V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

ABRAYEV BAXROM XOLTO‘RAYEVICH

CHIZIQLI DIOFANT TENGLAMALAR SISTEMASINING TUB SONLARDAGI YECHIMLARI HAQIDA

01.01.06 – Algebra

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PHD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TERMIZ – 2024

UDK: 511.348

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

ABRAYEV BAXROM XOLTO‘RAYEVICH

CHIZIQLI DIOFANT TENGLAMALAR SISTEMASINING TUB SONLARDAGI YECHIMLARI HAQIDA

01.01.06 – Algebra

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PHD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TERMIZ – 2024

Fizika-matematika Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy Attestatsiya komissiyasida B2022.3.PhD/FM753 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya ishi Termiz davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (http://kengash.mathinst.uz) va "Ziyonet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Allakov Ismail** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Chubarikov Vladimir Nikolayevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Xudoyberdiyev Abror Hakimovich fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	**Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil " 16 " aprel kuni soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174,Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika Institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (179-raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40).

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil " 03 " aprel kuni tarqatildi.
(2024 yil " 03 " apreldagi 2 - raqamli reestr bayonnomasi).

U.A.Roziqov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m. f. d., akademik

J.K.Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A.R.Hayotov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash xuzuridagi ilmiy seminar rais o'rinbosari, f.-m. f. d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda nazariy mexanika va kriptografiya masalalarini tadqiq qilishga keltiriladi. Tabiiy jarayonlarning matematik modellarini tadqiq etish sonlar nazariyasi masalalari nazariy asosini tashkil etib, kriptografiyaning shifrlash va deshifrlash qonuniyatlarini sonlar nazariyasi masalalari yordamida aniqlash muhim ahamiyatga ega. Bundan tashqari berilgan yetarli katta toq sonni tub ko‘paytuvchilarga ajratishning ratsional usuli mavjud emasligiga asoslangan kriptografiyaning ochiq kalitli shifrlash algoritmi ham sonli funksiyalar yordamida amalga oshiriladi. Shuningdek, shifrlash va deshifrlash qonuniyatlari yetarli katta natural sonlarni eksponensial va subeksponensial murakkabliklarga ajratish, sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratish yordamida amalga oshiriladi.

Bunday masalalarni yechishda zarur bo‘ladigan deshifrlash, sonli funksiyalar va Dirixle xarakterlarining qiymatlari o‘zgaruvchilarining sonli qiymatlariga bog‘liq. Additiv masalalar sonlar nazariyasida muhim ahamiyatga ega. Goldbaxning binar muammosini hal qilish va uning bu yo‘nalishdagi turli xil shakllari bo‘yicha Xardi – Littlvudning doiraviy usuli yordamida muhim natijalarga erishildi. Shundan keyin doiraviy usulni trigonometrik yig‘indilar usuli bilan birga qo‘llash, sonlar nazariyasidagi ko‘plab turli masalalarning hal etilishiga olib kelindi. Bu borada tub sonlar qatnashgan additiv masalalarning turli xil ko‘rinishlari, xususan chiziqli Diofant tenglamalar sistemasining tub sonlarda yechimga ega bo‘lish shartlari to‘g‘risidagi masala hamda Goldbaxning ternar muammosini deyarli teng qo‘shiluvchilar bo‘yicha umumlashtirish masalasi sonlarning additiv nazariyasida maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarni ilmiy va amaliy tadbiqiga ega bo‘lgan sonlar nazariyasining dolzarb yo‘nalishlariga e’tibor kuchaytirildi. Xususan, oxirgi yillarda sonlarni tub son va butun son ko‘paytmalari yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash haqidagi masalani hal etish borasida salmoqli natijalarga erishildi. “Algebra va geometriya” fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyatlari etib belgilandi. Ilmiy natijalardan ilm-fanning turdosh sohalarida foydalanish maqsadida sonlar nazariyasining additiv masalalarini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega[1].

Ushbu dissertatsiya ishining mavzusi va tadqiqot obyekti, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi farmoni, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017 yil 20 apreldagi PQ- 2909-

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4387-son qarori.

son “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli qarori hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika va fan texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlantirishning IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Sonlar nazariyasida additiv masalalar muhim ahamiyatga ega. Chiziqli Diofant tenglamalar sistemasining tub sonlardagi yechimlari haqidagi masala ham additiv masalalar qatoriga kiradi. Hozirgi vaqtda sonlar nazariyasinig chiziqli tenglamalar sistemasining tub sonlarda yechimga ega bo‘lishi haqidagi muammolari hamda Goldbaxning ternar muammosini deyarli teng qo‘shiluvchilar bo‘yicha umumlashtirish haqidagi masalalar borasida ilmiy izlanishlar olib borilmoqda.

Jumladan, yuqorida qayd etilgan additiv masalalar sohasidagi natijalarni hisobga olib, tub sonlar, butun va natural sonlar qatnashgan additiv masalalarni, xususan, chiziqli tenglamalar sistemasining tub sonlarda yechimga ega bo‘lishi haqidagi masalalarni o‘rganib horijiy davlatlar olimlaridan G. H. Xardi, J. E. Littlvud, K.Praxar, Xua Lo-Ken, H. L. Montgomeri, R. C. Von, A. Beyker, Chjen Tsuy, Xuntsze Li, M. C. Liu, K. M. Tsang, K. K. Choy, A. Kumchev, J. R.Makintosh va boshqalar, Mustaqil davlatlar hamdo‘stligiga kiruvchi davlarlarda yashagan olimlardan I.M.Vinogradov, Y.Linnik, A.A Karatsuba, B.M. Bredixin, B.V.Levin, G.I.Arxipov, N. V. Chubarikov, Z. X. Raxmonov va boshqalar, tomonidan yangi natijalarga erishilgan.

Shuni ham ta’kidlash joizki, Respublikamiz olimlaridan N.P.Romanov A. F. Lavrik, T. Zuparov, M. I. To‘laganova, M. I. Isroilov, S. T. To‘laganov, X. N. Narzullayev, S. Sh. Shushbayev, Sh. I. Ismatullayev, A. S. Faynleyb, I .Allakov, A. Sh. Safarov va boshqalarning ilmiy ishlarida Dirixle L - funksiyasi nollari taqsimotining zichligi to‘g‘risidagi ma’lumotlarga tayanmaydigan hamda L-funksiya nollarining zichligi to‘g‘risdagi gipoteza o‘rinli bo‘lgan hollar uchun masalaning yechimini olishda yangi natijalarga erishilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Termiz davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi trigonometrik yig‘indilar yordamida berilgan bir juft natural sonni bir vaqtning o‘zida to‘rtta tub sonlarning yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlashlar soni uchun quyidan baho olish hamda deyarli teng qo‘shiluvchilar

bo‘yicha Goldbaxning ternar muammosini umumlashtirish masalasida yechimlari soni uchun asimptotik formula olishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

chiziqli tenglamalar sistemasining tub sonlarda yechimga ega bo‘lish shartlarini o‘rganish;

berilgan natural sonlar juftligini bir vaqtning o‘zida to‘rtta tub son yig‘indisi ko‘rinishida ifodalashlar;

berilgan natural sonlar juftligini bir vaqtning o‘zida to‘rtta tub son yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlashlar haqidagi masalada singulyar qator va singulyar integralni tekshirish;

berilgan natural sonlar juftligini bir vaqtning o‘zida to‘rtta tub sonlar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalashlar soni uchun quyidan baho olish;

katta yoylar markazining kichik atrofida tub sonlar bilan bog‘lik chiziqli qisqa trigonometrik yig‘indilarni o‘rganish;

deyarli teng qo‘shiluvchilar uchun umumlashgan Goldbax muamosini o‘rganish ya’ni yetarlicha katta N natural sonni $b_1p_1+b_2p_2+b_3p_3=N$ ko‘rinishda ifodalashlar haqidagi masalani tahlil qilish, bu yerda p_1,p_2,p_3 tub sonlar, b_1,b_2,b_3- natural sonlar.

Tadqiqotning obyekti. Chiziqli trigonometrik yig‘indilar, chiziqli qisqa trigonometrik yig‘indilar, sonli funksiyalar, Dirixle xarakterlari va Dirixle $L-$funksiyasi, to‘rtta tub noma’lumli Diofant tenglamalar sistemasi, umumlashgan Goldbax tenglamasi.

Tadqiqotning predmeti. sonlarning additiv nazariyasi, arifmetik funksiyalar nazariyasi, kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, Dirixle xarakterlari nazariyasi, Dirixle $L-$funksiyalari nazariyasi .

