V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

SAFAROV JO‘RABEK SHAKAROVICH

YOPISHQOQLIK-ELASTIKLIK NAZARIYASI DIFFERENSIAL TENGLAMALARI UCHUN TESKARI MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika (fizika – matematika fanlari)

FIZIKA – MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYA AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

UDK: 517.958

Doktorlik (DSc) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the of Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

SAFAROV JO‘RABEK SHAKAROVICH

YOPISHQOQLIK-ELASTIKLIK NAZARIYASI DIFFERENSIAL TENGLAMALARI UCHUN TESKARI MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika (fizika – matematika fanlari)

FIZIKA – MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYA AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

Fan doktori (Doctor of Science) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.4.DSc/FM232 raqam bilan ro‘yxatga olingan

Dissertatsiya V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://kengash.mathinst.uz) va «Ziyonet» ta’lim axborot tarmog‘ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:	**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Taxirov Jozil Ostanovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Hasanov Aknazar Bekdurdiyevich fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Xolmuxamedov Olimjon Raximovich fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	**RFA Vladikavkaz ilmiy markazi Janubiy matematika instituti (Rossiya Federatsiyasi)**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil « 9 » yanvar soat 16:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.:(+99871)- 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot–resurs markazida tanishish mumkin (№ 173-raqam bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 140104100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.:(+99871) 207-91-40)

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil « 20 » dekabr kuni tarqatildi.

(2023 yil « 20 » dekabrdagi 2 - raqamli reyestr bayonnomasi).

U.A. Roziqov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.- m.f.d., katta ilmiy xodim

A. Azamov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash huzuridagi Ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., akademik

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Global miqyosda olib borilgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar differensial tenglamalar yoki differensial tenglamalar sistemasi uchun teskari masalalarni o‘rganishga olib keladi. Tabiiy fanlarda ba’zi jarayonlarni matematik modellashtirishda xotiraga ega deb ataladigan sistemalarga duch kelinadiki, ularning hatti-harakati jarayonning butun tarixiga bog‘liq va shuning uchun chiziqli bo‘lmagan integro-differensial tenglamalar bilan tavsiflanadi. Bunday jarayonlar sodir bo‘ladigan muhit keyingi ta’sirga ega yoki xotirali muhit deb ataladi. Elastik, elektromagnitik va akustik to‘lqinlarning tarqalishi masalalari bunday tenglamalarga olib keladi. Giperbolik tipdagi integro-differensial tenglamalar uchun teskari masalalar matematik fizikaning teskari masalalari nazariyasida o‘tgan asrning 90-yillari boshida paydo bo‘lgan, nisbatan yangi va tez rivojlanayotgan muhim yo‘nalishlaridandir. Bunday masalalarni hal qilish usullari yetarlicha ishlab chiqilmaganligi sababli, ushbu yo‘nalishda tadqiqotlar olib borish dolzarb hisoblanadi.

Hozirgi kunda dunyoda ko‘plab mutaxassislar giperbolik va parabolik tipdagi integro-differensial tenglamalar uchun bir va ko‘p o‘zgaruvchili teskari masalalarni yechish bilan mashg‘ul. Shuni ta’kidlash joizki, bu masalalarning juda ko‘pchiligi fizik ma’noga ega bo‘lib, konkret jarayonlarni ifodalaydi. Integro-differensial tenglamalar uchun teskari masalalar integral operator yadrosini to‘lqin maydoni haqidagi biror bir qo‘shimcha ma’lumot asosida tadqiq etish jarayon yuz berayotgan muhit tuzilishi va xususiyatlarini o‘rganishda muhim rol o‘ynaydi. Qo‘shimcha ma’lumot sifatida odatda butun vaqt intervali uchun to‘g‘ri masala yechimining sohaning biror nuqtasidagi qiymati olinadi. Amaliy masalalarda muhitning biror bir nuqtasi atrofida yoki muhit chegarasida berilgan delta–funksiya shaklidagi manbalar muhim rol o‘ynaydi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqqa ega bo‘lgan differensial tenglamalar va matematik fizikaning dolzarb yo‘nalishlariga e’tibor kuchaytirildi, xususan, yopishqoq-elastik muhitlarda elektromagnitik hamda akustik to‘lqinlar tarqalish masalalariga e’tibor qaratildi. Qaralayotgan muhitlarda yuqoridagi masalalarning lokal yoki global yechimlarini topish borasida salmoqli natijalarga erishildi. Algebra va matematik analiz, dinamik tizimlar nazariyasi, differensial tenglamalar va matematik fizika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, amaliy matematika va matematik moddellashtirish fanlarining ustivor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining asosiy vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi[1].

Mazkur dissertatsiya ishining mavzusi va tadqiqot obyekti O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4979-son Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi “Matematik ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, Fanlar Akademiyasi V.I.

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4387-son qarori

Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387-sonli va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasida ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga muvofiqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarildi.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi. Integro-differensial tenglamalar va tenglamalar sistemalari integral hadi yadrosini va koeffitsiyentlarini aniqlashga bag‘ishlangan teskari masalalarni ilmiy tadqiq qilish va ularni shartli turg‘unlikka tekshirish jahonning yirik ilmiy markazlari va oliy ta’lim muassasalari, jumladan: Tallin texnologiyalar universiteti (Estoniya), Moskva davlat universiteti (Rossiya), Novosibirsk davlat universiteti (Rossiya), Sibir federal universiteti (Rossiya), Vladikavkaz ilmiy markazi (Rossiya), Rossiya Fanlar akademiyasining Sibir bo‘limi Hisoblash matematikasi va matematik geofizika instituti (Rossiya), Rossiya Fanlar akademiyasi Sibir bo‘limining S.L. Sobolev nomidagi Matematika instituti (Rossiya), Wichita State University (AQSh), Yaqin Sharq universiteti (Turkiya), Myunxen texnika universiteti (Germaniya), Radboud universiteti (Niderlandiya), Frayberg texnika universiteti (Germaniya), Universite di Bolonya (Italiya), Alyaska universiteti (AQSh) va boshqa joylarda olib borilmoqda.

So‘nggi yillarda dunyo miqyosida giperbolik tipdagi integro-differensial tenglamalar va tenglamalar sistemalari uchun bir o‘lchovli hamda ko‘p o‘lchovli teskari masalalar tadqiqi bo‘yicha bir qator natijalar qo‘lga kiritildi, xususan, quyidagi ilmiy natijalarga erishildi: chegaralangan sohalarda taqsimlangan manbali to‘lqin tarqalish jarayonlari uchun qovishqoq-elastiklik va termo qovishqoq-elastiklik tenglamalarining yadrolarini aniqlash masalalari hal etildi (Tallin texnologiya universiteti); yarim fazoda jamlangan manbali to‘lqin tenglamasi uchun tenglamalar koeffitsiyentlari va maxsus ko‘rinishga ega ko‘p o‘lchovli yadrolarni aniqlash bo‘yicha teskari masalalar hal qilindi (Rossiya Fanlar akademiyasining Sibir bo‘limi S.L. Sobolev nomidagi Matematika instituti); statsionar elastiklik tenglamalari sistemasi uchun tarqalgan to‘lqindan foydalanib o‘zgarmas Lame koeffitsiyentlariga ega va fazoviy o‘zgaruvchilarga hamda chastotaga bog‘liq bo‘lgan o‘zgaruvchan matritsali koeffitsiyentlar qatnashgan yadro va koeffitsiyentlarni aniqlashning teskari masalalari o‘rganildi (Vichita davlat universiteti); qovushqoqlik-elastiklik nazariyasi ko‘p o‘lchovli yadrolarini aniqlash masalalari o‘rganildi (Vladikavkaz ilmiy markazi); Abel yadrolarining chiziqli kombinatsiyasini hosil qiluvchi relaksatsiya yadrosini ikki chegaradagi o’lchashlar natijasiga ko‘ra aniqlashdan iborat teskari masalasi hal qilindi (Alyaska universiteti).

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Odatda teskari masalalar kuzatish natijalarining interpretatsiyasi sifatida paydo bo‘ladi. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun teskari masalalar matematik fizikaning nokorrekt masalalari jumlasidandir. Nokorrekt masalalarni yechishga umumiy yondashish A.N. Tixonov tomonidan ishlab chiqilgan hamda V.Y. Arsenin, M.M. Lavrentev, V.A. Morozov va boshqalarning ishlarida rivojlantirilgan. Teskari masalalar va Volterra tenglamalari orasidagi bog‘lanishdan teskari masalalar nazariyasining ilk ishlaridayoq foydalanishgan. Bu sohadagi asosiy natijalar bilan V.G. Romanov, S.I. Kabanixin, V.G. Yaxno, A.L. Buxgeymlarning monografiyalarida tanishish mumkin. Ko‘p o‘zgaruvchili teskari masalalarni yechish usullari V.G. Romanov ishlarida bayon qilingan, xususan u analitik funksiyalar Banax fazosi shkalalari usulini ko‘p o‘zgaruvchili teskari masalalarni yechishga qo‘llagan**.**

Integro-differensial tenglamalar uchun teskari masalalar nazariyasidagi ilk natijalar italiyalik matematik A. Lorensining ishlarida bayon qilingan. U giperbolik va parabolik tiplardagi integro-differensial tenglamalar uchun *x* fazoviy o‘zgaruvchi bo‘yicha cheksiz sohada taqsimlangan manbadan iborat boshlang‘ich berilganlar uchun teskari masalalarni tadqiq etgan. M. Grasseli, S.I. Kabanixin, A.L. Buxgeym, N.I. Kalininalar tomonidan *x* o‘zgaruvchi bo‘yicha chekli sohada taqsimlangan boshlang‘ich berilganlar bilan gipebolik va parabolik tiplardagi integro-differensial tenglamalar integral hadi bir o‘lchovli yadrosini aniqlash masalasi o‘rganilgan. Ya. Yanno va L. Volversdorflar tomonidan *x* o‘zgaruvchi bo‘yicha cheksiz sohada taqsimlangan boshlang‘ich berilganlar bilan yopishqoqlik-elastiklik tenglamasi tadqiq etilgan. V.G. Romanov tomonidan giperbolik hamda parabolik tipdagi integro-differensial tenglamalarning ko‘p o‘lchovli yadrosi fazoviy qismini hamda tenglamadagi noma’lum koeffitsiyentlarini aniqlashdan iborat bo‘lgan teskari masalalar tadqiq etilgan.

Sh.Yarmuxamedov giperbolik tipdagi tenglamalar uchun nokorrekt masalalarni tadqiq etgan. Parabolik va aralash tipdagi tenglamalar uchun nokorrekt chegaraviy masalalarni o‘rganish K.S. Fayazov tadqiqotlari predmeti bo‘lib xizmat qilmoqda. R.R. Ashurov va uning shogirdlari kasr tartibli hosila qatnashgan differensial tenglamalarda hosila tartibini aniqlash teskari masalalari bilan shug‘ullanishyapti. A.B. Xasanov va uning shogirdlari spektral teskari masalalarini yechish bilan shug‘ullanishmoqda. D.Q. Durdiyev va J.D. Totievalarning yaqinda chop qilingan monografiyasi xotiraga ega muhitlar uchun teskari masalalarni tadqiq etish sohasidagi so‘nggi fundamental ishlardan biri hisoblanadi. Ushbu kitobda xotirali muhitning ichki xususiyatlarini tafsiflashda yuzaga keladigan giperbolik integro-differensial tenglamalar uchun bir o‘lchovli va ko‘p o‘lchovli teskari dinamik masalalarning korrektligini tadqiq etish natijalari bayon etilgan; izotrop va anizotrop muhitlar uchun termoelastiklik va elektroelastiklik koeffitsiyentlari aniqlangan. Qo‘yilgan teskari masalalarning yagona yechimi mavjudligi haqidagi teoremalar isbotlangan va bu masalalar yechimlarining berilgan ma’lumotlarga uzluksiz bog‘liqligi uchun turg‘unlik baholari olingan. Bugungi kunda bu mavzu ko‘plab matematiklarning ilmiy qiziqishlari predmeti bo‘lib xizmat qilmoqda.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Matematika institutining OT-F4-88 «Ikkinchi va yuqori tartibli aralash tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar tadqiqi» mavzusidagi ilmiy tadqiqot loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi yopishqoq-elastik muhitlarda giperbolik tipdagi tenglamalar uchun teskari masalalarni yechish usullarini qurish hamda ushbu teskari masalalar uchun yechimlarning mavjud, yagona va turg'unligini ko'rsatishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan integro-differensial to'lqin tenglamasining xotira yadrosini aniqlash teskari masalalarining global yagona yechiluvchanligini va turg'unligini tadqiq etish;

yopishqoqlik-elastiklik nazariyasi integro-differensial tenglamasi hamda yopishqoqlikka ega akustika tenglamasi uchun teskari masalalarning global yagona yechiluvchanligini tadqiq etish;

turli chekli sohalarda bir jinsli bo'lmagan integro-differensial tenglamalar uchun to'g'ri va integral hadining yadrosini aniqlashga doir teskari masalalarning bir qiymatli yechiluvchanligini tadqiq etish;

integral had yadrosi fazoviy o'zgaruvchiga kuchsiz bog'liq bo'lgan hollarda yopishqoqlik- elastiklik nazariyasi tenglamalari uchun ikki o'lchovli teskari masalalarni tadqiq etish;

taqsimlangan va umumlashgan boshlang'ich manbalarga ega bo'lgan yopishqoqlik-elastiklik tenglamalari uchun ko'p o'lchovli teskari masalalarning lokal bir qiymatli yechlishi va turg'unligini tadqiq etish.

Tadqiqotning obyekti giperbolik tipdagi integro-differensial tenglamalar uchun bir va ko'p o'lchovli teskari masalalar, matematik fizika tenglamalari, integral va operatorli tenglamalar nazariyalari hisoblanadi.

Tadqiqotning predmeti yopishqoqlik-elastiklik nazariyasi integro-differensial tenglamalari uchun teskari masalalar.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida matematik analiz usullari, differensial tenglamalar va matematik fizika masalalarini yechish usullari, funksional analiz hamda umumlashgan funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan integro-differensial to'lqin tenglamasining xotira yadrosini aniqlash teskari masalalarining global yagona yechiluvchanligi isbotlangan va turg'unlik baholari olingan;

yopishqoqlik-elastiklik nazariyasi integro-differensial tenglamasi hamda yopishqoqlikka ega akustika tenglamasi uchun teskari masalalarning global yagona yechiluvchanligi isbotlangan;

turli chekli sohalarda bir jinsli bo'lmagan integro-differensial tenglamalar uchun to'g'ri va integral hadining yadrosini aniqlashga doir teskari masalalarning bir qiymatli yechiluvchanligi isbotlangan;

integral had yadrosi fazoviy o‘zgaruvchilardan biriga kuchsiz bog‘liq bo‘lgan holda yopishqoqlik-elastiklik tenglamalari uchun teskari masalalarning global bir qiymali yechlishi isbotlangan va shartli turg‘unlik baholari olingan;

taqsimlangan va umumlashgan boshlang‘ich manbalarga ega bo‘lgan yopishqoqlik-elastiklik tenglamalari uchun ko‘p o‘lchovli teskari masalalarning lokal bir qiymatli yechlishi isbotlangan va shartli turg‘unlik baholari olingan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Dissertatsiya ishida olingan natijalar fundamental hisoblanadi. Olingan natijalardan hisoblash algoritmlari qurishda, geofizika va seysmorazvedkada muhitlarning xossalarini akustik to‘lqinlar yordamida tadqiq etishda foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Olingan natijalar va xulosalarning ishonchliligi matematik va funksional analiz, teskari masalalar nazariyasi, differensial tenglamalar va matematik fizika hamda qattiq jismlar mexanikasi usullardan qat’iy foydalanish bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati xotiraga ega bo‘lgan yopishqoq-elastiklik muhitlarda integro-differensial tenglamalar uchun bir o‘lchovli hamda ko‘p o‘lchovli teskari masalalar nazariyasini rivojlantirishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ularning geofizik va seysmik kuzatishlar modellariga, yopishqoq-elastik muhitlarda elektromagnitik, akustik hamda boshqa to‘lqinlar tarqalishini tadqiq etishga qo‘llash mumkinligi bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Yopishqoqlik-elastiklik nazariyasi differensial tenglamalari uchun teskari masalalar bo‘yicha olingan natijalar asosida:

umumlashgan boshlangich manbalarga ega bo‘lgan yopishqoqlik-elastiklik tenglamalari uchun ko‘p o‘lchovli teskari masalalarning lokal bir qiymatli yechlishi va shartli turg‘unlik baholaridan 122041100096-4 raqamli “Sotsiologiya, geofizika va muhandislik fanlarida matematik modellashtirish” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida izotrop yopisqoqlik-elastiklik tenglamalari uchun ko‘p o‘lchovli teskari masalalarni yechishda foydalanilgan (RFA Vladikavkaz ilmiy markazi Janubiy matematika institutining 2023 yil 8-noyabrdagi №85-sonli ma’lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi yopishqoq elastik muhit asosiy xarateristikalarini aniqlash sonli algoritmini ishlab chiqish imkonini bergan;

yopishqoqlik-elastiklik tenglamalari integral hadi yadrosini aniqlash uchun taklif etilgan usuldan OT-Ф-4-(36+32) raqamli “Matematik fizika va optimal boshqaruv masalalari yechishning zamonaviy usullarini ishlab chiqish. Toq tartibli xususiy hosilali tenglamalar uchun noklassik boshlang‘ich va spektral masalalar va ularning tatbiqlari” mavzudagi fundamental loyihada uchinchi tartibli tenglama uchun nolokal masala yechimi mavjudligini ko‘rsatishda foydalanilgan (O‘zbekiston Milliy universitetining 2023 yil 15-noyabrdagi №04/11-7752-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi natijasida nolokal masala bir qiymatli yechimga ega ekanligin isbotlashni va yechimning integral ifodasini olish imkonini bergan;

integro-differensial to‘lqin tenglamasining xotira yadrosini aniqlashga oid teskari masalasining global yagona yechiluvchanligi haqidagi teoremadan OT-F4-02 raqamli “Matematik fizikaning holatlar to‘plami cheksiz bo‘lgan modellari termodinamikasi” mavzusidagi fundamental loyihada irsiy elastiklik dinamik tenglamalar sistemasidan xotira funksiyalarini aniqlashda foydalanilgan (Buxoro davlat universitetining 2023 yil 11-noyabrdagi №04/4360-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi xotira funksiyasini topish teskari masalasini bir qiymatli yechish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 16 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 10 ta xalqaro va 5 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 31 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, 16 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda, jumladan, 10 tasi xorijiy va 6 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, to‘rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 175 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi **«Giperbolik tipdagi integro-differensial tenglamalar uchun bir o‘lchovli teskari masalalar»** deb ataladi. Bu bobning birinchi paragrafida asosiy tushunchalar va dissertatsiyada olingan natijalarni isbotlashda foydalanilgan ma’lum teoremalar keltirilgan. Birinchi bobning ikkinchi paragrafida x o‘zgaruvchi bo‘yicha chekli $D=\{(x,\ t):\ 0<x<l,\ t>0\}$ sohada ushbu integro-differensial tenglama

$$u_{tt}-u_{xx}=\int_0^t k(\alpha)u(x,t-\alpha)d\alpha,\qquad (x,t)\in D \tag{1}$$

quyidagi boshlang‘ich

$$u|_{t=0}=0,\qquad u_t|_{t=0}=0, \tag{2}$$

va chegaraviy

$$u_x|_{x=0}=\psi(t),\qquad u_x|_{x=l}=0,\qquad t>0, \tag{3}$$

shartlar bilan qaralgan. Bu yerda $\psi(t)-$ berilgan funksiya; $l>0-$ biror-bir tayin haqiqiy son.

Teskari masala (1) integro-differensial tenglama integral hadining yadrosi $k(t)$ $(t>0)$ ni $(1)-(3)$ to‘g‘ri masala yechimi haqidagi ushbu

$$u(0,t)=f(t), \qquad t\geq 0 \tag{4}$$

qo‘shimcha ma’lumot boyisha aniqlashdan iborat. Bu yerda $f(t)-$berilgan funksiya.

