**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

MATEMATIKA INSTITUTI

MURZAMBETOVA MEXRIBAN BEGDULLAEVNA

YUQORI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN TO'G'RI VA TESKARI MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

UDK: 517.95

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

MURZAMBETOVA MEXRIBAN BEGDULLAEVNA

YUQORI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN TO‘G‘RI VA TESKARI MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO’YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B2023.3.PhD/FM 912 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V. I. Romanovskiy nomidagi matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, ingiliz, rus (резюме)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://kengash.mathinst.uz) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Baltayeva Umida Ismoilovna fizika-matematika fanlari doktori
Yetakchi tashkilot:	**Urganch davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil «19» dekabr soat 17:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9- uy. Tel.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (172-raqami bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9- uy. Tel.: (+99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil «5» dekabr kuni tarqatildi.
(2023-yil «5» dekabr dagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U. A. Roziqov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., pro fessor

J. K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A. A. Azamov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati. Jahon miqyosida olib borilgan ko‘plab ilmiy va amaliy tadqiqotlar natijasida vujudga keladigan muammolarni yechimlari yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni o‘rganish muhimligini ko‘rsatadi. Keyingi yillarda mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy qo‘llanilishiga ega bo‘lgan matematika, fizika, geologiya, biologiya fanlariga katta ahamiyat berilmoqda. Xususan, amaliy matematikaning asosiy yo‘nalishlaridan biri bo‘lgan «differensial tenglamalar» va «matematik fizika tenglamalari» fanini rivojlantirishga alohida e’tibor qaratilmoqda. So‘nggi o‘n yilliklarda kasr tartibli hosilalari bilan berilgan differensial tenglamalar nazariyasi, birinchi navbatda, fan va texnologiyaning uzoq ko‘rinadigan ko‘plab sohalarida qo‘llanilishi tufayli katta mashhurlikka erishdi. Ushbu ilmiy tadqiqotning maqsadi parabolik va giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy va teskari masalalarni yechishdan iborat bo‘lib, bu yerda tenglamaning elliptik qismi N o‘lchovli sohada aniqlangan ixtiyoriy differensial operatordir.

Xususiy hosilali yuqori tartibli differensial tenglamalarni yechishni o‘rganish bilan bir qatorda tenglamaning koeffitsiyentlarini, uning o‘ng tomonini va kasr tartibli hosilaning tartibini aniqlashga oid teskari masalalarni yechishni o‘rganish juda muhim ahamiyatga ega. Teskari masalalarni o‘rganish bizga yuqori tartibli tenglama bilan berilgan jarayonlarni o‘rganish, tahlil qilish va boshqarish imkoniyatlarini beradi. Masalan, issiqlik tarqalish jarayonlarini olsak, chegaraviy funksiyani bilishimiz bizga issiqlik tarqalishini chegaradan boshqarish imkoniyatini beradi. Bunga o‘xshash ko‘plab misollar keltirish mumkin. Biz agar vaqt bo‘yicha kasr tartibli tenglamani qarasak, agar kasr tartibli hosilaning tartibi 1 va 2 oralig‘ida bo‘lsa, bir vaqtda diffuziya va to‘lqin tarqalish jarayonlarini aks ettiradi, agar 0 va 1 oralig‘ida bo‘lsa, sekin sodir bo‘luvchi diffuziya jarayonlarini ifodalaydi. Masalan, tabiatda juda ko‘plab uchraydigan virus tarqalish jarayonlarini olish mumkin. Shuning uchun ham kasr tartibli tenglamalarni o‘rganish muhim ahamiyatga egadir.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy qo‘llanilishiga ega bo‘lgan matematika, fizika va optimal boshqaruv yo‘nalishlariga katta e’tibor berilmoqda. Xususan, kasr tartibli xususiy hosilalali tenglamalarini va yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni o‘rganishga alohida ahamiyat berildi. Chunki, bu nazariya mexanika, elektronika, boshqaruv nazariyasi, fiziologiya va biologiyadagi ko‘plab hodisalarning xatti-harakatlarini tushunishga yordam beradi. Yuqorida ta’kidlanganidek, muhim yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish, matematika fanining asosiy vazifasi va faoliyat yo‘nalishi etib belgilandi[1].

Mazkur dissertatsiya ishining mavzusi va ob’yekti, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini

---

[1] O’zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi «O’zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish to’g’risida»gi №292- sonli qarori.

yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida” gi Farmoni, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida” gi, 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-son “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora tadbirlari to‘g‘risida” gi va 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi qarorlari va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora tadbirlari to‘g‘risida” PQ-4708-sonli Qarori hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Masalaning o‘rganilganlik darajasi. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarning klassik yechimlarining mavjud va yagonaligini taniqli matematiklar V.A.Il’in., O.A.Ladyjenskaya., P.E.Sobolevskiy., M.A.Krasnosel’skiy va boshqalarning ishlarida ko‘rish mumkin. Il’inning 1960 yilda nashr etilgan fundamental asarida ushbu yo'nalishdagi ishlarga izoh berilgan va muallifning so‘nggi natijalari keltirilgan. Bu yerda elliptik qismi toikkinchi tartibli simmetrik differensial ifoda bo‘lgan tenglamalarga Furye usuli qo‘llaniladi. Elliptik qism ikkidan yuqoriroq tartibga ega bo‘lgan holda Krasnoselskiyning taniqli monografiyasida o‘rganilgan.

Shuning bilan birga hozirgi vaqtda aralash tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalar differensial tenglamalar nazariyasining jadal rivojlanayotgan tarmoqlaridan biri hisoblanadi. Bu yo‘nalishda olingan natijalarga misol sifatida Sh.O.Alimov, R.R.Ashurov, S.R.Umarov, B.J.Kadirkulov, E.T.Karimov, R.T.Zunnunov va hokazolarning ishlarini keltirish mumkin.

So‘nggi o‘n yillikda kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar o‘zining fan va texnikaning ko‘p sohalaridagi tadbiqi tufayli katta ahamiyatga ega. Kasr tartibli xususiy hosilali aralash tipdagi to‘g‘ri va teskari masalalar kam o‘rganilgan. Kasr tartibli hosilaga ega tenglamalarni o‘rganganda har doim ham uning tartibi ma’lum bo‘lavermaydi va uni o‘lchash uchun asboblar yo‘q. Shuning uchun olimlar kasr tartibli hosilaning tartibini aniqlash bo‘yicha teskari masalalarni chuqur o‘rganishmoqda. Alimov Sh.A, Ashurov R.R, Fayziev Yu.E, Umarov Slar subdiffuziya yoki issiqlik tarqalish tenglamalari uchun tartibini aniqlash bo‘yicha teskari masalalarni o‘rgangan. Lekin aralash tipga tegishli bo’lgan tenglama uchun hosilaning tartibini aniqlash masalasi faqat gina Ashurov R.R va Zunnunov R.T larning ishida sohaning yuqori qismi va quyi qismida ham kasr tartibli hosilaning tartibi noma’lum bo‘lgan holda o‘rganilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta‘lim yoki ilmiy-

tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bogʻliqligi. Dissertatsiya ishi OʻzR FA Matematika instituti «Differensial tenglamalar va uning tadbiqlari» laboratoriyasining ilmiy-tadqiqot ishlarining rejalashtirilgan mavzusiga va OʻzR FA matematika instituti F-FA-2021-424 "Butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechish" ilmiy grantiga muvofiq amalga oshirildi.

Tadqiqot maqsadi ixtiyoriy tartibli elliptik operator va kasr tartibli hosila qatnashgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun toʻgʻri va teskari masalalarning yechimlarini mavjudligi va yagonaligini koʻrsatishdan iborat.

Tadqiqot vazifalari:

ixtiyoriy N oʻlchamli sohada aniqlangan va elliptik qismi oʻz-oʻziga qoʻshma, musbat, ixtiyoriy operatordan iborat aralash tipga tegishli boʻlgan tenglama uchun chegaraviy masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan;

N oʻlchamli sohada aralash tipga tegishli boʻlgan tenglama uchun uning oʻng tomonini aniqlashga nisbatan teskari masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan, hamda umumlashgan yechim qurilgan;

berilgan sohada aniqlangan va elliptik qismi Laplas operatoridan iborat, shuningdek Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli hosilaga ega tenglama uchun toʻgʻri va teskari masalalar yagona yechimga ega ekanligi isbotlangan;

elliptik qismi oʻz-oʻziga qoʻshma musbat abstrakt operator boʻlgan va Kaputo manosidagi kasr tartibli hosilaga ega aralash tipga tegishli tenglama uchun toʻgʻri masala va shu tenglama uchun kasr tartibli hosila tartibini aniqlashga nisbatan teskari masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan.

Tadqiqotning ob'yekti: Kaputo ma'nosidagi hosilaga ega tenglama, Mittag-Leffler funksiyalari, spektral parametrli tenglamalar, vaqt boʻyicha kasr tartibli tenglamalar, tenglamaning oʻng tomoni yoki hosila tartibini aniqlash boʻyicha teskari masalalar.

Tadqiqotning predmeti: N oʻlchamli sohada oʻz-oʻziga qoʻshma ixtiyoriy elliptik operator va kasr tartibli hosilani oʻz ichiga olgan differensial tenglamalar uchun toʻgʻri va teskari masalalarni oʻrganishdan iborat.

Tadqiqotning usullari: Dissertatsiya ishida matematik analiz, funksional analiz, differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalari usullaridan foydalanilgan. Matematik fizika tenglamalari usullaridan oʻzgaruvchilarni ajratish usuli qoʻllaniladi hamda Hilbert fazosida xos funksiyalar sistemasini toʻla ekanligi tadbiq qilinadi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ixtiyoriy N oʻlchamli sohada aniqlangan va elliptik qismi oʻz-oʻziga qoʻshma, musbat, ixtiyoriy operatordan iborat aralash tipga tegishli boʻlgan tenglama uchun chegaraviy masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan;

N oʻlchamli sohada aralash tipga tegishli boʻlgan tenglama uchun uning oʻng tomonini aniqlashga nisbatan teskari masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan, hamda umumlashgan yechim qurilgan;

berilgan sohada aniqlangan va elliptik qismi Laplas operatoridan iborat, shuningdek Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosilaga ega tenglama uchun to‘g‘ri va teskari masalalar yagona yechimga ega ekanligi isbotlangan;

elliptik qismi o‘z-o‘ziga qo‘shma musbat abstrakt operator bo‘lgan va Kaputo manosidagi kasr tartibli hosilaga ega aralash tipga tegishli tenglama uchun to‘g‘ri masala va shu tenglama uchun kasr tartibli hosila tartibini aniqlashga nisbatan teskari masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat: Tadqiqot ishida kasr tartibli differensial va xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish uchun to‘g‘ri va teskari masalalar takomillashtirilgan. Shuningdek qo‘llanilgan usullar turli xil fizik-kimyoviy, biologik jarayonlarni o‘rganishda qo‘llanilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi: masalalarning korrekt qo‘yilishi, qat’iy matematik usullarning qo‘llanilganligi, matematik isbotlarning to‘la bajarilganligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ishda olingan ilmiy natijalar yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining to‘g‘ri va teskari masalalarini keyinchalik o‘rganishlarda qo‘llanilishi mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarning amaliy ahamiyati fizik-kimyoviy biologik, tibbiy jarayonlarni o‘rganishda qo‘llanilishi bilan belgilanadi. Xususan kasr tartibli xususiy hosilaga ega teskari masalalar koronavirusning tarqalish jarayonini aniqlashga erishishga yordam berishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalar bo‘yicha olingan natijalar asosida:

Ixtiyoriy tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarning klassik yechimi mavjudligidan №AAAA-A19-119072290002-9 raqamli «Kamchatkaning tabiiy ofatlari-yer silkinishi va vulqon otilishi» mavzusidagi xorijiy grant loyihasida atmosferadagi radonlari taqsimlanishini tekshirishda foydalanilgan (Kamchatka davlat universitetining 2023-yil 15-sentabrdagi №18-12-sonli malumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi geofizikaning teskari masalalarni yechish algoritmlarini ishlab chiqish imkonini bergan;

Elliptik qismida o‘z-o‘ziga qo‘shma musbat operator qatnashgan tengamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarning yechimlarining mavjudligi va yagonaligidan YO‘T-Ftex-2018-149 raqamli «Chiziqsiz chegaraviy shartlar bilan berilgan ikki komponentli muhitlarda fil’trasiya jarayonini matematik modellashtirish» mavzusidagi fundamental loyihada aralash tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni yechishda foydalanilgan. (O‘zbekiston Milliy universitetining 2023 yil 29-sentyabrdagi №04/11-6138 sonli bayonnomasi) ilmiy natijalarning qo‘llanishi Kaputo ma’nosidagi hosilaga ega bo‘lgan differensial tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarning klassik yechimini topish, yechimdagi qatorlarning absolyut va tekis yaqinlashishini isbotlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 9 ta ilmiy-amaliy konferensiyalarda shulardan 6 tasi xalqaro, 3 tasi Respublika miqyosidagi ilmiy konferensiyalarda muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e‘lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 17 ta ilmiy ish chop etilgan bo’lib, shulardan 8 ta maqola O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiyasi komissiyasining falsafa doktori ilmiy darajasini olish uchun, dissertatsiya himoyasi uchun ko’rsatilgan ilmiy nashriyotlar ro’yxatiga kiritilgan, ulardan 2 ta maqola SCOPUS ma’lumotlar bazalarida indekslangan jurnallarda, 6 tasi respublika ilmiy jurnallarida chop qilingan.

