В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

НОРМАТОВ ЗАФАР ШЕРМИРЗА ЎҒЛИ

КАЛОДЖЕРО-МОЗЕР ФАЗОЛАРИНИНГ ТАВСИФИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

УДК: 512.745.2

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

НОРМАТОВ ЗАФАР ШЕРМИРЗА ЎҒЛИ

КАЛОДЖЕРО-МОЗЕР ФАЗОЛАРИНИНГ ТАВСИФИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.1.PhD/FM673 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Эшматов Фарход Ҳасанович** физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим
Расмий оппонентлар:	**Омиров Бахром Абдазович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Хабьер Гарсия Мартинес математика фанлари доктори (PhD)
Етакчи ташкилот:	**Андижон давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил « 28 » июн соат 17:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (139-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2022 йил « 15 » июн куни тарқатилди.
(2022 йил « 15 » июндаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

Б.А.Омиров
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва заруряти. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий ва амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда статистик физика ва инвариантлар назариясини таҳлил қилиш масалаларига келтирилади. Яъни, физикада n-жисм муаммоси фазодаги жисмлар группасининг алоҳида ҳаракатларини олдиндиндан аниқлашга қаратилган. Ҳар бир заррачанинг ҳаракатини бошқарадиган физик қонунлар оддий бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин. Бироқ, заррачалар тўпламини таҳлил қилиш жуда мураккаб ҳисобланади. Шу сабабдан, кўп жисмли назарий физика аксарият ҳолларда кўриб чиқилаётган муаммога хос бўлган яқинлашишлар тўпламига таянади ва фаннинг энг интенсив соҳалари қаторига киради. Калоджеро-Мозер динамик система бир ўлчовли кўп жисм муаммоси ҳисобланади. Калоджеро-Мозер системасини аниқ ечимга эга бўлган тескари квадрат Гамилтониан томонидан бошқариладиган чизиқ бўйлаб ҳаракатланадиган n та зарралар деб тасаввур қилиш мумкин. Ушбу заррачалар системасининг тегишли фаза фазосини яъни n-Калоджеро-Мозер фазосини тавсифлаш масалалари статистик физика, динамик системалар, инвариантлар назарияси ва информацион технологияларнинг муаммоларини ҳал этишда муҳим аҳамиятга эга.

Ҳозирги вақтда Калоджеро-Мозер фазосини Накажима йўналтирилган граф кўпхиллигига бир намуна сифатида қаралади. Шу сабабли, Калоджеро-Мозер фазолари алгебраик геометрияда, йўналтирилган графларнинг тасвирлар назариясида, проектив ва Чередник алгебраларида турли хил татбиқларга эга. Калоджеро-Мозер фазосининг энг асосий хусусиятларидан бири шундаки, у комплекс текисликдаги нуқталарнинг Гильберт схемасига диффеоморфдир. Демак, Гильберт схемаси учун барча маълум (ко)гомологик конструкциялар Калоджеро-Мозер фазоси учун ўзларининг ўхшашларига эга бўлиши керак. Гильберт схемасига ўхшамаган ҳолда Калоджеро-Мозер фазоси силлиқ аффин алгебраик кўпхилликдир ва у кўпҳадли функциялар алгебраси билан аниқланади. Кўпҳадли функциялари алгебрасининг аниқ тавсифи инвариант матрицалар назариясининг очиқ муаммоларидан бири ҳисобланади. Бу борада: Калоджеро-Мозер фазоларининг минимал ҳосил қилувчилари тўпламини топиш ва топилган ҳосил қилувчилар орасида кўпҳадли муносабатларни аниқлаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган амалий математика, информатика, рақамли иқтисодиётнинг долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда нонассоциатив алгебралар бўйича фундаментал тадқиқотларни ривожлантиришга алоҳида эътибор қаратилди. Ушбу фундаментал тадқиқотлар доирасида Калоджеро-Мозер фазоларини тавсифлаш орқали амалий муаммоларни ҳал этиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика

фанининг асосий вазифаси ва фаолият йўналиши этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида Калоджеро-Мозер фазоларини тавсифлаш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В. И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари, ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Ф.Калоджеро, Ж.Мозер, Д.Каздан, Б.Костант ва С.Стернбергларнинг ишларидан бошлаб Калоджеро-Мозер системалари ва Кадомцев-Петвиашвили (КП) системаси ўртасидаги боғлиқлик бўйича кенг кўламли тадқиқотлар олиб борилди. Кричевер ўзининг бир қатор мақолаларида КП ва Калоджеро-Мозер системаларида ҳайратланарли кашфиётлар қилди. У КП тенгламасининг рационал ечимларининг қутблари Калоджеро-Мозер системасига мувофиқ ҳаракат қилишини аниқ кузатди. Калоджеро-Мозер фазолари ва маълум чексиз ўлчамли Грассманниан Gr^{ad} ўртасида табиий биектив мослашувни қурган олим, Вилсон бу сирни ҳал қилди. Аделик Грасманниан КП тенгламасининг рационал ечимларини параметрлаштиради. Бундан ташқари, у аниқланган биекция КП оқимлари билан мос тушишини кўрсатди. Бу ишдан фойдаланиб Берест ва Вилсон биринчи Вейл алгебраси идеалларининг изоморфизм синфлари фазоси ва Калоджеро-Мозер фазолари ўртасидаги мосликни аниқлашди. Кейинги ишларида улар Калоджеро-Мозер фазосининг ҳар бирида текислик G аффин Кремона гуруппасининг табиий таъсири борлигини ва бу транзитив таъсир бўлишини кўрсатишган. Ю.Берест, А.Эшматов, Ф.Эшматовлар таъсирнинг икки-транзитив эканлигини исботлаб, таъсирнинг чексиз транзитив бўлишлигини тахмин қилдилар. БЭЭ гипотезаси Куюмзиян томонидан исботланган.

