сдвига и разностные, следующим образом:

$$\varphi u_i^k = u_i^{k+1} = u^{k+1} = \hat{u},\ \ \varphi^{-1}u_i^k = u_i^{k-1} = u^{k-1} = \check{u},\ \ \psi^{\pm 1}u_i^k = u_{i\pm 1}^k = u_{i\pm 1},$$

$$\tau = \varphi - 1, \qquad \bar{\tau} = 1 - \varphi^{-1}, \qquad \xi = \psi - 1, \qquad \bar{\xi} = 1 - \psi^{-1}, \qquad r = \frac{\Delta}{\Delta_x}.$$

В этом случае аппроксимируем смешанную задачу (1)-(3) следующей конечно-разностной схемой:

$$L^h u \equiv \left[K^k \frac{\tau\bar{\tau}}{{h_t}^2} - H_i \frac{\xi\bar{\xi}}{h_x^2} + a_i^k \frac{\bar{\tau}}{h_t} + b_i^k \frac{\bar{\xi}}{h_x} + c_i^k\right] u = f_i^k, k = \overline{1,m}; i = \overline{0,n}\,, \quad (4)$$

$$u_i^0 = 0, u_i^1 = 0, u_0^k = u_n^k = 0, i = \overline{0,n}, k = \overline{0,m} \quad (5)$$

Разностная схема (4)-(5) является незамкнутой. Для нее требуется задание

так называемого дополнительного граничного и начального условия. Для простоты мы предлагаем следующие дополнительные условия:

$$u_{-1}^k = u_0^k, u_{n+1}^k = u_n^k, \qquad k = \overline{0,m}. \tag{6}$$

Далее определяем порядок аппроксимации, и устанавливается следующая теорема.

Теорема 1. (4)-(6) *конечно-разностная схема аппроксимирует (1) -(3) смешанную задачу первым порядком относительно* h_t, h_x, *и для нее верна следующая оценка*

$$\|\delta f\| \leq O(h_t + h_x).$$

Доказали следующую теоремы об устойчивости построенной схемы.

Теорема 2. *Если для шагов разностной сетки выполняются условия*

$$h_t < \min\left(\frac{rK}{M_2}, \frac{2\delta_0}{M_1}\right), \qquad h_x < \frac{2H}{M_3}, i = \overline{1, N-1}, k = \overline{-m+1,0},$$

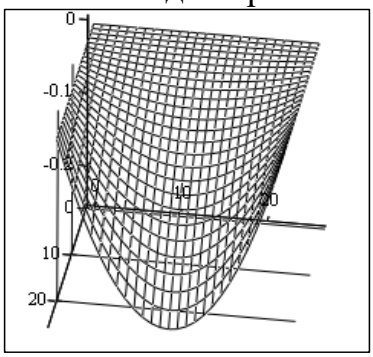
тогда построенная для смешанной задачи (1)-(3) *разностная схема* (4)-(6) *устойчива, и для неё верна энергетическая оценка*

$$h_t \cdot h_x \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}(L^h u)(2u) \geq h_t \cdot h_x \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{(2K - h_t M_2)\left(\frac{\tau u}{h_t}\right)^2 + \right.$$

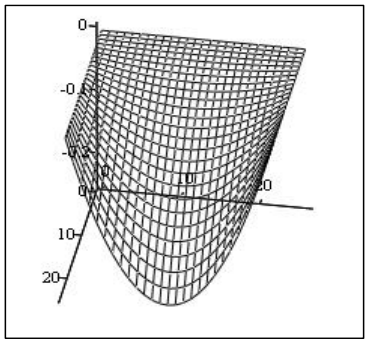
$$\left. + (2H - h_x M_3)\left(\frac{\xi u}{h_x}\right)^2 + (2\delta_0 - h_t M_1)u^2\right\}$$

где M_i, $i = \overline{1,3}$ *– положительные числа, ограниченные в конечном итоге через* $|a|, |b|, |K'(t)|, |H'(x)|, |a_{tt}|, |b_{xx}|, \left|K^{(4)}(t)\right|, \left|H^{(4)}(x)\right|$.

Решаем смешанную задачу для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа, используя построенную разностную схему на симулированных данных. $\max_{i,k}|y - M| < 10^{-3}, i = \overline{0,n}, k = \overline{0,M}$ – абсолютная ошибка численного метода. При численном решении поставленной задачи использовали метод матричной прогонки.



y



M

Рис. 1: y – приближенное решение, M – точное решение.

Во второй главе диссертации, названной «**Обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа**», рассматриваются задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с оператором Бесселя и с разрывным коэффициентом,

изучается обратная задача, связанная с поиском неизвестной правой части. На основе метода разделения переменных эти задачи сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения в ряды Фурье-Бесселя и Фурье неизвестных функций по ортонормированным функциям Бесселя первого рода нулевого порядка и синусов. Доказаны теоремы о единственности и существовании решения поставленных задач.