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiyada Xardi-Littlvud, Ramanudjanning doiraviy usuli, I.M.Vinogradovning tub sonlar bilan bog‘liq trigonometrik yig‘indilar usuli va Xazelgrov-Raxmonov metodlaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

bir vaqtning o‘zida berilgan sonlar juftligini tub son va butun son ko‘paytmalarining yig‘indisi ko‘rinishida ifodalashlar masalasida kongruent yechimga ega bo‘lishlik va musbat yechimga ega bo‘lishlik shartlarini qanoatlantiruvchi natural sonlar soni uchun quyidan baho olingan;

berilgan natural sonlar juftligini bir vaqtning o‘zida tub son va butun son ko‘paytmalarining yig‘indisi ko‘rinishida ifodalanmaydiganlar maxsus to‘plami uchun yangi baho isbotlangan;

katta yoylar markazining kichik bo‘laklarida tub sonlar bilan maxsus chiziqli qisqa trigonometrik yig‘indilar uchun yangi baho olingan;

deyarli teng qo‘shiluvchilar uchun Goldbaxning umumlashgan ternar muammosining yechimlari soni uchun asimptotik formula olingan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

chiziqli tenglamalar sistemasining tub sonlarda yechimga ega bo‘lish masalasida maxsus to‘plamga kirmagan natural sonlar sonini baholash va masalaning maxsus qatori va maxsus integralini baholash usuli bayon qilingan;

chiziqli tenglamalar sistemasining tub sonlarda yechimga ega bo‘lish shartlarini tekshirish va yechimga ega bo‘lish shartlarini qanoatlantiruvchi natural sonlar to‘plami uchun baho olish usuli bayon qilingan;

umumlashgan Goldbax ternar muammosining yechimlari soni uchun asimptotik formula olish usulining bayon qilinganligidan iborat.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi kompleks analiz, algebra, sonlar nazariyasi metodlaridan foydalanilganligi va matematikada qabul qilingan deduktiv xulosalarga asoslanganligi va teoremalarning qat’iy va to‘liq isbotlanganligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati sonlar nazariyasining additiv masalalari nazariyasining keyingi rivojida foydalanish mumkinligi, hamda sonlarning analitik nazriyasini yanada rivojlantirishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati sonlar nazariyasining additiv masalalarida sonli natijalar olish imkoniyatini berishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Chiziqli Diofant tenglamalar sistemasining tub sonlardagi yechimlari soni uchun olingan natijalar asosida:

chiziqli tenglamalar sistemasining tub sonlarda echimga ega bo’lish shartlarini va bu shartlarni qanoatlantiruvchi natural sonlar to’plami uchun baho olish usullaridan F3-202009211 raqamli “Aralash turdagi tenglamalar uchun xarakteristika va buzilish chizig‘ida Frankel va Bitsadze-Samarskiy shartlari berilgan masalalar korrektligini noklassik singulyar integral tenglamalarga olib kelib o’rganish” mavzusidagi fundamental loyihada xarakteristik chiziqning xususiyatlarini aniqlashda foydalanilgan (Termiz davlat universitetining 2023 yil 3-dekabrdagi №03/12-5271-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanishi aralash turdagi tenglamalar uchun xarakteristika va buzilish chizig‘iga qo‘yilgan shartlar bilan bog‘liq masalalarining echimini soddalashtirish imkonini bergan;

Goldbaxning ternar muammosini deyarli teng qo‘shiluvchilar bo‘yicha umumlashtirish masalasida olingan asimptotik formulalardan GR0121TJ1178 raqamli “Qisqa aralash trigonometrik yig‘indilarni baholash va ularni maxsus Dirixle qatorining nollar nazariyasiga tatbiq qilish” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida sonlar nazariyasining turli additiv masalalarini deyarli teng qo‘shiluvchilar bo‘yicha umumlashtirish hamda trigonometrik yig‘indilar metodi yordamida kichik yoylar bo‘yicha baholash masalalarida foydalanilgan (Tojikiston Milliy fanlar akademiyasi A. Jo‘raev nomidagi Matematika institutining 2024 yil 29-yanvardagi №31004/24-07-sonli ma’lumotnomasi, Tojikiston). Ilmiy natijaning qo‘llanishi sonlar nazariyasining deyarli teng qo‘shiluvchilar bo‘yicha natural sonni beshta kvadratlar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalashlar soni uchun asumptotik formulalar olish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Tadqiqotning asosiy natijalari 7 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 19 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta ilmiy maqola, jumladan 2 tasi

xorijiy nufuzli jurnallarda va 5 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan. Bulardan tashqari 1 ta ilmiy maqola Tojikiston Milliy fanlar akademiyasining ma'ruzalarida chop etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 102 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, mavzu bo'yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi, muammoning o'rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi "**Bir juft natural sonni bir vaqtning o'zida to'rtta tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalash**" deb nomlangan va u to'rtta paragrafdan tashkil topgan.

Birinchi paragrafda masalaning asosiy natijalari keltirilgan. Ushbu tenglamalar sistemasini qaraymiz

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m, \qquad i = 1,2,\ldots,s \tag{1}$$

bu yerda $b_1, b_2,\ldots,b_m$ – natural sonlar, $a_{i1}, a_{i2},\ldots,a_{im}$ – butun koeffitsiyentlar, $p_1, p_2,\ldots, p_m$ – tub sonlar. $U_{s,m}(X)$ – orqali (1) sistema tub sonlarda yechimga ega bo'lmagan $(b_1,b_2,\ldots,b_s), 1 \le b_1,b_2,\ldots,b_s \le X,$ elementlar majmuasini belgilaymiz ya'ni

$$U_{s,m}(X) = \left\{ (b_1,b_2,\ldots,b_s),\ 1 \le b_1,b_2,\ldots,b_s \le X,\ b_i \ne a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m \right\}$$

va $U_{s,m}(X)$ to'plamning elementlari sonini $E_{s,m}(X) = card U_{s,m}(X)$ – orqali belgilaylik.

(1) sistemani Wu Fang, $m \ge 2s+1$ bo'lganda qo'shimcha shartlarda tekshirdi va (1) sistemaning yechimlari soni uchun asimptotik formula oldi.

M.S.Liu va K.M.Tsanglar (1) sistemaning xususiy holi $s = 2,\ m = 3$ uchun

$$E_{2,3}(X) \le X^{2-\varepsilon}, \tag{2}$$

ko'rsatkichli bahoni isbotladi bu yerda X yetarlicha katta haqiqiy son, ε absolyut effektiv hisoblanuvchi musbat kichik o'zgarmas.

Ma'lumki, (1) sistemaning yechimga ega bo'lishi ushbu shartlarga bog'liq:

a) istalgan p tub soni uchun $a_{i1}p_1 + \ldots + a_{im}p_m \equiv b_i,\ (i = 1,\ldots,s)$ taqqoslamalar sistemasi o'rinli bo'ladigan $1 \le l_1,\ldots,l_m \le p-1$ shartlarini qanoatlantiruvchi $l_1,\ldots,l_m$ butun sonlari mavjud;

b) shunday haqiqiy musbat butun $y_1,\ldots,y_m$ sonlari mavjudki ular uchun $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{im}y_m = b_i,\ (i = 1,\ldots,s)$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

$W_{s,m}(X)$– orqali a) va b) shartlarini qanoatlantiruvchi $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$, $1\le b_1,b_2,\ldots,b_m\le X$ vektorlarning to‘plamini belgilaymiz.

M.C. Liu va K. M.Tsanglarni ishida quyidagi baholar o‘rinli ekanligi isbotlangan:

1) Agar qandaydir haqiqiy musbat y_1,y_2,y_3 lar uchun $\sum_{j=1}^{3}a_{ij}y_j>0,\ i=1,2,$ o‘rinli bo‘lsa, u holda yetarlicha katta X uchun $card W_{2,3}(X)\gg X^2(B^2\ln\ln B)^{-2}$, baho o‘rinli, bunda $B=max\left\{3|a_{ij}|\right\},\ (i=1,2,\ j=1,2,3)$;

2) Agar $X>B^A$ bo‘lsa, u holda $E_{2,3}(X)<X^{2-\varepsilon}$ baho o‘rinli, bunda A-yetarlicha katta, $\varepsilon>0$ yetarlicha kichik va effektiv hisoblanuvchi o‘zgarmas.

I. Allakov 1993 yilda (2) bahoni yaxshiladi, so‘ngra u bu natijani 2005 yilda (1) sistemada $s=n,\ m=n+1$ bo‘lgan hol uchun umumlashtirdi.

Yuqorida qarab chiqilganlardan ko‘rinadiki $s=2,\ m=4$ bo‘lganda (1) sistemani o‘rganish haqidagi masala ochiqligicha qolib kelmoqda, chunki bu holat yuqoridagi mualliflarning ishlarida yoritilmagan.

Biz bu yerda aynan shu holatni qaraymiz. $s=2,\ m=4$ deb olib (1) dan ushbu sistemani hosil qilamiz

$$b_i=a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+a_{i3}p_3+a_{i4}p_4,\ (i=1,2). \tag{3}$$

Avvalo (3) sistema uchun yechimga ega bo‘lishlik shartlarining bajarilishini tekshiramiz. Ma’lumki (1) sistemaning yechimga ega bo‘lishligi a) va b) shartlarga bog’liq. Bu shartlar odatda musbat yechimga ega bo‘lishlik va kongruent yechimga ega bo‘lishlik shartlari deb ataladi.

Birinchi bobining asosiy natijasi quyidagi teorema hisoblanadi:

1-teorema. Aytaylik a) va b) shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{b}=(b_1,b_2),\ 1\le b_1,b_2\le X,$ vektorlar to‘plami $W_{2,4}(X)$ bo‘lsin. U holda yetarlicha katta X lar uchun

$$card W_{2,4}(X)>1,69954\ X^2B^{-20}(e^{\gamma_0+10}\ \ln\ln B+\ 2,507\cdot e^{10}(\ln\ln B)^{-1}\ )^{-1}$$

baho o‘rinli, bu yerda $\gamma_0=0,5772...-$Eyler doimiysi va $B=max\left\{3|a_{ij}|\right\}$, $\left(i=1,2;\ j=\overline{1,4}\right)$.

Bu teoremadan a) va b) shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{b}=(b_1,b_2),\ 1\le b_1,b_2\le X,$ vektorlarning yetarlicha ko‘p ekanligi kelib chiqadi.

Bu bobning ikkinchi paragrafi musbat yechimga ega bo‘lishlik va kongruent yechimga ega bo‘lishlik shartlarini qanoatlantiruvchi natural sonlarning sonini baholashga bag‘ishlangan ya’ni 1-Teoremaning isbotiga bag‘ishlangan.