Avvalo $(1)-(3)$ to‘g‘ri masala tadqiq etiladi, bunda $k(t)$ funksiya ma’lum deb faraz qilinadi. Ushbu masalani D_1 va D_2 sohalarning birlashmasidan tashkil topgan $D^*=D_1\cup D_2$ sohada ($D^*=\{(x,t):0<x<l,0<t<2l-x\}$) ko‘rib chiqamiz:

$$D_1=\{(x,t):0<x<l,0<t<x\},$$
$$D_2=\{(x,t):0<x<l,x<t<2l-x\}.$$

1-Lemma. *Berilgan (2) boshlang‘ich va (3) chegaraviy shaitlarda (1) tenglamaning yechimi D_1 sohada aynan nolga teng, ya’ni $u(x,t)\equiv 0$, D_2 sohada quyidagi integral tenglamani qanoatlantiradi:*

$$u(x,t)=-\varphi(t-x)-\int_0^{t-x}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-2\xi}k(\alpha)u(\xi,-\xi+\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau-$$
$$-\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}}\int_0^{-2\xi+2\tau-t+x}k(\alpha)u(\xi,-\xi+2\tau-t+x-\alpha)d\alpha d\xi d\tau,$$

bu yerda $\varphi(t)=\int_0^t\psi(\tau)d\tau.$

Quyidagi teoremalar isbotlangan.

1-Teorema. *Ushbu* $\psi(t)\in C^3[0,2l]$, $f(t)\in C^4[0,2l]$, $f(0)=0$, $f'(0)=\psi(0)$, $f''(0)=\psi'(0)$, $f'''(0)=\psi''(0)$, $\psi(0)\neq 0$ *shartlar bajarilsin, u holda ixtiyoriy* $l>0$ *da,* (1)-(4) *teskari masalaning yechimi mavjud, yagona va* $k(t)\in C[0,2l]$.

Dalamber formulasini qo‘llash orqali *u(x,t)* ga nisbatan integral tenglamani olamiz. Ushbu tenglamani differensiallash va qo‘shimcha shartlardan foydalanish orqali biz noma’lum funksiyalar uchun chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. So‘ngra, ushbu sistemaga vaznli normali uzluksiz funksiyalar fazosida qisqartirib akslantirish prinsipi qo‘llaniladi.

Biror $l>0$ da $k_0>0$ *o‘*zgarmas bilan $\|k\|_{C[0,2l]}\leqslant k_0$ shartni qanoatlantiruvchi $k(t)\in C[0,2l]$ funksiyalar to‘plamini $K(k_0)$ deb belgilaylik.

2-Teorema. *Faraz qilaylik, $K(k_0)$ to‘plamga tegishli bo‘lgan $k^1(t)$ va $k^2(t)$ funksiyalar* (1)-(4) *teskari masalaning $\{f^1,\psi^1\}$ va $\{f^2,\psi^2\}$ berilganlarga mos ikkita yechimi bo‘lsin. U holda shunday $C=C(k_0,l)$ musbat soni topiladiki, quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:*

$$\|k^1(t)-k^2(t)\|_{C[0,2l]}\leqslant C\left\{\|f^1-f^2\|_{C^4[0,2l]}+\|\psi^1-\psi^2\|_{C^3[0,2l]}\right\}.$$

Ushbu paragrafning ikkinchi punktida (1) – (4) teskari masala $\psi(t)=\delta'(t)$ bo‘lgan holatda o‘rganiladi, bu yerda $\delta'(t)-$ Dirakning delta funksiyasi hosilasi.

Teskari masala yechilishi uchun $f(t)$ funksiya $f(t)=-\delta(t)+\theta(t)\tilde{f}(t)$ ko‘rinishgaga ega bo‘lishi kerak, bu yerda $\tilde{f}(t)-$ regulyar funksiya.

Ushbu punktning asosiy natijasi teskari masalaning global bir qiymatli yechilishi haqidagi quyidagi teoremadir:

3-Teorema. *Ushbu* $\tilde{f}(t)\in C^2[0,2l]$, $\tilde{f}(+0)=0$, $\tilde{f}'(+0)=0$ *shartlar bajarilgan bo‘lsin, u holda ixtiyoriy fiksirlangan* $l>0$ *da,* $(1)-(4)$ *teskari masalaning yagona yechimi mavjud va* $k(t)\in C[0,2l]$.

Uchinchi paragrafda giperbolik tipdagi bir jinsli bo‘lmagan integro-differensial tenglamaning yechimi va integral hadi bir o‘lchovli yadrosini to‘g‘ri masalani tashkil etuvchi shartlar va qo‘shimcha ma’lumotga asosan topishdan iborat masala ko‘rib chiqilgan.

Ushbu $\Omega=\{(x,t)\,|\,x\in R,\ t>0\}$ sohada integro-differensial to’lqin tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi

$$u_{tt}-u_{xx}-\int_0^t h(\alpha)u(x,t-\alpha)d\alpha=f(x,t),\qquad (x,t)\in\Omega, \tag{5}$$

quyidagi boshlang‘ich shartlar

$$u|_{t=0}=a(x),\qquad u_t|_{t=0}=b(x),\qquad x\in R \tag{6}$$

bilan qaralgan. Bu yerda $a(x), b(x)$ va $f(x,t)$ lar berilgan funksiyalar.

Teskari masala quyidagicha qo‘yiladi: $h(t)\in C(t>0)$ funksiyani to‘g‘ri masalaning yechimiga oid quyidagi ma’lumot bo‘yicha topish talab qilinadi:

$$u(0,t)=g_1(t),\qquad u_x(0,t)=g_2(t),\qquad t\geq 0. \tag{7}$$

(5), (6) to‘g‘ri masalani tahlil qilish natijasi quyidagi teoremada bayon qilingan.

4-Теорема. *Ushbu* $h(t)\in C(t\geq 0)$, $a(x)\in C^2(R)$, $b(x)\in C^1(R)$ *va* $f(x,t)\in C^{0,1}_{x,t}(\Omega)$ *shartlar bajarilgan bo‘lsin, u holda (5) tenglamaning (6) shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud, yagona va* $C^2(\Omega)$ *sinfga tegishli bo‘ladi.*

So‘ngra teskari masala o‘rganiladi. Quyidagi teoremalar olingan.

5-Теорема. $a(x)\in C^3(R)$, $b(x)\in C^2(R)$, $f(x,t)\in C^{0,2}_{x,t}(\Omega)$ *bo‘lsin,* $g_1(t)$ *va* $g_2(t)$ *funksiyalar mos ravishda* $C^3[0,T], C^2[0,T]$ *sinflarga tegishli bo‘lsin, bundan tashqari* $a(0)=g_1(0)\neq 0$, $b(0)=g_1'(0)$, $a'(0)=g_2(0)$, $b'(0)=g_2'(0)$, $a''(0)=g_1''(0)$ *shartlar ham bajarilgan bo‘lsin. U holda ixtiyoriy* T *da* $(1)-(3)$ *teskari masalaning yagona yechimi mavjud va* $C[0,T]$ *sinfga tegishli, bu yerda* $T>0-$ *biror haqiqiy son.*

Faraz qilaylik $H(h_0)$ $h(t)\in C[0,T]$, funksiyalarning biror $T>0$ da $h_0>0$ o‘zgarmas bilan $\|h\|_{C[0,T]}\leqslant h_0$ shartni qanoatlantiruvchi to‘plami bo‘lsin. Faqat yuqoridagi indeksi bilan farq qiluvchi ikkita funksiya ayirmasini o‘sha harf bilan ustiga belgi $\sim$ qo‘yish orqali belgilaymiz. Masalan $\tilde{a}:=a^1-a^2$, $\tilde{b}:=b^1-b^2$.

6-Teorema. *Faraz qilaylik,* $H(h_0)$ *to‘plamga tegishli bo‘lgan* $h^1(t)$ *va* $h^2(t)$ *funksiyalar* $(5)-(7)$ *teskari masalaning* $\{a^1,b^1,f^1,g_1^1,g_2^1\}$ *va* $\{a^2,b^2,f^2,g_1^2,g_2^2\}$, *berilganlarga mos ikkita yechimi bo‘lsin. U holda shunday* $C=C(h_0,T)$ *musbat soni topiladiki, quyidagi turg‘unlik bahosi o‘rinli bo‘ladi:*

$$\left\|h^1(t)-h^2(t)\right\|_{C[0,T]}\leqslant C\left(\left\|\tilde g_1\right\|_{C^1[0,T]}+\left\|\tilde g_2\right\|_{C^2[0,T]}+\left\|\tilde a\right\|_{C^3[-T,T]}+\left\|\tilde b\right\|_{C^2[-T,T]}+\left\|\tilde f\right\|_{C^2[\Delta(0,T)]}\right).$$

Birinchi bobning to‘rtinchi paragrafida x o‘zgaruvchi bo‘yicha chekli $\Omega=\{(x,t):0<x<l,t\in R\}$ sohada yopishqoqlik-elastiklik tenglamasi

$$u_{tt}-u_{xx}-\int_0^t k(\tau)u_{xx}(x,t-\tau)d\tau=0,\qquad (x,t)\in\Omega, \tag{8}$$

quyidagi boshlang‘ich

$$u|_{t<0}\equiv 0, \tag{9}$$

va chegaraviy

$$u|_{x=0}=\delta(t),\qquad u_x|_{x=l}=0,\qquad t\in R \tag{10}$$

shartlar bilan qaralgan. Teskari masala $k(t),\ t>0,$ noma’lum funksiyani to‘g‘ri masala yechimi haqidagi ushbu

$$u_x(0,t)+\int_0^t k(\tau)u_x(0,t-\tau)d\tau=f(t) \tag{11}$$

qo‘shimcha ma’lumot bo‘yicha aniqlashdan iborat. Bu yerda $f(t)-$ berilgan funksiya, $t>0$.

Dastlab to‘g‘ri masala ko‘rib chiqilgan. Yangi $v(x,t)$ funksiyani quyidagicha kiritamiz:

$$v(x,t):=\left[u(x,t)+\int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)d\tau\right]\exp\left(-k(0)t/2\right).$$

U holda $u(x,t)$ funksiya $v(x,t)$ funksiya orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$u(x,t)=\exp\left(k(0)t/2\right)v(x,t)+\int_0^t h(t-\tau)\exp\left(k(0)\tau/2\right)v(x,\tau)d\tau,$$

bu yerda $h-$quyidagi Volterra integral tenglamasining yechimi:

$$h(t)=-k(t)-\int_0^t k(t-\tau)h(\tau)d\tau,\qquad t>0.$$

$v(x,t)$ funksiyaga nisbatan quyidagi masalaga kelamiz:

$$v_{tt}-v_{xx}+h_0v+\int_0^t H(t-\tau)v(x,\tau)d\tau=0,$$

$$v|_{x=0}=\delta(t)+k(t)\exp\left(h(0)t/2\right)\theta(t),\qquad v_x|_{x=l}=0,$$

$$v|_{t<0}\equiv 0.$$

Qo‘shimcha shart esa $v_x(0,t)=f(t)\exp\left(h(0)t/2\right)$ ko‘rinishni oladi, bu yerda quyidagi belgilashlar kiritilgan:

$$H(t)=h''(t)\exp\left(h(0)t/2\right),\ h_0=h'(0)-\frac{h^2(0)}{4}.$$

Biz $v(x,t)$ funksiyani

$$v(x,t) = \delta(t-x) + \theta(t-x)\tilde{v}(x,t)$$

ko‘rinishda qidiramiz, bu yerda $\tilde{v}(x,t)$- regulyar funksiya. Mos ravishda $f(t)$ funksiya ham

$$f(t) = -\delta'(t) + \frac{h(0)}{2}\delta(t) + \theta(t)\, f_0(t), \tag{12}$$

strukturaga ega bo‘ladi, bu yerda $f_0(t)-$ regulyar funksiya.

Maxsusliklarni ajratib olish usulidan foydalanib, $D_2 := \{(x,t): 0 < x < l,\ x < t < 2l - x\}$ sohada to‘g‘ri masalaning regulyar qismi uchun quyidagi tengliklarni olamiz (D_2 sohada $v(x,t) = \tilde{v}(x,t)$):

$$v_{tt} - v_{xx} + h_0 v + H(t-x) + \int_0^{t-x} H(\tau)v(x,t-\tau)d\tau = 0,$$

$$v\,|_{t=x+0} = -h(0) - \frac{h_0}{2}x,$$

$$v(0,t) = k(t)\exp\left(\frac{h(0)t}{2}\right).$$

Qo‘shimcha shart esa (9) ni hisobga olgan holda quyidagi shaklni oladi:

$$v_x(0,t) = f_0(t)\exp\left(\frac{h(0)t}{2}\right).$$

Teskari masalaning global yagona yechilishi haqidagi quyidagi teorema o‘rinli:

7-Teorema. *Faraz qilaylik $f(t)$ funksiya (12) ko‘rinishga ega hamda $f_0(t) \in C^1[0,2l]$ bo‘lsin, u holda har qanday $l > 0$ da (8)-(11) teskari masalaning yagona yechimi mavjud.*

Ushbu paragrafda akustikaning integro-differensial tenglamasi uchun teskari masala ham ko‘rib chiqilgan. Giperbolik tipdagi integro-differensial tenglama uchun boshlang‘ich chegaraviy masalani qo‘yamiz:

$$\frac{1}{c^2(y)}v_{tt} = T_y - \frac{d\ln\rho(y)}{dy}T, \quad y > 0, \quad t > 0, \tag{13}$$

$$v\,|_{t\le 0} \equiv 0, \qquad T(+0,t) = \delta'(t), \tag{14}$$

bu yerda $c(y) > 0$ – to‘lqin tarqalish tezligi, $\rho(y)$ – muhit zichligi, $v(y,t)$ – akustik bosim, $T(y,t)$ kuchlanish $v(y,t)$ bilan

$$T(y,t) = v_y(y,t) + \int_0^t k(t-\tau)v_y(y,\tau)d\tau,$$

formula orqali bog‘langan.

Teskari masala quyidagi tarzda qo‘yiladi: (13) tenglik tarkibiga oxirgi formula orqali kiruvchi $k(t),\ t>0$ integral had yadrosini, to‘g‘ri masalaning yechimiga oid ushbu qo‘shimcha ma’lumot bo‘yicha topish talab qilinadi:

$$v(+0,t)=g(t),\ t>0. \qquad (15)$$

Yangi o‘zgaruvchi x ni hamda yangi funksiyalarni quyidagicha kiritamiz:

$$x=\varphi(y)=\int_0^y \frac{d\tau}{c(\tau)},\ v(x,t):=v(\varphi^{-1}(x),t),\quad a(x):=c(\varphi^{-1}(x)),\quad b(x):=\rho(\varphi^{-1}(x)).$$

$\varphi^{-1}(x)$ orqali $\varphi(y)$ ga teskari funksiyani belgilaymiz. $c(y)>0,\ \rho(y)>0$ bo‘lsin. Quyidagicha belgilash kiritamiz $T^*:=\int_0^\infty \frac{d\xi}{c(\xi)}$.

8-Теорема. *Faraz qilaylik* $g(t)$ *funksiya* $g(t)=-c(+0)\delta(t)+H(t)g_0(t)$ *ko‘rinishda ifoda qilinsin, bu yerda* $g_0\in C^2[0,T]$ *va* $H(t)$ *- Xevisayd funksiyasi. Undan tashqari,* $(c(y),\rho(y))\in C^3\left[0,\varphi^{-1}(T)\right]$ *bo‘lsin. U holda ixtiyoriy* $T\in(0,T^*)$ *da* $(13)-(15)$ *teskari masalaning yagona yechimi* $k(t)\in C^2[0,T]$ *mavjud.*

Dissertatsiyaning **«Turli chekli sohalarda integro-differensial tenglamalarning bir o‘lchovli yadrosini aniqlash masalalari»** deb nomlangan ikkinchi bobida bosh qismda umumiy tipdagi giperbolik operatorli bir jinsli bo‘lmagan integro-differensial tenglamalar yechimnii va integral had o‘rama ko‘rinishdagi bir o‘lchovli yadrosini topishdan iborat teskari masalalar tadqiq etilgan.

Giperbolik tipdagi bir jinsli bo‘lmagan integro-differensial tenglamani

$$u_{tt}-Lu=\int_0^t k(t-\theta)u(x,\theta)d\theta+g(x,t),\ (x,t)\in Q, \qquad (16)$$

quyidagi boshlang‘ich

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in\overline{\Omega}, \qquad (17)$$

va chegaraviy

$$u(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\partial Q, \qquad (18)$$

shartlar bilan qaraymiz. Bu yerda $L=\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-c(x)-$ tekis o‘lchovli elliptik operator bo‘lib $(N\geq 1)$, uning koeffitsiyentlari quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$a_{ij}=a_{ji}\in C^{1,\gamma}(\Omega),\quad c(x)\in C^{0,\gamma}(\Omega),\quad c(x)\geq 0,\quad x\in\overline{\Omega},$$

$Q:=\Omega\times(0,T]$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N-$ yetarlicha silliq chegara $\partial\Omega$ ga ega chekli soha, $\partial Q:=\partial\Omega\times[0,T]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x,t)-$ berilgan funksiyalar. $k(t)$ ma’lum bo‘lganda (16)–(18) masaladan $u(x,t)$ funksiyani topish masalasiga to‘g‘ri masala deyiladi.

2-Ta’rif. *(16)–(18) masalaning klassik yechimi deb shunday* $u(x,t)$ *funksiyaga aytiladiki, agar* u Q *yopiq silindrda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lib,*

(16)–(18) aralash masalaning barcha shartlarini klassik ma'noda qanoatlantirsa.

Teskari masala $k(t),\ t>0,$ noma'lum funksiyani $(16)-(18)$ to'g'ri masala yechimning biror $x_0 \in \Omega$ nuqtadagi qiymati haqidagi ushbu

$$u(x_0,t)=h(t), \qquad 0\le t\le T \tag{19}$$

qo'shimcha ma'lumot bo'yicha aniqlashdan iborat. Bu yerda $h(t)-$ berilgan funksiya.

3-Ta'rif. *(16)–(19) teskari masalaning yechimi deb mos ravishda* $C^2(Q)\cap C^1(\overline{Q})$ *va* $C[0,T]$ *sinflardan bo'lgan, (16)– (19) munosabatlarni qanoatlantiruvchi* $u(x,t)$ *va* $k(t)$ *funksiyalar juftligiga aytiladi.*

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida to'g'ri burchakli parallelepiped shaklidagi $D_{Tl}=\Omega_l\times(0,T), \Omega_l=\{(x,y): 0<x<l, 0<y<l\}$ sohada ushbu integro-differensial tenglama

$$u_{tt}-\Delta u=\int_0^t k(\tau)u(x,y,t-\tau)d\tau+g(x,y,t) \tag{20}$$

quyidagi boshlang'ich

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y), \qquad u_t|_{t=0}=\psi(x,y), \qquad 0\le x,y\le l \tag{21}$$

va chegaraviy

$$u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=l}=0, \qquad 0\le y\le l, \qquad 0\le t\le T, \tag{22}$$

$$u|_{y=0}=0, \qquad u|_{y=l}=0, \qquad 0\le x\le l, \qquad 0\le t\le T, \tag{23}$$

shartlar bilan qaralgan. Bu yerda $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ va $g(x,y,t)-$berilgan funksiyalar.

Teskari masala noma'lum $k(t),(t>0)$ funksiyani, $(20)-(23)$ to'g'ri masala yechimning biror $(x_0,y_0)\in\Omega_l$ nuqtadagi qiymati haqidagi ushbu

$$u(x_0,y_0,t)=h(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{24}$$

qo'shimcha ma'lumot bo'yicha aniqlashdan iborat. Bu yerda $h(t)-$ berilgan funksiya.

Quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin:

$$\lim_{x\to 0+}u_x\sin\lambda_m x=\lim_{x\to l-}u_x\sin\lambda_m x=0, \qquad 0\le y\le l, \qquad 0\le t\le T; \tag{25}$$

$$\lim_{y\to 0+}u_y\sin\lambda_n y=\lim_{y\to l-}u_y\sin\lambda_n y=0, \qquad 0\le x\le l, \qquad 0\le t\le T, \tag{26}$$

bu yerda $\lambda_m=\dfrac{\pi m}{l}, \qquad \lambda_n=\dfrac{\pi n}{l}, \qquad m\in N, n\in N,$ mos spektral masalaning xos sonlari.

9-Teorema. *Agar (20)-(23) masala yechimi mavjud bo'lsa, (25), (26) shartlar bajarilganda u yagona bo'ladi.*

10-Teorema. *Agar* $k(t)\in C[0,T],\ \varphi(x,y)\in C^4(\overline{\Omega_l}),\ \psi(x,y)\in C^3(\overline{\Omega_l})$ *va*

$$\varphi(0,y)=\varphi_{xx}(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi_{xx}(l,y),0\le y\le l,$$
$$\psi(0,y)=\psi_{xx}(0,y)=\psi(l,y)=\psi_{xx}(l,y),0\le y\le l,$$
$$\varphi(x,0)=\varphi_{yy}(x,0)=\varphi(x,l)=\varphi_{yy}(x,l),0\le x\le l,$$
$$\psi(x,0)=\psi_{yy}(x,0)=\psi(x,l)=\psi_{yy}(x,l),0\le x\le l,$$
$$g(0,y,t)=g_{xx}(0,y,t)=g(l,y,t)=g_{xx}(l,y,t),\ 0\le y\le l,$$
$$g(x,0,t)=g_{yy}(x,0,t)=g(x,l,t)=g_{yy}(x,l,t),\ 0\le x\le l$$

shartlar bajarilsa, u holda (20)–(23) masalaning yagona yechimi mavjud.

11-Teorema. *Agar* $\varphi(x,y)\in C^5(\overline{\Omega_l}),\quad \psi(x,y)\in C^4(\overline{\Omega_l})$ *va* $g(x,y,t)\in C^{4,0}_{xy,t}(\overline{D}_{Tl})$ *bo'lib,*

$$\varphi(0,y)=\varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xxxx}(0,y)=\varphi(l,y)=\varphi_{xx}(l,y)=\varphi_{xxxx}(l,y),\ 0\le y\le l,$$
$$\varphi(x,0)=\varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yyyy}(x,0)=\varphi(x,l)=\varphi_{yy}(x,l)=\varphi_{yyyy}(x,l),\ 0\le x\le l,$$
$$\psi(0,y)=\psi_{xx}(0,y)=\psi(l,y)=\psi_{xx}(l,y),\ 0\le y\le l,$$
$$\psi(x,0)=\psi_{yy}(x,0)=\psi(x,l)=\psi_{yy}(x,l),\ 0\le x\le l,$$
$$g(0,y,t)=g_{xx}(0,y,t)=g(l,y,t)=g_{xx}(l,y,t),\ 0\le y\le l,$$
$$g(x,0,t)=g_{yy}(x,0,t)=g(x,l,t)=g_{yy}(x,l,t),\ 0\le x\le l,$$
$$h(t)\in C^3[0,T],h(0)=\varphi(x_0,y_0)\ne 0,h'(0)=\psi(x_0,y_0),$$
$$h''(0)=g(0,x_0,y_0)-\lambda^2\Delta\varphi(x_0,y_0),$$

shartlar bajarilsa, u holda ixtiyoriy $T>0$ *da (20)–(24) teskari masalaning yagona yechimi* $k(t)\in C[0,T]$ *mavjud.*

Bu bobning ikkinchi paragrafida $G:=\{(x,y,t):0<r<1,0<t<T\}$, $\left(r=\sqrt{x^2+y^2}\right)$, sohada ushbu integro-differensial tenglama

$$u_{tt}-\Delta u=\int_0^t k(\alpha)u(x,y,t-\alpha)d\alpha+f(r,t), \tag{27}$$

quyidagi boshlang'ich

$$u|_{t=0}=\varphi(r),\qquad u_t|_{t=0}=0,\qquad 0\le x^2+y^2\le 1 \tag{28}$$

va chegaraviy

$$\big((x,y),\nabla u\big)|_{r=0}=0,\qquad u|_{r=1}=0,0\le t\le T, \tag{29}$$

shartlar bilan qaralgan. Bu yerda $\Delta-$ x va y o'zgaruvchilarning Laplas operatori $((x,y),\nabla u)-$ (x,y) va ∇u vektorlarning skalyar ko'paytmasi, $f(r,t)$ va $\varphi(r)$ berilgan, yetarlicha silliq funksiyalar.

Teskari masala $k(t),t>0$ noma'lum funksiyani $(27)-(29)$ to'g'ri masala yechimining biror (x_0,y_0) nuqtadagi qiymati haqidagi ushbu

$$u(x_0,y_0,t)=h(t),\qquad 0<x_0^2+y_0^2<1,\ 0\le t\le T, \tag{30}$$

qo'shimcha ma'lumot bo'yicha aniqlashdan iborat. Bu yerda $h(t)-$ berilgan funksiya.

To'g'ri masalani tadqiq etish uchun qutb koordinatalar sistemasiga o'tamiz:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$$

Bunda biz berilgan masalaning sferik simmetriyaga ega yechimini qidiramiz. Natijada (27)– (30) masala quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \int_0^t k(\alpha)u(r,t-\alpha)d\alpha + f(r,t), \quad (r,t)\in G,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \qquad u_t|_{t=0} = 0, \qquad 0 \le r \le 1,$$

$$\lim_{r\to 0}(ru_r) = 0, \qquad u|_{r=1} = 0, \qquad 0 \le t \le T.$$

$$u(r_0,t) = h(t), \qquad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2},\ 0 < r_0 < 1,\ 0 \le t \le T.$$

$C^{m,n}(G)$ —G sohada r bo‘yicha m marta va t bo‘yicha n marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar sinfi bo‘lsin.

12-Teorema. *Agar* $k(t)\in C[0,T]$, $f(r,t)\in C^{4,0}(\overline{G})$, $\varphi(r)\in C^4[0,1]$ *bo‘lsa hamda quyidagi shartlar bajarilsa:*

$$\varphi^{(m)}(0) = 0,\ m = \overline{0,3},\ \varphi^{(m)}(1) = 0, m = \overline{0,2},$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial r^m}(0,t) = 0, m = \overline{0,3},\ \frac{\partial^m f}{\partial r^m}(1,t) = 0, m = \overline{0,2},\ t\in[0,T],$$

(27)-(29) to‘g‘ri masalaning yagona yechimi mavjud bo‘ladi.

13-Теорема. *Faraz qilaylik* $h(t)\in C^3[0,T]$, $f(r,t)\in C^{4,1}(\overline{G})$, $\varphi(r)\in C^6[0,1]$, $h(0) = \varphi(r_0) \ne 0$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = f(r_0,0) - \lambda^2\Delta\varphi(x_0)$ *bo‘lib, quyidagi shartlar bajarilsin:*

$$\varphi^{(m)}(0) = 0,\ m = \overline{0,5},\ \varphi^{(m)}(1) = 0, m = \overline{0,4},$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial r^m}(0,t) = 0, m = \overline{0,3},\ \frac{\partial^m f}{\partial r^m}(1,t) = 0, m = \overline{0,2},\ t\in[0,T].$$

U holda $(27)-(30)$ *teskari masalaning yagona yechimi mavjud bo‘ladi.*

Uchinchi paragrafda (16) - (18) masala tekis elliptik operator L bilan umumiy holatda o‘rganiladi. Furye usuli bilan to‘g‘ri masala ikkinchi turdagi Volltera integral tenglamasini yechishga keltiriladi.

14-Теорема. $k(t)\in C[0,T]$ *bo‘lsin, hamda quyidagi shartlar bajarilsin:*

$1)\ a_{ij}(x)\in C^{\left[\frac{N}{2}\right]+2}(\overline{\Omega}), c(x)\in C^{\left[\frac{N}{2}\right]+1}(\overline{\Omega});$

$2)\ \varphi(x)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+3}(\Omega), \quad \psi(x)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+2}(\Omega);$

$3)\ g(\cdot,t)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+2}(\Omega), \quad g(x,\cdot)\in C[0,T];$

$4)\ \varphi, L\varphi, ..., L^{\left[\frac{N+4}{4}\right]}\varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \psi, L\psi, ..., L^{\left[\frac{N+2}{4}\right]}\psi \in H_0^1(\Omega);$

$5)\ g(\cdot,t), Lg(\cdot,t), ..., L^{\left[\frac{N+2}{4}\right]}g(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega).$

U holda (16)-(18) masalaning yagona klassik ma’nodagi yechimi mavjud.

Teskari masalani tadqiq etishda $k(t)$ funksiya uchun quyidagi integral tenglamani olamiz:

$$k(t)=\frac{1}{h(0)}[h'''(t)-F'''(t)-\int_0^t k(s)M'''[k](t-s)ds],\ t\in[0,T]. \qquad (31)$$

bu yerda $M'''[k](t)=h'(t)-\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 v_m(x_0)\int_0^t A_m(\theta)\cos\lambda_m(t-\theta)d\theta.$

15-Teopema. $h(t)\in C^3[0,T]$ *bo'lsin, hamda quyidagi shartlar bajarilsin:*

$1)\ \varphi(x)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+7}(\Omega),\ \psi(x)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+5}(\Omega),\ g(\cdot,t)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+5}(\Omega),\quad g(x,\cdot)\in C[0,T];$

$2)\ \varphi, L\varphi,...,L^{\left[\frac{N+4}{4}\right]+3}\varphi\in H_0^1(\Omega),\quad \psi, L\psi,...,L^{\left[\frac{N+6}{4}\right]}\psi\in H_0^1(\Omega);$

$3)\ g(\cdot,t), Lg(\cdot,t),...,L^{\left[\frac{N+6}{4}\right]}g(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega);$

$4)\ h(0)=\varphi(x_0),\ h'(0)=\psi(x_0),\ h''(0)=g\ (x_0 0)-\lambda^2 L\varphi(x_0).$

U holda (16) – (19) *teskari masalaning (31) tenglamani qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud bo'ladi.*

Faraz qilaylik $K(k_0)$ $k(t)\in C[0,T]$ funksiyalarning biror $t\in[0,T]$ da $k_0>0$ o'zgarmas bilan $\|k(t)\|_{C[0,T]}\le k^0$ shartni qanoatlantiruvchi to'plami bo'lsin.

16-Teorema. *15-teorema shartlari bajarilgan bo'lsin hamda* $k^1(t)\in K(k_0), k^2(t)\in K(k_0)-$ *(16)–(19) teskari masalaning* $\{\varphi^1,\psi^1,g^1,h^1\}$ *va* $\{\varphi^2,\psi^2,g^2,h^2\}$ *berilganlarga mos ikkita yechimi bo'lsin. U holda shunday* $C=C(k^0,T)-$ *musbat soni topiladiki, quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:*

$$\|k^1-k^2\|_{C[0,T]}\le C\left(\|\tilde{\varphi}\|_{H^{\left[\frac{N}{2}\right]+7}(\Omega)}+\|\tilde{\psi}\|_{H^{\left[\frac{N}{2}\right]+5}(\Omega)}+\|\tilde{g}\|_{H^{\left[\frac{N}{2}\right]+5}(\Omega)\times C[0,T]}+\|\tilde{h}\|_{C^3[0,T]}\right).$$

Ko'p o'lchovli teskari masalalarni yechishda bir necha yondashuvlar mavjud. Bunday usullardan biri masalani bir o'lchovli masalalar seriyasiga keltirib yechishdir. Bunda qidirilayotgan funksiyaga kichik parametr kiritiladi va u o'zgaruvchi bilan ushbu parametr ko'paytmasi bo'yicha darajali qatorga yoyiladi. Yoyilma koeffitsiyentlari (bir o'lchovli funksiyalar) bir o'lchovli masalalar ketma-ketligining yechimlari sifatida aniqlanadi.

"Kuchsiz gorizontal muhitlarda yopishqoqlik-elastiklik tenglamalari ikki o'lchovli yadrosini aniqlash" deb nomlangan uchinchi bobda fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha chekli sohada yopishqoqlik-elastiklik tenglamasi uchun shunga o'xshash masalalar ko'rib chiqilgan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida quyidagi integro-differensial tenglama

$$u_{tt}=u_{zz}+u_{xx}+\int_0^t k(x,\theta)u(x,z,t-\theta)d\theta,\qquad z\in(0,l),(x,t)\in\mathbb{R}_+^2, \qquad (32)$$

ushbu boshlang'ich

$$u|_{t=0}=0,\qquad u_t|_{t=0}=0, \qquad (33)$$

va chegaraviy

$$u_z|_{z=0}=\delta(x)\delta'(t),\qquad u_z|_{z=l}=0, \qquad (34)$$

shartlar bilan qaralgan. Bu yerda $\mathbb{R}_+^2:=\{(x,t): x\in\mathbb{R},\ t\in(0,\infty)\}$, $\delta(\cdot)$ и $\delta'(\cdot)-$ mos

ravishda Dirakning delta fuksiyasi va uning hosilasi, $l > 0$ - berilgan son.

Teskari masala (32) tenglama integral hadi tarkibiga kiruvchi noma'lum yadro $k(x,t)$ni, (32)–(34) boshlang'ich-chegaraviy masalaning $z = 0$dagi qiymati

$$u(x,0,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{35}$$

bo'yicha aniqlashdan iborat. Bu yerda $f(x,t) -$ berilgan funksiya.

Bunda biz $k(x,t)$yadro gorizontal xo'zgaruvchiga kuchsiz bog'langan deb faraz qilamiz:

$$k(x,t) = k_0(t) + \varepsilon x k_1(t) + O(\varepsilon^2), \tag{36}$$

bu yerda ε – kichik parametr.

(32)–(34) to'g'ri masala yechimini ε bo'yicha darajali qator ko'rinishida qidiramiz:

$$u(x,z,t) = u_0(x,z,t) + \varepsilon u_1(x,z,t) + O(\varepsilon^2). \tag{37}$$

U holda (35) formulani inobatga olsak, $f(x,t)$funksiya ham xuddi shunday ko'rinishga ega bo'lishini anglash qiyin emas:

$$f(x,t) = f_0(x,t) + \varepsilon f_1(x,t) + O(\varepsilon^2). \tag{38}$$

(32)–(35) teskari masala $k_0, k_1, \ldots$ larni ketma-ket aniqlashdan iborat bo'lgan ushbu masalalarga ajraladi

$$u_{0tt} = \Delta u_0 + \int_0^t k_0(\theta) u_0(x,z,t-\theta)\,d\theta, z \in (0,l), (x,t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{39}$$

$$u_0 \mid_{t=0} = 0, \qquad u_{0t} \mid_{t=0} = 0, \tag{40}$$

$$u_{0z} \mid_{z=0} = \delta(x)\delta'(t), \qquad u_{0z} \mid_{z=l} = 0, \tag{41}$$

$$u_0 \mid_{z=0} = f_0(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+; \tag{42}$$

$$u_{ntt} = \Delta u_n + \int_0^t \sum_{j=0}^{n} x^j k_j(\theta) u_{n-j}(x,z,t-\theta)\,d\theta, z \in (0,l), (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{43}$$

$$u_n \mid_{t=0} = 0, \qquad u_{nt} \mid_{t=0} = 0, \tag{44}$$

$$u_{nz} \mid_{z=0} = 0, \qquad u_{nz} \mid_{z=l} = 0, \tag{45}$$

$$u_n \mid_{z=0} = f_n(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{46}$$

So'ngra (39)–(46) tenglamalarning har ikkala tomonini x^mga ko'paytirib, x bo'yicha minus cheksizlikdan plyus cheksizgacha bo'lgan oraliqda integrallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$u_{nmtt} - u_{nmzz} = m(m-1)u_{n(m-2)} + + \int_0^t \sum_{j=0}^{n} k_j(\theta)\left[u_{(n-j)(m+j)}(z,t-\theta)\right]d\theta, t \in \mathbb{R},\ z \in (0,l).$$

Bu teglamada u_{nm} orqali u_n funksiyaning m - momenti ifodalangan:

$$u_{nm}(z,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x,z,t)\,x^m\,dx.$$

Ushbu paragrafning asosiy natijasi shundan iboratki, ixtiyoriy $T > 0$ son berilganda $k_0(t)$ va $k_1(t)$funksiyalarni $t \in [0,T]$ uchun $O(\varepsilon^2)$ tartibgacha aniqlikda ketma-ket topish usuli qurilgan. Buning uchun, $x$bo'yicha $f(x,t)$ funksiyaning $t \in [0,T]$lar uchun dastlabki ikki momentini berish kifoya. $k_0(t)$ funksiyani topish

masalasi Volterra tipidagi chiziqli bo‘lmagan integral tenglamalar sistemasini, $k_1(t)$ funksiyanini topish masalasi chiziqli integral tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi.

17-Teorema. *Agar* $\tilde{f}(t) \in C^2[0,l]$, $\tilde{f}(+0) = 0$, $\tilde{f}'(+0) = 0$ *shartlar bajarilsa, ixtiyoriy tayin* $l > 0$ *da (39)–(42) teskari masalaning yagona yechimi* $k_0(t) \in C[0,2l]$ *mavjud bo‘ladi.*

18-Teorema. *Ushbu shartlar bajarilsin* $\tilde{f}(t) \in C^3(0,l)$, $\tilde{f}(+0) = 0$, $\tilde{f}'(+0) = 0$, $\tilde{f}_1(t) \in C^{IV}[0,2l]$, $\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_1'(0) = \tilde{f}_1''(0) = \tilde{f}_1'''(0) = 0$. *U holda ixtiyoriy tayin* $l > 0$ *da (43) – (46) teskari masalaning yagona yechimi mavjud bo‘ladi va* $k_1(t) \in C[0,2l]$, $u_{11}(z,t) \in C^2(D_2)$.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida $D := \{(t,x,z) : (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < z < l\}$ sohada

$$u_{tt} = \Delta u + \int_0^t k(\tau,x)\Delta u(t-\tau,x,z)d\tau, \qquad (47)$$

tenglama quyidagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlar

$$u|_{t<0} \equiv 0, \qquad (48)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \int_0^t k(\tau,x)\frac{\partial u}{\partial z}(t-\tau,x,z)d\tau\right)|_{z=0} = \delta(x)\delta'(t), \qquad (49)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \int_0^t k(\tau,x)\frac{\partial u}{\partial z}(t-\tau,x,z)d\tau\right)|_{z=l} = 0, \qquad (50)$$

bilan qaralgan. Bu yerda $l > 0-$ tayin son.