Dissertatsiyaning hajmi tuzilishi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiya hajmi 116 betdan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurligi asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy va mahalliy ilmiy tadqiqotlar tahlili bo‘yicha umumiy ma’lumot berilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi, tadqiqot maqsadi va vazifalari, ob’yekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari ochib berilgan. Olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati bayon etilgan, ilmiy-tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzulishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Mazkur dissertatsiya ishi 2 bo‘limdan iborat bo‘lib, birinchi bo‘limga birinchi va ikkinchi boblar bag‘ishlangan va u yerda model tenglamalar qaralgan. Shuningdek, bunday tenglamalar uchun qanday masalalar korrekt bo‘lishi o‘rganilgan. Bu yerda tenglamalarning elliptik qismi to‘rtinchi tartibli hosiladan iborat. Lekin, to‘rtinchi tartibli hosila o‘rniga ixtiyoriy musbat elliptik operator yoki o‘z-o‘ziga qo‘shma musbat abstrakt operator qo‘yish mumkin. Chunki, biz masala yechishda Furye usulini qo‘llaymiz. Ma’lumki bu usulda operator ko‘rinishi ahamiyatga ega emas bo’lib, faqat operatorning qaralayotgan fazoda to’la orto-normal xos funksiyalar sistemasiga ega bo‘lishi yetarli.

Dissertatsiyaning ikkinchi bo‘limi yani uchinchi bobida elliptik qismi o‘z-o‘ziga qo‘shma, musbat, ixtiyoriy elliptik A operatoridan va ba’zi masalalarda Laplas operatoridan iborat, aralash tipga tegishli bo‘lgan tenglamalar o‘rganilgan. Ixtiyoriy tartibli musbat elliptik operatorni qaraganda biz M.A.Krasnosel’skiy va boshqalar monografiyasidagi natijadan foydalandik. Lekin bu yerda bir muammo paydo bo’ldi: masala yechimga ega bo‘lishi uchun berilgan funksiyalar operatorning kasr tartibli darajasining aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lishi kerak, degan shart kelib chiqdi. Ma’lumki bu shartni amalda tekshirish oson emas. Shu sababli bu paragrafda biz elliptik qismi sifatida R^N fazoda aniqlangan o‘zgarmas koeffisientli bir jinsli elliptik operatorni olamiz. Bu holda elliptik operatorning kasr tartibli darajasi aniqlanish sohasi ma’lum tartibli Sobolev fazosi bilan ustma-ust tushishi ko‘rsatildi. Shu bilan birga tenglamaning elliptik qismi manfiy bo‘lmagan operatordan iborat bo‘lsa, masala yechimi qanday ko‘rinishda bo‘lishi o‘rganildi. Keyingi paragrafda elliptik qismi Laplas operatordan iborat bo‘lgan holda chegaraviy masala qaralgan. Qayd etish kerakki, bu masala avvalgi ko‘rilgan masalalardan farq qiladi. Bu holda yechim mavjudligini ko’rsatishda V.A.Il’inning fundamental natijasidan foydalandik. Ushbu bobning oxirgi paragrafida elliptik qismida ixtiyoriy musbat abstrakt operator ishtirok etgan tenglama uchun to‘g‘ri va teskari masalalar o‘rganilgan.

Yuqoridagi masalalarda kasr tartibli hosila ishtirok etgan tenglama qaraldi va kasr tartibli hosila sifatida Kaputo ma’nosidagi hosila olindi.

Dissertatsiyaning **“To‘rtinchi tartibli spektral parametrga ega tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalar**” deb nomlangan birinchi bobida to‘g‘ri to‘rtburchak sohada to‘g‘ri masala va tenglamaning o‘ng tomonini aniqlash bo‘yicha teskari masalalar o‘rganilgan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida, asosiy natijalarni olish uchun zarur bo‘lgan asosiy tushunchalar va ba’zi yordamchi formulalar keltirilgan.

Ushbu bobning ikkinchi paragrafida, $\Omega = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < p, 0 < t < T\}$ to‘g‘ri to‘rtburchak sohada λ spektral parametrga ega

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda u = f(x,t) \tag{1}$$

tenglama uchun 2 ta chegaraviy masala yechimining mavjudligi va yagonaligi qaralgan. Birinchi masalada (1) tenglamaning quyidagi

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = 0 \text{ при } x = 0, x = p, 0 \le t \le T,\ k = 0,1, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,T) = 0,\ 0 \le x \le p \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish o‘rganilgan bo‘lsa, ikkinchi masala esa (1) tenglamaning (2) va

$$u_t(x,0) = 0,\ u(x,T) = 0,\ 0 \le x \le p. \tag{3’}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini o‘rganishga bag‘ishlangan. Ikkala masala ham o‘z-o‘ziga qo‘shma. Birinchi masala batafsil o‘rganilgan, yani (1)-(3) masala yechimi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi isbotlangan. Ikkinchi masala ham birinchi masalaga o‘xshash o‘rganiladi.

Ushbu bobning uchinchi paragrafida, Ω sohada spektral parametrga ega aralash tipdagi $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \operatorname{sgn} t \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda u = f(x,t)$ tenglama uchun (2) chegaraviy va $u_t(x,+0) = u_t(x,-0),\ 0 \le x \le p$ ulash shartlarini qanoatlantirivchi yechimini topish masalasi o‘rganildi.

Ushbu bobning to‘rtinchi paragrafida, Ω sohada spektral parametrga ega aralash tipdagi tenglama uchun tenglamaning o‘ng tomonini aniqlash bo‘yicha teskari masala o’rganilgan.

Masalaning qo‘yilishi: $\Omega = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < p, -T < t < T\}$ sohada

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\operatorname{sgn} t\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda u = f(x) \tag{4}$$

tenglamaning (2) va

$$u(x,-T)=\varphi(x),\ \ u(x,T)=\psi(x),\ 0\le x\le p, \tag{5}$$

chegaraviy shartlarni hamda

$$u_t(x,+0)=u_t(x,-0),\ 0<x<p \tag{6}$$

ulash shartini qanoatlantiruvchi $\left(u(x,t), f(x)\right)$ regulyar yechimi topilsin. Bu yerda $\varphi(x), \psi(x)-$berilgan, yetarlicha silliq funsiyalar. Teskari masalaning regulyar yechimining yagonaligi spektral usul orqali isbotlangan.

1-teorema. Agar $\varphi(x)\in C^5\left(\bar{\Omega}\right),\ \psi(x)\in C^5\left(\bar{\Omega}\right),\ \ \varphi^{(2m)}(0)=\varphi^{(2m)}(p)=0,$ $\psi^{(2m)}(0)=\psi^{(2m)}(p)=0,\ \ m=0,1,2,\ \lambda<0$ yoki $0<\lambda<\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{p}\right)^4$ shartlar bajarilsa, u holda (4), (2), (5), (6) teskari masala yagona yechimga ega.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi **“Kichik hadli to‘rtinchi tartibli tenglamalar uchun chegaraviy masalalar deb”** deb nomlangan.

Birinchi paragrafda Ω to‘g‘ri to‘rtburchak sohada kichik hadli to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun chegaraviy masala qaralgan.

Berilgan $\Omega=\left\{\left(x,t\right): 0<x<p,\ 0<t<T\right\}$ to‘g‘ri to‘rtburchakda

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c(x,t)u(x,t)=0 \tag{7}$$

tenglamani

$$u(0,t)=0,\ \ u(p,t)=0,\ \ \ 0\le t\le T, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}=0 \text{ при } x=0, x=p, 0\le t\le T,\ k=0,1, \tag{9}$$

shartlar bilan ko‘rib chiqilgan.

Bu yerda $c(x,t)\ f(x,t)-$funksiyalar $\bar{\Omega}$ da berilgan silliq funksiyalar. (7)-(9) masalaning yagonaligi uchun aprior baho olingan.

1-ta’rif. Agar $u\in C^{2,1}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega\right)$ shartlar bajarilib, $u(x,t)$ funksiya (8)-(9) shartlarni qanoatlantirsa, u holda $u(x,t)$funksiya (7)-(9) masalaning regulyar yechimi deyiladi.

2-teorema. Agar $f(x,t),\ c(x,t)\in C^{3.0}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right),\ \frac{\partial^{2k} f(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k} f(p,t)}{\partial x^{2k}}=0,$ $\frac{\partial^{2k} c(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k} c(p,t)}{\partial x^{2k}}=0,\ \ k=0,1$ bo‘lib, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\in Lip_\alpha\left[0,p\right], \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}\in Lip_\alpha\left[0,p\right]$ $0<\alpha<1,$ t o‘zgaruvchi bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda (7)-(9) masalaning regulyar yechimi mavjud.

Ushbu bobning ikkinchi paragrafida, to‘g‘ri to‘rtburchak sohada kichik hadli tenglama uchun chegaraviy masala qaralgan.

Berilgan Ω sohada

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial u}{\partial t}-c(x,t)u(x,t)=f(x,t) \qquad (10)$$

tenglamaning

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}=0 \text{ при } x=0, x=p, 0\le t\le T,\ k=0,1, \qquad (11)$$

chegaraviy va

$$u(x,0)=0,\ 0\le x\le p \qquad (12)$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi o‘rganilgan. Masala yechimining yagonaligi aprior baho olish orqali isbotlangan. Qo‘yilgan (10)-(12) masalaga Fur’ye usulini qo‘llash natijasida

$$u(x,t)=F(x,t)+\int_0^t\int_0^p R(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

ko‘rinishida formal yechimni olamiz. Bu yerda

$$R(x,t;\xi,\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}K_i(x,t;\xi,\tau),$$

$$K_i(x,t;\xi,\tau)=\int_0^t\int_0^p K_1(x,t;\xi_1,\tau_1)K_{i-1}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)d\xi_1 d\tau_1.$$

$$K_1(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^4(t-\tau)}X_n(x)X_n(\xi)c(\xi,\tau).$$

3-teorema. Agar $f(x,t)\in C_{x,t}^{5.0}\left(\bar{\Omega}\right)$, $\frac{\partial^{2k} f(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k} f(p,t)}{\partial x^{2k}}=0$, $c(x,t)\in C_{x,t}^{5.0}\left(\bar{\Omega}\right)$, $\frac{\partial^{2k} c(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k} c(p,t)}{\partial x^{2k}}=0$, $k=0,1,2$ shartlar bajarilsa, u holda (10)-(12) masalaning regulyar yechimi mavjud.

Dissertatsiyaning uchinchi bobi “**Ixtiyoriy tartibli aralash tipga tegishli tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalar**” deb nomlangan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida, N-o‘lchamli sohada o‘z-o‘ziga qo‘shma musbat aniqlangan, yuqori tartibli elliptik operator qatnashgan tenglama uchun to‘g‘ri masala o‘rganilgan.

Mayli $\Omega\subset R^N$ yetarlicha silliq $\partial\Omega$ chegaraga ega bo‘lgan chegaralangan soha bo’lsin, $A(x,\mathrm{D})=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha$ - esa $a_\alpha(x)$ yetarlicha silliq koeffitsientga ega, bunda $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N\right)-$ mul’tiindeks va $D=\left(D_1,\mathrm{D}_2,...,\mathrm{D}_N\right)$, $D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$ bo‘lgan shuningdek $m=2l$ tartibli musbat aniqlangan o‘z-o‘ziga qo‘shma elliptik differensial operator.