Uchinchi paragrafi birlik intervallarni bo‘laklash va ular uchun baho olishga bag‘ishlangan. Faraz qilaylik $\tau=T^{\frac{1}{4}}N^{-1}$. Istalgan butun $1\le h_1,h_2,q\le Q$ va $(h_1,h_2,q)=1$, shartlarni qanoatlantiruvchi h_1,h_2,q-butun sonlar uchun

$$\bar{m}(h_1,h_2,q)=\left\{(x_1,x_2)\in R^2:\left|x_\lambda-h_\lambda q^{-1}\right|\le \tau q^{-1}\right\},(\lambda=1,2)$$

$$M_1=\cup\bar{m}(h_1,h_2,q),\ M_2=[\tau,1+\tau]^2\setminus M_1 \qquad (4)$$

deb olaylik, bu yerda $\bar{m}(h_1,h_2,q)$ juft-jufti bilan kesishmaydigan $[\tau,1+\tau]^2$ kvadrat ichida yotuvchi kvadratchalar.

Ixtiyoriy haqiqiy x_1,x_2 va $\vec{b}=(b_1,b_2)\in W_{2,4}(X)$ lar uchun $\bar{x}_b=b_1x_1+b_2x_2$ va $\bar{x}_j=a_{1j}x_1+a_{2j}x_2,\ (1\le j\le 4)$ deb olaylik.

Agar

$$I(\vec{b})=\sum\Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\Lambda(n_3)\Lambda(n_4),$$

(bu yerda $\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & \text{agar } n=p^m \text{ bo'lsa};\\ 0, & \text{agar } n\ne p^m.\end{cases}$ tenglik yordamda aniqlanuvchi Mongold funksiyasi) orqali (3) sistemaning yechimlarini belgilasak u holda $S(y)=\sum\limits_{L\le n\le N}\Lambda(n)e(ny)$ tenglik va (4) belgilashlarga ko‘ra $I(\vec{b})$ ni ushbu ko‘rinishda tasvirlashimiz mumkin:

$$I(\vec{b})=\int_\tau^{1+\tau}\int_\tau^{1+\tau}e(-\vec{x}_b)\prod_{j=1}^{4}S(\bar{x}_j)dx_1dx_2=\left(\iint_{M_1}+\iint_{M_2}\right)e(-\bar{x}_b)\prod_{j=1}^{4}S(\bar{x}_j)dx_1dx_2=I_1(\vec{b})+I_2(\vec{b}).$$

$I_1(\vec{b})$ odatdagi doiraviy metoddagidek $I(\vec{b})$ ning asosiy hadi $I_2(\vec{b})-$esa qoldiq hadni tashkil etadi. Shunday qilib chiziqli tenglamalar sistemasini tub sonlarda yechish masalasi tomonlari uzunligi birga teng kvadratlar hosil qilgan soha bo‘yicha olingan va bosh had hamda qoldiq had deb ataluvchi ikkita integralni tekshirishga olib kelinadi.

Birinchi bobning to‘rtinchi paragrafi katta yoy bo‘yicha $I_1(\vec{b})$ integralni soddalashtirishga bag‘ishlangan.

Dissertatsiyaning “**Masalaning maxsus to‘plamini baholash**” deb nomlangan ikkinchi bobi to‘rtta paragrafdan tashkil topgan. Bu bobning asosiy natijasi ushbu teorema orqali bayon qilingan.

2-teorema. Agar X -yetarlicha katta $\delta\ (0<\delta<1)$ esa yetarlicha kichik haqiqiy son bo‘lsa, u holda

a) shunday yetarlicha katta A soni mavjudki $X>B^A$ bo‘lganda $E_{2,4}(X)<X^{2-\delta}$ baho o‘rinli;

b) aytaylik $K=9\sqrt{2}B^3\left|\vec{b}\right|$ va $R(\vec{b})-$esa (3) ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lgan $\vec{b}=(b_1,b_2),\ 1\le b_1,b_2\le X$ vektorlar soni bo‘lsin, u holda berilgan $\vec{b}=(b_1,b_2),\ 1\le b_1,b_2\le X$ larning $X^{2-\delta}$ tadan ko‘p bo‘lmagan barcha qiymatlari uchun $R(\vec{b})\ge K^{2-\delta}(\ln K)^{-4}$ baho o‘rinli.

Birinchi paragrafda muammoning singulyar qatori va singulyar integralining yaqinlashuvchiligini ta’minlovchi ushbu lemmalar isbotlangan. Istalgan butun

$q \geq 1$ va p tub sonlari uchun $A(q) = \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\bar{h}}{}' e(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{4} C_q(\bar{h}_j)$, $s(p) = 1 + A(p)$ belgilaylik. $A(q), s(p)$ va $N(q)$ funksiyalar uchun ushbu lemmalar o‘rinli.

1-lemma. a) $A(q)$ va $N(q)$ multiplikativ funksiyalar;

b) agar $k \geq 2$ bo‘lsa, u holda $A(p^k) = 0$ tenglik o‘rinli;

s) istalgan natural $k \in N$ uchun, $N(p^k) = p^{2k-2} N(p)$ tenglik o‘rinli;

d) barcha p lar uchun $s(p) = p^2 \varphi^{-4}(p) N(p)$ o‘rinli va demak $s(p) > 0$;

e) natural q va p tub sonlari uchun $q^2 \varphi^{-4}(q) N(q) = \prod_{p|q} s(p)$ tenglik o‘rinli.

Endi barcha tub sonlar to‘plamini ikki P_B va P_D qismga ajratamiz bu yerda $P_B = \{ p : p | \Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{14} \Delta_{23} \Delta_{24} \Delta_{34} \Delta_{1b} \Delta_{2b} \Delta_{3b} \Delta_{4b} \}$, $P_D = \{ p : p \notin P_B \}$ hamda barcha Δ_{ij}-lar (3) sistema tenglamalari koeffitsiyentlari hamda ozod hadlar yordamida tuzilgan ikkinchi tartibli determinantlar.

2-lemma. Ushbu $\Delta_{1b} \Delta_{2b} \Delta_{3b} \Delta_{4b} = 0$ shartni qanoatlantiruvchi $\vec{b} = (b_1, b_2)$ lar uchun quyidagilar o‘rinli:

a) Barcha p lar uchun $-\frac{20}{p^2} \leq A(p) \leq \frac{6}{p}$ va agar $p \in P_D$ bo‘lsa, u holda $-\frac{4}{p} \leq A(p) < 0$ o‘rinli bo‘ladi;

b) Barcha p tub sonlar uchun $\prod_{p} \left(1 + |A(p)|\right) \leq \left(\ln \ln N\right)^6$ munosabat o‘rinli;

s) Ushbu $\prod_{p} s(p)$ ko‘paytma absolyut yaqinlashuvchi va $\prod_{p} s(p) > 0$;

d) Istalgan $y \geq 1$ haqiqiy son uchun $\sum_{q \geq y} |A(q)| << \frac{1}{y} N^{\frac{4}{\ln \ln N}} \ln^6(y+2)$ tengsizlik o‘rinli.

Faraz qilaylik $\chi_j \pmod{r_j}$, $(j = 1,2,3,4)$ – primitiv xarakterlar r esa r_1, r_2, r_3, r_4, sonlarning eng kichik umumiy karralisi bo‘lsin, keyinchalik $Z(q) = Z(q : \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \sum_{\bar{h}} e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{4} C_{\chi_j \chi_0}(\bar{h}_j)$ ko‘rinishdagi ifodalarning bahosi kerak bo‘ladi, bu yerda $q -$ soni r ga karrali, $\chi_0 -$ esa q modul bo‘yicha bosh xarakter.

3-lemma. Ushbu $Z(q) = Z(q : \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \sum_{\bar{h}} e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{4} C_{\chi_j \chi_0}(\bar{h}_j)$ ifoda uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

a) $Z(r)=r^2\sum_{r}\prod_{j=1}^{4}\chi_j(l_j)$ tenglik o‘rinli;

b) agar $r \setminus q$, va $q=q_1q_2, (r,q_2)=1$ hamda q_1 ning har bir tub bo‘luvchisi r ni bo‘lsa, u holda $Z(q)=Z(q_1)\varphi^4(q_2)A(q_2)$ va agar $q_1>r$ bo‘lsa $Z(q_1)=0$;

s) $\sum_{\substack{q\le Q,\\ r\setminus q}}\varphi^{-4}(q)Z(q)\le\prod_{p}s(p)$ tengsizlik o‘rinli.

Bu lemmalardan singulyar qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Masalaning singulyar integralning yaqinlashuvchiligi quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

4-lemma. Agar ρ_j $(j=1,2,3,4)$ $0\le \operatorname{Re}\rho_j\le 1$ lar ixtiyoriy kompleks sonlar bo‘lsa, u holda

$$\iint_{R^2}\left[\prod_{j=1}^{4}\int_{L}^{N}x_j^{\rho_j-1}e(x_j\overline{\eta}_j)dx\right]e(-\overline{\eta}_b)d\eta_1d\eta_2=N^2\left|\Delta_{34}\right|^{-1}\iint_{(D)}\prod_{j=1}^{4}\left(Nx_j\right)^{\rho_j-1}dx_1dx_2$$

tenglik o‘rinli. Bunda x_3,x_4 va integrallash sohasi *D* quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{cases}x_3=f_1(x_1,x_2)=\dfrac{1}{\Delta_{34}}\left(\Delta_{b4}-\Delta_{14}x_1-\Delta_{24}x_2\right)\\ x_4=f_2(x_1,x_2)=\dfrac{1}{\Delta_{34}}\left(\Delta_{b3}+\Delta_{13}x_1+\Delta_{23}x_2\right)\end{cases}$$

$$D=\left\{x_1,x_2:\ LN^{-1}\le x_1,x_2,\ f_1(x_1,x_2),\ f_2(x_1,x_2)\le 1\right\}$$

bundan tashqari, agar $\left(b_1,b_2\right)\in W_{2,4}(X)$ bo‘lsa, u holda $\overline{b}=\left(b_1,b_2\right)\in W_{2,4}(X)$ ning ko‘pi bilan $X^2Q^{-\frac{1}{101}}$ ta qiymatidan tashqari barcha qiymatlari uchun $\iint_{(D)}dx_1dx_2\gg Q^{-\frac{1}{100}}$ baho o‘rinli.