В первом параграфе второй главы изучается обратная задача, поставленная уравнению смешанного параболо-гиперболического типа с оператора Бесселя.

Рассмотрим в цилиндре $G = \{(x, y, t): x^2 + y^2 < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$\begin{cases} Du_t - \Delta u = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), & t > 0, \\ c^2 u_{tt} - \Delta u = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), & t < 0, \end{cases} \tag{7}$$

где α, β, c, D - заданные положительные числа, Δ - оператор Лапласа по переменным x и y.

Поставим следующую задачу: найти в области G функции $u(x, y, t)$ и $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ удовлетворяющие уравнению (7) и следующим условиям:
краевые условия:

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \langle (x, y), \nabla u \rangle = 0, u|_{x^2+y^2=1} = 0,\ -\alpha \le t \le \beta, \tag{8}$$

и считаем, что имеет место локальное условие:

$$u(x, y, -\alpha) = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad , \qquad x^2 + y^2 \le 1, \tag{9}$$

а также условия склейки при $t = 0$:

$$\lim_{t\to -0} u(x, y, t) = \lim_{t\to +0} u(x, y, t),$$
$$\lim_{t\to -0} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \lim_{t\to +0} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t},\ x^2 + y^2 \le 1, \tag{10}$$

здесь $\varphi(\cdot)$ -заданная достаточно гладкая функция.

Обозначим $G_+ = G \cap \{t > 0\}, G_- = G \cap \{t < 0\}$.

Определение 1. *Решением задачи (7)-(10) назовем функцию $u(x, y, t)$ из класса $C(\bar{G}) \cap C^1(G) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\})$ и удовлетворяющая соотношениям (7)-(10).*

Соотношения (7)-(10) являются прямой задачей, т.е., если известны функции φ, f, то решение $u(x, y, t)$ может быть найдено из соотношений (7)-(10).

Теперь поставим обратную задачу в заданной цилиндрической области:

Обратная задача: Необходимо определить функцию $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, если о решении прямой задачи (7)-(10) известна следующая дополнительная информация:

$$u(x, y, \beta) = \psi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad x^2 + y^2 \le 1. \tag{11}$$

здесь $\psi(\cdot)$ -заданная достаточно гладкая функция.

Определение 2. *Решением задачи (7)-(11) назовем функции $u(x, y, t)$ и*

$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ *из класса* $C(\bar{G}) \cap C^1(G) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\})$ *и* $C[0,1]$ *соответственно, удовлетворяющая соотношениям (7)-(11).*

Заметим, что так как правая часть уравнения (7) и функции, входящие в (9), (11) зависят от расстояния $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, то $u(x,y,t) = u(\rho,t)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, т. е. мы имеем осесимметрический случай.

Следовательно, поставленная обратная задача (7)-(11) в полярной координатной системе записывается следующим образом:

Обратная задача. Найти в области $G := \{(\rho,t) : 0 < \rho < 1, -\alpha < t < \beta\}$ функции $u(\rho,t)$ и $f(\rho)$ удовлетворяющие следующему дифференциальному уравнению смешанного параболо-гиперболического типа:

$$\theta(t)D\frac{\partial u}{\partial t} + \theta(-t)c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + f(\rho), (\rho,t) \in (0,1) \times (-\alpha,\beta), \quad (12)$$

(здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда) и условиям
краевые условия:

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\frac{\partial u(\rho,t)}{\partial \rho} = 0, \quad u|_{\rho=1} = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta, \quad (13)$$

условия склейки при $t = 0$:

$$u(\rho,+0) = u(\rho,-0), \lim_{t\to+0}\frac{\partial u}{\partial t}(\rho,t) = \lim_{t\to-0}\frac{\partial u}{\partial t}(\rho,t), \quad 0 \le \rho \le 1, \quad (14)$$

и имеют место начальное условие:

$$u(\rho,-\alpha) = \varphi(\rho), \quad 0 \le \rho \le 1, \quad (15)$$

также дополнительная информация о решении $u(\rho,t)$:

$$u(\rho,\beta) = \psi(\rho), \quad 0 \le \rho \le 1. \quad (16)$$

Таким образом, прямая задача (7)-(11) свелась к задаче определения функции $u(\rho,t)$, из равенств (12) − (15), а обратная задача (7)-(11) свелась к задаче определения функции $u(\rho,t), f(\rho)$ из равенств (12)-(16).

Разыскиваем, согласно методу Фурье, частные решения уравнения (12) при $f(\rho) = 0$ в виде

$$u(\rho,t) = R(\rho)T(t).$$

Для нахождения функции $R(\rho)$ получим задачу для уравнения:

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho}R'(\rho) + \lambda^2 R(\rho) = 0, \quad (17)$$

с граничными условиями

$$\lim_{\rho\to 0}(\rho R'(\rho)) = 0, R(1) = 0. \quad (18)$$

Замечание 1. *Задача* (17)-(18) *является самосопряженной задачей*.