Quyidagi tenglamani

$$A(x,\mathrm{D})\mathrm{u}(x,\mathrm{t})+\mathrm{sgnt}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,\mathrm{t}),\ x\in\Omega, t\in[-L,0)\cup(0,\mathrm{L}],\ L\equiv const>0 \quad (13)$$

$$u_t(x,+0)=u_t(x,-0) \tag{14}$$
ulash sharti va
$$B_j u(\mathrm{x},\mathrm{t})=\sum_{|\alpha|\le m_j} b_{\alpha,j}(\mathrm{x})\mathrm{D}^{\alpha}u(\mathrm{x},\mathrm{t})=0,\quad 0\le m_j\le m-1,\ j=1,2,...,l;\ x\in\partial D. \tag{15}$$
chegaraviy shartlar bilan qaraymiz. Bu yerda $\mathrm{b}_{\alpha,j}\left(x\right)$ - koeffitsientlar, berilgan funksiyalar.

2-ta'rif. (13)-(15) to‘g‘ri masalaning klasiik yechimi deb, $\overline{\Omega}\times\left[-\mathrm{L},0\right)\cup\left(0,\mathrm{L}\right]$, $\mathrm{L}\equiv const>0$ sohada $u(x,t)$ funktsiya va uning (13) tenglamada qatnashgan barcha tartibdagi hosilalalari uzluksiz bo‘lgan, shuningdek, masalaning barcha shartlarini klassik ma’noda qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funktsiyaga aytamiz.

Masala yechimining yagonaligi spektral usul yordamida isbotlangan.

(13)-(15) masalaning formal yechimini qurish uchun klassik Fur’ye usulidan foydalanildi. Agar masalaga Fur’ye usulini qo‘llasak, quyidagi spektral masalaga kelamiz:
$$\begin{cases} A(x,\mathrm{D})\nu(x)=\lambda\nu\left(x\right), x\in\Omega; \\ B_j\nu(x)=0,\ j=1,2,...,l;\ \ x\in\partial D. \end{cases} \tag{16}$$

S. Agmon ishida teskari operatorning kompaktligini, ya’ni Ω sohaning $\partial\Omega$ chegarasi hamda A va B_j operatorlarning koeffitsiyentlari uchun (16) spektral masala $L_2(\Omega)$ da $\{v_k(x)\}$, $k\ge 1$ xos funksiyalar ortonormal to‘la sistemasi va manfiy bo‘lmagan λ_k xos qiymatlar to‘plamiga ega bo‘lishini kafolatlovchi zaruriy shartlarni topdi. Bundan keyin biz ushbu shartlar bajarilgan deb faraz qilamiz.

(13)-(15) masala yechimi uchun mavjudlik teoremasini keltirishdan oldin quyidagi ayrim ta’riflarni keltiramiz.

Ixtiyoriy haqiqiy τ soni uchun $L_2(\Omega)$ fazoda
$$\hat{A}^{\tau}g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\tau}g_k v_k(x),\ g_k=(\mathrm{g},v_k)$$
qoida bo‘yicha ta’sir qiluvchi $\hat{A}^{\tau}$ operatorni kiritamiz. Oson ko‘rish mumkinki
$$D\left(\hat{A}^{\tau}\right)=\left\{g\in L_2\left(\Omega\right):\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2\tau}\left|g_k\right|^2<\infty\right\}$$
aniqlanish sohaga ega bo’lgan $\hat{A}^{\tau}$ operator o‘z-o‘ziga qo‘shma.

Agar A orqali $L_2\left(\Omega\right)$ fazoda quyidagi aniqlanish sohaga $D(A)=\left\{g\in C^m(\overline{\Omega}):\mathrm{B}_j\,g(x)=0,\ j=1,...,l,\ x\in\partial D\right\}$ ega va $Ag(x)=A(x,D)g(x)$ qoida orqali ta’sir qiluvchi operatorni belgilasak, u holda $\hat{A}=\hat{A}^1$ operator $L_2\left(\Omega\right)$ fazoda A operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shma kengaytmasi bo‘ladi.

4-teorema. Aytaylik $\sigma>\dfrac{N}{2m}$ va $f(x,t)\in D(\hat{\mathrm{A}}^{\sigma})$ bo’lib,

$$F(t)=\left\|\hat{A}^{\sigma} f(x,t)\right\|_{L_2(\Omega)}$$

funksiya $[0,T]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin. U holda (13)-(15) masalaning klassik yechimi mavjud va u quyidagi ko‘rinishga ega:

$$u(x,\mathrm{t})=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{v_k(x)}{\lambda_k} f_k(0)\mathrm{e}^{-\lambda_k t}+v_k(x)\int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right),\ t>0,\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{v_k(x)}{\lambda_k} f_k(0)\mathrm{e}^{\lambda_k t}+v_k(x)\int\limits_t^0 f_k(\tau)e^{-\lambda_k(\tau-t)}d\tau\right),\ t<0.\end{cases}$$

Bu yerda $f_k(\mathrm{t})$- $f(x,t)$ funksiyaning Furye koeffitsient va $\{v_k(x)\}$ xos funksiyalar sistemasi bo‘yicha $L_2(\Omega)$ fazoda aniqlangan skalyar ko‘paytma.

Masala yechimining mavjudligini isbotlashda Krasnoselskiy va boshqalarning quyidagi lemmasi muhim rol o‘ynaydi.

1-lemma. Aytaylik, $\tau>\dfrac{|\alpha|}{m}+\dfrac{N}{2m}$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $|\alpha|\le m$ lar uchun $D^{\alpha}\hat{A}^{-\tau}$ operator $L_2(\Omega)$ ni $C(\overline{\Omega})$ ga uzluksiz akslantiradi va quyidagi baholash o‘rinli bo‘ladi:

$$\| D^{\alpha}\hat{A}^{-\tau} g\|_{C(\Omega)}\le C\| g\|_{L_2(\Omega)}.$$

Endi (13)-(15) masalani elliptik qismi nomanfiy elliptik operatordan iborat bo‘lgan holda T^N to‘rda qaraymiz.

Aytaylik $A(\mathrm{D})=\sum\limits_{|\alpha|=m} a_{\alpha}D^{\alpha}$ –o‘zgarmas koeffitsientli, simmetrik elliptik differensial ifoda bo‘lsin. Quyidagi masalani qaraymiz:

$$A(\mathrm{D})\mathrm{u(x,t)}+\mathrm{sgnt}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,\mathrm{t}),x\in T^N,t\in[-L,0)\cup(0,\mathrm{L}],L\equiv const>0; \quad (17)$$

$$u(x,+0)=u(x,-0),\ u_t(x,+0)=u_t(x,-0),\ \ x\in T^N. \quad (18)$$

(15) ko‘rinishdagi chegaraviy shart o‘rniga $u(x,t)$ funksiya har bir x_j o‘zgaruvchi bo‘yicha $2\pi-$ davriy bo‘lsin deb faraz qilamiz.

$C^m(R^N)$ fazodan olingan 2π-davriy funksiyalarda aniqlangan $A(D)$ operatorni A orqali belgilaymiz. Bu operatorning $L_2(T^N)$ fazodagi yopilmasi $\hat{A}_T$ o‘z-o‘ziga qo‘shma va u to’la orto normalangan $\{(2\pi)^{-\frac{N}{2}}e^{inx}\}$ xos funksiyalar sistemasiga, $A(n), n\in Z^N$ xos sonlarga ega. Fon-Neymanning spektral teoremasiga ko‘ra $\tau\ge 0$ bo‘lgan holda $\hat{A}^{\tau}$ operator $\hat{A}^{\tau}g(x)=\sum_{n\in Z^N}A^{\tau}(n)g_n e^{inx}$ qoida bo‘yicha ta’sir qiladi. Bu yerda g_n - Furye koeffeitsient. Bu operatorning aniqlanish sohasi $\hat{A}^{\tau}g(x)\in L_2(T^N)$ shartdan kelib chiqib, quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$D(\hat{A}^{\tau})=\left\{g\in L_2(T^N):\sum_{n\in Z^N}A^{2\tau}(n)\left|g_n\right|^2<\infty\right\}. \quad (3.2.34)$$

Agar $g \in L_2(T^N)$ sinfdan olingan funksiyalar uchun quyidagi norma

$$\|g\|^2_{L_2^a(T^N)} = \left\| \sum_{n\in Z^N} (1+|n|^2)^{\frac{a}{2}} g_n e^{inx} \right\|^2_{L_2(T^N)} = \sum_{n\in Z^N} (1+|n|^2)^a g_n^2.$$

biror $a > 0$ haqiyiqiy son uchun chekli bo‘lsa, u holda bu sinf Liuvill sinfi $L_2^a(T^N)$ deb ataladi. a butun so‘n bo‘lmagan hollari uchun bu fazo Liuvill fazosi deyiladi. Ta’kidlash joizki T^N torda $A(D)$ operator manfiy emas, yani birinchi xos son nolga teng bo‘lishi mumkin.

5-teorema. Aytaylik $a > \dfrac{N}{2m}$ va $f(x,t) \in L_2^a(T^N)$ bo‘lib,

$$F(t) = \| f(x,t)\|_{L_2^a(T^N)}$$

funksiya $[0,T]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin. U holda (17)-(18) masalaning yechimi mavjuv va u quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$u(x,\mathrm{t}) = \begin{cases} c_0 + \sum\limits_{n\neq 0} \dfrac{e^{inx}}{A(\mathrm{n})} f_n(0) \mathrm{e}^{-A(i\,\mathrm{n})t} + \sum\limits_{n\in Z^N} e^{inx} \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-A(i\,\mathrm{n})(t-\tau)} d\tau, \ t > 0, \\ c_0 + \sum\limits_{n\neq 0} \dfrac{e^{inx}}{A(\mathrm{n})} f_n(0) \mathrm{e}^{A(i\,\mathrm{n})t} + \sum\limits_{n\in Z^N} e^{inx} \int\limits_t^0 f_n(\tau) e^{-A(i\,\mathrm{n})(\tau-t)} d\tau, \quad t < 0, \end{cases}$$

va bu qator $x \in T^N$ da har bir $t \in [-\mathrm{L},\mathrm{L}]$ uchun absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo’ladi. Bu yerda c_0 $-$ixtiyoriy o‘zgarmas son.

Ushbu bobning ikkinchi paragrafida, N o‘lchamli sohada ixtiyoriy tartibli aralash tipdagi tenglama uchun teskari masala o‘rganilgan.

$\Omega \subset R^N$ sohada

$$A(x,D)u(x,t) + sgnt\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t), x \in \Omega, t \in (-T_1,T_2), \tag{19}$$

aralash tipdagi tenglamani

$$u(x,+0) = u(x,-0),\ u_t(x,+0) = u_t(x,-0),\ x \in \Omega, \tag{20}$$

ulash shartlari

$$B_j u(x,t) = \sum_{|\alpha|\le m_j} b_{\alpha,j}(x) D^\alpha u(x,t) = 0,\ 0 \le m_j \le m-1,\ j = 1,2,...,l;\ x \in \partial\Omega, \tag{21}$$

$$u(x,T_2) = \psi(x), x \in \Omega \tag{22}$$

chegaraviy shartlar va

$$u(x,-T_1) = \varphi(x), x \in \Omega, \tag{23}$$

boshlang‘ich shartlar bilan qaraymiz. Bu yerda $b_{\alpha,j}(x), \varphi(x)$ $-$berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

6-teorema. Aytaylik $\tau > 1 + \dfrac{N}{2m}$ va $\varphi(x), \psi(x) \in D(\hat{A}^\tau)$ bo‘lsin. U holda (19)-(23) teskari masala yagona $\{u(x,t), f(x,t)\}$ yechimga ega va bu yehim quyidagi ko’rinishga ega

$$u(x,t)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\psi_n-\varphi_n)e^{\lambda_n(T_2-t)}+\psi_n e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2\psi_n e^{\lambda_n T_2}+\varphi_n}{1+e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2e^{\lambda_n T_2}}v_n(x), & t>0,\\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\varphi_n-\psi_n)e^{\lambda_n(T_2+t)}+\psi_n e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2\varphi_n e^{\lambda_n T_2}+\varphi_n}{1+e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2e^{\lambda_n T_2}}v_n(x), & t<0,\end{cases}$$

$$f(x,t)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_n+\psi_n e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2\psi_n e^{\lambda_n T_2}}{1+e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2e^{\lambda_n T_2}}\lambda_n v_n(x), & t>0,\\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_n+\psi_n e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2\varphi_n e^{\lambda_n T}}{1+e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2e^{\lambda_n T_2}}\lambda_n v_n(x), & t<0.\end{cases}$$

Shuningdek, bu bobda (19)-(23) teskari masalaning umumlashgan yechimining mavjudligi haqidagi teorema ham isbotlangan.