Maskur bobning ikkinchi paragrafida katta yoylar bo‘yicha olingan integral baholangan.

Uchinchi va to‘rtinchi paragraflar ikkinchi bobning asosiy natijasini isbotlashga bag‘ishlangan.

Dissertatsiya ishining “**Deyarli teng qo‘shiluvchilar bo‘yicha Goldbaxning ternar muammosini umumlashtirish**” deb nomlangan uchinchi bobi beshta paragrafdan tashkil topgan va Goldbaxning ternar muammosini deyarli teng qo‘shiluvchilar bo‘yicha umumlashtirish masalasi o‘rganilgan.

Ma’lumki, I. M. Vinogradov 1941 yilda karrali trigonometrik yig‘indilarni tekshirish va g‘alvirlash usuliga asoslangan tub sonlar bilan trigonometrik yig‘indini baholash usulini yaratdi. Xususan u birinchi bo‘lib chiziqli trigonometrik yig‘indining bahosini ya’ni $k=1$ bo‘lgan holda $S_k(\alpha,N)=\sum_{m\le N}\Lambda(m)e(\alpha m^k)$ ko‘rinishdagi yig‘indi uchun $\mathfrak{m}((\ln N)^b)$ kichik yoylarda trivial bo‘lmagan baho oldi va u toq N natural sonini uchta tub sonlar

yig‘indisi ko‘rinishda tasvirlashlar soni bo‘lgan Goldbax ternar muammosining yechimlari uchun asimptotik formula olishga mavaffaq bo‘ldi.

K.V.Xazelgrov $S_1(\alpha;x,y)$ yig‘indi uchun $\mathfrak{m}((\ln N)^b)$ kichik yoylarda trivial bo‘lmagan baho va $y \geq x^\theta$, $\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon$ bo‘lganda $\mathfrak{M}((\ln N)^b)$ katta yoylarda qoldiq had uchun formula oldi. Ushbu natijalardan foydalanib, u deyarli teng qo‘shiluvchilar uchun Goldbax muammosini hal qilishga muvaffaq bo‘ldi, xususan

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \qquad \left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \qquad H \geq N^\theta, \tag{5}$$

Diofant tenglamasi yechimlari soni uchun asimptotik formula oldi.

Pan Chen-dong va Pan Chen-biao I. M. Vinogradovning tub sonlar bilan trigonometrik yig‘indilarni baholash metodi va kritik chiziqning kichik to‘rtburchaklaridagi Dirixle funksiyasining nollarining zichligi haqidagi yangi teoremalarga asoslanib, yangi usul yordamida $S(\alpha;x,y)$ ko‘rinishdagi yig‘indi uchun $\mathfrak{m}((\ln N)^b)$ kichik yoylarda notrivial baho va $y \geq x^\theta$, $\theta = \frac{2}{3} + \varepsilon$ bo‘lganda $\mathfrak{M}((\ln N)^b)$ katta yoylarda qoldiq had uchun formula isbotladi.

1991 yilda T.Jan, Pan Chen-dong va Pan Chen-biao metodi va Dirixle *L* funksiyasining to‘rtinchi momentiga M. Yutilla bahosi yordamida θ ko‘rsatkichni $\frac{5}{8} + \varepsilon$ bilan almashtirdi. Bu masalada eng yaxshi natija J. Chaoxuaga tegishli. U (5) Diofant tenglamasi $\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon$ uchun yechish mumkinligini isbotladi.

Agar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 -$ bir vaqtda bir xil ishorali bo‘lmagan noldan farqli, λ_i / λ_j munosabatdan hech bo‘lmaganda biri irratsional bo‘lgan haqiqiy sonlar bo‘lsa u holda istalgan n natural sonlari uchun

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3| \leq (\ln p)^{-n}, \quad p = \max(p_1, p_2, p_3)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi cheksiz ko‘p p_1, p_2, p_3 tub sonlari mavjud ekanligini A. Baker isbotladi. Bu natijani isbotlash jarayonida doiraviy metoddan va $S_1(b_i\alpha, N) = \sum_{p \leq N} e(b_i \alpha p)$ ko‘rinishdagi trigonometrik yig‘indilarning katta va kichik yoylardagi mazmun mohiyatidan foydalanib, ma’lum shartlarda $b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N,$ tenglamaning p_1, p_2, p_3 tub sonlarda yechimga ega bo‘lishligini tekshirdi bu yerda b_1, b_2, b_3 va $N -$ butun sonlar.

Bu bobning asosiy natijasi ushbu teorema orqali ifodalangan.

3-teorema. Aytaylik b_1, b_2, b_3 va $N -$ juft jufti bilan o‘zaro tub bo‘lgan natural sonlar, $N > N_0$, $B_1, B_2, B_3 -$ ixtiyoriy fiksirlangan musbat sonlar, $b_i \leq (\ln N)^{B_i}$, $I(N,H)$-esa $b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = N$, $\left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H$ Diofant

tenglamaning p_1, p_2 va p_3 tub sonlardagi yechimlari soni bo‘lsin. U holda $H \ge (b_1 b_2 b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}$ bo‘lganda

$$I(N,H) = \frac{3\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N)\, H^2}{b_1 b_2 b_3\, (\ln N)^3} + O\left(\frac{H^2 \ln\ln N}{b_1 b_2 b_3 (\ln N)^4} \right),$$

asimptotik formula o‘rinli, bu yerda

$$\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) \prod_{p \mid b_1 b_2 b_3 N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3} \right).$$

I. M. Vinogradov tomonidan trigonometrik yig‘indilar ko‘rinishidagi Xardi-Littlvud Ramanudjanning doiraviy metodi yordamida 3-teoremani isbotlash 4-va 5- teoremalarda isbotlangan quyidagi uchta masalaga keltiriladi:

1. $\mathfrak{M}((\ln N)^{c_1})$ katta yoylar markazining kichik oraliqlarida $S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(b\alpha n)$, ko‘rinishdagi tub sonlar bilan maxsus qisqa chiziqli trigonometrik yig‘indilarning mohiyatini o‘rganish:

2. $\mathfrak{M}((\ln N)^{c_1})$ katta yoy markazlarining kichik oraliqlaridan farqli, katta yoylarda ushbu qisqa trigonometrik yig‘indilarning trivial bo‘lmagan baholarini topish:

3. $\mathfrak{m}((\ln N)^{c_1})$ kichik yoylarda $S_1(b\alpha; x, y)$ yig‘indilarning trivial bo‘lmagan baholarini olish.

4-teorema. Aytaylik $x \ge x_0$, A, B, c_1 va c_2-absolyut o‘zgarmas sonlar, $c_2 \le c_1$, $b \le (\ln N)^B$ natural son,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \le q \le h, \quad h = (\ln x)^{c_1}, \quad \tau = \frac{y^2}{x(\ln x)^{c_2}}.$$

U holda $y \ge x^{\frac{5}{8}} bh (\ln x)^{2,25A+81}$ bo‘lganda

$$S_1(b\alpha; x, y) = \frac{\mu\left(\frac{q}{(b,q)} \right)}{\varphi\left(\frac{q}{(b,q)} \right)} \frac{\sin \pi b\lambda y}{\pi b\lambda} e\left(b\lambda \left(x - \frac{y}{2} \right) \right) + O\left(y (\ln x)^{-A} \right)$$

tenglik o‘rinli.

5-teorema. Aytaylik $x \ge x_0$, A- absolyut o‘zgarmas, $y \ge b x^{\frac{2}{3}} (\ln x)^{\frac{8}{3}A+52}$, b- natural son hamda $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a,q) = 1$, $b(\ln x)^{4A+82} < q \le \frac{y^2}{x} (\ln x)^{-4A-82}$, $|\theta| \le 1$ bajarilsin. U holda $S_1(b\alpha; x, y) \ll \frac{y}{(\ln x)^A}$ baho o‘rinli.

Bu bobning ikkinchi paragrafida zaruriy lemmalar keltirilgan. Uchinchi paragraf 4-teoremani isbotlashga bag‘ishlangan va katta yoylarda tub sonli maxsus

chiziqli qisqa trigonometrik yig‘indilarning mazmuni to‘g‘risidagi masala o‘rganilgan.

To‘rtinchi paragrafda kichik yoylarda $S_1(b\alpha; x, y)$ ko‘rinishdagi tub sonlar bilan maxsus qisqa chiziqli trigonometrik yig‘indilarni baholashda yuzaga keladigan yig‘ish tartibi bo‘yicha kichik maxsus qisqa chiziqli trigonometrik yig‘indilarni baholaymiz va 5-teoremani isbotlaymiz.

Bu bobning beshinchi paragrafi 3-teoremaning isbotiga bag‘ishlangan. Olingan natija I. M. Vinogradov, K. V. Xazelgrov Pan Chen-dong va Pan Chen-biao, T. Jan natijalarini umumlashtiradi.