Решением уравнения (17) являются следующие функции Бесселя первого рода нулевого порядка:

$$R(\rho) = J_0(\lambda_k\rho), k = 1,2,3, \ldots,$$

они же есть собственные функции.

Находим собственные значения используя граничные условия (18), положительные корни уравнения $J_0(\lambda_k) = 0$, они имеют следующий вид:

$$\lambda_k = k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Разложим теперь искомую функцию и правую сторону уравнения в ряд Фурье-Бесселя по собственным функциям $J_0(\lambda_k\rho)$, т.е.

$$u(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) J_0(\lambda_k\rho), \tag{19}$$

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k J_0(\lambda_k\rho), \tag{20}$$

где

$$u_k(t) = \frac{2}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 \rho u(\rho,t) J_0(\lambda_k\rho) d\rho,\ f_k = \frac{2}{J_{1(\lambda_k)}^2} \int_0^1 \rho f(\rho) J_0(\lambda_k\rho) d\rho.$$

Доказали следующую теорему:

Теорема 3. *Если существует решение обратной задачи* (12)-(16)*, то оно единственно при значениях,* $\alpha = 4cp$, $p \epsilon N$ *или* $\alpha = 4c\frac{n}{m}$, $n, m \epsilon N$, НОД$(n,m) = 1$ *и произвольном* $\beta > 0$.

Во втором параграфе второй главы доказывается теорема о существовании решения обратной задачи (12)-(16)

Получили формальное решение в виде рядов подставляя коэффициенты в (19), (20):

$$u(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha,\beta}(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{D}t} + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha,\beta}(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{D}\beta} \right] J_0(\lambda_k\rho),\ \ t > 0, \tag{21}$$

$$u(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha,\beta}(k)} cos\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) - c\frac{\lambda_k}{D}\frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha,\beta}(k)} sin\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) + \right.$$

$$\left. + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta_{\alpha,\beta}(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{D}\beta} \right] J_0(\lambda_k\rho), t < 0, \tag{22}$$

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left[\psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{\delta 1_k(\alpha,\beta)} \right] J_0(\lambda_k\rho). \tag{23}$$

Для общих членов получаем следующую оценку:

$$max \left\{ \max_{\rho\in[0,1]} |f_k|, \max_{(\rho,t)\in G_+} |u_k(\rho,t)|, \max_{(\rho,t)\in G_-} |u_k(\rho,t)|, \max_{(\rho,t)\in G_+} \left|\frac{\partial u_k(\rho,t)}{\partial t}\right|, \right.$$

$$\left. \max_{(\rho,t)\in G_-} \left|\frac{\partial^2 u_k(\rho,t)}{\partial t^2}\right|, \max_{(\rho,t)\in G_+} \left|\frac{\partial^2 u_k(\rho,t)}{\partial \rho^2}\right|, \max_{(\rho,t)\in G_-} \left|\frac{\partial^2 u_k(\rho,t)}{\partial \rho^2}\right| \right\} \leq$$

$$\leq N \frac{\lambda_k^3}{\lambda_k^{2s-\frac{1}{2}}},$$

где $N-$ положительная постоянная.

Таким образом доказана следующая теорема о существовании решение обратной задачи.

Теорема 4. *Предположим, что* $\{\varphi(\rho), \psi(\rho)\} \in C^6[0,1]$ *и кроме того,*

выполнены условие

$$\left|\delta_{\alpha,\beta}(k)\right| \geq \mathrm{C}_0 > 0,$$

где $\delta_{\alpha,\beta}(k) = e^{-\frac{\lambda_k^2}{D}\beta} - \left(cos\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right) + \frac{c\lambda_k}{D} sin\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right)\right)$.

Также верны равенства:

$\varphi^{(i)}(0) = 0,\ \psi^{(i)}(0) = 0,\quad (i = \overline{0,5});\ \varphi^{(i)}(1) = 0,\ \psi^{(i)}(1) = 0,\quad (i = \overline{0,4})$ *и* $\varphi^{(6)}(\rho),\ \psi^{(6)}(\rho)$ *ограничены. Тогда существует единственное решение задачи (12)-(16), которое определяется формулами* (21), (22) *и* (23), *где* $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(i)}$ *– i-ые производные функций φ и ψ.*

В третьем параграфе этой главы рассматривается обратная задача по определению правой части для одного модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с разрывными коэффициентами.

В прямоугольной области $G := \{(x,t): 0 < x < l; -\alpha < t < \beta\}$, здесь $l,\ \alpha$ и β – заданные положительные числа, рассмотрим уравнения смешанного параболо-гиперболического типа:

$$c^2\theta(-t)u_{tt} + \theta(t)u_t = \widehat{D}u_{xx} + f(t)g(x), \tag{24}$$

где $\widehat{D} = \begin{cases} D, & \text{если } t > 0 \\ 1, & \text{если } t < 0 \end{cases}$, θ - функция Хэвисайда, D, c –постоянные.