Teskari masala quyidagicha qo‘yiladi: (47) tenglama integral hadi tarkibiga kiruvchi $k(t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ noma’lum yadroni (47) - (50) to‘g‘ri masalaning yechimiga oid quyidagi (47) - (50) ma’lumot bo‘yicha topish talab qilinadi:

$$u(t,x,0) = g(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \qquad (51)$$

$u_j(t,x,z)$, $j = 1,2,\ldots$ funksiyalarning x o‘zgaruvchi bo‘yicha Furye obrazlariga o‘tamiz:

$$\tilde{u}_i(t,\lambda,z) = \int_{\mathbb{R}} u_i(t,x,z)e^{-i\lambda x}dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$k(x,t)$, $f(x,t)$, $u(x,z,t)$ funksiyalarning (36) – (38) formulalardagi yoyilmalaridan foydalanib, ushbu masalalarga ega bo‘lamiz:

$$\tilde{u}_{0tt} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda^2\right]\left(\tilde{u}_0 + \int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z)d\tau\right), \quad (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2,\ z \in (0,l), \qquad (52)$$

$$\tilde{u}_0|_{t<0} \equiv 0; \quad \tilde{u}_0|_{z=0} = \tilde{g}_0(\lambda,t), \quad (\lambda,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_0 + \int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z)d\tau\right)|_{z=0} = \delta'(t), \qquad (54)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_0+\int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z)d\tau\right)|_{z=l}=0, \tag{55}$$

$$\tilde{u}_{1tt}=\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\lambda^2\right]\left(\tilde{u}_1+\int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_1(\tau,\lambda,z)d\tau\right)-$$

$$-i\int_0^t k_1(t-\tau)\left[2\lambda u_0(\tau,\lambda,z)+\lambda^2\tilde{u}_{0\lambda}(\tau,\lambda,z)-\frac{\partial^2\tilde{u}_{0\lambda}}{\partial z^2}\right]d\tau,\quad (t,\lambda)\in\mathbb{R}^2,\ z\in(0,l), \tag{56}$$

$$\tilde{u}_1|_{t<0}\equiv 0;\qquad \tilde{u}_1|_{z=0}=\tilde{g}_1(t,\lambda),\quad (t,\lambda)\in\mathbb{R}^2, \tag{57}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_1+\int_0^t\left(k_0(t-\tau)\tilde{u}_1(\tau,\lambda,z)d\tau-ik_1(t-\tau)\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\lambda}(t-\tau,\lambda,z)\right)d\tau\right)|_{z=0}=0, \tag{58}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_1+\int_0^t\left(k_0(t-\tau)\tilde{u}_1(\tau,\lambda,z)d\tau-ik_1(t-\tau)\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\lambda}(t-\tau,\lambda,z)\right)d\tau\right)|_{z=l}=0. \tag{59}$$

Quyidagi teoremalar o‘rinli:

19-Teorema. *Agar* $\tilde{g}_{00}(t,\lambda)\in C^3[0,2l]$ *va* $\tilde{g}_{00}(+0,\lambda)=0,\ \tilde{g}'_{00t}(+0,\lambda)=-\frac{\lambda^2}{2}$ *bo‘lsa, ixtiyoriy tayin* $l>0$ *da (*52*)–(* 55*) teskari masalaning yagona* $k_0(t)\in C^3[0,2l]$ *yechimi mavjud.*

20-Teorema. *Ushbu shartlar o‘rinli bo‘lsin* $\tilde{g}_{00}(t,\lambda)\in C^3[0,2l]$, $\tilde{g}_{00}(+0,\lambda)=0,\ \tilde{g}'_{00}(+0,\lambda)=-\frac{\lambda^2}{2}$ *va* $\tilde{g}_1(+0,\lambda)\in C^2[0,2l]$. *U holda ixtiyoriy tayin* $l>0$ *da (56)– (59) teskari masalaning yagona yechimi* $k_1(t)\in C^2[0,2l]$ *mavjud.*

Bu bobning uchinchi paragrafida $\Omega=\{(x,y,t):(x,t)\in\mathbb{R}^2,y\in(0,l)\}$ sohada ushbu integro-differensial tenglama

$$u_{tt}=\Delta u+p(x,y)u+\int_0^t m(\theta)u(x,y,t-\theta)d\theta, \tag{60}$$

quyidagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlar

$$u|_{t<0}=0, \tag{61}$$

$$u_y|_{y=0}=-\delta(x)\delta'(t),\qquad u_y|_{y=l}=0, \tag{62}$$

bilan qaralgan. Bu yerda $p(x,y)-$ to‘lqin tarqalish koeffitsyient, $m(t)-$ muhit xotirasini xarakterlovchi yadro, $\delta(\cdot)-$ Dirak delta funksiyasi, $l>0-$ tayin son. Teskari masalada (60) tarkibiga kiruvchi noma’lum $p(x,y)(x\in\mathbb{R},\ y\in(0,l))$ va $m(t)(t>0)$ funksiyalarni (60) - (62) to‘g‘ri masalaning $y=0$ dagi qiymati

$$u(x,0,t)=f(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \tag{63}$$

bo‘yicha aniqlashdan iborat. Bu yerda $f(x,t)-$ berilgan funksiya.

$p(x,y)$ gorizontal x o‘zgaruvchiga kuchsiz bog‘langan deb faraz qilamiz:

$$p(x,y) = p_0(y) + \varepsilon x p_1(y) + O(\varepsilon^2), \tag{64}$$

bu yerda ε – kichik parametr. Bundan keyin (64) tenglikda $p_0(z) \equiv p_0 > 0$ ma'lum miqdor deb faraz qilamiz. So'ngra $f(x,t)$, $u(x,z,t)$ funksiyalarning (37) – (38) formulalardagi qatorlarga yoyilmalaridan foydalanib, quyidagi masalalarga kelamiz:

$$\tilde{u}_{0tt} = \tilde{u}_{0yy} + (p_0 - \lambda^2)\tilde{u}_0 + \int_0^t m(\theta)\tilde{u}_0(\lambda, y, t-\theta)d\theta,\ y \in (0,l),\ t > 0, \tag{65}$$

$$\tilde{u}_0 |_{t<0} = 0, \quad \tilde{u}_{0y} |_{y=0} = -\delta'(t), \qquad \tilde{u}_{0y} |_{y=l} = 0. \tag{66}$$

$$\tilde{u}_0(\lambda, 0, t) = \tilde{f}_0(\lambda, t). \tag{67}$$

$$u_{1tt} = u_{1yy} + ip_1(y)u_{0\lambda}(\lambda, y, t) + (p_0 - \lambda^2)u_1(\lambda, y, t) + \int_0^t m(\theta)u_1(\lambda, y, t-\theta)d\theta, \tag{68}$$

$$u_1 |_{t<0} = 0, \quad u_{1y} |_{y=0} = 0, \qquad u_{1y} |_{y=l} = 0, \tag{69}$$

$$u_1(\lambda, y, t) |_{y=0} = \tilde{f}_1(\lambda, t). \tag{70}$$

21-Teorema. *Agar* $\tilde{f}_{00}(t,\lambda) \in C^2[0,2l]$ *va* $\tilde{f}_{00}(\lambda,0) = 0$, $\tilde{f}_{00t}(\lambda,0) = -\dfrac{(p_0 - \lambda^2)}{2}$ *bo'lsa, yetarlicha kichik* l *larda (65)–(67) teskari masalaning yagona yechimi* $m(t) \in C[0, 2l]$ *mavjud.*

22-Teorema. $\tilde{f}_1(\lambda,t) \in C^2[0,2l]$ *va* $\tilde{f}_1(\lambda,0) = \tilde{f}_1'(\lambda,0) = 0,\ \lambda \in R$ *shartlar o'rinli bo'lsin hamda* $\tilde{u}_0$ *va m lar (65)–(67) teskari masalaning yechimi bo'lsin. U holda ixtiyoriy tayin* $l > 0$ *da (68)–(70) teskari masalaning yechimi* $p_1(y) \in C[0,l]$ *mavjud va yagona.*

Ko'p o'lchovli teskari masalalar uchun faqat yechilishi mumkin bo'lgan maxsus holatlar mavjud. O'zgaruvchilarning biri bo'yicha uzluksiz, boshqa o'zgaruvchilari bo'yicha analitik bo'lgan funksiyalar masala yechimga ega bo'ladigan funksiyalar sinfiga kiradi. L.V Ovsyannikov va L. Nirenberg ishrlarida rivojlantirilgan analitik funksiyalar Banax fazolarining shkalasi usulini ko'p o'lchovli teskari masalalarni yechishga qo'llash g'oyasi V.G. Romanovga tegishlidir.

To'rtinchi bob **"Integro-differensial tenglamalar uchun ko'p o'lchovli teskari masalalar"** deb ataladi. Ushbu bobning birinchi paragrafida biz quyidagi lokal-chegaraviy masalani

$$u_{tt} - u_{zz} - \Delta u = \int_0^t k(t-\tau, z.x)u(\tau, z, x)d\tau, (x,t) \in R^{n+1}, z > 0, \tag{71}$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, u_z\big|_{z=0} = -\delta'(t) + f(t,x)\theta(t), (x,t) \in R^{n+1}, \tag{72}$$

ko'rib chiqamiz. Bu yerda $\Delta -$ $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x$ o'zgaruvchilarning Laplas operatori, $\delta'(t) -$ Dirak delta funksiyasi hosilasi, $\theta(t) -$ Xevisayd funksiyasi,

$f(t,x)$ – berilgan silliq funksiya.

(71) tenglama integral had yadrosi ushbu ko‘rinishda bo‘lsin deb faraz qilaylik

$$k(t,z,x) = k_0(t)\,p(z,x),$$

bu yerda $k_0(t)$ – berilgan funksiya. Teskari masala $p(z,x)$ni, (71)–(72) to‘g‘ri masalaning $z = 0$dagi qiymati

$$u\big|_{z=0} = -\delta(t) + g(t,x)\theta(t), (x,t) \in R^{n+1}, \qquad (73)$$

bo‘yicha aniqlashdan iborat. Bu yerda $g(t,x)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiya.

Normasi chekli bo‘lgan $h(x),\ x \in R$ analitik funksiyalarning A_s Banax fazosini kiritamiz

$$\|h\|_s(r) = \sup_{|x|\le r} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{s^{|\alpha|}}{\alpha!} \left|D^{\alpha}\varphi(x)\right| < \infty.$$

Bu yerda $r > 0, s > 0$ и $D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, α – multiindeks. Keyingi hisoblashlarda r parametr tayin, s parametr esa o‘zgaruvchan parametr sifatida qaraladi. Bundan tashqari, soddalik uchun biz A_s fazo normalarini yozishda r parametrni tushirib qoldiramiz. s parametrni o‘zgartirganda Banax fazolari shkalasi paydo bo‘ladi. Ushbu xossa o‘rinli: agar $h(x) \in A_s$, u holda barcha $s' \in (0,s)$lar uchun $h(x) \subset A_{s'}$bo‘ladi, bundan agar $s' < s$ bo‘lsa, $A_s \subset A_{s'}$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari, agar $h(x) \in A_s$ bo‘lsa, barcha $s' \in (0,s)$, $D^{\alpha}h(x) \subset A_{s'}$ ekanligi kelib chiqadi va quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\|\Delta h\|_s \le \frac{4\pi}{(s'-s)} \|h\|_{s'}.$$

$D_{0T} = \{(t,z) \mid 0 \le z \le t \le T - t\}$ soha berilgan bo‘lsin, $T > 0$ – tayin son va $D_T = D_{0t} \times R^n$.

4- Ta’rif. *$w = w(t,z,x)$ funksiya $C(A_s, D_{0T})$ sinfga tegishli deyiladi, agar $w \in A_s$ barcha $(t,z) \in D_{0T}$ va D_{0T} sohada A_s fazoning elementi sifatida uzluksiz bo‘lib, quyidagi tengsizliknu qanoatlantirsa*

$$\sup_{(t,z)\in D_{0T}} \|w\|_s(t,z) < \infty.$$

$u(t,z,x)$ funksiya (71),(72) masalaning yechimi sifatida $t = z$ xarakteristik sirt atrofida quyidagi strukturaga ega:

$$u(t,z,x) = -\delta(t-z) + v(t,z,x)\theta(t-z),$$

bu yerda $v(t,z,x)$ – $t = z$ xarakteristik sirt orqali o‘tishda uzluksiz funksiya.

Bundan (71) – (73) teskari masalaning quyidagi tenglamalardan $p(z,x)$ funksiyani aniqlash masalasiga ekvivalentligi kelib chiqadi:

$$v_{tt} - v_{zz} = \Delta v + k_0(t-z)\,p(z,x) + p(z,x)\int_0^{t-z} k_0(\alpha)v(t-\alpha,z,x)d\alpha,$$

$$v\big|_{z=0} = g(x,t), v_z\big|_{z=0} = f(x,t), t > 0, x \in R^n,$$

$$u\big|_{t=z+0}=0, x\in R^n,$$

bu yerda $(t,z,x)\in D=\{(t,z,x)\big|t>0, 0<z<t,\ x\in R^n\}$. Hosil bo‘lgan masala quyidagi integral tenglamalani yechishga keltiriladi:

$$v(t,z,x)=\frac{1}{2}\big[g(t+z,x)+g(t-z,x)\big]+\frac{1}{2}\int_{t-z}^{t+z} f(\tau,x)d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{\Delta(z,t)}\Big[\Delta v\big(\tau,\xi,x\big)+k_0(\tau-\xi)p(\xi,x)+p(\xi,x)\int_0^{\tau-\xi}k_0(\alpha)v(\tau-\alpha,\xi,x)d\alpha\Big]d\tau d\xi, \quad (74)$$

$$p(z,x)=p_0(z,x)-\frac{2}{k_0(0)}\int_0^z\big[\Delta v_t(2z-\xi,\xi,x)+$$

$$+p(\xi,x)k_0^{'}(2z-2\xi)+p(\xi,x)\int_0^{2z-2\xi}k_0(\alpha)v_t(2z-\xi-\alpha,\xi,x)d\alpha\big]d\xi, \quad (75)$$

bu yerda

$$p_0(z,x)=\frac{1}{k_0(0)}\frac{d^2}{dz^2}v_0(z+0,z,x)=\frac{2}{k_0(0)}\big[g_{tt}(t,x)+f_t(t,x)\big]_{t=2z}.$$

$$v_t(t,z,x)=\frac{1}{2}\big[g_t(t+z,x)+g_t(t-z,x)\big]+\frac{1}{2}\big[f(t+z,x)-f(t-z,x\big]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^z\Big[\Delta v(\xi+t-z,\xi,z)\ +k_0(t-z)p(\xi,x)+p(\xi,x)\int_0^{t-z}k_0(\alpha)v(\xi+t-z-\alpha,\xi,x)d\alpha-$$

$$-\Delta v(-\xi+t+z,\xi,x)-k_0(t+z-2\xi)p(\xi,x)$$

$$-p(\xi,x)\int_0^{t+z-2\xi}k_0(\alpha)v(t+z-\xi-\alpha,\xi,x)\ d\alpha\Big]d\xi \quad (76)$$

Ushbu paragrafning asosiy natijasi qo‘yilgan masalaning lokal bir qiymatli yechilishi haqidagi quyidagi teoremadir:

23-Теорема. *$k_0(t)\in C^1[0,T]$, $k(0)\neq 0$ bo‘lsin va $g(+0,x)=0$, $g_t(+0,x)=f(+0,x)$, $x\in R^n$ bundan tashqari quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsin:* $[f(t,x),g(t,x),g_t(t,x),f_t(t,x),g_{tt}(t,x)]\in C(A_{S_0},[0,T])$,

$$\max\Big\{\|g\|_{S_0}(t),\max(1,\frac{T}{2})\|f\|_{S_0}(t),\|g_t\|_{S_0}(t)\Big\}\le\frac{R_0}{2},$$

$$\max\Big\{\|f_t\|_{S_0}(t),\|g_{tt}\|_{S_0}(t)\Big\}|k(0)|^{-1}\le\frac{R_0}{4},t\in[0,T],$$

bu yerda R_0-berilgan musbat son. $\Gamma_{ST}:=D_T\bigcap\{((t,z,s)\big|0\le z\le a(s_0-s)\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy $s\in(0,s_0)$ uchun, shunday $a\in\left(0,\frac{T}{2}\right)$ topiladiki (74) – (76) tenglamalar sistemasining yagona yechimi mavjud va quyidagi sinflarga tegishli

$$(v,v_t)\in C(A_{S_0},F),\ p\in C\Big(A_{S_0},[0,a(s_0-s)]\Big)\ bo‘ladi.$$

Bu yerda $$F=\{(t,z,s)\big|(t,z)\in D_{0T},0<z<a(s_0-s)\},$$

$$\|v-v_0\|_S(t,z)\le R_0,\ \ \|v_t-v_{0t}\|_S\le\frac{R_0}{s_0-s},\ \ \|p-p_o\|_S\le\frac{R_0}{(s_0-s)^2}.$$

Ushbu bobning ikkinchi paragrafida biz z o‘zgaruvchi bo‘yicha chegaralangan $D=\{(x,z,t):x\in R,z\in[0,l],t\in R\}$ sohada

$$u_{tt}=u_{zz}+u_{xx}+\int_0^t k(x,\alpha)u(x,z,t-\alpha)d\alpha,\qquad x\in R,z\in(0,l),t\in R,\qquad(77)$$

integro-differensial tenglama, ushbu boshlang‘ich

$$u|_{t<0}=0,\qquad(78)$$

va chegaraviy

$$u_z|_{z=0}=\delta'(t),\qquad u_z|_{z=l}=0.\qquad(79)$$

shartlar bilan qaralgan. Teskari masala noma’lum $k(x,t)\in C(\overline{\Pi})$ funksiyani to‘g‘ri masala yechimning $x=0$ dagi qiymati haqidagi

$$u(x,0,t)=g(x,t)\qquad(80)$$

qo‘shimcha ma’lumot bo‘yicha aniqlashdan iborat. Bu yerda $g(x,t)-$ berilgan funksiya, $\Pi=\{(x,t):x\in R,\ t>0\}$. Yangi $\tilde u(x,z,t)=u(x,z,t)+\frac{1}{2}\big(\delta(t-z)-\delta(t+z)\big)$ funksiyani kiritamiz. Teskari masala oldingi paragrafdagi kabi integral tenglamalarni yechishga keltiriladi.

24-Теорема. Quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsin:

$$(g(x,+0),g_t(x,+0))\in A_{s_0},\ (g(x,z),g_t(x,z),g_{tt}(x,z))\in(C_l[0,2l],A_{s_0})$$

$$\max\{\|g\|_{s_0}(t),\|g_t\|_{s_0}(t),\|g_{tt}\|_{s_0}(t)\}\le R,\ \ t\in[0,2l],$$

bu yerda $R>0-$ *berilgan son. U holda* $\Gamma_{sl}=D_2\cap\{(x,z,t):0\le z\le a(s_0-s)\}$ *sohaga tegishli ixtiyoriy* $s\in(0,s_0)$ *uchun, shunday* $a\in(0,l)$ *topiladiki, (77)-(80) teskari masalaning yagona yechimi mavjud va* $\big(\tilde u,\tilde u_t\big)\in C(A_{s_0},F),\ k\in C(A_{s_0},[0,a(s_0-s)])$

$$F=\{(z,t,s):(z,t)\in D_{0l},\ 0<z<a(s_0-s)\},$$

bunda $\|u-u_0\|_s(z,t)\le R;\ \|u_t-u_{0t}\|_s(z,t)\le\frac{R}{s_0-s};\ \|u_t-u_{0t}\|_s(z)\le\frac{R}{(s_0-s)^2}.$

Bu bobning uchinchi paragrafida (77) tenglama D sohada taqsimlangan boshlang‘ich berilganlar bilan yani $u_z|_{z=0}=\psi(x,t)$ bo‘lgan holda o‘rganilgan.

25-Teorema . $|\psi(x,0)|\ge\mu_0>0,\ (f(x,+0),f_t(x,+0),f_{tt}(x,+0))\in A_{s_0},$

$$(f(x,t),f_t(x,t),f_{tt}(x,t),f_{ttt}(x,t),f_{tttt}(x,t))\in C_t(A_{s_0},[0,2l],),$$

$$(\psi(x,t),\psi_t(x,t),\psi_{tt}(x,t),\psi_{ttt}(x,t))\in C_t(A_{s_0},[0,2l],)$$

$$\max\{\|f\|_{s_0}(t),\|f_t\|_{s_0}(t),\|f_{tt}\|_{s_0}(t),\|f_{ttt}\|_{s_0}(t),\|f_{tttt}\|_{s_0}(t)\}\le R_0,\ t\in[0,2l]$$

bo‘lsin, bu yerda μ_0 *va* $R_0>0-$ *berilgan sonlar. U holda* $\Gamma_{sl}=B_2\cap\{(x,z,t):0\le z\le a(s_0-s)\}$ *sohaga tegishli ixtiyoriy* $s\in(0,s_0)$ *uchun, shunday* $a\in(0,l)$ *soni topiladiki teskari masala yagona yechimi mavjud va*

$$v(x,z,t) \in C(A_{s_0}, F),\ k(x,z) \in C(A_{s_0}, [0, a(s_0 - s)])$$

$$F = \{(z,t,s) : (z,t) \in G_2,\ 0 < z < a(s_0 - s)\}$$

xususan $$\| v - v_0 \|_s (z,t) \le R_0;\ \| k - k_0 \|_s (z) \le \frac{R_0}{s_0 - s},$$

bu yerda

$$v_0 = \frac{1}{2}[f_{ttt}(x,t+z) + f_{ttt}(x,t-z)] + \frac{1}{2}[\psi_{tt}(x,t+z) - \psi_{tt}(x,t-z)] + g(x,z)(z-x)z,$$

$$k_0 = \frac{2}{\psi(x,0)}\left(g_{xx}(x,z) - f_{tttt}(x,z) - \psi_{ttt}(x,z)\right).$$

XULOSA

Ushbu dissertatsiya tadqiqoti mobaynida quyidagi natijalarga erishildi:

1. integro-differensial to‘lqin tarqalish tenglamasi integral hadi bir o‘lchovli yadrosini cheksiz va *x* o‘zgaruvchisi bo‘yicha chekli sohalarda bir qiymatli topish shartlari aniqlandi. Teskari masalalar global bir qiymatli yechilishi haqidagi teoremalar isbotlangan va turg‘unlik baholari olingan.