XULOSA

Dissertatsiya ishida olingan barcha natijalar shu sohada olingan yangi natijalar hisoblanadi va ular quyidagilardan iborat:

1. kongruent yechuvchanlik va musbat yechishlik shartlarini qanoatlantiradigan berilgan natural sonlar juftini bir vaqtning o‘zida to‘rtta tub son yig’indisi ko‘rinishda tasvirlashlar soni uchun quyidan baho olingan;
2. berilgan sonni bir vaqtning o‘zida to‘rtta tub son yig‘indisi ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lmaydigan sonlar soni uchun baho olingan;
3. to‘rtta tub noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlari soni uchun baho olingan;
4. katta yoylar markazining kichik bo‘laklarida qisqa chiziqli trigonometrik yig‘indilarning notrivial baholari olingan;
5. umumlashgan Goldbax ternar muammosining yechimlari soni uchun asimptotik formula olingan:

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АБРАЕВ БАХРОМ ХОЛТУРАЕВИЧ

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

01.01.06 – Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТЕРМЕЗ – 2024

Тема диссертации доктора философии (DoctorofPhilosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за № B2022.3.PhD/FM753.

Диссертация выполнена в Термезском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http.//www/ik-fizmat/nuu/uz.) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Аллаков Исмаил** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Чубариков Владимир Николаевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Худойбердиев Аброр Ҳакимович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 16 » апреля 2024 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.01.01 при Институте Математики имени В.И.Ромоновского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б. Тел.: (+99871)207-91-40,e-mail: bmath@umail.uz Website www.mathins.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 179). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 03 » апреля 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от « 03 » апреля 2024 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.Р.Хаётов
Заместитель председателя Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м. н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во всем мире многие научные и практические исследования, часто приводятся к исследованию задач теоретической механики и криптографии. Исследования математических моделей естественных процессов составляют теоретическую основу аддитивных задач теории чисел, важно определить законы шифрования и дешифрования криптографии с помощью аддитивных задач теории чисел. Кроме того, с помощью числовых функций реализуется и алгоритм шифрования с открытым ключом в криптографии, основанный на том, что не существует рационального способа разделить достаточно большое нечетное число на простые множители. Также законы шифрования и дешифрования реализуются путем деления достаточно больших натуральных чисел на экспоненциальные и субэкспоненциальные сложности, деления чисел на простые множители.

Расшифровка, числовые функции и характеры Дирихле, необходимые для решения таких задач, зависят от значений числовых функций и числовых значений переменных. Аддитивные задачи играют важную роль в теории чисел. В настоящее время решение бинарной проблемы Гольдбаха и его различные результаты в этом направлении были получены впервые с использованием кругового метода Харди-Литтлвуда. Затем дополнение кругового метода методом тригонометрических сумм привело к решению многих разных задач теории чисел. В связи с этим рассматриваются различные формы аддитивных задач с простыми числами, в частности, проблема об условиях существования решения в простых числах системы линейных диофантовых уравнений и проблема обобщения тернарной задачи Гольдбаха на почти равные слагаемые считаются важными научными исследованиями в аддитивной теории чисел.

В нашей стране уделяется большое внимание современным направлениям теории чисел, имеющим научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, в последние годы были достигнуты значительные результаты в решении задач о представлении чисел суммой простых чисел, включающие в себя тернарные и бинарные проблемы Гольдбаха. Основными задачами и направлениями деятельности математики являются проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям “Алгебра и геометрия”. В целях использования научных результатов в смежных областях науки важными считаются развитие аддитивных задач теории чисел[1].

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года “О стратегии действия по

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а такжекоренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан” и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”, и в других нормативно-правовых актах, связаны с данной деятельностью.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. “Математика, механика и информатика”.

Степень изученности проблемы. Аддитивные задачи играют важную роль в теории чисел. К аддитивным задачам относится также задача о решениях системы линейных диофантовых уравнений в простых числах. В настоящее время проводятся научные исследования по проблемам теории чисел системы линейных уравнений, имеющих решение в простых числах, и обобщения тернарной задачи Гольдбаха с почти равными слагаемыми.

В частности, учитывая упомянутые выше результаты в области аддитивных задач, ученые из зарубежных стран Г. Х. Харди, Дж.Э.Литлвуд, К.Прахар, Хуа Ло-Кен, Х.Л.Монтгомери, Р.К.Вон, А.Бейкер, Чжэнь Цуй, Хунцзе Ли, Лю М.К., Цанг К.М., Чой К.К., Кумчев А., Макинтош Дж.Р. и др., а также ученые из стран СНГ, И.М.Виноградов, Ю. Линник, А.А. Карацуба, Б. В. Левин, Г. И. Архипов, Н. В. Чубариков, З. Х. Рахмонов и другие, исследовавшие аддитивные задачи, связанные с простыми, целыми и натуральными числами, в частности, проблемы системы линейных уравнений, имеющих решение в простых числах, добились новых результатов.

Следует также отметим, что в научных работах ученых нашей республики Н.П.Романова, А.Ф.Лаврика, Б. Бабаназаров, М. И. Толаганова, М.И.Исраилова С.Т. Толаганова А. С. Фейнлейба, С.Ш. Шушбаева, Ш. И. Исматуллаева, И. Аллакова, А. Ш. Сафарова и других достигнуты новые результаты в получении решения задачи для случаев, когда плотность нулей L-функции не основана на информации о плотности распределения L-функции. и плотность нулей L-функции правильная.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждений высшего образования, где выполнялась диссертация.

Работа над диссертацией проводилась в рамках научно-исследовательского плана Термезского государственного университета.

Цель исследования является изучение поведение тригонометрических сумм с простыми числами и использование этих сумм к задачам об одновременном представление пары чисел суммой четырёх простых чисел и нахождение асимптотической формулы для числа решений обобщенной тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми.

Задачи исследования работы являются:

исследовать условия разрешимости системы линейных уравнений в простых числах;

исследовать задачи об одновременном представлении пары чисел суммой четырёх простых чисел;

исследование сингулярного ряда и сингулярного интеграла в задаче об одновременном представлении пары чисел суммой четырёх простых чисел;

получить оценку снизу для количества представлений в задаче об одновременном представлении пары натуральных чисел в виде суммы четырёх простых чисел;

исследовать поведение коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;

исследовать обобщенную тернарную задачу Гольдбаха с почти равными слагаемыми, т.е. анализ проблемы о представимости большого натурального N в виде $b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N$, где p_1, p_2, p_3- простые числа.

Объект исследования. Объектами исследования являются линейные тригонометрические суммы, короткие линейные тригонометрические суммы, числовые функции, характеры Дирихле и $L-$функции Дирихле, диофантовы уравнения с четырьмя простыми переменными, обобщенное диофантово уравнение Гольдбаха.

Предмет исследования. Аддитивная теория чисел, теория арифметических функций, теория функций комплексных переменных, теория характеров Дирихле, теория $L-$функции Дирихле.

Методы исследования. В диссертации использовались круговой метод Харди-Литтлвуда, Рамануджана и метод тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова для решения аддитивных задач, метод Хазелгров-Рахмонова.

Научная новизна исследования состоят в следующем:

получена оценка с низу для количества натуральных чисел, удовлетворяющих условиям конгруэнтной разрешимости и положительной разрешимости в задаче об одновременном представлении пары натуральных чисел в виде суммы четырёх простых чисел;

доказана оценка для множества чисел, которые непредставимы в виде суммы четырёх простых чисел;

получена оценка для специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в малых окрестностях центра больших дуг;

получена асимптотическая формула для числа решений обобщенной тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

изложены способы оценки количества представлений натуральных чисел, не входящих в специальное множество и оценки специальных рядов множеств и специальных интегралов в проблемах разрешимости системы линейных диофантовых уравнений;

найдено условие, при котором система линейных уравнений разрешима в простых числах и изложен способ получения численных оценок множества натуральных чисел, которые удовлетворяют этим условиям разрешимости;

найдена асимптотическая формула для числа решений обобщенной тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми.

Достоверность результатов исследования обоснована на использовании методов комплексного анализа, алгебры, теории чисел и применении дедуктивных выводов, принятых в математике, а также строгостью и полнотой доказательств теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что они могут быть использованы при дальнейшем развитии теории аддитивных задач теории чисел, а также в дальнейшем развитии аналитической теории чисел.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что они позволяют получать численные результаты в аддитивных задачах теории чисел.

Внедрение результатов исследований. На основании результаты решения системы линейных диофантовых уравнений в простых числах:

оценка снизу для количества представлений пары чисел в виде суммы четырёх простых чисел была использована в фундаментальном проекте под номером Ф3-202009211 “Исследование корректности задач Франкля и условий Бицадзе-Самарского на характеристику и линию вырождения для уравнений смешанного типа путем приведения их к классическим сингулярным интегральным уравнениям”, определять типа характеристических линиях (Справка от 06 декабря 2023 года Термезского государственного университета). В результате позволило упростить решение задач, связанных с характеристиками и условиями, налагаемыми на линию вырождения для уравнений смешанного типа;

из полученных результатов по обобщению тернарной задачи Гольдбаха с почти равными слагаемыми в научном проекте ГР 0121TJ1178 «Оценка коротких смешанных тригонометрических сумм и их приложения к теории нулей специальных рядов Дирихле» использовано обобщение различных аддитивных задач теории чисел почти равными слагаемыми для получения оценки в малых дугах с использованием метода тригонометрических сумм. (Справка № 31004/24-07 - от 29 января 2024 года Института математики имени А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана). Применение научного результата позволило получить асимптотические формулы для числа представлений натурального числа в виде суммы пяти квадратов почти равными слагаемыми теории чисел.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 7 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. по теме диссертации опубликовано 19 научных работ, в том числе 7 научных статей в научных

изданиях, рекомендованных к публикации основных научных результатов докторских диссертаций ВАК Республики Узбекистан, в том числе 2 из них опубликованы в престижных зарубежных журналах и 5 – в республиканских. Кроме того, в докладах Национальной академии наук Таджикистана опубликована 1 научная статья.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 102 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, раскрыта теоритическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется "**Об одновременном представлении пары чисел суммой четырёх простых чисел**" и состоит из четырёх параграфов.