Для этого уравнения поставим следующую обратную задачу.

Обратная задача. Найти в области G решение уравнения (24) $u(x,t)$ и неизвестную функции $g(x)$ в правой части удовлетворяющие условиям:

$$u(x,t) \in C\left(\overline{G}\right) \cap C_{x,t}^{2,1}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\})\ . \tag{25}$$

$$g(x) \in C[0,l], \tag{26}$$

краевые условия:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, -\alpha \leq t \leq \beta, \tag{27}$$

считаем, что имеет место нелокальное условие:

$$u(x,\beta) - u(x,-\alpha) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \tag{28}$$

условия склейки при $t = 0$:

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = \lim_{t\to-0} u(x,t)\,, \lim_{t\to+0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lim_{t\to-0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ x \in [0,l], \tag{29}$$

если известна следующая дополнительная информация про решение уравнения:

$$u(x,\beta) = \psi(x),\quad 0 \leq x \leq l, \tag{30}$$

где $f(t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $G_+ = G \cap \{t > 0\},\ \ G_- = G \cap \{t < 0\}$.

Если известны функции $\varphi(x), g(x)$ и постоянные c и D, то нахождение решение $u(x,t)$ из соотношений (24)-(29) называется прямой задачей.

Пусть $f(t) = 1$. Получили решение заданной обратной задачи:

$$u(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{-1}\varphi_k e^{-D\omega_k^2 t}+\frac{g_k}{\omega_k^2}d_k(t)\right)\sin(\omega_k x), & 0<t<\beta,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\lambda_k^{-1}\left(\varphi_k-\frac{g_k}{\omega_k^2}\mu_k\left(\frac{1}{D}-1\right)\right)+\frac{g_k}{\omega_k^2}\left(\frac{1}{D}-1\right)\right)cos\left(\frac{\omega_k}{c}t\right)-\right. & (31)\\ \left.-Dc\omega_k\lambda_k^{-1}\left(\varphi_k-\frac{g_k}{\omega_k^2}\mu_k\left(\frac{1}{D}-1\right)\right)sin\left(\frac{\omega_k}{c}t\right)+\frac{g_k}{\omega_k^2}\right]\sin(\omega_k x), -\alpha<\ t<0\end{cases}$$

и

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2\left(\frac{\psi_k}{d_k(\beta)}-\frac{\lambda_k^{-1}\varphi_k}{d_k(\beta)}e^{-D\omega_k^2\beta}\right)\sin(\omega_k x). \qquad (32)$$

Замечание 2. *Рассматриваемая* (24)-(30) *задача носит прикладной характер и описывает движение газа в трубе и вне трубы, где D – коэффициент диффузии,* $\frac{1}{c^2}$ *–скорость газа.*

Замечание 3. *Следует отметить, для того чтобы существовало решение* (31), (32) *должны выполнятся следующие условия:*

$$\lambda_k\neq 0 \text{ и } d_k(\beta)\neq 0,$$

где

$$\lambda_k=e^{-D\omega_k^2\beta}-cos\left(\frac{\omega_k}{c}\alpha\right)-Dc\omega_k sin\left(\frac{\omega_k}{c}\alpha\right),$$

$$d_k(t)=\frac{1}{D}-\mu_k\lambda_k^{-1}\left(\frac{1}{D}-1\right)e^{-D\omega_k^2 t}.$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$|\mu_k|=\left|1-cos\left(\frac{\omega_k}{c}\alpha\right)\right|\le 2,\qquad e^{-D\omega_k^2\beta}\le 1,\ \left|\lambda_k^{-1}\right|\le C_0,$$

$$|d_k(\beta)|\ge C_1>0,$$

где

$$\mu_k=1-cos\left(\frac{\omega_k}{c}\alpha\right),$$

Для решения обратной задачи получили следующую теорему:

Теорема 5. *Пусть выполняются условия Замечание 3 и*

(B_1) $\varphi\in C^3[0,l],\varphi^{(4)}\in L_2(0,l)$ и $\varphi(0)=\varphi(l)=0,\varphi''(0)=\varphi''(l)=0,$

$$\varphi_k{}^{(4)}=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi^{(4)}(x)\sin(\omega_k x)\,dx.$$

(B_2) $\psi\in C^3[0,l],\ \psi^{(4)}\in L_2(0,l)$ *и* $\psi(0)=\psi(l)=0,\psi''(0)=\psi''(l)=0,$

$$\psi_k{}^{(4)}=\frac{2}{l}\int_0^l\psi^{(4)}(x)\sin(\omega_k x)\,dx.$$

Тогда поставленная обратная задача имеет единственное решение, которое представляется в виде ряда (31), (32), *а также для функции* $g(x)$ *выполняется оценка устойчивости:*

$$\|g\|_{C[0,l]}\le\overline{C_1}\left\|\psi^{(4)}\right\|_{L_2(0,l)}+\overline{C_2}\left\|\varphi^{(4)}\right\|_{L_2(0,l)}.$$