7-teorema. Aytaylik $\varphi,\psi\in D(\hat{A}^1)$. U holda (19)-(23) teskari masalaning $(u(x,t),\ f(x,t))$ umumlashgan yechimi mavjud bo‘lib, quyidagi baholar o‘rinli:

$$\|A(x,D)u(x,t\|_{L_2(\Omega)}\le C\left(\|\varphi\|_1+\|\psi\|_1\right);$$

$$\|f\|_{L_2(\Omega)}\le C\left(\|\varphi\|_1+\|\psi\|_1\right);$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}\le C\left(\|\varphi\|_1+\|\psi\|_1\right).$$

(19)-(23) teskari masala, tenglamaning elliptik qismida manfiy bo‘lmagan operator ishtirok etgan holda (17)-(18) masalaga o‘xshash o‘rganilgan.

Ushbu bobning uchinchi paragrafida, Elliptik qismi Laplas operatoridan iborat va Kaputo ma’nosidagi hosilaga ega, aralash tipga tegishli bo‘lgan tenglama uchun to‘g‘ri masala va tenglamaning o‘ng tomonini aniqlashga nisbatab teskari masala o‘rganilgan. Qo‘yilgan masalalarning yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

Aytaylik, $h(t)$ funksiya $[0,\infty)$ da aniqlangan bo‘lsin. Agar

$$D_t^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha}}d\xi,\quad t>0$$

tenglikning o‘ng tomonidagi integral chekli bo‘lsa, u holda ushbu integralga $h(t)$ funksiyaning α kasr tartibli Kaputo ma’nosidagi hosilasi deyiladi, bunda $\Gamma(\alpha)$ Eylerning gamma funksiyasi va $0<\alpha<1$. Aralash tipga ega

$$\begin{cases}-\Delta u(x,t)+D_t^{\alpha}u(x,t)=f(x,t), & x\in\Omega,\ 0<t\le T_2,\\ -\Delta u(x,t)-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=f(x,t), & x\in\Omega,\ -T_1\le t<0\end{cases}\tag{24}$$

tenglamaning

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0,\tag{25}$$

chegaraviy va

$$u(x,+0)=u(x,-0),\ \ x\in\Omega,\tag{26}$$

$$D_t^{\alpha}u(x,+0)=u_t(x,-0),\ \ x\in\Omega. \tag{27}$$

ulash shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini o‘rganamiz.

3-ta’rif. (24)-(27) masalaning klassik yechimi deb, masalaning barcha shartlarini va quyidagi shartlarni

1) $D_t^{\alpha}u(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\times\left(0,T_2\right]\right)$;

2) $u_t(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\times\left[-T_1,0\right)\right)$;

3) $\Delta u(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\times\left[-T_1,0\right)\cup\left(0,T_2\right]\right)$;

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiyaga aytamiz. Bu yerda $T_1>0, T_2>0$, berilgan haqiqiy sonlar.

To‘g‘ri va teskari masalalarning yechimlari mavjudligini isbotlashda

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\tau}\,|\,h_k\,|^2,\quad \tau>\frac{N}{2}, \tag{28}$$

ko‘rinishdagi qatorlarning yaqinlashuvchi ekanligini o‘rganish kerak bo‘ladi, bunda h_k lar $h(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari. τ sonining butun qiymatlarida (28) qatorning yaqinlashishi uchun $h(x)$ funksiyaning qaysi $W_2^k(\Omega)$ klassik Sobolev fazolariga tegishli bo‘lishlik shartlari V.A. Il’inning fundamental ishida ko‘rsatilgan. Ushbu shartlarni keltirish uchun biz $\dot{W}_2^1(\Omega)$ sinfni kiritamiz. Ω sohada uzluksiz differensiallanuvchi va $\partial\Omega$ chegaraning atrofida nolga teng barcha funksiyalar to‘plami $W_2^1(\Omega)$ ning normasi bo‘yicha yoyilmasini belgilaymiz.

Demak, agar $h(x)$ funksiya quyidagi

$$h(x)\in W_2^{[\frac{N}{2}]+1}(\Omega)\ \ \text{va}\ \ h(x),\ \Delta h(x),\cdots,\ \Delta^{[\frac{N}{4}]}h(x)\in\dot{W}_2^1(\Omega), \tag{29}$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda (28) qator yaqinlashuvchi bo‘ladi (agar N juft bo‘lsa, $\tau=\frac{N}{2}+1$, agar N toq $\tau=\frac{N+1}{2}$ deb olish mumkin).

Xuddi shunday, agar (28) da τ ni $\tau+2$ ga almashtirsak, yaqinlashish shartlari quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$h(x)\in W_2^{[\frac{N}{2}]+3}(\Omega),\quad \text{va}\quad h(x),\ \Delta h(x),\cdots,\ \Delta^{[\frac{N}{4}]+1}h(x)\in\dot{W}_2^1(\Omega).$$

8-teorema. Agar $f(x,t)$ funksiya (29) shartni qanoatlantirsa, u holda (24)-(27) masalaning yagona yechimi mavjud bo‘lib, u quyidagi ko‘rinishga ega

$$u(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_k(0)}{\lambda_k}E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)+\int_0^t\xi^{\alpha-1}f_k(t-\xi)E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_k\xi^{\alpha}\right)d\xi\right)v_k(x),t>0,\\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_k(0)}{\lambda_k}e^{\lambda_k t}+\int_t^0 f_k(t-\xi)e^{\lambda_k\xi}d\xi\right)v_k(x),\quad t<0.\end{cases}$$

Teskari masala: Aralash tipga ega (24) tenglamaning (25)-(27) shartlarni va

$$u(x,-T_1)=\varphi(x), \tag{30}$$

$$u(x,T_2)=\psi(x), \tag{31}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $\left(u(x,t),\, f(x,t)\right)$ topilsin. Bu yerda

$$f(x,t)=\begin{cases} f_1(x), & t>0,\\ f_2(x), & t<0,\end{cases}$$

va $\varphi(x),\psi(x)-$berilgan yetallicha silliq funksiyalar.

9-teorema. Agar $\varphi(x),\psi(x)$ funksiyalar (29) shartni qanoatlantirsa, u holda, (24)-(27), (30), (31) teskari masalaning yagona yechimi mavjud bo'lib, u quyidagi ko'rinishga ega

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\psi_k\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)+\varphi_k T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}v_k(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\psi_k\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)-\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)\right)\lambda_k t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}v_k(x),\, t>0,$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)+\varphi_k T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)v_k(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+2\varphi_k T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)-\psi_k e^{-\lambda_k T_1}}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}\lambda_k\left(1-e^{\lambda_k t}\right)v_k(x),\, t<0,$$

$$f(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)-\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}\lambda_k v_k(x),\, t>0,\\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+2\varphi_k T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)-\psi_k e^{-\lambda_k T_1}}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}\lambda_k v_k(x),\, t<0.\end{cases}$$

Ushbu bobning to‘rtinchi paragrafida, biz o‘z-o‘ziga qo‘shma musbat aniqlangan elliptik operator va Kaputo ma‘nosidagi hosilani o‘z ichiga olgan aralash tipdagi tenglama uchun to‘g‘ri masala va kasr tartibli hosilaning tartibini aniqlash bo‘yicha teskari masalani o’rganamiz.

Aytaylik, H separabel Hilbert fazosi bo‘lsin. Unda skalyar ko‘paytma va norma aniqlangan bo‘lib, ularni mos ravishda $(\cdot,\cdot)$ va $\|\cdot\|$ kabi belgilaylik. $A: H\to H$ operator H Hilbert fazosida aniqlangan, o‘z-o‘ziga qo‘shma, musbat, chegaralanmagan ixtiyoriy operator bo‘lsin. Aytaylik A^{-1} operator kompakt bo’lsin, u holda A operator H fazoda to‘la ortonormal $\{v_k\}$ xos funksiyalar sistemasiga va $\{\lambda_k\}$ musbat xos qiymatlar to‘plamiga ega bo‘ladi. Xos qiymatlarni qayta nomerlash yordamida ularni kamaymaydigan qilib nomerlab olamiz, ya’ni $0<\lambda_1\le\lambda_2\le...\to+\infty$ kabi yozib olamiz.

Aytaylik, $\rho\in(0,1)$ bo‘lsin. $C(E;H)$ orqali H dagi qiymatlari $E\subset R^1$ oraliqda uzluksiz $u(t)$ funksiyalar to‘plamini belgilaylik.

Quyidagi tenglamani

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t)+Au(t)=0, 0<t\le t_2, \\ u'(t)-Au(t)=0,\ -t_1\le t<0, \end{cases} \tag{32}$$

$$u(+0)=u(-0), \tag{33}$$

ulash sharti va

$$u(t_2)=\psi, \tag{34}$$

chegaraviy shartlar bilan ko‘rib chiqamiz. Bu yerda $\psi\in H$ berilgan vektor.

4-ta'rif. Agar $u(t)$ funksiya quyidagi

1. $u\in C(H)$;
2. $D_t^\rho u(t)\in C((0,t_2];H);, u'(t)\in C([-t_1,0);H)$;
3. $Au(t)\in C([-t_1,0)\cup(0,t_2];H)$;

xossalarga ega bo‘lib, (32)-(34) masalaning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda u to‘g‘ri masalaning yechimi deyiladi.

10-teorema. Aytaylik $\psi\in D(A)$ bo’lsin. U holda (32)-(34) masala yagona yechimga ega bo‘lib, u quyidagi ko‘rinishga ega

$$u(t)=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\psi_k E_{\rho,1}(-\lambda_k t^\rho)}{E_{\rho,1}(-\lambda_k t_2^\rho)}v_k, t>0, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\psi_k e^{\lambda_k t}}{E_{\rho,1}(-\lambda_k t_2^\rho)}v_k, t<0. \end{cases}$$

Endi hosilaning tartibi ρ ni aniqlashga nisbatan teskari masalani ko‘rib chiqamiz. Buning uchun quyidagi ko‘rinishda qo‘shimcha shart kiritamiz.

$$U(\rho)=\|u(t_0)\|^2=u_0, t_0<0. \tag{35}$$

Teskari masalani yechishda $\rho\in[\rho_0,1]$ $\rho_0>0$ deb olamiz.

5-ta'rif. (32)-(34) masala (35) qo‘shimcha shart bilan birga noma’lim parametr ρ ni topishga nisbatan teskari masala deyiladi.

6- ta'rif. (32)-(35) teskari masalaning yechimi deb, 4-ta’rifning barcha shartlarini va (35) qo‘shimcha shartni qanoatlantiruvchi $\{u(t),\rho\}$juftlikka aytamiz. Bu yerda $\rho\in[\rho_0,1]$ $\rho_0>0$.

2-lemma. Aytaylik $\rho_0\in(0,1)$ bo’lsin. U holda shunday $T_0=T_0(\rho_0)>0$ mavjud bo‘lib, barcha $t_2\ge T_0$ va ixtiyoriy $\psi\in H$ funksiya uchun $U(\rho)$ funksiya

$\rho \in [\rho_0;1]$ o‘zgaruvchi bo‘yicha monoton o‘suvchi bo‘ladi.

Quyidagi teorema 2-lemmaning natijasi ekanligini ko’rish qiyin emas.

11-teorema. Aytaylik $\psi \in D(A)$, $\rho_0 \in (0,1)$ va T_0 esa 2-lemmaning barcha shartlarini qanoatlantirsin. U holda $\forall t_2 \geq T_0$ lar uchun (32)-(35) teskari masala faqat va faqat

$$U(\rho_0) \leq u_0 \leq U(1). \tag{36}$$

shart bajarilsa yagona yechimga ega bo‘ladi.