В первом параграфе изложены основные результаты задачи.

Рассмотрим систему уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m, \quad (i = 1,2,\ldots,s) \qquad (1)$$

здесь $b_1, b_2,\ldots,b_s$ – натуральные числа, $a_{i1}, a_{i2},\ldots,a_{im}$ – целые коэффициенты, $p_1, p_2,\ldots, p_m$ – простые числа. Обозначим через $U_{s,m}(X)$ – множество наборов $(b_1,b_2,\ldots,b_s), 1 \le b_1,b_2,\ldots,b_s \le X,$ для которых система (1) неразрешима в простых числах, т.е.

$$U_{s,m}(X) = \left\{ (b_1,b_2,\ldots,b_s),\ 1 \le b_1,b_2,\ldots,b_s \le X,\ b_i \ne a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m \right\}$$

и пусть $E_{s,m}(X) = card U_{s,m}(X)$ – количество элементов множества $U_{s,m}(X)$.

При $m \ge 2s+1$ Wu Fang исследуя системы (1), в некоторых дополнительных условиях, получил асимптотическую формулу для числа решений системы (1).

М.С.Лю и К.М.Цанг рассмотрели, частный случай системы (1) при $s = 2$, $m = 3$ и доказали степенную оценку

$$E_{2,3}(X) \le X^{2-\varepsilon}, \qquad (2)$$

где X-достаточно большое действительное число, ε - абсолютная, эффективно вычисляемая, положительная малая постоянная.

Известно, что разрешимость системы (1) связана условиями:

а) для любого простого p существуют такие целые числа $l_1,\ldots,l_m$ с условиями $1 \le l_1,\ldots,l_m \le p-1$, которые удовлетворяют систему линейных сравнений: $a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \ldots + a_{im}l_m \equiv b_i \pmod{p}$, $(i = 1,\ldots,s)$;

b) существуют такие действительные положительные числа $y_1,\ldots,y_m$ для которых выполняются равенства $a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\ldots+a_{im}y_m=b_i,\ i=1,2.$

Обозначим $W_{s,m}(X)$–множество векторов $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$, $1\le b_1,b_2,\ldots,b_m\le X$ которые удовлетворяют условиям a) и b).

В работе M. C. Liu и K. M. Tsang доказано, что

1) если для некоторых положительных вещественных чисел y_1,y_2,y_3 выполняются условия, $\sum_{j=1}^{3}a_{ij}y_j>0,\ i=1,2,$ то для достаточно больших X имеем $card W_{2,3}(X)\gg X^2(B^2\ln\ln B)^{-2}$, где $B=max\{3|a_{ij}|\},\ (i=1,2;\ j=1,2,3).$

2) $E_{2,3}(X)<X^{2-\varepsilon}$ при $X>B^A$, где A (достаточно большое) и $\varepsilon>0$ (достаточно малое) абсолютное, эффективно вычисляемое постоянное.

И. Аллаков в 1993 год улучшил первый результат (2), а затем 2005 году обобщил эти результаты для системы (1), при $s=n,\ m=n+1.$

Из выше изложенного следует, что вопрос исследования системы (1), при $s=2,\ m=4$ остаётся открытым, поскольку этот случай не охвачен в работах выше приведенных авторов.

Мы здесь рассмотрим именно этот случай. Полагая $s=2,\ m=4$ из (1) получим следующую систему:

$$b_i=a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+a_{i3}p_3+a_{i4}p_4,\ (i=1,2). \tag{3}$$

Сначала исследуем условия разрешимости системы уравнение (3). Известно, что разрешимость системы (1.1.1) связанна условиями a) и b). Эти условии обычно называют условием положительной разрешимости и конгруент разрешимости.

Основным результатом первой главы диссертации является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $W_{2,4}(X)-$множество векторов $\vec{b}=(b_1,b_2),\ 1\le b_1,b_2\le X$ которые удовлетворяют условиям a) и b). Тогда для достаточно больших X, справедлива оценка

$$card W_{2,4}(X)>1,69954\ X^2B^{-20}(e^{\gamma_0+10}\ \ln\ln B+\ 2,507\cdot e^{10}(\ln\ln B)^{-1}\ )^{-1},$$

где $\gamma_0=0,5772...-$ постоянная Эйлера и $B=max\{3|a_{ij}|\},\ \left(i=1,2;\ j=\overline{1,4}\right).$

Из этой оценки следует, что векторов $\vec{b}=(b_1,b_2),\ 1\le b_1,b_2\le X$, которые удовлетворяют условиям a) и b) достаточно много.

Второй параграф этот главы посвящено оцениванию количества пар натуральных чисел удовлетворяющих условиям положительной разрешимости и конгруент разрешимости, т.е. посвящено доказательству теоремы 1.

Третьей параграф изложено деление области интегрирования и оценка интеграла по дополнительным интервалам. Пусть $\tau = T^{\frac{1}{4}} N^{-1}$. Для любых целых чисел h_1, h_2, q удовлетворяющих условиям $1 \le h_1, h_2, q \le Q$ и $(h_1, h_2, q) = 1$, положим

$$\bar{m}(h_1, h_2, q) = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 : \left| x_\lambda - h_\lambda q^{-1} \right| \le \tau q^{-1} \right\}, (\lambda = 1, 2)$$

$$M_1 = \cup \bar{m}(h_1, h_2, q),\ M_2 = [\tau, 1+\tau]^2 \setminus M_1, \qquad (4)$$

где $\bar{m}(h_1, h_2, q)$ попарно непересекаюшие квадратики которые лежат внутри квадрата $[\tau, 1+\tau]^2$.

Для произвольных вещественных x_1, x_2 и $\vec{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ положим

$$\bar{x}_b = b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad \text{и} \quad \bar{x}_j = a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 \quad (1 \le j \le 4).$$

Если через $I(\vec{b}) = \sum \Lambda(n_1)\Lambda(n_2)\Lambda(n_3)\Lambda(n_4)$, (где $\Lambda(n)$ – функция Мангольдта, определяемая равенством

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^m, p - \text{простое}, \ m > 0 - \text{ целое}; \\ 0, & \text{если } n \ne p^m. \end{cases}$$

) обозначим решение системы (3), тогда в силу равенства $S(y) = \sum_{L \le n \le N} \Lambda(n) e(ny)$ и обозначения (4), $I(\vec{b})$ можем представить в виде:

$$I(\vec{b}) = \int_{\tau}^{1+\tau} \int_{\tau}^{1+\tau} e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^{4} S(\bar{x}_j) dx_1 dx_2 = \left(\iint_{M_1} + \iint_{M_2} \right) e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^{4} S(\bar{x}_j) dx_1 dx_2 = I_1(\vec{b}) + I_2(\vec{b}).$$

Как обычно в круговом методе $I_1(\vec{b})$ даёт основной вклад в $I(\vec{b})$ и $I_2(\vec{b})$ – составляет остаточный член. Таким образом, задача решения системы линейных уравнений в простых числах сводится к задаче проверки двух интегралов, называемых главным членом и остаточным членом, полученных на квадратах со стороной равной единице.

Четвёртый параграф первой главы посвящен упрошению интеграла по большой дуге.

Вторая глава диссертации **“Оценка исключительного множества задачи”** состоит из четырёх параграфов и основным результатом главы является следующая теорема:

Теорема2. Если X −достаточно большое, а δ $(0 < \delta < 1)$ достаточно малое действительные числа, тогда:

а) существует достаточно большое число A, такое, что при $X > B^A$ справедлива оценка $E_{2,4}(X) < X^{2-\delta}$;

b) пусть $K = 9\sqrt{2}B^3\left|\vec{b}\right|$ и $R(\vec{b})$ – количество представлений $1 \le b_1, b_2 \le X$ в виде (3), тогда для $R(\vec{b})$ при заданном $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $1 \le b_1, b_2 \le X$ справедлива оценка $R(\vec{b}) \ge K^{2-\delta}(\ln K)^{-4}$, для всех $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $1 \le b_1, b_2 \le X$ за исключением не более чем $X^{2-\delta}$ пар из них.

В первом параграфе доказаны леммы, обеспечивающие сходимость сингулярного ряда и сингулярного интеграла задачи.

Для произвольного целого $q \ge 1$ и произвольного простого числа p обозначим $A(q) = \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{\vec{h}}{}' e(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^{4} C_q(\bar{h}_j)$, $s(p) = 1 + A(p)$.

Для функций $A(q)$, $s(p)$ и $N(q)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 1. a) $A(q)$ и $N(q)$ -мультипликативные функции;

b) если $k \ge 2$, то $A(p^k) = 0$;

c) для любого натурального $k \in N$ справедливо равенство $N(p^k) = p^{2k-2}N(p)$;

d) $s(p) = p^2\varphi^{-4}(p)N(p)$ и, следовательно, $s(p) > 0$, для всех p;

e) для простого p и натурального q справедливо равенство

$$q^2\varphi^{-4}(q)N(q) = \prod_{p|q} s(p).$$

Множество простых чисел разделим на две части P_B и P_D, где

$P_B = \{ p : p \mid \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{1b}\Delta_{2b}\Delta_{3b}\Delta_{4b} \}$, $P_D = \{ p : p \notin P_B \}$, все Δ_{ij} - является определителями 2-го порядка, образованными с помощью коэффициентов и свободных членов системы уравнений (3).