В третьей главе диссертации, названной **«Численное решения обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа по определению правой части»**, предложены алгоритмы численного решения обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным условием по определению правой части уравнения. Предполагалось, что функция, входящая в нелокальное условие, и функция, являющаяся дополнительной информацией для решения обратной задачи, могут быть известны с некоторой ошибкой, поскольку являются результатом практических измерений. Предложены три алгоритма численного решения. Проведён ряд численных экспериментов по апробации предложенных алгоритмов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\theta(t)u_t(x,t) + \theta(-t)u_{tt}(x,t) - \sigma u_{xx}(x,t) = g(x),\ \ (x,t) \in (0,l) \times (-\alpha,\beta) \tag{33}$$

α, β, l, σ– заданные положительные числа,

с краевыми условиями:

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \in [-\alpha,\beta]. \tag{34}$$

условием склейки при $t = 0$:

$$u(x,t+0) = u(x,t-0),\quad \lim_{t\to-0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lim_{t\to+0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\quad x \in [0,l] \tag{35}$$

и считаем, имеет место нелокальное условие:

$$u(x,\beta) - u(x,-\alpha) = \phi(x),\quad x \in [0,l]. \tag{36}$$

Будем считать, что функция $g(x)$ непрерывна и $g(0) = g(l) = 0$.

Соотношения (33)-(36) являются прямой задачей, т.е., если известны функции $\phi(x), g(x)$ и постоянная $\sigma > 0$, то решение $u(x,t)$ может быть найдено из соотношений (33)-(36).

Обратная задача: Необходимо определить функцию $g(x)$, если о решении прямой задачи (33)-(36) известна следующая дополнительная информация:

$$u(x,\beta) = \psi(x),\quad x \in [0,l]. \tag{37}$$

Решение прямой задачи (33)-(36) представляется в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)sin(\omega_k x),\qquad \omega_k = \frac{\pi}{l}k.$$

Получим решение в следующим виде:

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\phi_k e^{-\sigma\omega_k^2 t} + \frac{g_k}{\lambda\omega_k^2}\right)\sin(\omega_k x),\ 0 < t < \beta, \\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\phi_k cos(\sqrt{\sigma}\omega_k t) - \sqrt{\sigma}\omega_k\lambda_k\phi_k sin(\sqrt{\sigma}\omega_k t) + \frac{g_k}{\sigma\omega_k^2}\right)\sin(\omega_k x),\ -\alpha < t < 0, \end{cases} \tag{38}$$

где $\lambda_k = \frac{1}{e^{-\sigma\omega_k^2\beta} - \left(cos(\sqrt{\sigma}\omega_k\alpha) + \sqrt{\sigma}\omega_k sin(\sqrt{\sigma}\omega_k\alpha)\right)}$.

В первом параграфе суммируется ряд с возрастающим множителем.

Решение обратной задачи (33)-(37) представляется в виде ряда:

$$g(x) = \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \left(\psi_k - \lambda_k \phi_k e^{-\sigma\omega_k^2\beta}\right) sin(\omega_k x). \qquad (39)$$

Трудность суммирования данного ряда состоит в том, что коэффициенты ряда имеют растущий множитель ω_k^2.

Определение 3. *Метод для суммирования ряда Фурье назовём устойчивым, если по приближенным данным задачи известному порядку их точности δ (в соответствующий метрике) он дает приближенное решение задачи с любой степенью точности ε, если δ достаточно мало.*

За решение обратной задачи (33)-(37) принимаем результат суммирования:

$$g(x) = \sigma \sum_{k=1}^{N_\delta} \omega_k^2 \left(\psi_k - \lambda_k \phi_k e^{-\sigma\omega_k^2\beta}\right) sin(\omega_k x), \quad j = \overline{0, N-1}, \quad (40)$$

Результат вычислений приведён на Рис. 2 (а). В данном численном примере получили, что $N_\delta = 7, N = 300$.

Во втором параграфе, задача приводится к уравнению Фредгольма 1-го рода:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k^2} \sin(\omega_k) = \int_0^l K(x,s) g(s) ds,$$

где

$$K(x,s) = \begin{cases} s\left(1 - \dfrac{x}{l}\right), & s \le x, \\ x\left(1 - \dfrac{s}{l}\right), & s > x. \end{cases}$$

В итоге получили интегральное уравнение Фредгольма 1-ого рода:

$$\phi_\beta(x) = \int_0^l K(x,s) g(s) ds, \qquad (41)$$

где

$$\phi_\beta(x) = \sigma\psi(x) - \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k e^{-\omega_k^2\beta} sin(\omega_k x).$$

Замечание 4. *Решение обратной задачи* (32)-(37) *эквивалентно решению интегрального уравнения Фредгольма 1-ого рода (41). Так, как ядро уравнения* (41) *симметрично и непрерывно, это уравнение имеет решения.*

Для решения уравнения Фредгольма 1-ого рода существует много методов. Для решения интегрального уравнения (41) мы воспользуемся классическим методом – минимизацией функционала с регуляризацией Тихонова:

$$J[g] = \int_0^l \left[\int_0^l K(x,s) g(s) ds - \phi_\beta(x) \right] dx + \varepsilon \int_0^l [g^2(x) + p(g'(x))^2] dx,$$

здесь постоянные ε и p – параметры регуляризации.