XULOSA

Mazkur dissertatsiya ishi 2 bo‘limdan iborat bo‘lib, birinchi bo‘limda model tenglamalar qaralgan. Shuningdek, bunday tenglamalar uchun qanday masalalar korrekt bo‘lishi o‘rganildgan. Bu yerda tenglamalarning elliptik qismi to‘rtinchi tartibli hosilaga ega tenglamadan iborat. Dissertatsiya ishining ikkinchi bo‘limida esa elliptik qismi ixtiyoriy elliptik operator yoki abstrakt operator qo‘yish mumkin. Dissertatsiyaning ikkinchi bo‘limi yani uchinchi bobida elliptik qismi o‘z-o‘ziga qo‘shma, musbat, ixtiyoriy elliptik A operatoridan yoki Laplas operatoridan iborat, aralash tipga tegishli bo‘lgan tenglamalar o’rganilgan. Ushbu bo‘limning oxirida elliptik qismi abstrakt operatordan iborat va Kaputo ma’nosidagi hosilani o‘z ichiga olgan, aralash tipga tegishli bo‘lgan tenglama uchun hosilaning tartibini aniqlash bo‘yicha teskari masala o‘rganilgan.

Eslatib o‘tamiz aralash tipga tegishli va ixtoyotiy elliptik operatorga ega bo‘lgan tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalar ilk bor ushbu ishda o‘rganilgan.

Xulosa sifatida tadqiqot natijalariga ko‘ra quyidagilarni keltirish mumkin.

1. To‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun to‘g‘ri va teskari masalalar o‘rganilgan. O‘rganilgan masalalarning yechimi mavjudligi haqidagi teoremalar Furye usuli bilan, yagonaligi haqidagi teoremalar esa spektral usul va aprior baho olish orqali isbot qilingan.

2. Elliptik qismi yuqori tartibli bo‘lgan tenglamalarning klassik yechimni olish uchun Krasnoselskiy lemmasidan foydalanish usuli ishlab chiqilgan.

3. Elliptik qismi Laplas operatoridan iborat va va Kaputo ma’nosidagi hosila qatnashgan, aralash tipdagi tenglama uchun to‘g‘ri masala va tenglamaning o‘ng tomonini topishga nisbatan teskari masalalar o‘rganilgan. Bu masalalarning yechimlari uchun mavjudlik va yagonalik teoremalari isbotlangan.

4. Elliptik qismi abstrakt operatordan iborat va Kaputo ma’nosidagi hosila qatnashgan, aralash tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri masala o‘rganilgan. Shuningdek, xuddi shu tenglama uchun hosila tartibi ρ ni aniqlashga nisbatan teskari masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В. И. РОМАНОВСКОГО**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МУРЗАМБЕТОВА МЕХРИБАН БЕГДУЛЛАЕВНА

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

ТАШКЕНТ-2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инновацией Республики Узбекистан за №B2023.3. PhD/FM912

Диссертация выполнена в Институте математики.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Ашуров Равшан Раджабович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
	Балтаева Умида Исмоиловна доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «19» декабря 2023 года в 17:00 часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В. И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В. И. Романовского (зарегистрирована за № 172). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «5»декабря 2023 года.
(протокол рассылки №2 от «5» декабря 2023 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

У. А. Розиков
Председатель Научного совета
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж. К. Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

А. А. Азамов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые в мировом масштабе, показывают важность изучения краевых и обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка. В последние годы в нашей стране большое внимание уделяется математике, физике, геологии и биологическим наукам, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, особое внимание уделялось развитию дифференциальных уравнений и математической физики, как одной из основных областей математики, имеющей прикладной характер. В последние десятилетия теория дифференциальных уравнений с дробными производными приобрела значительную популярность, в первую очередь из-за ее приложений во многих, казалось бы, далеких областях науки и техники. Целью настоящего научного исследования является решение краевых и обратных задач для параболических, гиперболических уравнений, где эллиптическая часть уравнения является произвольным дифференциальным оператором, определенным в N-мерной области.

Помимо обучения решению дифференциальных уравнений высокого порядка с частными производными, очень важно научиться решать обратные задачи, связанные с определением коэффициентов уравнения, его правой части или порядка дробной производной. Исследование обратных задач дает нам возможность изучать, анализировать и контролировать процессы, заданные уравнением высокого порядка. Например, если мы возьмем процессы диффузии тепла, наше знание граничной функции позволит нам контролировать процесс распространения тепла от границы. Можно привести много подобных примеров. Рассмотрим уравнение дробного порядка по времени, пусть порядок дробной производной находится между 1 и 2, тогда уравнение описывает одновременно процесс диффузии и распространения волны, если порядок дробной производной находится между 0 и 1, то уравнение представляет собой процесс медленно распространяющегося тепла. Так же можно привести примеры из области вирусологии, уравнения дробного порядка могут описывать естественный процесс размножения вирусов. Учитывая все вышеперечисленное, можно утверждать, что изучение уравнений с дробными производными является актуальной проблемой математики.

В нашей стране уделяется большое внимание таким областям науки, как математика, физика и оптимальное управление, имеющим научное и практическое применение в фундаментальных исследованиях. В частности, особое внимание уделялось изучению уравнений с частными производными дробного и произвольного порядков . Потому что эта теория помогает понять многие явления в механике, электронике, теории управления, физиологии и биологии. Как уже говорилось выше, проведение научных исследований на уровне международных стандартов в важных областях определяется как основная задача и направление деятельности математики[1].

Тема и объект исследования настоящей диссертационной работы соответствуют поручениям, обозначенным в Указах Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», №УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно исследовательской деятельности», №ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №УП-4708 от 7 мая 2020 года «О повышении качества обучения в сфере математики и о мерах развития научных исследований», также настоящее диссертационное исследование в определенной мере служит реализацией задач, определенных в постановлениях и других нормативных правовых актах, касающихся данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы.

Изучением существования и единственности классических решений краевых и обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными занимались многие известные математики, такие как В.А.Ильин, О.А.Ладыженская, П.Е.Соболевский, М.А.Красносельский и другие. В фундаментальной работе Ильина, изданной еще в 1960 году, дан обзор работ в этом направлении и представлены последние результаты автора. Здесь применяется классический метод Фурье к уравнениям, эллиптическая часть которых представляет собой симметричное дифференциальное выражение второго порядка. Случай, когда эллиптическая часть имеет порядок выше второго, рассмотрен в известной монографии Красносельского и др.

Однако в настоящее время прямые и обратные задачи для уравнения смешанного типа являются одним из развивающихся отраслей теории дифференциальных уравнений. В качестве примера результатов, полученных в этом направлении, можно привести работы Ш.О.Алимова, Р.Р.Ашурова, С.Р.Умарова, Б.Ж.Кадиркулова, Е.Т.Каримова и Р.Т.Зуннунова и др.

В последние десятилетия теория дифференциальных уравнений с дробными производными приобрела значительную популярность, в первую

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

очередь из-за ее приложений во многих, казалось бы, далеких от математики областях науки и техники. Краевые и обратные задачи для уравнения смешанного типа с дробными производными развита значительно меньше. При рассмотрении уравнений с дробными производными не всегда заранее известен порядок таких производных и, что очень важно, отсутствуют приборы для их измерения. Поэтому в последние годы ученые активно изучают обратные задачи нахождения порядка дробных производных. Анализ опубликованных работ в этом направлении показывает, что почти во всех известных работах рассматривается либо уравнение субдиффузии, либо уравнение дробной волны. Насколько нам известно, существует только одна работа, в которой рассматривается обратная задача для уравнения смешанного типа по нахождению порядка дробных производных. Более того, в этой работе предполагается, что порядок производной верхней и нижней части области являются неизвестными.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ лаборатории «Дифференциальные уравнения и их приложения» в Институте математики АНРУз с научным грантом F-FA-2021-424 «Решение краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных целого и дробного порядка» в Институте математики АНРУз.

Целью исследования является доказать существование и единственность решения прямых и обратных задач для уравнения с эллиптическим оператором произвольного порядка с участием дробных производных.

Задачи исследования:

доказать существование и единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного типа, у которого эллиптическая часть состоит из самосопряженного положительного произвольного оператора, определенного в N мерном пространстве;

доказать однозначная разрешимость обратной задачи по нахождению правой части для уравнения смешанного типа в N мерном пространстве а также построено обобщенное решение;

доказать существование и единственность прямой и обратной задачи для уравнения смешанного с дробным производным в смысле Капуто, определенная в заданной области, у которого эллиптическая часть состоит из оператора Лапласа;

доказать однозначная разрешимость прямой задачи для уравнения смешанного типа, включающего положительный самосопряженный абстрактный оператор и дробную производную в смысле Капуто порядка ρ. А так же доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачти по определению порядка дробной производной.

Объектом исследования являются уравнения дробного порядка в смысле Капуто, функции Миттаг-Лёффлера, уравнения со спектральным параметром, уравнения дробного порядка по времени, обратные задачи по определению правой части или порядка производной уравнения.

Предметом исследования является изучение прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка и для дифференциальных уравнений, включающих положительный самосопряженный абстрактный оператор произвольного порядка и дробную производную в смысле Капуто.

Методы исследования: При выводе результатов диссертации используются идеи и методы теории функционального анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. В уравнениях математической физики используется метод разделения переменных а также применяется полнота систем функций в Гильбертовом пространстве.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказана однозначная разрешимость прямой и обратной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка в прямоугольной области, для единственности решения задачи получена априорная оценка;

доказаны существование и единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного типа, состоящего из самосопряженного положительного произвольного оператора A, эллиптическая часть которого задана в произвольном N-мерном пространстве.

доказано существование, единственность и обобщенное решение классического решения обратной задачи нахождения ее правой части для уравнения смешанного типа в N-мерном пространстве.

доказана однозначная разрешимость прямой задачи для уравнения смешанного типа, включающего положительный самосопряженный абстрактный оператор и дробную производную в смысле Капуто порядка ρ.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

В научно-исследовательской работе были усовершенствованы методы решения прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений с дробными производными в смысле Капуто и для дифференциальных уравнений с частными производными смешанного типа. Также используемые методы могут быть использованы при исследовании различных физико-химических и биологических процессов.

Достоверность результатов исследования: Достоверность и обоснованность полученных результатов исследования обеспечиваются корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в данной работе научные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях прямых и обратных задач теории дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка.

Практическое значение результатов, полученных в диссертационной работе, определяется тем, что полученные результаты могут найти применение при изучении физико-химических биологических и медицинских процессов.

Внедрение результатов исследования.

Результаты по прямым и обратным задачам для дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка были внедрены на практике в следующих проектах:

существование классического решения прямой и обратной задач для дифференциальных уравнений с частными производными произвольного порядка были использованы в исследовании процесса распределении радона в атмосфере в рамках международного проекта по теме «Природные катастрофы Камчатки – землетрясения и извержения вулканов» под номером AAAA-A19-119072290002-9. (Справка Камчатского государственного университета от 15 сентября 2023 года за номером 18-12, Российская Федерация). Применение научных результатов позволило разработать алгоритмов решения обратных задач геофизики.

существование и единственность решения прямых и обратных задач для уравнений с положительным, формально самосопряженным, эллиптическим оператором были использованы для решения прямых и обратных задач для уравнения смешанного типа в фундаментальном проекте «Математическое моделирование процесса фильтрации в двухкомпонентных средах с нелинейными граничными условиями» под номером YO'T--Ftex-2018-149 (справка Национального университета Узбекистана от 29 сентября 2023 года за номером 04/11-6138). Использование полученных научных результатов позволило найти классическое решение прямой и обратной задач для дифференциальных уравнений с дробной производной в смысле Капуто, доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов в решении задач.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 6 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации всего опубликовано 17 научных работ, в том числе 8 научных статей в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD), из них 2 статьи опубликованы в зарубежных рецензируемых журналах и 6 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 116 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования по приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, проанализирована степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, раскрыты теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Данная диссертационная работа состоит из 2 разделов, первому разделу посвящены первая и вторая главы, где рассматриваются модельные уравнения. Также было изучено, какие задачи будут корректными для таких уравнений. Здесь эллиптическая часть уравнений состоит из производной четвертого порядка. Поскольку мы используем метод Фурье при решении задачи, то вместо производной четвертого порядка можно рассмотреть произвольный положительный эллиптический дифференциальный оператор или абстрактный самосопряженный положительный оператор. Известно, что в этом методе вид оператора не имеет значения, достаточно только того, что оператор имеет полную ортонормированную систему собственных функций в рассматриваемом пространстве.