Лемма 2. Для $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$ с условием $\Delta_{1b}\Delta_{2b}\Delta_{3b}\Delta_{4b} = 0$ имеем:

a) $-\frac{20}{p^2} \le A(p) \le \frac{6}{p}$ для всех простых p и если $p \in P_D$, то $-\frac{4}{p} \le A(p) < 0$;

b) для всех простых p справедливо

$$\prod_p \left(1 + \left|A(p)\right|\right) \le \prod_p \left(1 + A(p)\right) \le \left(\ln\ln N\right)^6;$$

c) произведение $\prod_p s(p)$ является абсолютно сходящимся и $\prod_p s(p) > 0$;

d) для любого действительного числа $y \ge 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{q \ge y} |A(q)| << \frac{1}{y} N^{\frac{4}{\ln\ln N}} \ln^6(y+2).$$

Пусть $\chi_j \pmod{r_j}$, $(j=1,2,3,4)$ – примитивные характеры, а $r=[r_1,r_2,r_3,r_4]$ – НОК чисел r_1,r_2,r_3,r_4. В дальнейших исследованиях нам нужны оценки некоторых выражений вида:

$$Z(q)=Z(q:\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4)=\sum_{\bar{h}} e_q(-\bar{h}_b)\prod_{j=1}^{4} C_{\chi_j\chi_0}(\bar{h}_j)$$

где q – кратное r и χ_0 – главный характер по модулю q.

Лемма 3. Справедливы следующие утверждения:

a) справедливо $Z(r)=r^2\sum_{r}\prod_{j=1}^{4}\chi_j(l_j)$;

b) если $r \setminus q$, и $q=q_1q_2$ такое, что $(r,q_2)=1$ и каждый простой делитель числа q_1 делит r, то $Z(q)=Z(q_1)\varphi^4(q_2)A(q_2)$ и $Z(q_1)=0$ если $q_1>r$

c) справедливо неравенство $\sum_{\substack{q\le Q,\\ r\setminus q}} \varphi^{-4}(q)Z(q)\le\prod_{p} s(p)$.

Из этих лемм следует сходимость сингулярного ряда задачи.

Сходимость сингулярного интеграла следует из следующей леммы.

Лемма 4. Пусть ρ_j $(j=1,2,3,4.)$ произвольные комплексные числа удовлетворяющие условию $0\le \operatorname{Re}\rho_j\le 1$, тогда имеем

$$\iint_{R^2}\left[\prod_{j=1}^{4}\int_{L}^{N} x_j^{\rho_j-1}e(x_j\bar{\eta}_j)dx\right]e(-\bar{\eta}_b)d\eta_1 d\eta_2 = N^2\left|\Delta_{34}\right|^{-1}\iint_{(D)}\prod_{j=1}^{4}\left(Nx_j\right)^{\rho_j-1}dx_1dx_2,$$

где x_3,x_4 и область интегрирования задаётся следующими равенствами

$$\begin{cases} x_3=f_1(x_1,x_2)=\dfrac{1}{\Delta_{34}}\left(\Delta_{b4}-\Delta_{14}x_1-\Delta_{24}x_2\right) \\ x_4=f_2(x_1,x_2)=\dfrac{1}{\Delta_{34}}\left(\Delta_{b3}+\Delta_{13}x_1+\Delta_{23}x_2\right) \end{cases}$$

$$D=\left\{x_1,x_2:\ LN^{-1}\le x_1,x_2,\ f_1(x_1,x_2),\ f_2(x_1,x_2)\le 1\right\}$$

кроме того, если $\bar{b}=(b_1,b_2)\in W_{2,4}(X)$ тогда $\iint_{(D)} dx_1dx_2 \gg Q^{-\frac{1}{100}}$ за исключением не более чем $X^2Q^{-\frac{1}{101}}$ пар из них.

Во втором параграфе оценен интеграл по большой дуге. Третий и четвёртый параграф главы посвящены доказательству основного результата второй главы.

В третьей главе диссертации “Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми”, состоящей из пяти параграфов изучено обобщение тернарной проблемы

Известно, что И. М. Виноградов в 1941 году построил метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют метод решето и метод сглаживания двойных сумм. В частности он впервые получил оценку линейной тригонометрической суммы, то есть при $k=1$ нетривиальную оценку суммы вида $S_k(\alpha,N)=\sum_{m\le N}\Lambda(m)e(\alpha m^k)$, в малых дугах $\mathfrak{m}((\ln N)^b)$ и ему удалось вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечётного N в виде суммы трёх простых чисел, что является решением тернарной проблемы Гольдбаха.

К. В. Хазелгров для суммы $S_1(\alpha;x,y)$ получил нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}((\ln N)^b)$ и формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}((\ln N)^b)$ при условии $y\ge x^\theta$, $\theta=\frac{63}{64}+\varepsilon$.

Пользуясь этими результатами ему удалось решить тернарную задачу Гольдбаха с почти равными слагаемыми: конкретно для количества решений диофантова уравнения вида

$$p_1+p_2+p_3=N,\qquad \left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\qquad H\ge N^\theta, \tag{5}$$

нашёл асимптотическую формулу.

Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо на базе метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова и новых теорем о плотности нулей L-рядов Дирихле в узких прямоугольниках критической полосы, разработали новый метод, с помощью которого доказали для суммы вида $S(\alpha;x,y)$ нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}((\ln N)^b)$ и формулу с остаточным членом в больших дугах $\mathfrak{M}((\ln N)^b)$ при условии $y\ge x^\theta$, $\theta=\frac{2}{3}+\varepsilon$.

В 1991г. Т. Жан, используя метод Пан Чен-дона и Пан Чен-бьяо и оценку М. Ютилы о четвёртом моменте L-функций Дирихле, заменил показатель θ на $\frac{5}{8}+\varepsilon$.

Наилучший результат в этой задаче принадлежит Ж. Чаохуа. Он доказал, что диофантово уравнение (5) разрешимо с показателем $\theta=\frac{7}{12}+\varepsilon$.

A. Baker доказал: если $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – ненулевые действительные числа, неодинакового знака, причем хотя бы одно из отношений λ_i/λ_j иррационально, тогда для любого натурального n существует бесконечно много простых чисел p_1,p_2,p_3 удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3p_3|\le(\ln p)^{-n},\qquad p=\max(p_1,p_2,p_3).$$

Он в процессе доказательства этого результата воспользовавшись круговым методом и поведением линейных тригонометрических сумм вида

$$S_1(b_i\alpha, N) = \sum_{p \le N} e(b_i \alpha p)$$

как в больших, так и в малых дугах, при выполнении определенных условий исследовал разрешимость уравнения $b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N,$ в простых числах p_1, p_2, p_3, где b_1, b_2, b_3 и N – целые числа.

Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Теорема 3. Пусть b_1, b_2, b_3 и N – попарно взаимно простые натуральные числа, $N > N_0$, B_1, B_2, B_3 – произвольные фиксированные положительные числа, $b_i \le (\ln N)^{B_i}$, $I(N,H)$-число решений диофантова уравнения $b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 = N$, $\left| b_i p_i - \frac{N}{3} \right| \le H$ в простых числах p_1, p_2, и p_3. Тогда при $H \ge (b_1b_2b_3)^{\frac{4}{3}} N^{\frac{2}{3}} (\ln N)^{60}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{3\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N)\, H^2}{b_1b_2b_3\,(\ln N)^3} + O\left(\frac{H^2 \ln\ln N}{b_1b_2b_3 (\ln N)^4} \right),$$

где $\mathfrak{S}(b_1,b_2,b_3,N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) \prod_{p \mid b_1b_2b_3N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3} \right).$

С помощью кругового метода Харди, Литтлвуда, Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова доказательство теоремы 3 сведено к трём следующим задачам, которые решены в теоремах 4 и 5 и заключаются в следующем:

1. исследования поведения специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_1(b\alpha; x, y) = \sum_{x - y < n \le x} \Lambda(n) e(b\alpha n),$$

в малых окрестностях центра больших дуг $\mathfrak{M}((\ln N)^{c_1})$;

2. нахождение нетривиальных оценок этих коротких тригонометрических сумм в больших дугах $\mathfrak{M}((\ln N)^{c_1})$ кроме малых окрестностей их центров;

3. получение нетривиальных оценок сумм $S_1(b\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}((\ln N)^{c_1})$.

Теорема 4. Пусть $x \ge x_0$, A, B, c_1 и c_2-абсолютные постоянные числа, $c_2 \le c_1$, b -натуральное число, $b \le (\ln N)^B$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \le q \le h, \quad h = (\ln x)^{c_1}, \quad \tau = \frac{y^2}{x(\ln x)^{c_2}}.$$

Тогда при $y \ge x^{\frac{5}{8}} bh (\ln x)^{2,25A+81}$ справедливо равенство

$$S_1(b\alpha;x,y)=\frac{\mu\left(\dfrac{q}{(b,q)}\right)}{\varphi\left(\dfrac{q}{(b,q)}\right)}\frac{\sin\pi b\lambda y}{\pi b\lambda}e\left(b\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)+O\left(y(\ln x)^{-A}\right).$$

Теорема 5. Пусть $x\ge x_0$, A-абсолютная постоянная, $y\ge bx^{\frac{2}{3}}(\ln x)^{\frac{8}{3}A+52}$, b-натуральное число, $\alpha=\dfrac{a}{q}+\dfrac{\theta}{q^2}$, $(a,q)=1$, $b(\ln x)^{4A+82}<q\le\dfrac{y^2}{x}(\ln x)^{-4A-82}$, $|\theta|\le 1$.

Тогда справедлива оценка $S_1(b\alpha;x,y)\ll\dfrac{y}{(\ln x)^A}$.

Во втором параграфе приведены необходимые вспомогательные леммы, которые нужны для дальнейших исследований.

Третий параграф главы посвящен доказательству теоремы 4 и изучен вопрос о поведении специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах.