Численно решаем следующую задачу

$$h\sum_{j=1}^{N-1} K_{ij}g_j = \phi_\beta(x_i), \qquad i = \overline{1, N-1},$$

при помощи минимизации функционала невязки

$$J[g] = h\sum_{i=1}^{N-1}\left[h\sum_{j=1}^{N-1} K_{ij}g_j - \phi_\beta(x_i)\right]^2 + \epsilon h\sum_{i=1}^{N-1} g_j^2 + \epsilon p h\sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{g_{j+1}-g_{j-1}}{2h}\right)^2.$$

В третьем параграфе, называемый поставленная задача (33)-(37) приводится к следующей задаче:

Обратная задача: Найти функцию $g(x)$, если о решении прямой задачи:

$$u_t(x,t) - \sigma u_{xx}(x,t) = g(x), \ \ (x,t) \in (0,l)\times(0,\beta) \quad (42)$$

$$u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0, \ t \in [0,\beta]. \quad (43)$$

$$u(x,0) = \phi_0(x) + \frac{1}{\sigma}\int_0^l K(x,s)g(s)ds. \quad (44)$$

известна следующая дополнительная информация:

$$u(x,\beta) = \psi(x), \quad x \in [0,l]. \quad (45)$$

Замечания 5. *Обратная задача* (33)-(37) *эквивалентна задаче* (42)-(45).

Обратная задача (33)-(37) для сеточных функций была сформулирована следующим образом:

$$\frac{u_{i,k+1}-u_{i,k}}{\tau} - \sigma\frac{u_{i+1,k}-2u_{i,k}+u_{i-1,k}}{h^2} = g_i, i = \overline{1,N-1}, k = \overline{1,K-1} \quad (46)$$

$$u_{0,k} = 0, u_{N,k} = 0, k = \overline{0,K} \quad (47)$$

$$u_{i,0} = \phi_0(x_i) + \frac{h}{\sigma}\sum_{j=1}^{N-1} K_{ij}g_j, \ i = \overline{1,N-1}, \quad (48)$$

$$u_{i,K} = \psi(x_i), i = \overline{1,N-1}. \quad (49)$$

Задача (46)-(49) решается при помощи минимизации функционала невязки

$$J[g] = h\sum_{i=1}^{N-1}[u_{i,K} - \psi(x_i)]^2.$$

В третьей главе предложено три алгоритма численного решения обратной задачи:

• Алгоритм 1 основан на регуляризации суммирования ряда Фурье, чьи коэффициенты содержат возрастающий множитель ω_k^2;

• Алгоритм 2 основан на решении уравнения Фредгольма 1-ого рода оптимизационным методом с регуляризацией по Тихонову;

• Алгоритм 3 основан на решении специальной обратной задачи для параболического уравнения.

Результаты численных расчетов приведены в следующим рисунке.

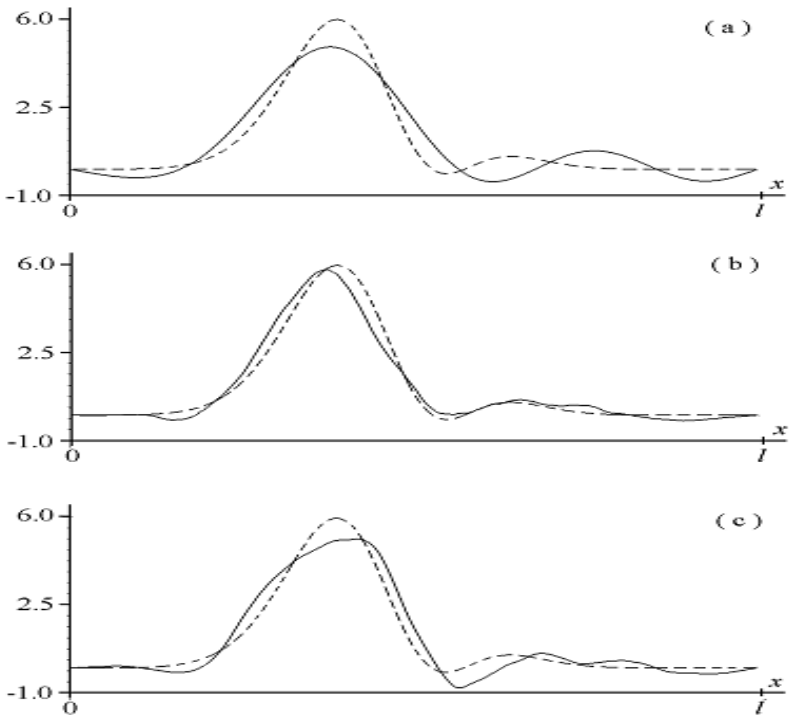


Рис. 2: Результаты восстановления функции g(x), точное значение функции дано пунктирной линией, восстановленное – непрерывной. (a) – результат восстановления по алгоритму 1, (b) – результат восстановления по алгоритму 2, (c) – результат восстановления по алгоритму 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследована корректность обратной задачи об источнике для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.