Во втором разделе диссертации, то есть в третьей главе, исследуются уравнения смешанного типа, эллиптическая часть которых состоит из произвольного самосопряженного положительного эллиптического оператора A и в некоторых задачах состоит из оператора Лапласа. При рассмотрении эллиптического оператора произвольного порядка, мы использовали результат из монографии Красносельского и др. Но здесь возникла проблема: для того, чтобы задача имела решение, заданные функции должны принадлежать области определения степени дробного порядка оператора. Как известно, это условие нелегко проверить на практике. Поэтому, в этом же параграфе рассмотрен уравнение, эллиптическая часть которого имеет положительный однородный эллиптический дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами, определенный во всем пространстве R^N. В этом случае было показано, что область определения степени дробного порядка эллиптического оператора в совпадает с пространством Соболева определенного порядка. Также найдено вид решения задачи, если эллиптическая часть уравнения состоит из неотрицательного оператора. В следующем параграфе рассматривается дифференциальное уравнение, эллиптическая часть которого состоит из оператора Лапласа. Следует отметить, что эта задача отличается от рассмотренных ранее. В этом случае при доказательстве существования решения мы использовали фундаментальный результат В.А.Ильина. В последнем параграфе этой главы исследуются прямые и обратные задачи для уравнения смешанного типа, эллиптической часть которого состоит из произвольного положительного абстрактного оператора.

В вышеприведенных задачах рассматривалось уравнение с дробными производными и в качестве дробной производной взята дробная производная в смысле Капуто.

В первой главе диссертации названной **“Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнения четвертого порядка со спектральным параметром”** изучены прямые и обратные задачи по нахождению правой части уравнения.

В первом параграфе этой главы приведены некоторые известные факты и вспомогательные материалы, которые будут использованы в последующих параграфах и главах.

Во втором параграфе этой главы рассматриваются две краевые задачи для уравнения четвертого порядка со спектральным параметром λ. Первая задача посвящена изучению краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\lambda u = f(x,t) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}(0,t)=\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}(p,t)=0,\ 0\le t\le T,\ k=0,1; \tag{2}$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,T)=0 \tag{3}$$

в прямоугольной области $\Omega=\left\{(x,t)\in R^2 : 0<x<p, 0<t<T\right\}$. А во второй задаче рассматривается то же уравнение с условиями (2) и $u_t(x,0)=0,\ \ u(x,T)=0.$ Обе задачи являются самосопряженными. Подробно изучена первая задача, т.е. доказана существование и единственность решения прямой задачи (1)-(3). Вторая задача исследуется аналогично первой задаче.

В третьем параграфе этой главы в прямоугольной области изучается одна краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\operatorname{sgn} t\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda u = f(x,t)$$

с краевым условиям (2) и с условиями склеивания

$$u(x,+0)=u(x,-0),\ \ u_t(x,+0)=u_t(x,-0),\ 0\le x\le p.$$

В четвертом параграфе этой главы в прямоугольной области рассматривается обратная задача для уравнения смешанного типа по нахождению правой части уравнения.

В области $\Omega=\left\{(x,t)\in R^2 : 0<x<p, -T<t<T\right\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\operatorname{sgn} t\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda u = f(x,t). \tag{4}$$

Постановка задачи. Найти такие функции $u(x,t)$ и $f(x)$ которые:

1) $u(x,t)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$ вместе с производными приведенными

в краевых условиях;

2) является регулярным решением уравнения (4) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$;

где $\Omega^+ = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{t < 0\}$.

3) удовлетворяет краевым условиям (2) и

$$u(x,-T) = \varphi(x), \;\; u(x,T) = \psi(x), \; 0 \le x \le p, \tag{5}$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

4) удовлетворяет условию склеивания

$$u_t(x,+0) = u_t(x,-0), \; 0 < x < p. \tag{6}$$

Единственность решения обратной задачи доказывается спектральным способом.

Теорема 1. Если $\varphi(x) \in C^5(\bar{\Omega})$, $\psi(x) \in C^5(\bar{\Omega})$, $\varphi^{(2m)}(0) = \varphi^{(2m)}(p) = 0$, $\psi^{(2m)}(0) = \psi^{(2m)}(p) = 0$, $m = 0,1,2$ и $\lambda < 0$ или $0 < \lambda < \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{p}\right)^4$, то обратная задача (4),(2), (5), (6) имеет единственное решение.

Вторая глава диссертации называется «Краевые задачи для уравнения четвертого порядка с младшим членом».

В первом параграфе этой главы рассматривается краевая задача для уравнения четвертого порядка с производным второго порядка по времени.

Постановка задачи. Найти в области Ω решение $u(x,t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c(x,t)u(x,t) = 0. \tag{7}$$

и условиям

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = 0 \text{ при } x = 0, x = p, 0 \le t \le T, \; k = 0,1, \tag{8}$$

$$u(x,0) = 0, \; u_t(x,T) = 0, \; 0 \le x \le p. \tag{9}$$

где $c(x,t)$ $f(x,t)$ – заданные гладкие функции в $\bar{\Omega}$.

Для того чтобы доказать единственность решения краевой задачи (7)-(9), получена априорная оценка решения при $c(x,t) < 0.$.

Определение 1. Если справедлива $u \in C^{2,1}_{x,t}(\bar{\Omega}) \cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$, и функция $u(x,t)$ удовлетворяет всем условиям задачи, тогда $u(x,t)$ называется регулярным решением задачи (7)-(9).

Теорема 2. Если $f(x,t), c(x,t) \in C^{3.0}_{x,t}(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial^{2k} f(0,t)}{\partial x^{2k}} = \frac{\partial^{2k} f(p,t)}{\partial x^{2k}} = 0$,

$$\frac{\partial^{2k}c(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}c(p,t)}{\partial x^{2k}}=0,\ k=0,1, \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\in Lip_\alpha\left[0,p\right],\ \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}\in Lip_\alpha\left[0,p\right]$$

равномерно по t, $0<\alpha<1$, то задача (7)-(9) имеет регулярное решение.

Во втором параграфе этой главы в прямоугольной области рассматривается одна краевая задача с младшим членом.

В области $\Omega=\left\{\left(x,t\right)\in R^2:0<x<p,0<t<T\right\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial u}{\partial t}-c(x,t)u(x,t)=f(x,t) \tag{10}$$

с условиям

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}=0 \text{ при } x=0,x=p,0\le t\le T,\ k=0,1, \tag{11}$$

$$u(x,0)=0,\ 0\le x\le p. \tag{12}$$

Для доказательства единственности решения задачи получена априорная оценка. При применении метода Фурье для задачи (10)-(12), получаем формальное решение задачи в виде

$$u\left(x,t\right)=F\left(x,t\right)+\int_0^t\int_0^p R(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где

$$R(x,t;\xi,\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}K_i(x,t;\xi,\tau),$$

$$K_1\left(x,t;\xi,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n^4(t-\tau)}X_n(x)X_n(\xi)c(\xi,\tau)$$

$$K_i(x,t;\xi,\tau)=\int_0^t\int_0^p K_1(x,t;\xi_1,\tau_1)K_{i-1}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)d\xi_1 d\tau_1.$$

Теорема 3. Если $f(x,t),c(x,t)\in C_{x,t}^{5.0}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\frac{\partial^{2k}f(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}f(p,t)}{\partial x^{2k}}=0$, $\frac{\partial^{2k}c(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}c(p,t)}{\partial x^{2k}}=0$, $k=0,1,2$, тогда существует регулярное решение задачи (10)-(12).

В третьей главе диссертации, названной “**Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного типа произвольного порядка** ” изучены прямые и обратные задачи в $N-$мерной области.

В первом параграфе третьей главы рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа с положительным формально самосопряженным эллиптическим оператором произвольного порядка, определенной в произвольной N-мерной области (с достаточно гладкой границей).

Пусть $\Omega\subset R^N$ произвольная ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а $A(x,\mathrm{D})=\sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha$ - произвольный положительный формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка $m=2l$ с достаточно гладкими коэффициентами $a_\alpha(x)$, где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N)-$ мультииндекс и $D=(D_1,\mathrm{D}_2,...,\mathrm{D}_N)$, $D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Рассмотрим уравнение

$$A(x,\mathrm{D})\mathrm{u}(x,\mathrm{t})+\mathrm{sgnt}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,\mathrm{t}),\ x\in\Omega, t\in[-L,0)\cup(0,\mathrm{L}],\ L\equiv const>0 \quad (13)$$

с условиям склеивания

$$u_t(x,+0)=u_t(x,-0) \quad (14)$$

и с краевыми условиями

$$B_j u(\mathrm{x},\mathrm{t})=\sum_{|\alpha|\le m_j} b_{\alpha,j}(\mathrm{x})\mathrm{D}^\alpha u(\mathrm{x},\mathrm{t})=0,\quad 0\le m_j\le m-1,\ j=1,2,...,l;\ x\in\partial D. \quad (15)$$

Здесь $f(x,\mathrm{t})$ и коэффициенты $\mathrm{b}_{\alpha,j}(x)$ - заданные функции.

Определение 2. Решением задачи (13)-(15) назовём функцию $u(x,t)$ такую, что она непрерывна в области $\overline{\Omega}\times[-\mathrm{L},0)\cup(0,\mathrm{L}]$ вместе с производными, входящими в уравнение (13) и удовлетворяющая всем условиям задачи в классическом смысле.

Единственность решения задачи доказывается спектральным методом. Применение метода Фурье к задаче (13)-(15) приводит нас к рассмотрению следующей спектральной задачи:

$$\begin{cases} A(x,\mathrm{D})\nu(x)=\lambda\nu(x), x\in\Omega; \\ B_j\nu(x)=0,\ j=1,2,...,l;\ \ x\in\partial D. \end{cases} \quad (16)$$

В работе С.Агмона найдены достаточные условия на границу $\partial\Omega$ и на коэффициенты операторов A и B_j, обеспечивающие существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системе собственных функций $\{\nu_k(x)\}$ и счетного множества положительных собственных значений $\{\lambda_k\}$ задачи (16). Далее будем считать, что эти условия выполнены.

Для того, чтобы сформулировать теорему о существовании решения задачи (13)-(15) нам необходимо ввести некоторые определения.

Для произвольного действительного числа τ в пространстве $L_2(\Omega)$ введем оператор $\hat{A}^\tau$, действующей по правилу

$$\hat{A}^\tau g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^\tau g_k\nu_k(x),\ g_k=(\mathrm{g},\nu_k).$$

Легко убедиться, что данный оператор $\hat{A}^\tau$, с областью определения

$$D\left(\hat{A}^{\tau}\right)=\left\{g\in L_2(\Omega):\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2\tau}\left|g_k\right|^2<\infty\right\}$$

является самосопряженным. Если через A обозначить оператор в $L_2(\Omega)$, действующей по правилу $Ag(x)=A(x,D)g(x)$ и с областью определения $D(A)=\left\{g\in C^m(\overline{\Omega}):\mathrm{B}_j\,g(x)=0,\ j=1,...,l,\ x\in\partial D\right\}$, то оператор $\hat{A}=\hat{A}^1$ является самосопряженным расширением в $L_2(\Omega)$ оператора A.

Теорема 4. Пусть $\sigma>\dfrac{N}{2m}$ и $f(x,t)\in D(\hat{A}^{\sigma})$, причем функция

$$F(t)=\left\|\hat{A}^{\sigma}f(x,t)\right\|_{L_2(\Omega)}$$

непрерывна на $[0,T]$. Тогда существует решение $u(x,t)$ задачи (13)-(15) и оно представимо в виде рядов:

$$u(x,\mathrm{t})=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x)}{\lambda_k}f_k(0)\mathrm{e}^{-\lambda_k t}+v_k(x)\int_0^t f_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right),\ t>0,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x)}{\lambda_k}f_k(0)\mathrm{e}^{\lambda_k t}+v_k(x)\int_t^0 f_k(\tau)e^{-\lambda_k(\tau-t)}d\tau\right),\ t<0.\end{cases}$$

Здесь $f_k(\mathrm{t})$- коэффициенты Фурье функции $f(x,t)$ по системе собственных функций $\left\{v_k(x)\right\}$ определяемые как скалярные произведения в $L_2(\Omega)$.

Наши рассуждения будут во многом опираться на методику, развитую в монографии Красносельского. Основную роль в этой методике играет следующая лемма, которая обеспечит регулярную разрешимость задачи (13) – (15).