2. yopishqoqlik-elastiklik tenglamasi va integro-differensial akustika tenglamasi uchun teskari masalalarning global bir qiymatli yechilishini ta’minlovchi, maxsusliklarni ajratib olish usuliga asoslangan yondashih ishlab chiqilgan.

3. turli chegaralangan sohalarda integro-differensial tenglama uchun teskari masalalarning global bir qiymatli yechilishi haqidagi teoremalar isbotlandi va turg‘unlik bahosi olindi.

4. integral had yadrosi fazoviy o‘zgaruvchiga kuchsiz bog‘liq bo‘lgan hollarda yopishqoqlik-elastiklik tenglamalari uchun ikki o‘lchovli teskari masalalarni bir o‘zgaruvchli masalalar seriyasiga keltirish usuli olingan. Bu teskari masalalarning global bir qiymatli yechilishi haqidagi teoremalar isbotlangan va turg‘unlik baholari olingan.

5. giperbolik tipdagi integro-differensial tenglamaning koeffitsiyenti va yadrosini aniqlash teskari masalasi bir o‘zgaruvchli ikkita teskari masalalarga keltirilgan. Teskari masalalarning lokal bir qiymatli yechilishi haqidagi teoremalar isbotlangan.

6. Banax fazosining shkalalar usuli hamda vaznli norma usullari yordamida giperbolik tipdagi integro-differensial tenglama uchun ko‘p o‘lchovli teskari masalaning integral yadrosi o‘zgaruvchilarga ajraladigan holda lokal bir qiymatli yechilishini ta’minlovchi yondashish ishlab chiqilgan.

7. yopishqoqlik-elastiklik tenglamasi uchun ko‘p o‘lchovli teskari masalaning lokal bir qiymatli yechilishi haqidagi teoremalar taqsimlangan va umumlashgan boshlang‘ich shartlar bilan isbotlangan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

САФАРОВ ЖУРАБЕК ШАКАРОВИЧ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ–2023

Тема докторской (Doctor of Science) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за B2023.4.DSc/FM232.

Диссертация выполнена в Институте математики им. В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://kengash.mathinst.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Тахиров Жозил Останович** доктор физико-математических наук, профессор
	Хасанов Акназар Бекдурдиевич доктор физико-математических наук, профессор
	Халмухамедов Алимджон Рахимович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН.**

Защита диссертации состоится « 9 » января 2024 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathins.uz)..

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математеки имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 174). (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел. (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 20 » декабря 2023 года.

(протокол рассылки № 2 от « 20 » декабря 2023 года).

У.А. Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А. Азамов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-практические исследования, проводимые в мировом масштабе, сводятся к исследования обратных задач для дифференциальных уравнений. При математическом моделировании некоторых физических процессов встречаются такие системы, поведение которых зависит от всей предыстории процесса, поэтому описывается нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями. Среда, в которой происходят такие процессы, называется средой с памятью. К таким уравнениям приводят задачи распространения упругих, электромагнитных, акустических волн. Обратные задачи для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений – относительно новое и бурно развивающиеся направление в теории обратных задач математической физики, возникшее в начале 90-х годов двадцатого столетия. Так как методы решения таких задач сформированы в недостаточной степени, проведение исследований в данном направлении является актуальным.

В настоящее время очень многие специалисты со всего мира занимаются решением обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. Отметим тот факт, что большинство этих задач имеют физическую основу, т.е. описывают конкретные физические процессы. Исследование обратных задач определения ядра интегральных операторов в этих уравнениях по заданному дополнительному условию о волновом поле играет важную роль при изучении строения и свойств среды. В качестве последнего условия рассматривается след решения прямой задачи в фиксированной точке для всего временного интервала. В приложениях также важны задачи с дельта–образными источниками, сосредоточенными в окрестности фиксированной точки или на границе области.

В нашей стране уделяется особое внимание актуальным аспектам дифференциальных уравнений имеющих научное и практическое применение, в частности, особое внимание уделено исследованию распространения электромагнитных и акустических волн в вязкоупругих средах. Значительные результаты были достигнуты при исследованиях локальной или глобальной разрешимости вышеизложенных задач. Проведение на уровне международных стандартов научных исследований по приоритетным направлениям математических наук, как алгебра и функциональный анализ, дифференциальные уравнения и математическая физика, теории динамических систем, является основной задачей и направлением в деятельности Института математики имени В.И.Романовского[1].

Тема и объект исследования настоящей диссертации соответствуют задачам, обозначенным в Указе Президента Республики Узбекистан №УП

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

4979 от 7 февраля 2017 года “О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан” и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”, и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствие с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации.

Научные исследования по обратным задачам, посвященным определению ядер и коэффициентов интегро-дифференциальных уравнений и систем ведутся в крупных научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, в частности: Таллинским технологическом университете (Эстония), Московском государственном университете (Россия), Новосибирском государственном университете (Россия), Сибирском федеральном университете (Россия), Владикавказском научном центре (Россия), Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Wichita State University (США), Университете ближнего востока (Турция), Мюнхенском техническом университете (Германия), Radboud university (Нидерландия), Фрейбергском техническом университете (Германия), University di Bolonya (Italiya), Alyaska university (США).

Во многих странах мира в результате исследований обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений и систем найдено решение целого ряда актуальных задач, в частности, получены следующие научные результаты: решены обратные задачи определения ядер уравнения вязкоупругости и термовязкоупругости с распределенными источниками данных в ограниченных областях (Таллинский технологический университет); для сосредоточенных источников возмущений решены обратные задачи по определению коэффициентов и многомерных ядер имеющих специальный вид, в бесконечной по пространственным переменным области (Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН); исследованы обратные задачи определения ядер и коэффициента по рассеянной волне для стационарной системы уравнений теории упругости с фиксированными коэффициентами Ламе и переменным матричным коэффициентом, зависящим от пространственных переменных и частоты (Wichita State University); Изучены задачи определения многомерных ядер уравнения вязкоупругости (Владикавказский научный центр РАН); решена обратная задача

идентификации ядра релаксации представляющей линейную комбинацию ядер Абеля, на основе двух граничных измерений (University of Alaska).

Степень изученности проблемы. Обратные задачи возникают, как правило, как задачи интерпретации тех или иных наблюдений. Обратные задачи математической физики являются одним из классов некорректных задач. Общий подход к основным методом решения некорректных задач был сформулирован А. Н. Тихоновым и развит в работах В. Я Арсенина, М. М. Лаврентьева, В.А. Морозова и др. Связь обратных задач с уравнениями Вольтерра использовалась в самых ранних работах по теории обратных задач. С основными результатами в этом направление можно познакомиться в монографиях А.Л. Бухгейма, С.И. Кабанихина, В.Г. Романова, В.Г. Яхно. Методы решения многомерных обратных задач изложены в работах В. Г Романова, в частности он применил метод шкал банаховых пространств аналитических функций к решению многомерных обратных задач.

Первые результаты в теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений, были получены итальянским математиком А. Лоренци. В его работах изучены задачи об определении ядра интегро-дифференциальных уравнений гиперболического и параболического типов с распределенными источниками возмущений в бесконечной по пространственной переменной x области. В работах М. Грассели, А. Лоренци, С.И. Кабанихина, Н.И. Калининой исследовались одномерные обратные задачи определения ядра интегрального члена в интегро-дифференциальных гиперболических и параболических уравнениях с распределенными данными, в ограниченной по x области. Одномерная обратная задача для уравнения вязкоупругости в бесконечной по x области с распределенными источниками данных изучены в работах Я. Янно и Л. Вольвесдорф. В работах В.Г. Романова изучены многомерные обратные задачи об определении пространственной части ядра и коэффициентов для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Работы Ш. Ярмухамедова были посвящены исследованию некорректных задач для уравнений гиперболического типа. Некорректные краевые задачи для уравнений параболического и смешанного типов являются предметом исследований К.С. Фаязова. Р.Р. Ашуров и его ученики занимаются обратными задачами по определению порядка дробных производных дифференциальных уравнений. А.Б. Хасанов и его ученики занимаются решением спектральных обратных задач. Недвано изданная монография Д.К. Дурдиева и Ж.Д. Тотиевой является одной из последних фундаментальных работ в области исследования обратных задач для сред с последействием. В ней представлены результаты исследования корректности ряда постановок одномерных и многомерных обратных динамических задач для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений, возникающих при описании внутренних характеристик сред с памятью, были определены ядра и коэффициенты уравнений термовязкоупругости и электоровязкоупругости для изотропных и анизотропных сред. Доказаны теоремы об однозначной

разрешимости поставленных обратных задач, а также получены оценки непрерывной зависимости решений этих задач от входных данных. В настоящее время эта тематика является предметом научных интересов многих математиков.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами института, в котором выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствие с плановой темой научно – исследовательского проекта ОТ-Ф4-88 «Исследования прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков», института Математики.

Целью исследования является построение методов решения одномерных и многомерных обратных задач для гиперболических уравнений в вязкоупругих средах, а также исследование единственности, устойчивости и существования решений этих обратных задач.

Задачи исследования:

исследовать глобальную однозначную разрешимость обратной задачи определения ядра памяти как однородного, так и неоднородного интегро-дифференциального волнового уравнения и получить оценки устойчивости;

исследовать глобальную однозначную разрешимость обратной задачи для уравнения вязкоупругости и для интегро-дифференциального уравнения акустики с вязкостью;

исследовать вопросы разрешимости прямых и обратных задач для неоднородного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в различных ограниченных областях;

исследовать обратных задач для уравнения вязкоупругости в случае, когда ядро интегрального члена слабо зависит от пространственной переменной, получить оценки устойчивости;

исследовать локальную разрешимость многомерных обратных задач для уравнения вязкоупругости, как с распределенными, так и сосредоточенными источниками данных.

Объектом исследования являются одномерные и многомерные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа, теория уравнений математической физики, теория интегральных и операторных уравнений.

Предметом исследования является обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости в различных областях.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы математического анализа**,** методы решений дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, методы функционального анализа, а также методы теории обобщенных функций**.**

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказана глобальная однозначная разрешимость обратных задач определения ядра памяти однородного и неоднородного интегро-дифференциального волнового уравнения и получены оценки устойчивости;

доказана глобальная однозначная разрешимость обратных задач для уравнения вязкоупругости и для интегро-дифференциального уравнения акустики с вязкостью;

доказана однозначная разрешимость прямых и обратных задач для неоднородного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в различных ограниченных областях;

доказана глобальная однозначная разрешимость обратных задач для уравнения вязкоупругости в случаи, когда ядро интегрального члена слабо зависит от пространственной переменной и получены оценки устойчивости;

доказана локальная однозначная разрешимость многомерной обратной задачи для уравнения вязкоупругости, как с распределенными, так и сосредоточенными источниками данных.

Практические результаты исследования заключаются в следующем: результаты, полученные в диссертационной работе являются фундаментальными. Эти результаты могут быть использованы для формулировки вычислительных алгоритмов, а также при исследовании свойств сред в геофизике и сейсморазведке с помощью акустических волн.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием методов математического и функционального анализа, теории обратных задач, теории дифференциальных уравнений и математической физики, механики твердых тел.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов заключается в том, что полученные результаты развивают теорию одномерных и многомерных обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости в средах с памятью.

Практическая значимость результатов исследований определяется тем, что их можно применить к моделям геофизических и сейсмических наблюдений, к исследованию распространения акустических и электромагнитных волн в средах с памятью.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты для обратных задач уравнений вязкоупругости, были использованы в следующих научно-исследовательских проектах, при:

- исследование однозначной разрешимости и устойчивости многомерной обратной задачи для системы уравнений изотропной вязкоупругости в проекте «Математическое моделирование в социологии, геофизике и инженерных науках» за период 01.01.2023-30.06.2023, регистрационный номер 122041100096-4 (Справка №85, Южного математического института «Владикавказский научный центр РАН», Российская Федерация, от 08.11.2023.г). Полученные результаты для многомерной обратной задачи с сосредоточенными источниками для уравнения вязкоупругости дали возможность доказать теоремы разрешимости и устойчивости многомерной обратной задачи для системы уравнений изотропной вязкоупругости.

- исследование разрешимости нелокальных задач для дифференциальных уравнений третьего порядка в проекте «Разработка современных методов решения задач математической физики и оптимального управления. Начальные и спектральные задачи в неклассической постановке для уравнений в частных производных нечетного порядка и их приложения» за период 01.01.2017-31.12.2020, регистрационный номер ОТ-Ф-4-(36+32) (Справка № 04/11-7752 Национального университета Узбекистана от 13 ноября 2023 года). Используя теорему о разрешимости обратной задачи для уравнения вязкоупругости, было получено интегральное представление решения нелокальной задачи.

- исследование разрешимости систем динамических уравнений наследственной теории упругости в проекте «Термодинамика моделей математической физики с бесконечным множеством состояний» за период 01.01.2017-31.12.2020, регистрационный номер ОТ-Ф4-02 (Справка №04/4260 Бухарского государственного университета от 11 ноября 2023 года). Используя теорему глобальной однозначной разрешимости обратной задачи интегро-дифференциального волнового уравнения, была доказана однозначная разрешимость обратной задачи определения функции памяти.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на 15 научно-практических конференциях, в том числе на 10 международных и 5 республиканских.

Опубликованность результатов. По теме диссертации опубликовано 31 научных работ, при этом 16 из них входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 10 опубликованы в зарубежных журналах, из них 9 - в журналах, индексируемых в базах SCOPUS, 1 - индексируемой в базе Web of Science и 6 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 175 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая

значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется **«Одномерные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа»**. В первом параграфе этой главы, приводится основные определения, а также известные теоремы которые используются при доказательствах основных результатов. Во втором параграфе этой главы в области $D=\{(x,\ t)\ :\ 0<x<l,\ t>0\}$ рассматривается уравнение

$$u_{tt}-u_{xx}=\int_0^t k(\alpha)u(x,t-\alpha)d\alpha,\qquad (x,t)\in D, \tag{1}$$

с начальными

$$u|_{t=0}=0,\qquad u_t|_{t=0}=0, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u_x|_{x=0}=\psi(t),\qquad u_x|_{x=l}=0,\qquad t>0, \tag{3}$$

где $\psi(t)-$заданная функция; $l>0-$некоторое фиксированное вещественное число.

Обратная задача заключается в определении ядра $k(t)(t>0)$, интегрального члена интегро–дифференциального уравнения (1), если относительно решения задачи $(1)-(3)$, известна дополнительная информация, при $x=0$:

$$u(0,t)=f(t),\qquad t\geq 0, \tag{4}$$

где $f(t)-$ заданная функция.

Определение 1. *Функция* $k(t)\in C[0,\infty)$ *(из класса непрерывных функций) называется решением обратной задачи* $(1)-(4)$*, если соответствующее ей решение прямой задачи* $(1)-(3)$ $u(x,t)$ *удовлетворяет условию* (4).

Сначала исследуется прямая задача $(1)-(3)$, при этом функцию $k(t)$ предполагается известной. Рассмотрим эту задачу в области $D^*=\{(x,t):0<x<l,0<t<2l-x\}$, состоящей из объединения областей D_1 и D_2, $D^*=D_1\cup D_2$:

$$D_1=\{(x,t):0<x<l,0<t<x\},\ D_2=\{(x,t):0<x<l,x<t<2l-x\}.$$

Лемма 1. *Решение уравнения* (1) *при заданных начальных* (2) *и граничных* (3) *условиях тождественно равняется нулю в области* D_1*, в области* D_2 *удовлетворяет следующему интегральному уравнению*

$$u(x,t)=-\varphi(t-x)-\int_0^{t-x}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_0^{\tau-2\xi}k(\alpha)u(\xi,-\xi+\tau-\alpha)d\alpha d\xi d\tau-$$

$$-\int_{t-x}^{t}\int_{\tau-t+x}^{\frac{2\tau-t+x}{2}}\int_0^{-2\xi+2\tau-t+x}k(\alpha)u(\xi,-\xi+2\tau-t+x-\alpha)d\alpha d\xi d\tau,$$

где $\varphi(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau.$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $\psi(t) \in C^3[0,2l]$, $f(t) \in C^4[0,2l]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \psi(0)$, $f''(0) = \psi'(0)$, $f'''(0) = \psi''(0)$, $\psi(0) \neq 0$ *тогда для любого* $l > 0$, *решение обратной задачи* (1.2.1) – (1.2.4) *существует, единственно и* $k(t) \in C[0,2l]$.

Используя формулу Даламбера получим интегральное уравнение относительно *u(x,t).* Продифференцировав это уравнение и используя дополнительное условие получаем систему нелинейных уравнений относительно искомых функций. Далее, к этой системе применяется метод сжатых отображений в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами. Пусть $K(k_0)$ множество функций $k(t) \in C[0,2l]$, удовлетворяющих при некотором $l > 0$ условию $\|k\|_{C[0,2l]} \leqslant k_0$, с постоянной $k_0 > 0$.

Теорема 2. *Пусть* $k^1(t) \in K(k_0), k^2(t) \in K(k_0)$ – *два решения обратной задачи* (1) – (4) *с данными* $\{f^1, \psi^1\}$ *и* $\{f^2, \psi^2\}$ *соответственно. Тогда найдется такое положительное число* $C = C(k_0, l)$, *что выполняется неравенство*

$$\left\|k^1(t) - k^2(t)\right\|_{C[0,2l]} \leqslant C\left\{\left\|f^1 - f^2\right\|_{C^4[0,2l]} + \left\|\psi^1 - \psi^2\right\|_{C^3[0,2l]}\right\}.$$

Составляется норма разностей, оцениваются значения интегралов. Далее применяется неравенство Гроноулла.

Во втором пункте этого параграфа исследуется обратная задача (1) – (4), в случае когда $\psi(t) = \delta'(t)$, где $\delta'(t)$ – производная дельта функции Дирака.

Для разрешимости обратной задачи функция $f(t)$ должна иметь структуру $f(t) = -\delta(t) + \theta(t)\tilde{f}(t)$, где $\theta(t)$ – функция Хевисайда, $\tilde{f}(t)$ – регулярная функция.

Основным результатом этого пункта является следующая теорема о глобальной однозначной разрешимости обратной задачи:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $\tilde{f}(t) \in C^2[0,2l]$, $\tilde{f}(+0) = 0$, $\tilde{f}'(+0) = 0$ *тогда для любого фиксированного* $l > 0$, *существует единственное решение обратной задачи (1)-(4)* $k(t) \in C[0,2l]$.

В третьем параграфе исследуется обратная задача, заключающаяся в нахождении решения и одномерного ядра интегрального члена неоднородного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа из условий, составляющих прямую задачу и некоторого дополнительного условия.

В области $\Omega = \{(x,t) \mid x \in R, t > 0\}$, рассматривается задача Коши с распределенным источником, состоящая в нахождении решения $u(x,t)$ интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} - u_{xx} - \int_0^t h(\alpha)u(x,t-\alpha)d\alpha = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \tag{5}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = a(x), \qquad u_t|_{t=0} = b(x), \qquad x \in R, \tag{6}$$

где $a(x)$, $b(x)$ и $f(x,t)-$ заданные функции.