Основные результаты исследований состоят в следующем:

1. Доказаны теоремы об устойчивости и об определении порядка аппроксимации разностной схем для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа;
2. Для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с оператором Бесселя исследованы прямая и обратная задача, связанная с поиском не известной правой части. Доказаны теоремы о единственности и существования решения поставленной обратной задачи;
3. Доказана теорема об однозначной разрешимости обратной задачи об определении правой части в начально-краевых задачах для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с разрывным коэффициентом;
4. Предложены алгоритмы численного решения обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным условием по определению правой части уравнения. Проведён ряд численных экспериментов по апробации предложенных алгоритмов.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKIY

BUKHARA STATE UNIVERSITY

MERAJOVA SHAHLO BERDIYEVNA

INVESTIGATION OF THE WELL-POSEDNESS OF THE INVERSE SOURCE PROBLEMS FOR EQUATIONS OF MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT
of dissertation of the doctor of philosophy (PhD)
on physical and mathematical sciences

Bukhara – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.4.PhD/FM695.

The dissertation was performed at the Bukhara State University.

The abstract of dissertation is posted in three languages (uzbek, russian and english (resume)) on the website (https://kengash.mathinst.uz/) and in the website «ZiyoNet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific superviser:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Karchevsky Andrey Leonidovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor (Russian)
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place " 14 " March 2023 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar district, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.:(99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: http://www.mathinst.uz).

Thesis is possible to review in Information- resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered № 156) (Address: University str. 9, Almazar district, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.:(99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on " 28 " February 2023 year
(Mailing report № 2 on " 28 " February 2023 year)

U.A. Rozikov
Chairman of scientific council on award of scientific degree, D.Sc., professor

J.K. Adashev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, D.Sc., Senior researcher

A.A.A'zamov
Chairman of Scientific seminar under scientific council on award of scientific degree, D.Sc., Academician

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is to prove the correctness, uniqueness and existence of direct and inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type, as well as their numerical solutions.

Research problems:

to construct a difference scheme for a mixed problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type. Prove the stability of the constructed difference scheme, find the order of approximation;

to investigate the initial-boundary and inverse problems posed for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type in the two-dimensional case in a cylindrical domain. To prove the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem;

to prove the existence of a unique solution of the inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type in a quadrangular domain with a discontinuous coefficient;

numerically investigate the solution of the inverse problem of determining the source for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type

The research object. One-dimensional and two-dimensional inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type.

The research subject. Direct and inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type. Fourier-Bessel and Fourier series, theory of partial differential equations.

The scientific novelty of the research is as follows:

the stability of the difference scheme for equations of mixed parabolic-hyperbolic type is proved, the order of approximation is determined;

theorems on the uniqueness and existence of a solution to the inverse problem of determining the source function for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a Bessel operator are proved;

a theorem on the unique solvability of the inverse problem of determining the right-hand side in the initial-boundary value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a discontinuous coefficient is proved;

algorithms for the numerical solution of the inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a non-local condition for determining the right side of the equation are proposed and a number of numerical experiments are carried out to test the proposed algorithms.

Implementation of the research results. Based on scientific results on inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type:

on the existence and uniqueness of the solution of the inverse source problem for equations of mixed parabolic-hyperbolic type and on the numerical solution of the mixed problem were used in the implementation of research work on the project OT-F4-14 “Development and calculation of the theory of studying the state of stress-strain under the influence of external forces of a pipe with a liquid flowing underground” (Reference of the Bukhara Engineering-Institute of Technology number no. 01/04-87/125 dated January 25, 2023). The application of the scientific

result made it possible to check the nonlinear dynamic stress-strain state of curved sections of multilayer composite pipes through which a viscous liquid flows.

methods and approaches for solving inverse problems by determining an unknown source, as well as numerical methods for solving the inverse problem for a mixed parabolic-hyperbolic type were used in the implementation of the international project AR05133873 "Numerical methods and parallel algorithms for solving nonlinear inverse problems for mathematical models with fractional powers of elliptic operators with applications in gravimetry" (Reference of the International Kazakh-Turkish Khoja Ahmed Yasawi University, No. 04/4173 dated December 28, 2022, Kazakhstan). The use of the scientific result allowed them to numerically solve direct and inverse problems for a first-order evolutionary equation with a fractional degree of an elliptic operator.