Лемма 1. Пусть $\tau>\dfrac{|\alpha|}{m}+\dfrac{N}{2m}$. Тогда для любого $|\alpha|\le m$ оператор $D^{\alpha}\hat{A}^{-\tau}$ непрерывно действует из $L_2(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ и справедлива оценка

$$\|D^{\alpha}\hat{A}^{-\tau}g\|_{C(\Omega)}\le C\|g\|_{L_2(\Omega)}.$$

Теперь рассмотрим изученную выше (13)-(15) краевую задачу на $N-$мерном торе $T^N=\left(0,2\pi\right]^N$ для оператора с постоянными коэффициентами. Пусть $A(\mathrm{D})=\sum_{|\alpha|=m}a_{\alpha}D^{\alpha}-$ однородный эллиптический симметрический дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Рассмотрим следующую задачу. Пусть дифференциальное уравнение и условия склеивания имеют вид

$$A(\mathrm{D})\,\mathrm{u(x,t)}+\mathrm{sgnt}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,\mathrm{t}),x\in T^N,t\in[-L,0)\cup(0,\mathrm{L}],L\equiv const>0;\qquad(17)$$

$$u(x,+0)=u(x,-0),\ u_t(x,+0)=u_t(x,-0),\ \ x\in T^N.\qquad(18)$$

Вместо граничных условии (15) будем требовать, чтобы искомая функция $u(x,t)$ являлась $2\pi-$ периодическими по каждой переменной x_j.

Обозначим через A оператор $A(\mathrm{D})$, определенный на $2\pi-$ периодических функциях из $C^m(\mathrm{R}^N)$. Замыкание $\hat{A}_T$ этого оператора в $L_2(\mathrm{T}^N)$ является самосопряжённым. Оператор $\hat{A}_T$ имеет полную ортонормированную в $L_2(\mathrm{T}^N)$ систему собственных функций $\left\{(2\pi)^{-\frac{N}{2}}e^{inx}\right\}$ отвечающих собственных значениям $A(i\mathrm{n})$, $\mathrm{n}\in\mathrm{Z}^n$ что проверяется непосредственным вычислением. Поэтому в силу спектральной теоремы Фон-Неймана, для $\tau\geq 0$ оператор $\hat{A}^\tau$ действует по правилу $\left\{(2\pi)^{-\frac{N}{2}}e^{inx}\right\}$ где g_n- коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\left\{(2\pi)^{-\frac{N}{2}}e^{inx}\right\}$ функции $g\in L_2(\mathrm{T}^N)$:

$$g_n=(2\pi)^{-N}\int\limits_{T^N}g(x)e^{inx}dx.$$

Область определения этого оператора определяется из условия $\hat{A}_T^\tau g(x)\in L_2(\mathrm{T}^N)$ и имеет вид

$$D(\hat{A}_T^\tau)=\left\{\mathrm{g}\in\mathrm{L}_2(\mathrm{T}^N):\sum_{n\in Z^N}A^{2\tau}(i\mathrm{n})|g_n|^2<\infty\right\}.$$

Для того, чтобы задать область определения оператора $\hat{A}_T^\tau$ в терминах пространств Соболева, напомним определение этих пространств (см., например, [36]): говорят, что функция $g\in L_2(\mathrm{T}^N)$ принадлежит пространству Соболева $L_2^a(\mathrm{T}^N)$ с действительным числом $a>0$, если конечна норма

$$\|g\|^2_{L_2^a(T^N)}=\left\|\sum_{n\in Z^N}(1+|n|^2)^{\frac{a}{2}}g_ne^{inx}\right\|^2_{L_2(T^N)}=\sum_{n\in Z^N}(1+|n|^2)^a g_n^2.$$

Отметим, что оператор $A(D)$ неотрицательное и первое собственное число равно нулю: $\lambda_1=A(0)=0$.

Теорема 5. Пусть $a>\dfrac{N}{2m}$ и $f(x,t)\in L_2^a(T^N)$, причем функция

$$F(t)=\|f(x,t)\|_{L_2^a(T^N)}$$

непрерывна на $[0,T]$. Тогда существует решение $u(x,t)$ задачи (17)-(18) и оно представимо в виде рядов

$$u(x,\mathrm{t})=\begin{cases} c_0+\sum\limits_{n\neq 0}\dfrac{e^{inx}}{A(\mathrm{n})}f_n(0)\mathrm{e}^{-A(i\,\mathrm{n})t}+\sum\limits_{n\in Z^N}e^{inx}\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-A(i\,\mathrm{n})(t-\tau)}d\tau,\ t>0,\\ c_0+\sum\limits_{n\neq 0}\dfrac{e^{inx}}{A(\mathrm{n})}f_n(0)\mathrm{e}^{A(i\,\mathrm{n})t}+\sum\limits_{n\in Z^N}e^{inx}\int\limits_t^0 f_n(\tau)e^{-A(i\,\mathrm{n})(\tau-t)}d\tau,\quad t<0,\end{cases}$$

которые сходятся абсолютно и равномерно по $x\in\mathrm{T}^N$ для всех $t\in[-\mathrm{L},\mathrm{L}]$. При этом c_0 $-$произвольная константа.

Во втором параграфе этой главы, изучается обратная задача для определения функции источника для уравнения смешанного типа с положительным эллиптическим оператором произвольного порядка, определенным в произвольной N-мерной области (с достаточно гладкой границей).

В области $\Omega\subset R^N$ рассмотрим уравнение

$$A(x,D)u(x,t)+sgnt\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t),x\in\Omega,t\in(-T_1,T_2),\tag{19}$$

с условиями склеивания

$$u(x,+0)=u(x,-0),\ u_t(x,+0)=u_t(x,-0)\tag{20}$$

и краевым условиями

$$B_ju(x,t)=\sum_{|\alpha|\le m_j}b_{\alpha,j}(x)D^\alpha u(x,t)=0,\ 0\le m_j\le m-1,\ j=1,2,...,l;\ x\in\partial\Omega,\tag{21}$$

$$u(x,T_2)=\psi(x),\ x\in\Omega\tag{22}$$

а также начальным условием

$$u(x,-T_1)=\varphi(x),\ x\in\Omega,\tag{23}$$

где $b_{\alpha,j}(x),\varphi(x)-$ заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 6. Пусть $\tau>1+\dfrac{N}{2m}$ и $\varphi(x),\psi(x)\in D(\hat{A}^\tau)$. Тогда существует решение $(u(x,t),f(x,t))$ обратной задачи (19)-(23), и оно представимо в виде рядов

$$u(x,t)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\psi_n-\varphi_n)e^{\lambda_n(T_2-t)}+\psi_ne^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2\psi_ne^{\lambda_nT_2}+\varphi_n}{1+e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2e^{\lambda_nT_2}}v_n(x),\quad t>0,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\varphi_n-\psi_n)e^{\lambda_n(T_2+t)}+\psi_ne^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2\varphi_ne^{\lambda_nT_2}+\varphi_n}{1+e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2e^{\lambda_nT_2}}v_n(x),\quad t<0,\end{cases}$$

$$f(x,t)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_n+\psi_ne^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2\psi_ne^{\lambda_nT_2}}{1+e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2e^{\lambda_nT_2}}\lambda_nv_n(x),\quad t>0,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_n+\psi_ne^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2\varphi_ne^{\lambda_nT}}{1+e^{\lambda_n(T_2-T_1)}-2e^{\lambda_nT_2}}\lambda_nv_n(x),\quad t<0.\end{cases}$$

которые сходятся абсолютно и равномерно по $x\in\overline{\Omega}$ для всех $t\in[-T_1,T_2]$. Так же в этом параграфе доказывается разрешимость обобщенного решения обратной задачи (19)-(23).

Теорема 7. Пусть $\varphi, \psi \in D(\hat{A}^1)$. Тогда существует единственное обобщенное решение $(u(x,t), f(x,t))$ обратной задачи (19)-(23) и справедливы следующие оценки:

$$\|A(x,D)u(x,t\|_{L_2(\Omega)} \le C\left(\|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1\right);$$

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \le C\left(\|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1\right);$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)} \le C\left(\|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1\right).$$

Обратная задача (19)-(23) с неотрицательным коэффициентом изучается аналогично изучению задачи (17)-(18).

В третьем параграфе этой главы изучается краевая и обратная задачи для уравнения смешанного типа произвольного порядка с дробным оператором Капуто. Доказано существование и единственность каждой задачи.

Пусть функция $h(t)$ определена в $[0,\infty)$. Дробная производная в смысле Капуто порядка α от функции h имеет вид

$$D_t^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} d\xi, \quad t > 0$$

где $\Gamma(\alpha) -$ Гамма функция и $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим следующее уравнение смешанного типа

$$\begin{cases} -\Delta u(x,t) + D_t^\alpha u(x,t) = f(x,t), \ x \in \Omega, 0 < t \le T_2, \\ -\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t), \ x \in \Omega, \ -T_1 \le t < 0 \end{cases} \tag{24}$$

с краевым условиям

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{25}$$

и условиями склеивания

$$u(x,+0) = u(x,-0), \ x \in \Omega, \tag{26}$$

$$D_t^\alpha u(x,+0) = u_t(x,-0), \ x \in \Omega. \tag{27}$$

Определение 3. Решением задачи (24)-(27) будем называть функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую всем условиям задачи в обычном классическом смысле и условиям

1)$D_t^\alpha u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega} \times \left(0, T_2\right]\right)$;

2)$u_t(x,t) \in C\left(\overline{\Omega} \times \left[-T_1, 0\right)\right)$;

3)$\Delta u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega} \times \left[-T_1, 0\right) \cup \left(0, T_2\right]\right)$;

где $T_1 > 0, T_2 > 0,$ заданные действительные числа.

Для того чтобы доказать существование решения прямой и обратной задач необходимо изучить сходимость следующего ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\tau}\,|\,h_k\,|^2,\quad \tau>\frac{N}{2}, \tag{28}$$

где h_k коэффициент Фурье от функции $h(x)$. В случае целого τ в фундаментальной статье Ильина, получены условия сходимости таких рядов в терминах принадлежности функции $h(x)$ классическому Соболевскому пространству. Для того чтобы сформулировать это условие, введем класс $\hat{W}_2^1(\Omega)$ как замыкание по норме $W_2^1(\Omega)$ множества всех функций, непрерывно дифференцируемых в Ω и обращающихся в нуль вблизи границы Ω.. Теорема В.И.Ильина утверждает что, если функция $h(x)$ удовлетворяет условию (мы можем взять $\tau=\frac{N}{2}+1,$ если τ четно, и $\tau=\frac{N+1}{2},$ если τ нечетно)

Если справедливы условия

$$h(x)\in W_2^{[\frac{N}{2}]+1}(\Omega)\ \text{ va }\ h(x),\ \Delta h(x),\ \cdots,\ \Delta^{[\frac{N}{4}]}h(x)\in \dot{W}_2^1(\Omega), \tag{29}$$

то числовой ряд (28) сходится. Аналогично, если в (29) τ заменить на $\tau+2$, то условия сходимости имеют вид:

$$h(x)\in W_2^{[\frac{N}{2}]+3}(\Omega),\quad \text{va}\quad h(x),\ \Delta h(x),\ \cdots,\ \Delta^{[\frac{N}{4}]+1}h(x)\in \dot{W}_2^1(\Omega).$$

Теорема 8. Если функция $f(x,t)$ удовлетворяет условию (29). Тогда существует решение $u(x,t)$ задачи (24)-(27) и оно представимо в виде ряда

$$u(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_k(0)}{\lambda_k}E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)+\int_0^t\xi^{\alpha-1}f_k(t-\xi)E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_k\xi^{\alpha}\right)d\xi\right)v_k(x),t>0,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_k(0)}{\lambda_k}e^{\lambda_k t}+\int_t^0 f_k(t-\xi)e^{\lambda_k\xi}d\xi\right)v_k(x),\quad t<0.\end{cases}$$

который сходится абсолютно и равномерно по $x\in\overline{\Omega}$ для всех $t\in[-T_1,T_2]$.