В четвёртом параграфе оценены специальные короткие линейные двойные тригонометрические суммы с “близкими” по порядку суммами, которые возникают при оценке специальных коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами вида $S_1(b\alpha;x,y)$ в малых дугах и доказана теорема 5.

Пятый параграф главы посвящен доказательству основного результата диссертации. Полученные результаты обобщают результаты И. М. Виноградова, К. В. Хазелгрова, Пан Чен-донга и Пан Чен-биао, Т. Жана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все полученные результаты диссертационной работы, является новыими в этом направлениям и состоят в нижеследующем:

1.получена оценка количества натуральных чисел, удовлетворяющих условиям конгруэнтной разрешимости и положительной разрешимости системы линейных уравнений в простых числах;

2.получена оценка снизу количества представлений данной пары натуральных чисел одновременно в виде суммы четырёх простых чисел;

3.получена оценка множества чисел, которые непредставимы в виде суммы четырёх простых чисел;

4.получены нетривиальные оценки коротких тригонометрических сумм в больших дугах, кроме малых окрестностей их центров;

5.получена асимптотическая формула для числа решений обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми.

SCIENTIFIC COUNCIL DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 PO AWARDING ACADEMIC DEGREES AT THE INSTITUTE MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKY

TERMEZ STATE UNIVERSITY

ABRAEV BAHROM KHOLTURAYEVICH

ON THE SOLVABILITY OF A SYSTEM OF LINEAR DIOPHANTINE EQUATIONS IN PRIMES

01.01.06 – Algebra

ABSTRACT OF THE DISSERTATION OF A DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) IN PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TERMEZ – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number №.B2022.3.PhD/FM753.

The dissertation was completed at Termez State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (http://kengash.mathinst.uz/) and in the webside of "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Allakov Ismail** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Chubarikov Vladimir Nikolaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Khudoyberdiev Abror Khakimovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Samarkand State University**

The defense of the dissertation will take place " 16 " April 2024 at 16:00 o'clock at a meeting of the Scientific Council DSc.02/30.12.2019.FM.01.01 at the Institute of Mathematics named after V.I. Romonovsky (Address: 100174, Tashkent, Almazar district, Universitetskaya st., 9. Tel.: (+99871)207-91-40, e-mail:bmath@umail.uzWebsite www.mathins.uz)

The dissertation can be viewed at the information and resource center of the V.I. Romanovsky Institute of Mathematics (registered under No. 179). (Address: 100174, Tashkent, Almazar district, Universitetskaya str., 9. Tel.: (+99871) 207-91-40).

The abstract of the dissertation was sent out on " 03 " April 2024 year.
(Mailing report No. 2 on " 03 " April 2024 year).

U.A.Rozikov
Chairman of scientific Council on award of Scientists degrees, D. F.-M.S., academician

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Councilon award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

A.R. Hayotov
Deputy Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of the dissertation of PhD)

The aim of the research work is to study the behavior of trigonometric sums with prime numbers and the use of these sums to problems of simultaneous representation of a pair of numbers by the sum of four prime numbers and finding an asymptotic formula for the number of solutions to the generalized ternary Goldbach problem with almost equal terms.

Object of study are linear trigonometric sums, short linear trigonometric sums, numerical functions, Dirichlet characters and Dirichlet functions, Diophantine equations with four simple variables, the generalized Diophantine Goldbach equation.

The scientific novelty of the research is as follows:

an estimate from below was obtained for the number of natural numbers that satisfy the conditions of congruent solvability and positive solvability in the problem of simultaneous representation of a pair of natural numbers as the sum of four prime numbers;

an estimate was proved for the set of numbers that cannot be represented as a sum of four prime numbers;

an estimate was obtained for special short linear trigonometric sums with prime numbers in small neighborhoods of the center of large arcs;

an asymptotic formula is obtained for the number of solutions to the generalized ternary Goldbach problem with almost equal terms.

Implementation of research results. Based on the results of solving a system of linear Diophantine equations in prime numbers:

the lower estimate for the number of representations of a pair of numbers in the form of a sum of four prime numbers was used in the fundamental project number F3-202009211 “Investigation of the correctness of Frankl’s problems and Bitsadze-Samarsky conditions on the characteristic and line of degeneracy for equations of mixed type by reducing them to classical singular integral equations ”, determine the type of characteristic lines (Certificate dated December 06, 2023 from Termez State University). As a result, it made it possible to simplify the solution of problems related to the characteristics and conditions imposed on the degeneracy line for equations of mixed type;

From the results obtained on the generalization of the ternary Goldbach problem with almost equal terms in the scientific project GR 0121TJ1178 “Estimation of short mixed trigonometric sums and their applications to the theory of zeros of special Dirichlet series”, a generalization of various additive problems of number theory with almost equal terms was used to obtain an estimate in small arcs with using the method of trigonometric sums. (Certificate No. 31004/24-07 - dated January 29, 2024 from the Institute of Mathematics named after A. Juraev of the National Academy of Sciences of Tajikistan). The application of the scientific result made it possible to obtain asymptotic formulas for the number of representations of a natural number in the form of a sum of five squares with almost equal terms of number theory.

Approbation of the research results. The results of this dissertation were discussed at 7 international and 4 republican scientific and scientific-practical conferences.

Publication of research results. 19 scientific works were published on the topic of the dissertation, including 7 scientific articles in scientific publications recommended for publication of the main scientific results of doctoral dissertations of the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan, including 2 of them published in prestigious foreign journals and 5 in republican ones. In addition, 1 scientific article was published in the reports of the National Academy of Sciences of Tadjikistan.

Structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 102 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I bo‘lim (1 часть; part 1)

1. Аллаков И., Абраев Б.Х. Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами. // Чебышевский сборник, 2023, том 24, выпуск 2, с.15-37. (3. Scopus. IF=0.31).
2. Abrayev B.KH., Allakov I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. // Uzbek Mathematical journal. 2020. №3 p. 16-24. (01.00.00, № 6).
3. Абраев Б.Х. Исследование сингулярного ряда в задаче об одновременном представлении пары чисел суммой четырёх простых чисел. // Научный вестик. Самаркандский государственный университет. 2022. №1 (131), с.68-77. (01.00.00, № 2).
4. Абраев Б.Х., Аллаков И. О разрешимости одной системы линейных уравнений с целыми коэффициентами в простых числах. // Бюллетень Института математики. 2022, т. 5, №6, с.37-49. (01.00.00, № 17).
5. Абраев Б.Х. О количестве решений системы линейных уравнений с четырьмя простыми переменными. // Научный вестник НамГУ 2023. №7 с.81-90. (01.00.00, № 14).
6. Рахмонов З., Аллаков И., Абраев Б.Х., Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми. // Бюллетень Института математики. 2023, т.6. №4. .122-148.(01.00.00, № 17).
7. Рахмонов З., Аллаков И., Абраев Б.Х., Обобщение тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми. // Чебышевский сборник 2023 т.24 №4 с.264-298. (3. Scopus. IF=0.31).

II bo‘lim (2 часть; part 2)

8. Рахмонов З., Аллаков И., Абраев Б. Х. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми. // Доклады национальной академии наук Таджикистана. 2023. т. 66. №5-6 с.257-261.
9. Аллаков И., Абраев Б.Х. О количестве решении пары линейных уравнений с тремя простыми переменными. // Республиканской научной конференции «Современные проблемы по математики». Карши. 22-23 апреля, 2011.с.70-73.
10. Allakov I., Abrayev B. Kh. On simultaneous representation of two natural numbers by sum of three primes. // “The International Training and Seminars on Mathematics”. Samarkand.3-5 June, 2011. p. 92-93
11. Аллаков И., Абраев Б.Х. Некоторые оценки снизу для количества представлении пары чисел суммой простых. // Материалы VIII Международный конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», Саратов.12 -17 сентября, 2011. с.4-5.

12. Аллаков И., Абраев Б.Х. О Зигеловом нуле L-функции Дирихле. Материалы второго Международный Российский-Узбекский симпозиума. “Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики”. Эльбрус. 28-мая по 1-июня, 2012. с.38-39.
13. Абраев Б.Х., Аллакова Д.И. О решении системы линейных уравнений в простых числах. // Материалы научно-технической конференции “Прикладная математика и информационная безопасность”. Ташкент. 28-30-апреля, 2014. с.50-54.
14. Аллаков И. Абраев Б.Х. Сафаров А.Ш. О количестве $k-$близнецев в данном интервале. Международной научной конференции «Актуальные вопросы математики». 22-23 апреля 2016. Карши. с. 296-299.
15. Абраев Б.Х., Хасанова Д. О количестве чисел представимых в виде суммы $k-$ ых степеней натуральных чисел. // Международной научной конференции “Актуалные проблемы прикладной математики”. Ташкент. 2018. с.102-103.
16. Allakov I., Abrayev B.Kh. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. // XVIII International Conference. “Algebra, number theory and discrete geometry modern problems, applications and problems of history”. Tula. September 23-26, 2020. p.6-8.
17. Аллаков И., Абраев Б.Х. Об условиях разрешимости пары линейных уравнений с четырьмя неизвестными в простых числах. // В сборнике материалов международной конференции по математике и информатике. НУУз.Ташкент. 12-15 октября. 2020. с.169-170.
18. Абраев Б.Х. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах. // Республиканской научной конференции “Современные проблемы математики: проблемы и решения”. Термез. 21-22 октября 2020. с. 389-392.
19. Аллаков И., Абраев Б.Х. О количестве решении пары линейных уравнений с четырмя простыми переменными. // Республиканской научно-практической конференции “Актуальные вопросы алгебры и анализа”. Термез. 18-19 ноября, 2022. с. 72-73.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida 2022 yil 18-martda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,25. Adadi 100 dona. Buyurtma № 19/24.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.