Обратная задача ставится следующим образом: требуется найти функцию $h(t) \in C(t>0)$, если относительно решения прямой задачи известна информация:

$$u(0,t) = g_1(t), \qquad u_x(0,t) = g_2(t), \qquad t \geq 0. \tag{7}$$

Сначала исследуем прямую задачу (5)–(6). Пусть $T > 0$. Имеет место

Теорема 4. *Пусть* $h(t) \in C[0,T]$, $a(x) \in C^2(R)$, $b(x) \in C^1(R)$ *и* $f(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\Omega)$, *тогда решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6) существует, единственно и принадлежит классу* $C^2(\Omega)$.

Для доказательство теоремы применив формулу Даламбера получаем интегральное уравнение относительно неизвестной функции и применяем метод последовательных приближений. Далее исследуется обратная задача.

Теорема 5. *Пусть* $a(x) \in C^3(R)$, $b(x) \in C^2(R)$, $f(x,t) \in C^{0,2}_{x,t}(\Omega)$, *а функции* $g_1(t)$ *и* $g_2(t)$ *таковы, что,* $g_1(t) \in C^3[0,T]$, $g_2(t) \in C^2[0,T]$, *кроме того, выполнены условия* $a(0) = g_1(0) > 0$, $b(0) = g_1'(0)$, $a'(0) = g_2(0)$, $b'(0) = g_2'(0)$, $a''(0) = g_1''(0)$. *Тогда решение обратной задачи* $(1)-(3)$, *для любого* $T > 0$ *существует, единственно и принадлежит классу* $C[0,T]$.

Обозначим $H(h_0)$ множество функций $h(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих при некотором $T > 0$, условию $\|h\|_{C[0,T]} \leqslant h_0$ с постоянной $h_0 > 0$. Разность двух функций, наименование которых отличается только цифрой сверху обозначим той же самой буквой со знаком $\sim$. Например $\tilde{a} := a^1 - a^2$, $\tilde{b} := b^1 - b^2$ и т.д.

Теорема 6. *Пусть* $h^1(t) \in H(h_0), h^2(t) \in H(h_0)-$ *два решения обратной задачи* $(5)-(7)$ *с данными* $\{a^1, b^1, f^1, g_1^1, g_2^1\}$ *и* $\{a^2, b^2, f^2, g_1^2, g_2^2\}$, *соответственно. Тогда найдется такое положительное число* $C = C(h_0, T)$, *что имеет место следующая оценка устойчивости*

$$\left\|h^1(t) - h^2(t)\right\|_{C[0,T]} \leqslant C\left(\|\tilde{g}_1\|_{C^1[0,T]} + \|\tilde{g}_2\|_{C^2[0,T]} + \|\tilde{a}\|_{C^3[-T,T]} + \left\|\tilde{b}\right\|_{C^2[-T,T]} + \left\|\tilde{f}\right\|_{C^2[\Delta(0,T)]}\right).$$

В четвертом параграфе этой главы исследована начально-краевая задача для уравнения вязкоупругости в ограниченной по переменной x области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < l, t \in R\}$:

$$u_{tt} - u_{xx} - \int_0^t k(\tau) u_{xx}(x, t-\tau) d\tau = 0, \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{8}$$

с начальным

$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{9}$$

и граничными условиями

$$u|_{x=0} = \delta(t), \qquad u_x|_{x=l} = 0, \qquad t \in R, \tag{10}$$

где $u(x,t)-$ функция смещений, $\delta(t)-$ дельта-функция Дирака.

Нахождение функции $u(x,t)$, удовлетворяющее уравнениям (8)-(10) назовем прямой задачей. В обратной задаче требуется найти неизвестную функцию $k(t)$, если задано дополнительное условие

$$u_x(0,t) + \int_0^t k(\tau)u_x(0,t-\tau)d\tau = f(t), \qquad (11)$$

где $f(t)-$ заданная при $t > 0$ функция.

Сначала исследуем прямую задачу. Введем в рассмотрение новую функцию $v(x,t)$, определив ее равенством

$$v(x,t) := \left[u(x,t) + \int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)d\tau \right] \exp\left(-k(0)t/2\right).$$

Тогда, функция $u(x,t)$ через $v(x,t)$ выражается формулой

$$u(x,t) = \exp\left(k(0)t/2\right)v(x,t) + \int_0^t h(t-\tau)\exp\left(k(0)\tau/2\right)v(x,\tau)d\tau,$$

где $h-$ решение следующего интегрального уравнения Вольтерра:

$$h(t) = -k(t) - \int_0^t k(t-\tau)h(\tau)d\tau, \qquad t > 0.$$

Относительно функции $v(x,t)$ задача $(8)-(10)$ выглядет

$$v_{tt} - v_{xx} + h_0 v + \int_0^t H(t-\tau)v(x,\tau)d\tau = 0,$$

$$v|_{x=0} = \delta(t) + k(t)\exp\left(h(0)t/2\right)\theta(t), \qquad v_x|_{x=l} = 0,$$

$$v|_{t<0} \equiv 0.$$

Дополнительное условие (11) принимает вид

$$v_x(0,t) = f(t)\exp\left(h(0)t/2\right),$$

где введены следующие обозначения:

$$H(t) = h''(t)\exp\left(h(0)t/2\right), \quad h_0 = h'(0) - \frac{h^2(0)}{4}.$$

В области $D_2 := \{(x,t): 0 < x < l,\ x < t < 2l - x\}$ функцию $v(x,t)$ представим в виде

$$v(x,t) = \delta(t-x) + \theta(t-x)\tilde{v}(x,t),$$

где $\tilde{v}(x,t)$-регулярная функция. Следовательно, функция $f(t)$ тоже будет имеет аналогичную структуру

$$f(t) = -\delta'(t) - \frac{h(0)}{2}\delta(t) + \theta(t)f_0(t), \qquad (12)$$

где $f_0(t)-$ регулярная функция.

Используя метод выделения особенностей для регулярной части решения прямой задачи получим следующие равенства $(v(x,t) = \tilde{v}(x,t)$ в области $D_2)$:

$$v_{tt} - v_{xx} + h_0 v + H(t-x) + \int_0^{t-x} H(\tau)v(x,t-\tau)d\tau = 0,$$

$$v|_{t=x+0} = -h(0) - \frac{h_0}{2}x,$$

$$v(0,t) = k(t)\exp\left(\frac{h(0)t}{2}\right).$$

Дополнительное условие в терминах функции $v(x,t)$ с учетом (9) принимает вид $v_x(0,t) = f_0(t)\exp\left(\frac{h(0)t}{2}\right)$. Основным результатом данного раздела является следующая теорема глобальной однозначной разрешимости обратной задачи:

Теорема 7. *Пусть функция* $f(t)$ *имеет вид (12) и* $f_0(t) \in C^1[0,2l]$, *тогда существует единственное решение обратной задачи (8)-(11)* $k(t) \in C^2[0,2l]$ *для любого* $l > 0$.

В этом параграфе также исследуется обратная задача для интегро – дифференциального уравнения акустики. Рассматривается начально-краевая задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа

$$\frac{1}{c^2(y)}v_{tt} = T_y - \frac{d\ln\rho(y)}{dy}T, \quad y > 0, \quad t > 0, \tag{13}$$

$$v|_{t\le 0} \equiv 0, \qquad T(+0,t) = \delta'(t), \tag{14}$$

где $c(y) > 0$ – скорость распространения волны, $\rho(y)$ – плотность исследуемой среды, $v(y,t)$ – акустическое давление, напряжение $T(y,t)$ связано с акустическим давлением $v(y,t)$ по формуле

$$T(y,t) = v_y(y,t) + \int_0^t k(t-\tau)v_y(y,\tau)d\tau.$$

Обратная задача ставится следующим образом: определить функцию $k(t), t > 0,$ входящее в (13) посредством последней формулы, если относительно решения прямой задачи известна информация

$$v(+0,t) = g(t), t > 0. \tag{15}$$

Введем в рассмотрение новую переменную $x = \varphi(z) = \int_0^y \frac{d\tau}{c(\tau)}$, а также обозначения $v(x,t) := v(\varphi^{-1}(x),t)$, $a(x) := c(\varphi^{-1}(x))$, $b(x) := \rho(\varphi^{-1}(x))$, $T^* := \int_0^\infty \frac{d\xi}{c(\xi)}$. Через $\varphi^{-1}(x)$ обозначим функцию, обратную к $\varphi(y)$. Предполагаем, что $c(y) > 0$ и $\rho(y) > 0$.

Теорема 8. *Пусть функция* $g(t)$ *представима в виде* $g(t) = -c(+0)\delta(t) + \theta(t)g_0(t)$, *где* $g_0 \in C^2[0,T]$, *и* $\theta(t)$ *-функция Хевисайда. Кроме того,* $(c(y),\rho(y)) \in C^3\left[0,\varphi^{-1}(T)\right]$. *Тогда существует единственное*

решение обратной задачи $(13)-(15)$, $k(t)\in C^2[0,T]$ *при любом фиксированном* $T\in(0,T^*)$.

Во второй главе диссертации, названной **«Задачи об определении одномерного ядра интегро-дифференциального уравнения в различных ограниченных областях»**, исследуются обратные задачи заключающиеся в нахождении решения и одномерного ядра свертки интегрального члена неоднородного интегро – дифференциального уравнения.

Рассматривается неоднародное интегро-дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$u_{tt}-Lu=\int_0^t k(t-\theta)u(x,\theta)d\theta+g(x,t),\ (x,t)\in Q, \tag{16}$$

с начальными и граничным условиями:

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{17}$$

$$u(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\partial Q, \tag{18}$$

где $L=\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-c(x)$ – равномерный эллиптический оператор, $(N\geq 1)$ коэфициенты которого удовлетворяют условиям

$$a_{ij}=a_{ji}\in C^{1,\gamma}(\Omega),\quad c(x)\in C^{0,\gamma}(\Omega),\quad c(x)\geq 0,\quad x\in\overline{\Omega},$$

$Q:=\Omega\times(0,T]$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N-$ ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а $\partial Q:=\partial\Omega\times[0,T]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x,t)-$ заданные функции. Нахождение функции $u(x,t)$ из (2.0.1)–(2.0.3), при известной $k(t)$ назовем прямой задачей.

Определение 2. *Классическим решением смешанной задачи (16) –(18), называется такая функция* $u(x,t)$, *которая дважды непрерывно дифференцируема в замкнутом цилиндре* Q *и удовлетворяет всем условиям задачи (16) –(18), в обычном классическом смысле.*

Обратная задача заключается, в определении неизвестного ядра $k(t)$, $t>0$, по имеющиеся дополнительной информации о решении прямой задачи в некоторой точке $x_0\in\Omega$,

$$u(x_0,t)=h(t),\qquad 0\leq t\leq T, \tag{19}$$

где $h(t)-$ заданная функция.

Определение 3. *Решением обратной задачи (16)–(19) называется функции* $u(x,t)$ *и* $k(t)$ *из классов* $C^2(Q)\cap C^1(\overline{Q})$ *и* $C[0,T]$, *соответственно, удовлетворяющие соотношениям (16)– (19).*

При исследованиях первых двух параграфов в равенстве (16) предполагается $N=2$, $a_{ij}=\delta_{ij}$, $c(x)\equiv 0$. В первом параграфе главы 2 в прямоугольной области $D_{T_l}=\Omega_l\times(0,T),\Omega_l=\{(x,y):0<x<l,0<y<l\}$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = \int_0^t k(\tau)u(x,y,t-\tau)d\tau + g(x,y,t) \qquad (20)$$

с начальными

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x,y), \qquad 0 \le x,y \le l \qquad (21)$$

и граничными условиями

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0, \qquad 0 \le y \le l, \qquad 0 \le t \le T, \qquad (22)$$

$$u|_{y=0} = 0, \qquad u|_{y=l} = 0, \qquad 0 \le x \le l, \qquad 0 \le t \le T, \qquad (23)$$

где $\varphi(x,y), \psi(x,y)$ и $g(x,y,t)-$ заданные функции.

В обратной задаче требуется найти неизвестную функцию $k(t), \quad t > 0,$ по имеющиеся дополнительной информации о решении прямой задачи

$$u(x_0, y_0, t) = h(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad (24)$$

где $h(t)-$ заданная функция.

Пусть выполнены следующие условия:

$$\lim_{x\to 0+} u_x \sin\lambda_m x = \lim_{x\to l-} u_x \sin\lambda_m x = 0, \qquad 0 \le y \le l, \qquad 0 \le t \le T; \qquad (25)$$

$$\lim_{y\to 0+} u_y \sin\lambda_n y = \lim_{y\to l-} u_y \sin\lambda_n y = 0, \qquad 0 \le x \le l, \qquad 0 \le t \le T, \qquad (26)$$

где $\lambda_m = \frac{\pi m}{l}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad m,n \in N,$ собственные числа соответствующей спектральной задачи.

Теорема 9. *Если решение задачи (20)-(23) существует, то при выполнении условий (25), (26), оно единственно.*

Теорема 10. *Пусть* $k(t) \in C[0,T], \quad \varphi(x,y) \in C^4(\overline{\Omega_l}), \psi(x,y) \in C^3(\overline{\Omega_l})$ *и* $g(x,y,t) \in C^{3,0}_{xy,t}(\overline{D_{Tl}})$, *кроме того*

$$\varphi(0,y) = \varphi_{xx}(0,y) = \varphi(l,y) = \varphi_{xx}(l,y), 0 \le y \le l,$$
$$\psi(0,y) = \psi_{xx}(0,y) = \psi(l,y) = \psi_{xx}(l,y), 0 \le y \le l,$$
$$\varphi(x,0) = \varphi_{yy}(x,0) = \varphi(x,l) = \varphi_{yy}(x,l), 0 \le x \le l,$$
$$\psi(x,0) = \psi_{yy}(x,0) = \psi(x,l) = \psi_{yy}(x,l), 0 \le x \le l,$$
$$g(0,y,t) = g_{xx}(0,y,t) = g(l,y,t) = g_{xx}(l,y,t), \ 0 \le y \le l,$$
$$g(x,0,t) = g_{yy}(x,0,t) = g(x,l,t) = g_{yy}(x,l,t), \ 0 \le x \le l,$$

то существует единственное решение задачи (20)–(23).

Теорема 11. *Пусть* $\varphi(x,y) \in C^5(\overline{\Omega_l}), \ \psi(x,y) \in C^4(\overline{\Omega_l})$ *и* $g(x,y,t) \in C^{4,0}_{xy,t}(\overline{D_{Tl}})$, *кроме того*

$$\varphi(0,y) = \varphi_{xx}(0,y) = \varphi_{xxxx}(0,y) = \varphi(l,y) = \varphi_{xx}(l,y) = \varphi_{xxxx}(l,y), \ 0 \le y \le l,$$
$$\varphi(x,0) = \varphi_{yy}(x,0) = \varphi_{yyyy}(x,0) = \varphi(x,l) = \varphi_{yy}(x,l) = \varphi_{yyyy}(x,l), \ 0 \le x \le l;$$
$$\psi(0,y) = \psi_{xx}(0,y) = \psi(l,y) = \psi_{xx}(l,y), \ 0 \le y \le l,$$
$$\psi(x,0) = \psi_{yy}(x,0) = \psi(x,l) = \psi_{yy}(x,l), \ 0 \le x \le l;$$
$$g(0,y,t) = g_{xx}(0,y,t) = g(l,y,t) = g_{xx}(l,y,t), \ 0 \le y \le l,$$
$$g(x,0,t) = g_{yy}(x,0,t) = g(x,l,t) = g_{yy}(x,l,t), \ 0 \le x \le l.$$

$$h(t)\in C^3[0,T],\ h(0)=\varphi(x_0,y_0)\neq 0,\ h'(0)=\psi(x_0,y_0),$$
$$h''(0)=g(0,x_0,y_0)-\lambda^2\Delta\varphi(x_0,y_0).$$

Тогда для любого фиксированного $T>0$ *существует единственное решение обратной задачи (20)–(24)* $k(t)$, *принадлежащее классу* $C[0,T]$.

Во втором параграфе этой главы рассматривается в области $G:=\{(x,y,t):0<r<1,\ 0<t<T\}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt}-\Delta u=\int_0^t k(\alpha)u(x,y,t-\alpha)d\alpha+f(r,t), \tag{27}$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0}=\varphi(r),\qquad u_t|_{t=0}=0,\qquad 0\le x^2+y^2\le 1 \tag{28}$$
$$\big((x,y),\nabla u\big)|_{r=0}=0,\qquad u|_{r=1}=0,0\le t\le T, \tag{29}$$

где $\Delta-$ оператор Лапласа переменных x и y, $((x,y),\nabla u)-$ скалярное произведение векторов (x,y) и ∇u, $f(r,t)$, и $\varphi(r)$ заданные достаточно гладкие функции.

Для определения неизвестную функцию $k(t)$, $t>0$, задается дополнительная информация

$$u(x_0,y_0,t)=h(t),\qquad 0<x_0^2+y_0^2<1,\ 0\le t\le T, \tag{30}$$

где $h(t)-$ заданная функция.

Переходим к полярной системе координат: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Мы будем искать решения этой задачи обладающей сферической симметрией. В результате задача (27)– (30) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\int_0^t k(\alpha)u(r,t-\alpha)d\alpha+f(r,t),\quad (r,t)\in G,$$
$$u|_{t=0}=\varphi(r),\qquad u_t|_{t=0}=0,\qquad 0\le r\le 1,$$
$$\lim_{r\to 0}(ru_r)=0,\qquad u|_{r=1}=0,\qquad 0\le t\le T.$$
$$u(r_0,t)=h(t),\qquad r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2},0<r_0<1,0\le t\le T.$$

Пусть $C^{m,n}(G)$ — класс m раз непрерывно дифференцируемых по r и n раз непрерывно дифференцируемых по t функций в области G.

Теорема 12. *Пусть* $k(t)\in C[0,T]$, $f(r,t)\in C^{4,0}(\overline{G})$, $\varphi(r)\in C^4[0,1]$ *и выполнены следующие равенства:*

$$\varphi^{(m)}(0)=0,\ m=\overline{0,3},\ \varphi^{(m)}(1)=0,m=\overline{0,2},$$

$\frac{\partial^m f}{\partial r^m}(0,t)=0,m=\overline{0,3},\ \frac{\partial^m f}{\partial r^m}(1,t)=0,m=\overline{0,2},\ t\in[0,T]$. *Тогда существует единственное классическое решение прямой задачи (27)-(29).*

Теорема 13. *Предположим, что* $h(t)\in C^3[0,T]$, $f(r,t)\in C^{4,1}(\overline{G})$, $\varphi(r)\in C^6[0,1]$, $h(0)=\varphi(r_0)\neq 0$, $h'(0)=0$, $h''(0)=f_n(r_0,0)-\lambda\Delta\varphi(r_0)$ *и имеют*

место равенства $\varphi^{(m)}(0)=0,\ m=\overline{0,5},\ \ \varphi^{(m)}(1)=0, m=\overline{0,4},$

$$\frac{\partial^m f}{\partial r^m}(0,t)=0, m=\overline{0,3},\ \ \frac{\partial^m f}{\partial r^m}(1,t)=0, m=\overline{0,2},\ \ t\in[0,T].$$

Тогда существует единственное решение обратной задача $(27)-(30)$.

В третьем параграфе исследуется задача (16) - (18) в общем случае с равномерным эллептическим оператором L. Прямая задача методом Фурье сводится к решению интегрального уравнения вольтеровского типа второго рода.

Теорема 14. *Пусть* $k(t)\in C[0,T]$. *А также выполнены условия:*

$1)\ a_{ij}(x)\in C^{\left[\frac{N}{2}\right]+2}(\bar{\Omega}), c(x)\in C^{\left[\frac{N}{2}\right]+1}(\bar{\Omega});$

$2)\ \varphi(x)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+3}(\Omega),\quad \psi(x)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+2}(\Omega);$

$3)\ g(\cdot,t)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+2}(\Omega),\quad g(x,\cdot)\in C[0,T];$

$4)\ \varphi, L\varphi,...,L^{\left[\frac{N+4}{4}\right]}\varphi\in H_0^1(\Omega),\quad \psi, L\psi,...,L^{\left[\frac{N+2}{4}\right]}\psi\in H_0^1(\Omega);$

$5)\ g(\cdot,t), Lg(\cdot,t),...,L^{\left[\frac{N+2}{4}\right]}g(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega).$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (16)-(18).