Обратная задача: Найти пару функций $\{u(x,t),f(x,t)\}$ удовлетворяющих уравнению (24), условиям (25)-(27) и кроме того дополнительным условиям

$$u(x,-T_1)=\varphi(x),$$

(30)

$$u(x,T_2)=\psi(x), \tag{31}$$

где

$$f(x,t)=\begin{cases}f_1(x),\quad t>0,\\ f_2(x),\quad t<0,\end{cases}$$

а $\varphi(x),\psi(x)-$ заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 9. Если функции $\varphi(x),\psi(x)$ удовлетворяют условию (29), тогда существует единственное решение обратной задачи (24)-(27), (30), (31) и оно представимо в виде рядов

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\psi_k\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)+\varphi_k T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}v_k(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\psi_k\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)-\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)\right)\lambda_k t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}v_k(x),\ t>0,$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)+\varphi_k T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)v_k(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+2\varphi_k T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)-\psi_k e^{-\lambda_k T_1}}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}\lambda_k\left(1-e^{\lambda_k t}\right)v_k(x),\ t<0,$$

$$f(x,t)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\psi_k\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)-\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}\lambda_k v_k(x),\ t>0,\\ \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+2\varphi_k T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)-\psi_k e^{-\lambda_k T_1}}{\left(1-e^{-\lambda_k T_1}\right)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)+\left(2-e^{-\lambda_k T_1}\right)T_2^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda_k T_2^{\alpha}\right)}\lambda_k v_k(x),\ t<0.\end{cases}$$

В четвертом параграфе этой главы, рассматривается уравнение смешанного типа, включающее положительный самосопряженный абстрактный оператор и дробную производную в смысле Капуто порядка ρ.

Пусть A произвольный положительный самосопряженный оператор, определенный в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$. Обозначим скаляр через $(\cdot,\cdot)$ в H, а норму через $\|\cdot\|$. Пусть далее обратный оператор A^{-1} является компактным. Тогда хорошо известно, что A имеет полную ортонормированную систему собственных функций $\{v_k\}$ и счетное множество положительных собственных значений λ_k. Будем считать, что собственные значения не убывают с ростом их числа, т.е. $0<\lambda_1\le\lambda_2\cdots\to+\infty.$

Пусть, $\rho\in(0,1)$ и $C(E;H)$ пространства непрерывных H-значных функций $h(t)$, определенных на $E\subset R^1$.

Рассмотрим следующее уравнение смешанного типа

$$\begin{cases}D_t^{\rho}u(t)+Au(t)=0,\ 0<t\le t_2,\\ u'(t)-Au(t)=0,\ -t_1\le t<0,\end{cases}\tag{32}$$

с условием склеивания

$$u(+0) = u(-0), \tag{33}$$

и с краевым условием

$$u(t_2) = \psi, \tag{34}$$

где $\psi \in H$ - заданный вектор.

Определение 4. Функция $u(t)$ имеющая свойства

1. $u \in C(H)$;
2. $D_t^\rho u(t) \in C\big((0,t_2]: H\big);, u'(t) \in C\big([-t_1,0): H\big)$;
3. $Au(t) \in C\big([-t_1,0) \cup (0,t_2]: H\big)$;

и удовлетворяющая всем условиям задачи (32)-(34) называется решением прямой задачи.

Теорема 10. Пусть $\psi \in D(A)$. Тогда существует единственное решение задачи (32)-(34) и это решение будет иметь вид

$$u(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\psi_k E_{\rho,1}(-\lambda_k t^\rho)}{E_{\rho,1}(-\lambda_k t_2^\rho)} v_k, t > 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\psi_k e^{\lambda_k t}}{E_{\rho,1}(-\lambda_k t_2^\rho)} v_k, t < 0. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим обратную задачу по нахождению порядка дробной производной. Для этого нужно задать дополнительное условие. Пусть дополнительное условие имеет вид

$$U(\rho) = \| u(t_0) \|^2 = u_0, t_0 < 0, \tag{35}$$

где $u_0 \in H$ заданный вектор. При решении обратной задачи, будем считать, что $\rho \in [\rho_0, 1]$, $\rho_0 > 0$.

Определение 5. Задача (32)-(34) с дополнительным условием (35) называется обратной задачей по нахождению неизвестного параметра ρ (или просто обратной задачей).

Определение 6. Решением обратной задачи называется пара $\{u(t), \rho\}$ такое, что $\rho \in [\rho_0, 1]$, и $u(t)$ и ρ вместе удовлетворяют условиям определения 4 и дополнительному условию (35).

Лемма 2. Пусть $\rho_0 \in (0,1)$. Тогда существует $T_0 = T_0(\rho_0) > 0$ такое, что для всех $t_2 \geq T_0$ и для произвольного $\psi \in H$ функции $U(\rho)$ монотонно возрастает по $\rho \in [\rho_0; 1]$.

Нетрудно видеть, что следующий основной результат об обратной задаче является непосредственным следствием леммы 2.

Теорема 11. Пусть $\rho_0 \in (0,1)$ и число T_0 из леммы 2. Тогда для всех $t_2 \geq T_0$ решение обратной задачи $\{u(t), \rho\}$, $\rho \in [\rho_0, 1]$ существует и единственное тогда и только тогда, когда справедлива

$$U(\rho_0) \le u_0 \le U(1). \tag{36}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа состоит из 2 разделов и в первом разделе рассматриваются модельные уравнения. Также было изучено, какие задачи будут корректными для таких уравнений. Здесь эллиптическая часть уравнений состоит из производной четвертого порядка. Во атором разделе диссертации исследуются уравнения смешанного типа, эллиптическая часть которых состоит из произвольного самосопряженного положительного эллиптического оператора A и в некоторых задачах состоит из оператора Лапласа. В конце этого раздела изучена прямые и обратные задачи для уравнения смешанного типа, эллиптическая часть которого состоит из произвольного абстрактного оператора. В заключение можно сделать выводы по результатам исследований:

1. Изучены краевые и обратные задачи для уравнения четвертого порядка со спектральным параметром. Регулярная разрешимость задачи доказываеся с помощью использования метода Фурье, а единственность доказывается спектральным методом.

2. Разработан метод использования леммы Красносельского для получения классического решения задачи, включающее уравнение, которое в эллиптической своей части имеет более высокий порядок.

3. Изучены прямые и обратные задачи для уравнения смешанного типа, эллиптическая часть которого состоит из оператора Лапласа. Доказаны теоремы существования и единственности решения задач.

4. Изучены прямые и обратные задачи, включающее положительный самосопряженный абстрактный оператор и дробную производную в смысле Капуто порядка ρ. Доказаны теоремы существования и единственности решений прямой и обратной задач для определения порядка дробной производной.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MURZAMBETOVA MEXRIBAN BEGDULLAEVNA

FORWARD AND INVERSE PROBLEMS FOR HIGHER ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

01.01.02-Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number №B2023.3. PhD/FM912.

Dissertation has been prepared at the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Baltayeva Umida Ismoilovna Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Urgench State University**

Defense will take place «19» December 2023 at 17:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website : www.mathinst. uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy (is registered №172) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «5» December 2023 year

(Mailing report №2 on «5» December 2023 year)

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

A.A. Azamov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

Purpose of the research. The aim of this dissertation work is to prove existence and uniqueness of a solution of direct and inverse problems including an elliptic operator of arbitrary order and a fractional derivative.

The object of research: Caputo, Mittag-Leffler functions, equations with the spectral parameter, equations of fractional order in time, inverse problems for determining right hand side or order of the derivative of an equation.

The scientific novelty of the research:

to prove existence and uniqueness of forward and inverse problems for a mixed-type equation, whose elliptic part is an arbitrary positive self-adjoint abstract operator defined in N-dimensional domain;

to prove existence and uniqueness solvability of the inverse problem for a mixed-type equation on determining the right-hand of the equation, defined in N-dimensional domain and to construct generilezed solution;

to prove the unique solvability of a forward and inverse problems for a mixed-type equation with a fractional derivative in the sense of Caputo, whose elliptic part is consists of the Laplace operator defined in a given domain;

to prove the unique solvability of the forward problem for a mixed-type equation, involving a positive self-adjoint abstract operator and a fractional derivative in the sense of Caputo, also to prove existence and uniqueness of the solutions of inverse problem of determining the order of a fractional derivative;

Implementation of the research results: Based on the results obtained on direct and inverse problems for higher-order partial differential equations, the following projects have been implemented in practice:

The existence and uniqueness of the solutions of direct and inverse problems for partial differential equations of arbitrary order were used to transfer of radon in the atmospheric soil system in the international project “Natural disasters of Kamchanka- earthquakes and volcanic eruptions” No. AAAA19-119072290002-9 (reference of Vitus Bering Kamchatka State University dated September 15, 2023, under the №18-12). It should be noted that implementations of scientific results were used in the development of algorithms for solving inverse problems of geophysics;

The existence and uniqueness of solutions of direct and inverse problems for partial differential equations with a self-adjoint positive elliptic operator were used to struct the solutions of direct and inverse problems for mixed-type equations in the fundamental project “Mathematical modeling of the filtration process in two-component media with nonlinear boundary conditions” YoT--Ftex-2018-149 (reference of the National University of Uzbekistan, dated September 29, 2023, under the №04/11-5960). The application of scientific results made it possible to find a classical solution of direct and inverse problems for differential equations with a fractional derivative in the sense of Caputo, to prove the absolute and uniform convergence of the series in the solution.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters divided into ten paragraphs, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation work is 116 pages.

E’LON QILINGAN ISLAR RO’YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo’lim (Част I, Part I)

1. Ashurov R.R., Murzambetova M.B. Inverse problem for Mixed-type equation with an elliptik operator of arbitrary order. // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44(2), P. 533-541. (Scopus. IF=0.53).

2. Ashurov R.R., Murzambetova M.B. Inverse problem of determining the fractional derivative order in the mixed-type equation. // Uzbek Mathematical Journal. 2023. Vol. 67(3), P. 44-52 (01.00.00; №6)

3. Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка со спектральным параметром. // Узбекский математический журнал. 2012. №3. С.22-30. (01.00.00; №6)

4. Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка со спектральным параметром. // Узбекский математический журнал. 2013. №2. С.60-71. (01.00.00; №6)

5. Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом. // Вестник Удмуртского Университета. 2013. Вып 1. С.3-10. (Scopus. IF=0,136)

6. Мурзамбетова М.Б. Обратная задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка со спектральным параметром. // Доклады Академии наук Узбекистана. 2013. №2. С.3-5. (01.00.00; №7)

7. Murzambetova M.B. A boundary value problem for the fourth order partial differential equation with the lowest term. // Bulletin of the Institute of Mathematics. 2019, Vol.3, P. 1-9.(01.00.17; №17)

8. Мурзамбетова М.Б. Прямая и обратная задача для уравнения смешанного типа с дробной производной в смысле Капуто. // Бюллетень института математики. 2023. 6(5). С.124-133. (01.00.17; №17)

II bo’lim (Част II; Part II)

9. Ашуров Р.Р., Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа с эллиптическим оператором высокого порядка. // Вестник Краунц. 2022. Т.39. №2. С.7-19.

10. Ашуров Р.Р., Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа с эллиптическим оператором. // Международная научно-практическая конференция “Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий ” 11-12 мая, Бухара, 2022. –С. 164-195.

11. Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнений четвертого порядка со спектральным параметром. // Второй международный Российско-Узбекский Симпозиум. “Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики” Эльбрус. -2012. С. 43-45.

12. М.Б.Мурзамбетова. Обратная задача для уравнения четвертого порядка со спектральным параметром. // Современные проблемы

комплексного и функционального анализа: Материалы Респ. конф. с участием зарубежных ученых. 11-12 мая, Нукус, 2012. –С. 136-137.

13. Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка. Операторные алгебры и смежные проблемы: Тез. докл. Респ. науч. конф. с участием зарубежных ученных. 12-14 сентября 2012. – Ташкент, 2012. – С. 188-189.

14. Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка. // Тез. докл. Респ. науч. конф. 09-10 ноября 2012. – Ургенч, 2012. – С. 33

15. Мурзамбетова М.Б. О единственности одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка. // Теории функции одного и многих комплексных переменных: Международный научно-практический онлайн конференция. 26-28 ноября. 2020. Нукус – С.172-173.

16. Murzambetova M.B. Boundary value problem for the fourth order partial differential equation with the lowest term. // Modern Problems of differential equations and retated branches of mathematics. International scientific conference. March 12-13. 2020. Fergana. P.210-212.

17. Murzambetova M.B. Inverse problem for mixed type equation. // International scientific and practical conference «Actual problems of the mathematical modeling and information technology» 2-3 may. 2023. Nukus. P. 208-209.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi nusxalari 2023-yil 13-noyabr tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillardagi matnlari o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,75. Adadi 100 dona. Buyurtma № 71/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.