Approbation of the research results. The results of this study were discussed in 11 scientific and practical conferences, including 4 international and 7 republican.

Publications of the research results. 17 scientific papers have been published on the topic of the dissertation, all articles have been published in journals included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of dissertations of the Doctor of Philosophy. Two articles have been published in foreign journals included in the Scopus database and 4 articles in republican journals included in the list of scientific publications.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The general volume of the thesis is 90 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с оператором бесселя. // Сибирский журнал индустриальной математики (Journal of Applied and Industrial Mathematics). – 2022. Том 25(3), –С. 14–25. (3. Scopus. IF= 0.391).
2. Меражова Ш.Б. О численном решении обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа по определению правой части уравнения. // Математические заметки СВФУ (Mathematical notes of NEFU), – 2022. Том 29(3), –С. 108–127. (3. Scopus. IF= 0.225).
3. Меражова Ш.Б. Устойчивость разностной модели первой краевой задачи для уравнения смешанного типа. // Узбекский математический журнал. – 2012, №1, – С. 81-88. (01.00.00. № 6).
4. Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. О решении обратных задач для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа: одномерный случай. // Научный вестник Бухарского Государственного Университета. – 2015. № 2, –С. 2-6. (01.00.00. № 3).
5. Merajova Sh.B. Numerical study of the first and second boundary value problems posed for a model equation of mixed type in space, and the calculation of the approximation of a stable finite-difference scheme of these problems. // Scientific reports of Bukhara State University. – 2022. Volume 3, –P. 46-63. (01.00.00. № 3).
6. Merajova Sh.B. Inverse source problem of determining the right side for equation of mixed parabolic-hyperbolic type: one-dimensional case. // Uzbek Mathematical Journal. – 2022. Volume 66(4). –P.93-104. (01.00.00. № 6).

II bo‘lim (Часть II; Part II)

7. Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. О единственности решения обратной задачи для уравнения параболо-гиперболического типа: двумерный случай. // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых "Современные методы математической физики и их приложения". Ташкент, 15-17 апреля 2015 г. Т. 2, –С. 96-98.
8. Меражова Ш.Б. Численное исследование разностной модели для уравнения смешанного типа. // Тезисы 43-й Всероссийской молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики" Екатеринбург. 29 января -5 февраля апреля 2012 г. Т. 2, –С. 111-112.
9. Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. // “Смежные вопросы математической физики и современного анализа” Материалы республиканской научно-практической конференции. Бухара. 26-27 ноября, 2015 г. –С. 199-200.

10. Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. Обратные задачи для модельного уравнения смешанного типа n-мерном случае. // “Современные проблемы и приложения топологии” Сборник тезисов научно-практической конференции с участием зарубежных ученых. Ташкент. 5-6 мая 2016 г. –С. 158-159.
11. Меражова Ш.Б., Азимова Д.О., Хасанова Х.Х. О численном решении обратных задач для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа: одномерный случай. // “Современные проблемы геометрии и топологии и ее приложения” Тезисы международной конференции, Ташкент. 21–23 ноября 2019 г. –С. 153-155.
12. Меражова Ш.Б., Азимова Д.О., Меражов Н.И. Устойчивая разностная схема для второй краевой задачи, поставленной для уравнения смешанно-составного типа на пространстве R^{n+1}. // "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения" международная научная конференция, сборник тезисов. Россия, УФА, 2020, –С. 43-45,
13. Меражова Ш.Б. О единственности решение обратной задачи для одного модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. // "Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар" республика илмий онлайн конференция материаллари. Термиз 21-23 октябрь 2020 йил. 138-141 б.
14. Меражова Ш.Б., Тураева Н.А. Вычисления порядка аппроксимации устойчивой конечно-разностной схемы для первой краевой задачи в модельном уравнении смешанного типа. // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых. “Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа”. Бухара. 04-05 ноябрь, 2021 г. –С. 333-334.
15. Меражова Ш.Б., Меражов Н. И., Саидова Н.М. Численные алгоритмы для решение обратной задачи поставленной уравнению смешанного типа. // “Актуальные вопросы алгебры и анализа” сборник материалов республиканской научно-практической конференции. Термиз. Часть 2, 18-19 ноябрь, 2022 г. –С. 133-134.
16. Меражова Ш.Б., Меражов Н.И., Азимова Д.О. Постановка обратных задач для одного модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа: двумерный случай. // “Инновационные идеи, разработки в практику: проблемы, исследования и решения” международная научно-практическая онлайн конференция. Андижан. 21 апреля 2021 г. –С. 109-112.
17. Меражова Ш.Б. Меражов Н.И. Алгоритм для численного решения обратной задачи по определению правой части в дифференциальном уравнении параболо-гиперболического типа. // Теоретические основы и прикладные задачи современной математики, Андижан. 28 марта 2022 г. – С. 243-245.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida
2023 yil 20 fevralda tahrirdan o‘tkazildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,75. Adadi 100 dona. Buyurtma № 5/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.