При исследовании обратной задачи мы получим интегральное уравнение относительно функции $k(t)$:

$$k(t)=\frac{1}{h(0)}[h'''(t)-F'''(t)-\int_0^t k(s)M'''[k](t-s)ds],\ t\in[0,T]. \qquad (31)$$

Теорема 15. *Пусть* $h(t)\in C^3[0,T]$ *и выполнены условия*

$1)\ \varphi(x)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+7}(\Omega),\ \psi(x)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+5}(\Omega),\ g(\cdot,t)\in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+5}(\Omega),\quad g(x,\cdot)\in C[0,T];$

$2)\ \varphi, L\varphi,...,L^{\left[\frac{N+4}{4}\right]+3}\varphi\in H_0^1(\Omega),\quad \psi, L\psi,...,L^{\left[\frac{N+6}{4}\right]}\psi\in H_0^1(\Omega);$

$3)\ g(\cdot,t), Lg(\cdot,t),...,L^{\left[\frac{N+6}{4}\right]}g(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega);$

$4)\ h(0)=\varphi(x_0),\quad h'(0)=\psi(x_0),\quad h''(0)=g_m(x_0,0)-\lambda\Delta\varphi(x_0).$

Тогда существует единственное решение обратной задачи $(16)-(19)$ *удовлетворяющее уравнению (31).*

Пусть $K(k^0)$ - множество функций $k(t)\in C[0,T]$, удовлетворяющих для $t\in[0,T]$ неравенству $\|k(t)\|_{C[0,T]}\le k^0$ с фиксированной положительной постоянной k^0.

Теорема 16. *Пусть выполнены условия теоремы 2, функции* k_1 *и* k_2 *два решения обратной задачи (16)–(19), соответствующие двум наборам данных* $\{\varphi^1,\psi^1,g^1,h^1\}$ *и* $\{\varphi^2,\psi^2,g^2,h^2\}$. *Тогда имеет место следующая оценка устойчивости:*

$$\| k^1 - k^2 \|_{C[0,T]} \le C \left(\| \tilde{\varphi} \|_{H^{\left[\frac{N}{2}\right]+7}(\Omega)} + \| \tilde{\psi} \|_{H^{\left[\frac{N}{2}\right]+5}(\Omega)} + \| \tilde{g} \|_{H^{\left[\frac{N}{2}\right]+5}(\Omega)\times C[0,T]} + \left\| \tilde{h} \right\|_{C^3[0,T]} \right).$$

где $C = C(k^0, T) -$ *некоторая положительная постоянная.*

Существует несколько подходов к решения многомерных обратных задач. Одним из таких методов является сведение задачи к серии одномерных задач. При этом, в искомую функцию вводится малый параметр и он разлагается в степенной ряд по произведению этого параметра с переменной. Коэффициенты разложения (одномерные функции) определяются как решения последовательности одномерных задач. В третьей главе диссертации называемой «**Определение двумерного ядра уравнения вязкоупругости в слабо горизонтальной среде»** рассматриваются аналогичные задачи для уравнения вязкоупругости.

В первом параграфе этой главы рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = u_{zz} + u_{xx} + \int_0^t k(x,\theta) u(x,z,t-\theta) d\theta, \qquad z \in (0,l), (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{32}$$

с начальными

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \tag{33}$$

и граничными условиями

$$u_z|_{z=0} = \delta(x)\delta'(t), \qquad u_z|_{z=l} = 0. \tag{34}$$

Здесь $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,t) : x \in \mathbb{R},\ t \in (0,\infty)\}$, $\delta(\cdot)$ и $\delta'(\cdot) -$ дельта-функция Дирака и ее производная соответственно, $l > 0$ - фиксированное число.

Обратная задача заключается в определении неизвестного ядра $k(x,t)$ интеграла, входящего в уравнение (1), если известно решение начально–краевой задачи (32)–(34) (прямая задача) при $z = 0$:

$$u(x,0,t) = f(x,t), (x,t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{35}$$

При этом предполагается, что функция $k(x,t)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$k(x,t) = k_0(t) + \varepsilon x k_1(t) + O(\varepsilon^2), \tag{36}$$

где ε – малый параметр.

Решение прямой задачи (32)–(34) будем искать в виде ряда по степеням ε, т.е.

$$u(x,z,t) = u_0(x,z,t) + \varepsilon u_1(x,z,t) + O(\varepsilon^2). \tag{37}$$

Тогда, учитывая формулу (35), нетрудно заметить, что функция $f(x,t)$ будет иметь такую же структуру:

$$f(x,t) = f_0(x,t) + \varepsilon f_1(x,t) + O(\varepsilon^2). \tag{38}$$

Обратная задача (32)–(35) распадается на следующие задачи последовательного определения $k_0, k_1, \ldots$:

$$u_{0tt} = \Delta u_0 + \int_0^t k_0(\theta) u_0(x,z,t-\theta) d\theta, z \in (0,l), (x,t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{39}$$

$$u_0|_{t=0}=0, \qquad u_{0t}|_{t=0}=0, \tag{40}$$

$$u_{0z}|_{z=0}=\delta(x)\delta'(t), \qquad u_{0z}|_{z=l}=0, \tag{41}$$

$$u_0|_{z=0}=f_0(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2_+; \tag{42}$$

$$u_{ntt}=\Delta u_n+\int_0^t\sum_{j=0}^{n}x^j k_j(\theta)u_{n-j}(x,z,t-\theta)d\theta, z\in(0,l),(x,t)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{43}$$

$$u_n|_{t=0}=0, \qquad u_{nt}|_{t=0}=0, \tag{44}$$

$$u_{nz}|_{z=0}=0, \qquad u_{nz}|_{z=l}=0, \tag{45}$$

$$u_n|_{z=0}=f_n(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2_+, \quad n=1,2,\ldots. \tag{46}$$

Далее, умножая обе части уравнений (39)–(46) на x^m и интегрируя по x в пределах от минус бесконечности до плюс бесконечности, получим

$$u_{nmtt}-u_{nmzz}=m(m-1)u_{n(m-2)}++\int_0^t\sum_{j=0}^{n}k_j(\theta)\left[u_{(n-j)(m+j)}(z,t-\theta)\right]d\theta, t\in\mathbb{R}, \ z\in(0,l).$$

В этом уравнении через u_{nm} обозначен m - й момент функции u_n:

$$u_{nm}(z,t):=\int_{-\infty}^{\infty}u_n(x,z,t)x^m dx.$$

Основной результат данного параграфа состоит в том, что удалось построить метод последовательного нахождения $k_0(t)$ и $k_1(t)$ с точностью до величины порядка $O(\varepsilon^2)$ для $t\in[0,T]$, где $T>0$ - любое фиксированное число. Для этого, как мы увидим далее, достаточно задать первые два момента функции $f(x,t)$ по x для $t\in[0,T]$. Задача нахождения $k_0(t)$ сводится к решению системы нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа, а $k_1(t)$ - линейных интегральных уравнений.

Теорема 17. *Пусть выполнены условия* $\tilde{f}(t)\in C^2[0,l]$, $\tilde{f}(+0)=0$, $\tilde{f}'(+0)=0$, *тогда для любого фиксированного* $l>0$, *существует единственное решение обратной задачи (39)–(42) и* $k_0(t)\in C(0,2l)$.

Теорема 18. *Пусть выполнены условия теоремы 17, кроме того* $\tilde{f}_1(t)\in C^{IV}[0,2l]$ *и* $\tilde{f}_1(0)=\tilde{f}_1'(0)=\tilde{f}_1''(0)=\tilde{f}_1'''(0)=0$. *Тогда для любого фиксированного* $l>0$ *обратная задача (43) – (46) имеет единственное решение* $k_1(t)\in C[0,2l]$, $u_{11}(z,t)\in C^2(D_2)$.

Во втором параграфе третьей главы рассматривается двумерное интегро–дифференциальное уравнение вязкоупругости

$$u_{tt}=\Delta u+\int_0^t k(\tau,x)\Delta u(t-\tau,x,z)d\tau, \tag{47}$$

в ограниченной по переменной z области $D:=\{(t,x,z):(t,x)\in\mathbb{R}^2,0<z<l\}$, с начальным и граничными условиями

$$u|_{t<0}\equiv 0, \tag{48}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\int_0^t k(\tau,x)\frac{\partial u}{\partial z}(t-\tau,x,z)d\tau\right)|_{z=0}=\delta(x)\delta'(t), \tag{49}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\int_0^t k(\tau,x)\frac{\partial u}{\partial z}(t-\tau,x,z)d\tau\right)|_{z=l}=0, \qquad (50)$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, $\delta(\cdot)$ - дельта функция Дирака, а $\delta'(\cdot)$-производная дельта функции Дирака, $l>0-$ некоторое число.

Обратную задачу поставим следующим образом: требуется найти ядро $k(t,x),\ t>0, x\in\mathbb{R}$, интегрального члена в (47), если известна решения задачи (47)–(50) при $z=0$, т.е. задана функция

$$u(t,x,0)=g(t,x), t>0, x\in\mathbb{R}. \qquad (51)$$

В дальнейшем, как и предыдущем параграфе, нас будут интересовать задачи определения функций $k_0(t)$ и $k_1(t)$.

Перейдем от функций $u_j(t,x,z),\ j=1,2,\ldots$ к их экспоненциальным образам Фурье по переменной x: $\tilde{u}_i(t,\lambda,z)=\int_{\mathbb{R}} u_i(t,x,z)e^{-i\lambda x}dx,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$

Используя разложения функций $k(x,t),\ f(x,t),\ u(x,z,t)$ по формулам (36) – (38), получим задачи

$$\tilde{u}_{0tt}=\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\lambda^2\right]\left(\tilde{u}_0+\int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z)d\tau\right),\quad (t,\lambda)\in\mathbb{R}^2, z\in(0,l), \qquad (52)$$

$$\tilde{u}_0|_{t<0}\equiv 0;\quad \tilde{u}_0|_{z=0}=\tilde{g}_0(\lambda,t),\quad (\lambda,t)\in\mathbb{R}^2, \qquad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_0+\int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z)d\tau\right)|_{z=0}=\delta'(t), \qquad (54)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_0+\int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_0(\tau,\lambda,z)d\tau\right)|_{z=l}=0, \qquad (55)$$

$$\tilde{u}_{1tt}=\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\lambda^2\right]\left(\tilde{u}_1+\int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{u}_1(\tau,\lambda,z)d\tau\right)-$$

$$-i\int_0^t k_1(t-\tau)\left[2\lambda u_0(\tau,\lambda,z)+\lambda^2\tilde{u}_{0\lambda}(\tau,\lambda,z)-\frac{\partial^2\tilde{u}_{0\lambda}}{\partial z^2}\right]d\tau,\quad (t,\lambda)\in\mathbb{R}^2, z\in(0,l),$$

(56)

$$\tilde{u}_1|_{t<0}\equiv 0;\qquad \tilde{u}_1|_{z=0}=\tilde{g}_1(t,\lambda),\quad (t,\lambda)\in\mathbb{R}^2, \qquad (57)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_1+\int_0^t\left(k_0(t-\tau)\tilde{u}_1(\tau,\lambda,z)d\tau-ik_1(t-\tau)\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\lambda}(t-\tau,\lambda,z)\right)d\tau\right)|_{z=0}=0, \qquad (58)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u}_1+\int_0^t\left(k_0(t-\tau)\tilde{u}_1(\tau,\lambda,z)d\tau-ik_1(t-\tau)\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\lambda}(t-\tau,\lambda,z)\right)d\tau\right)|_{z=l}=0. \qquad (59)$$

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 19. *Пусть* $\tilde{g}_{00}(t,\lambda)\in C^3[0,2l]$ *и* $\tilde{g}_{00}(0,\lambda)=0,\ \tilde{g}_{00t}(0,\lambda)=-\frac{\lambda^2}{2}.$ *Тогда существует единственное решение обратной задачи (*52*)–(* 55*)* $k_0(t)\in C^3[0,2l]$ *для любого* $l>0.$

Теорема 20. *Пусть выполнены условия:* $\tilde{g}_{00}(t,\lambda)\in C^3[0,2l],$ $\tilde{g}_{00}(+0,\lambda)=0,\quad \tilde{g}'_{00}(+0,\lambda)=-\frac{\lambda^2}{2}\quad$ *и* $\quad\tilde{g}_1(+0,\lambda)\in C^2[0,2l],\quad \tilde{g}_1(+0,\lambda)=0,$ $\tilde{g}'_1(+0,\lambda)=0.$ *Тогда существует единственное решение обратной задачи (56)– (59),* $k_1(t)\in C^2[0,2l],$ *для любого* $l>0.$

В третьем параграфе в области $\Omega=\{(x,y,t):(x,t)\in\mathbb{R}^2,y\in(0,l)\}$ рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt}=\Delta u+p(x,y)u+\int_0^t m(\theta)u(x,y,t-\theta)d\theta, \tag{60}$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t<0}=0, \tag{61}$$

$$u_y|_{y=0}=-\delta(x)\delta'(t),\qquad u_y|_{y=l}=0, \tag{62}$$

где $p(x,y)-$ коэффициент, характеризующий свойства среды, в которой распространяется волновой процесс; $m(t)-$ ядро, характеризующее память среды; $\delta(\cdot)-$ дельта-функция Дирака, $l>0-$ заданное фиксированное число.

В обратной задаче требуется найти функции $p(x,y)(x\in\mathbb{R},y\in(0,l))$ и $m(t)(t>0)$, входящие в (60), по имеющиеся дополнительной информации о решении прямой задачи (60)–(62) , при $y=0$:

$$u(x,0,t)=f(x,t),x\in\mathbb{R},t>0. \tag{63}$$

Предполагаем, что $p(x,y)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$p(x,y)=p_0(y)+\varepsilon x p_1(y)+O(\varepsilon^2), \tag{64}$$

где $\varepsilon-$ малый параметр. В дальнейшем будем полагать,что в равенстве (64) $p_0(z)\equiv p_0>0$ есть известная величина. Далее, использую разложения функций $f(x,t),\ u(x,z,t)$ по формулам (37) – (38), получим задачи

$$\tilde{u}_{0tt}=\tilde{u}_{0yy}+(p_0-\lambda^2)\tilde{u}_0+\int_0^t m(\theta)\tilde{u}_0(\lambda,y,t-\theta)d\theta,\ y\in(0,l),\ t>0, \tag{65}$$

$$\tilde{u}_0|_{t<0}=0,\quad \tilde{u}_{0y}|_{y=0}=-\delta'(t),\qquad \tilde{u}_{0y}|_{y=l}=0. \tag{66}$$

$$\tilde{u}_0(\lambda,0,t)=\tilde{f}_0(\lambda,t). \tag{67}$$

$$\tilde{u}_{1tt}=\tilde{u}_{1yy}+ip_1(y)\tilde{u}_{0\lambda}(\lambda,y,t)+(p_0-\lambda^2)\tilde{u}_1(\lambda,y,t)+\int_0^t m(\theta)\tilde{u}_1(\lambda,y,t-\theta)d\theta, \tag{68}$$

$$\tilde{u}_1|_{t<0}=0,\quad \tilde{u}_{1y}|_{y=0}=0,\qquad \tilde{u}_{1y}|_{y=l}=0, \tag{69}$$

$$\tilde{u}_1(\lambda, y, t)\big|_{y=0} = \tilde{f}_1(\lambda, t). \qquad (70)$$

Теорема 21. *Пусть* $\tilde{f}_{00}(t,\lambda) \in C^2[0,2l]$ *и* $\tilde{f}_{00}(\lambda,0) = 0$, $\tilde{f}_{00t}(\lambda,0) = -\dfrac{(p_0 - \lambda^2)}{2}$. *Тогда обратная задача (65)–(67) в области* D_2 *имеет единственное решение* $m(t) \in C[0, 2l]$, *при достаточно малых* l.

Теорема 22. *Пусть* $l \in (0, l^*)$ *и выполнены условия* $\tilde{f}_1(\lambda,t) \in C^2[0,2l]$ *и* $\tilde{f}_1(\lambda,0) = \tilde{f}_1'(\lambda,0) = 0$, $\lambda \in R$, $\tilde{u}_0$ *и m являются решенем обратной задачи (65)–(67). Тогда обратная задача (68)–(70) имеет единственное решение* $p_1(y) \in C[0,l]$.

Решение многомерных обратных задач является достаточно сложной задачей и имеются лишь специальные случаи, для которых установлена однозначная разрешимость. В частности, разрешимость имеет место, если искомые функции относятся к классу функций непрерывных по одной из переменных и аналитических по другим переменным. Впервые В.Г. Романовым для решения многомерных обратных задач был применен метод шкал банаховых пространств аналитических функций, разработанный Л.В. Овсянниковым и Л. Ниренбергом. Четвертая глава диссертации называется **“Многомерные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений”.** В первом параграфе этой главы рассматривается локально-краевая задача

$$u_{tt} - u_{zz} - \Delta u = \int_0^t k(t-\tau, z.x)u(\tau, z, x)d\tau, \ (x,t) \in R^{n+1}, \ z > 0, \qquad (71)$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, u_z\big|_{z=0} = -\delta'(t) + f(t,x)\theta(t), (x,t) \in R^{n+1}. \qquad (72)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа по переменным $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x$, $\delta'(t)$ – производная дельта- функции Дирака, $\theta(t)$ – функция Хевисайда, f – заданная гладкая функция.

Предполагается, что ядро интегрального члена уравенния (71) имеет вид $k(t,z,x) = k_0(t)p(z,x)$, где $k_0(t)$ – заданная функция. Обратная задача заключается в определении функции $p(z,x)$, по известному дополнительному условию, относительно решения прямой задачи (71), (72)

$$u\big|_{z=0} = -\delta(t) + g(t,x)\theta(t), (x,t) \in R^{n+1}, \qquad (73)$$

где $g(t,x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Вводится банахово пространство A_s аналитических функций $h(x)$, $x \in R$ для которых конечна норма $\|h\|_s(r) = \sup_{|x|\le r} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \dfrac{s^{|\alpha|}}{\alpha!} \left|D^\alpha \varphi(x)\right| < \infty$. Здесь $r > 0$, $s > 0$ и $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, α – мультииндекс. Параметр r будет считаться фиксированным, а параметр s рассматривается как переменный параметр. В дальнейшем, параметр r будем опускать в обозначениях норм пространства

A_s. Шкала банаховых пространств A_s, $s > 0$, возникает, если изменить праметр s. Имеет место следующее свойство: если $h(x) \in A_s$, то $h(x) \subset A_{s'}$, для всех $s' \in (0, s)$, следовательно $A_s \subset A_{s'}$ если $s' < s$. Кроме того, если $h(x) \in A_s$, то $D^\alpha h(x) \subset A_{s'}$ для $s' \in (0, s)$, и справедливо неравенство $\|\Delta h\|_s \le \dfrac{4\pi}{(s'-s)} \|h\|_{s'}, s' > s > 0.$

Пусть $D_{0T} = \{(t,z) | 0 \le z \le t \le T - t\}$, $T > 0 -$ некоторое, конечное фиксированное число и $D_T = D_{0t} \times R^n$.

Определение. *Функция* $w = w(t,z,x)$ *называется принадлежащим классу* $C(A_s, D_{0T})$, *если* $w \in A_s$ *для любых* $(t,z) \in D_{0T}$, *непрерывна в* D_{0T} *как элемент пространства* A_s *и, кроме того, удовлетворяет условию* $\sup\limits_{(t,z) \in D_{0T}} \|w\|_s (t,z) < \infty.$

Функция $u(t,z,x)$ как решение задачи (71), (72) имеет в окрестности характеристической поверхности $t = z$ следующую структуру:

$$u(t,z,x) = -\delta(t-z) + v(t,z,x)\theta(t-z),$$

где $v(t,z,x)$ - функция непрерывная при переходе через поверхность $t = z$.

Обратная задача $(71) - (73)$ эквивалентна задаче определения функции $p(z,x)$ из следующих уравнений:

$$v_{tt} - v_{zz} = \Delta v + k_0(t-z)p(z,x) + p(z,x)\int_0^{t-z} k_0(\alpha) v(t-\alpha, z, x) d\alpha,$$

$$v|_{z=0} = g(x,t), v_z|_{z=0} = f(x,t), t > 0, x \in R^n,$$

$$u|_{t=z+0} = 0, x \in R^n,$$

где $(t,z,x) \in D = \{(t,z,x) | t > 0, 0 < z < t,\ x \in R^n\}$. Полученная задача сводится к решению следующих интегральных уравнений:

$$v(t,z,x) = \frac{1}{2}[g(t+z,x) + g(t-z,x)] + \frac{1}{2}\int_{t-z}^{t+z} f(\tau, x) d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{\Delta(z,t)} \left[\Delta v(\tau, \xi, x) + k_0(\tau - \xi) p(\xi, x) + p(\xi, x) \int_0^{\tau-\xi} k_0(\alpha) v(\tau - \alpha, \xi, x) d\alpha \right] d\tau d\xi, \quad (74)$$

$$p(z,x) = p_0(z,x) - \frac{2}{k_0(0)} \int_0^z \int_0^z [\Delta v_t(2z-\xi, \xi, x) +$$

$$+ p(\xi, x) k_0'(2z - 2\xi) + p(\xi, x) \int_0^{2z-2\xi} k_0(\alpha) v_t(2z - \xi - \alpha, \xi, x) d\alpha] d\xi, \quad (75)$$

где $p_0(z,x) = \dfrac{1}{k_0(0)} \dfrac{d^2}{dz^2} v_0(z+0, z, x) = \dfrac{2}{k_0(0)} [g_{tt}(t,x) + f_t(t,x)]_{t=2z}$.

$$v_t(t,z,x) = \frac{1}{2}[g_t(t+z,x) + g_t(t-z,x)] + \frac{1}{2}[f(t+z,x) - f(t-z,x] -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^z [\Delta v(\xi + t - z, \xi, z) + k_0(t-z) p(\xi, x) + p(\xi, x) \int_0^{t-z} k_0(\alpha) v(\xi + t - z - \alpha, \xi, x) d\alpha -$$

$$-\Delta v(-\xi+t+z,\xi,x)-k_0(t+z-2\xi)\,p(\xi,x)$$

$$-p(\xi,x)\int_0^{t+z-2\xi}k_0(\alpha)v(t+z-\xi-\alpha,\xi,x)\,d\alpha\Big]d\xi \qquad (76)$$

Теорема 23. *Пусть* $k_0(t)\in C^1[0,T]$, $k(0)\neq 0$ *и выполнены условия согласования* $g(+0\,x\,,{}_t)+g=0\,x\,,+f($ *кроме того,* $[f(t,x),g(t,x),g_t(t,x),f_t(t,x),g_{tt}(t,x)]\in C(A_{S_0},[0,T])$,

$$\max\left\{\|g\|_{S_0}(t),\max(1,\frac{T}{2})\|f\|_{S_0}(t),\|g_t\|_{S_0}(t)\right\}\le\frac{R_0}{2},$$

$$\max\left\{\|f_t\|_{S_0}(t),\|g_{tt}\|_{S_0}(t)\right\}|k(0)|^{-1}\le\frac{R_0}{4},t\in[0,T],$$

R_0 *-известное положительное число. Тогда найдется такое* $a\in\left(0,\frac{T}{2}\right)$, *что для любого* $s\in(0,s_0)$ *в области* $\Gamma_{ST}:=D_T\bigcap\{((t,z,s)|0\le z\le a(s_0-s)\}$, *существует единственное решение системы уравнений (74)–(76) для которого*

$$(v,v_t)\in C(A_{S_0},F),\ p\in C(A_{S_0},[0,a(s_0-s)]),$$

$$F=\{(t,z,s)|(t,z)\in D_{0T},0<z<a(s_0-s)\},$$

причем $\|v-v_0\|_S(t,z)\le R_0$, $\|v_t-v_{0t}\|_S\le\frac{R_0}{s_0-s}$, $\|p-p_o\|_S\le\frac{R_0}{(s_0-s)^2}$.

Во втором параграфе этой главы рассматривается интегро-дифференциальное уравнение в ограниченной по переменной z области $D=\{(x,z,t):x\in R,z\in[0,l],t\in R\}$:

$$u_{tt}=u_{zz}+u_{xx}+\int_0^t k(x,\alpha)u(x,z,t-\alpha)\,d\alpha,\qquad x\in R,z\in(0,l),t\in R, \qquad (77)$$

с начальным и граничными условиями

$$u|_{t<0}=0, \qquad (78)$$

$$u_z|_{z=0}=\delta'(t),\qquad u_z|_{z=l}=0. \qquad (79)$$

Обратная задача заключается в определении функции $k(x,t)\in C(\overline{\Pi})$, если относительно решения прямой задачи известна информация

$$u(x,0,t)=g(x,t), \qquad (80)$$

где $g(x,t)-$заданная гладкая функция, $\Pi=\{(x,t):x\in R,\ t>0\}$. Введем в рассмотрение функцию $\tilde{u}(x,z,t)=u(x,z,t)+\frac{1}{2}\big(\delta(t-z)-\delta(t+z)\big)$. Обратная задача сводиться к решению системы интегральных уравнений.

Теорема 24. *Пусть* $(g(x,+0),g_t(x,+0))\in A_{s_0}$, $(g,g_t,g_{tt})\in C_l([0,2l],A_{s_0})$

$$\max\{\|g\|_{s_0}(t),\|g_t\|_{s_0}(t),\|g_{tt}\|_{s_0}(t)\}\le R,\ t\in[0,2l].$$

где $R>0-$ *заданное число. Тогда найдется такое* $a\in(0,l)$, *что для любого*

$s \in (0, s_0)$, *в области* $\Gamma_{sl} = D_2 \cap \{(x,z,t): 0 \le z \le a(s_0 - s)\}$ *существует единственное решение обратной задачи (77)-(80), для которого*

$$(\tilde{u}(x,z,t), \tilde{u}_t(x,z,t)) \in C(A_{s_0}, F), \quad k(x,t) \in C(A_{s_0}, [0, a(s_0 - s)])$$

$$F = \{(z,t,s): (z,t) \in D_{0l},\ 0 < z < a(s_0 - s)\}$$

причем $\| u - u_0 \|_s (z,t) \le R; \| u_t - u_{0t} \|_s (z,t) \le \dfrac{R}{s_0 - s}; \| k - k_0 \|_s (z) \le \dfrac{R}{(s_0 - s)^2}.$

В третьем параграфе этой главы рассматривается подобная задача в случае, когда $u_z |_{z=0} = \psi(x,t)$, где $\psi(x,t)$ – заданная, достаточно гладкая функция.

Теорема 25. *Пусть* $|\psi(x,0)| \ge \mu_0 > 0$, $(f(x,+0), f_t(x,+0), f_{tt}(x,+0)) \in A_{s_0}$,

$$(f(x,t), f_t(x,t), f_{tt}(x,t), f_{ttt}(x,t), f_{tttt}(x,t)) \in C_t(A_{s_0}, [0, 2l],),$$

$$(\psi(x,t), \psi_t(x,t), \psi_{tt}(x,t), \psi_{ttt}(x,t)) \in C_t(A_{s_0}, [0, 2l],)$$

$$\max\{\| f \|_{s_0}(t), \| f_t \|_{s_0}(t), \| f_{tt} \|_{s_0}(t), \| f_{ttt} \|_{s_0}(t), \| f_{tttt} \|_{s_0}(t)\} \le R_0,\ t \in [0, 2l],$$

где μ_0 *и* $R_0 > 0$ *– заданные числа. Тогда найдется такое* $a \in (0, l)$, *что для любого* $s \in (0, s_0)$ *в области* $\Gamma_{sl} = B_2 \cap \{(x,z,t): 0 \le z \le a(s_0 - s)\}$ *существует единственное решение обратной задачи, для которого* $v(x,z,t) \in C(A_{s_0}, F)$,

$$k(x,z) \in C(A_{s_0}, [0, a(s_0 - s)]),\ F = \{(z,t,s): (z,t) \in G_2,\ 0 < z < a(s_0 - s)\}$$

причем

$$\| v - v_0 \|_s (z,t) \le R_0; \quad \| k - k_0 \|_s (z) \le \frac{R_0}{s_0 - s},$$

где $v_0 = \dfrac{1}{2}[f_{ttt}(x, t+z) + f_{ttt}(x, t-z)] + \dfrac{1}{2}[\psi_{tt}(x, t+z) - \psi_{tt}(x, t-z)] + g(x,z)(z-x)z,$

$$k_0 = \frac{2}{\psi(x,0)} \left(g_{xx}(x,z) - f_{tttt}(x,z) - \psi_{ttt}(x,z) \right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследований, представленных в диссертационной работе, были получены следующие результаты:

1. Определены условия однозначной разрешимости и устойчивости одномерной обратной задачи нахождения ядра интеграла интегро-дифференциального волнового уравнения, как в бесконечной так и в ограниченной по переменной x области, доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости обратной задачи, получены оценки устойчивости.
2. Разработан подход, основанный на методе выделения особенностей, позволяющий получить теоремы глобальной однозначной разрешимости обратной задачи для уравнения вязкоупругости и для интегро-дифференциального уравнения акустики.
3. Доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости обратных задач для интегро – дифференциального уравнения в различных ограниченных областях, получены оценка устойчивости.
4. Получены серии одномерных обратных задач для двумерных обратных задач уравнения вязкоупругости в случае, когда ядро интегрального члена слабо зависит от пространственной переменной. Доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости этих обратных задач, получены оценки устойчивости.
5. Задачи определения коэффициента и ядра интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа сведена к исследованию двух обратных задач. Доказаны теоремы локальной однозначной разрешимости обратных задач.
6. Разработан подход на основе метода шкал банаховых пространств и метода весовых норм, позволяющий получить теорему локальной однозначной разрешимости многомерной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в случае, когда ядро интегрального члена разделяется на переменные.
7. Доказаны теоремы локальной однозначной разрешимости многомерной обратной задачи для уравнения вязкоупругости, как с распределенными источниками данных, так и сосредоточенными.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

SAFAROV JURABEK SHAKAROVICH

INVERSE PROBLEMS FOR THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VISCOELASSTISITY

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2023

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2023.4.DSc/FM232.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website http://kengash.mathinst.uz and the «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific superviser:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Taxirov Jozil Ostanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Hasanov Aknazar Bekdurdiyevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Xolmuxamedov Olimjon Raximovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the RAS**

Defense will take place " 9 " January 2024 at 16:00 the meeting of Scientific council number DSc.02l30.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent,100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) - 207-9140). E-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered №174). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) - 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on " 20 " December 2023 year
(mailing report № 2 on " 20 " December 2023 year).

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S, professop

J.K.Adashev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S.

A.Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., academician

The aim of the research work is to construct methods for solving one-dimensional and multidimensional inverse problems for hyperbolic equations in viscoelastic media, as well as to study the uniqueness, stability and existence of solutions to these inverse problems.

The subject of the research is one-dimensional and multidimensional inverse problems for integro-differential viscoelasticity equations in various fields.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the global unique solvability of inverse problems of determining the memory kernel of a homogeneous and inhomogeneous integro-differential wave equation was proved and stability estimates are obtained;

the global unique solvability of inverse problems for the viscoelasticity equation and for the integro-differential equation of acoustics with viscosity is proved;

the unique solvability of direct and inverse problems for inhomogeneous integro-differential equation of hyperbolic type in various limited domains is proved;

the global unique solvability of inverse problems for the viscoelasticity equation is proved in cases where the kernel of the integral term weakly depends on the spatial variable and stability estimates are obtained;

the local unique solvability of the multidimensional inverse problem for the viscoelasticity equation is proved, both with distributed and concentrated data sources.

Implementation of the research results. Based on the results obtained for dynamic equations of memory type of the elastic theory:

study of the unique solvability and stability of a multidimensional inverse problem for a system of equations of isotropic viscoelasticity in the project “Mathematical modeling in sociology, geophysics and engineering sciences” for the period 01.01.2023-30.06.2023, registration number 122041100096-4 (Certificate of the Southern mathematical institute “Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, dated November 8, 2023). Fundamental research results made it possible to prove the solvability and stability theorems for a multidimensional inverse problem for a system of isotropic viscoelasticity equations.

study of the solvability of nonlocal problems for third-order differential equations in the project “Development of modern methods for solving problems of mathematical physics and optimal control. Initial and spectral problems in a non-classical formulation for partial differential equations of odd order and their applications" for the period 01/01/2017-12/31/2020, registration number OT-F-4-(36+32) (Certificate of the National University of Uzbekistan dated November 13, 2023). Using the results obtained, an integral representation of the solution to the nonlocal problem was obtained.

study of the solvability of systems of dynamic equations of the hereditary theory of elasticity in the project “Thermodynamics of models of mathematical physics with an infinite set of states” for the period 01/01/2017-12/31/2020,

registration number OT-F4-02 (Certificate of Bukhara State University dated November 11, 2023). Using the results obtained, the unique solvability of the inverse problem of determining the memory function was proven.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and titles of used literature. The full volume of the thesis is 175 pages.

E‘LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (part 1; 1 часть)

1. Safarov J.Sh. Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2018, Volume 11, Issue 6, P.753–763.(3. Scopus IF=0.304).

2. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Определение двумерного ядра релаксации интегро-дифференциального волнового уравнения // Диф. уравнения, Т.59, №2, 2023. -С.208 – 222. (3. Scopus IF=0.533).

3. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки, 2023, Т.114, № 2. С.244-259. (3. Scopus IF=0.493).

4. Сафаров Ж.Ш. Обратная задача об определении ядра в интегро - дифференциальном уравнении колебаний ограниченной струны // Мат.заметки СВФУ, 2022. Том 29, № 4, С.21 – 36. (Scopus IF=0.167)

5. Safarov J.Sh. , Durdiev D.K. Inverse Problem for an Integro-Differential Wave Equation in a Cylindrical Domain // Lobachevskii journal of mathematics, Vol. 43 No. 11, 2022.P.239-249. (3. Scopus IF=0.424)

6. Safarov J.Sh. Two-dimensional Inverse Problem for an Integro-differential Equation of Hyperbolic Type // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2022, Volume 15, Issue 2, P.651-662. (3. Scopus IF=0.304)

7. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости со слабо горизонтальной неоднородностью // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 1. С. 14–38. (Scopus IF=0.417).

8. Сафаров Ж.Ш. Обратная задача для неоднородного интегро – дифференциального уравнения гиперболического типа // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 141–152. (3. Scopus IF = 0.208).

9. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Задача определения памяти среды со слабо горизонтальной неоднородностью // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Комп. науки, Т.32, №3, 2022. -С. 383-402. (3. Scopus IF=0.342).

10. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Локальная разрешимость задачи определения пространственной части многомерного ядра в интегро-дифференциальном уравнении гиперболического типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки №4(29), 2012. Самара- С.37-47 (WoS)

11. Safarov J. Inverse problem for an integro-differential equation with distributed initial data // UzMathJournal, №1, 2019. Tashkent,-P.116-125. (01.00.00; № 6).

12. Сафаров Ж.Ш. Задача определения ядра интегро-дифференциального уравнения с гладкими данными в ограниченной области // Бюллетень Института математики 2020, №2, с.97-102. (01.00.00, № 17).

13. Сафаров Ж.Ш. О глобальной разрешимости одной одномерной обратной задачи для волнового уравнения в ограниченной области // Бюллетень Института математики 2021, №3, с.84-90. (01.00.00, № 17).

14. Safarov J. The problem of determining two coefficients of the wave equation in a weakly horizontally inhomogeneous environment// UzMathJournal, №3, 2023. Tashkent,-P. 157 – 167. (01.00.00; № 6)

15. Сафаров Ж.Ш. Обратная задача об определении ядра неоднородного интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области. // Научный вестник НамГУ, №8, 2023г. С.97-102. (01.00.00, № 15).

16. Сафаров Ж.Ш. Прямая и обратная задача для уравнения вязкоупругости с дополнительной информацией нестандартного вида // Научный вестник БухГУ, №8, 2023г. С.15-22. (01.00.00, № 14).

II bo‘lim (part 2; 2 часть)

17. Сафаров Ж.Ш. Задача определения двумерного ядра уравнения вязкоупругости со слабой зависимостью от горизонтальной переменной // Международная научная конференция "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования". Владикавказ. 15-20 июля 2019 г. С .147-148.

18. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. О глобальной разрешимости одномерной обратной задачи для волнового уравнения на отрезке // “Стохастик тахлилнинг долзарб муаммолари" Республика илмий конференцияси. Тошкент, 2021 йил. 20-21 февраль,С.286.

19. Сафаров Ж.Ш. Решение одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения методом моментов // Международная научная конференция "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования". Владикавказ. 20-24 сентября 2021 г. С.121-122.

20. Сафаров Ж.Ш. Задача определения одномерного ядра интегро-дифференциального уравнения на отрезке // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа». Бухара. 04-05 ноября, 2021 год, С.256-257.

21. Сафаров Ж.Ш. Об определении двумерного ядра интегро-дифференциального волнового уравнения // Материалы VI Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 2021, С. 172.

22. Сафаров Ж.Ш., Сафарова М.Ж. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения вязкоупругости // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, Тезисы докладов, Алматы, 6-8 апреля, 2022 г. С. 106-107.

23. Сафаров Ж.Ш. О разрешимости одного интегро- дифференциального волнового уравнения // «Современные проблемы теории чисел и матема тического анализа» Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова. Душанбе, 29-30 апреля 2022 г. С.228-229.

24. Safarov J. Sh. On an inverse problem for an integro-differential equation in a circle // Abstracts International scientific and practical conference «Modern problems of applied mathematics and information technologies», Bukhoro, 2022 , 11-12 мау, P.174-175

25. Сафаров Ж.Ш., Сафарова М.Ж. Об одной обратной задаче для неоднородного интегро-дифференциального уравнения // Тезисы докладов Научной конференции «Операторные алгебры, неассоциативные структуры и смежные проблемы». Ташкент. 14-15 сентября 2022 г. С.247.

26. Сафаров Ж.Ш., Дурдиев Д.К. Об одной обратной задаче в прямоугольной области //«Неклассические уравнения математической физики и их приложения», Международная научная конференция, Ташкент, 6-8 октября, 2022 г. С. 171-173.

27. Сафаров Ж.Ш. Задача определения ядра уравнения вязкоупругости с дополнительной информацией специального вида // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, Тезисы докладов, Алматы, 5-10 апреля, 2023, г. С. 104-105.

28. Сафаров Ж.Ш. О разрешимости одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения с дополнительной информацией специального вида в ограниченной области // Казанский (Приволжский) федеральный университет XVI Международная Казанская школа-конференция ”Теория функций, ее приложения и смежные вопросы” Сборник трудов. Казань. 22-27 августа 2023 г. – Т. 66. С.209-211.

29. Safarov J.Sh. About one problem for the equation viscoelasticity in a limited area // ABSTRACTS of the 8th International Conference “Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technologies” - al-Khwarizmi 2023, Samarkand. September 25-26, 2023, p.205.

30. Safarov J. Inverse problem on the determination of two coefficients of the integro-differential equation // ABSTRACTS of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023), Turkestan, September 20–23, 2023, p.296.

31. Сафаров Ж.Ш., Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А. О разрешимости одной обратной задачи для интегро-дифференциального волнового уравнения в ограниченной области // Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Ташкент, 23-25 ноября, 2023 г. С.124-126.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida 2023 yil 4 dekabrda tahrirdan o‘tkazilib, o’zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o’zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3,75. Adadi 100 dona. Buyurtma № 51/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.