П.Этингоф ва В.Гинзбургларнинг асосий натижаларидан бири n-

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори.

даражали симметрик группа билан боғланган $H_c(S_n)$ рационал Чередник алгебрасининг сферик қисмалгебраси Калоджеро-Мозер кўпхиллигининг $\mathcal{O}(\mathcal{C}_n)$ координата ҳалқасига изоморф коммутатив алгебра эканлигини кўрсатади. Бундан ташқари, $H_c(S_n)$ алгебраси ва $\mathcal{O}(\mathcal{C}_n)$ ҳалқа орасида Морита эквивалентлик муносабати, ҳамда $H_c(S_n)$ нинг оддий тасвирлари ва $\mathcal{C}_n$ нинг нуқталари ўртасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд. Бу фактлардан фойдаланиб, $\mathcal{O}(\mathcal{C}_n)$ алгебрада $\mathcal{C}_n$ нинг симплектик структурасидан келиб чиқадиган Пуассон алгебра структураси аниқланган. Хусусан, $\mathcal{O}(\mathcal{C}_n)$ алгебранинг Пуассон ҳосил қилувчилари топилган. G таъсирнинг транзитивлиги ва $\mathcal{C}_n$ гипер-Келер кўпхиллиги эканлигидан келиб чиққан ҳолда, Хитчин ва Вилсон $\mathcal{C}_n$ фазони баъзи чексиз ўлчамли Ли алгебрасининг қўшма орбитаси бўлиши ёки бўлмаслигига қизиқишди. Бунга Гинзбург ҳамда Боскландт ва Ле Бруйн томонларидан мустақил равишда ижобий жавоблар берилди. Улар $\mathcal{C}_n$ билан боғлиқ бўлган шода Ли алгебрасидан $\mathcal{O}(\mathcal{C}_n)$ алгебрасига табиий суръектив Ли алгебра гомоморфизмини қурдилар. Бу гомоморфизм жуфт $n \times n$ матрицалардаги инвариант кўпҳадлар ҳалқаси орқали ўтади. Шундай қилиб, Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқаларини тавсифи $n \times n$ матрицаларнинг инвариант назарияси билан чамбарчас боғлиқ.

Матрицаларнинг инвариант назарияси d та $n \times n$ матрицаларга мос равишда қўшмасига ўтказиш билан таъсир этувчи GL_n-инвариантлар C_{nd} алгебрасини ўрганади. Масала икки қисмдан иборатдир: C_{nd} ҳалқанинг минимал ҳосил қилувчилари тўпламини аниқлаш ва улар орасидаги кўпҳадли муносабатларни топиш. К.С.Сибирский C_{2d} ҳалқанинг ҳосил қилувчилари из функцияларидан иборат эканлигини исботлади. Кейинчалик М.Артин кичик ўлчамли матрицаларнинг инвариантларини барча из функциялар билан ҳосил қилиш мумкинлигини исботлади ва бу натижа ихтиёрий ўлчамли матрицаларнинг инвариантлари учун ҳам тўғри бўлишини тахмин қилди. Ю.П.Размыслов ва С.Прочезилар мустақил равишда М.Артиннинг тахминини исботлаб, ҳосил қилувчилар тўпламининг қуввати чекли эканлигини ҳам кўрсатдилар. Шунингдек, улар бу ҳосил қилувчилар орасидаги муносабатлар Кэли-Гамильтон теоремасидан келиб чиқишини исботладилар. Бироқ, C_{nd} нинг минимал ҳосил қилувчилар тўпламини топиш ва улар орасидаги муносабатларни аниқ ёзиш очиқ муаммо бўлиб қолмоқда. Баъзи маълум натижаларни келтирамиз. Я.Дубнов C_{22} ҳеч қандай муносабатларга эга бўлмаган бешта ўзгарувчили кўпҳадлар алгебраси бўлишини кўрсатди. C_{23} алгебра ягона муносабатга эга бўлган кўпҳадлар алгебраси эканлиги К.С.Сибирский ва Э.Форманекнинг ишларидан келиб чиқади. Й.Тераниши C_{32} алгебра учун 11 та издан иборат минимал ҳосил қилувчилар тўплами ва унинг Гильберт қаторини ҳисоблаб чиқди. Бу қаторнинг тавсифидан C_{32} да ягона кўпҳадли муносабат мавжуд эканлиги келиб чиқади. Накамото бу

муносабатнинг аниқ шаклини топди. 1989 йилда С.Абеасис ва М.Питталуга ҳар қандай C_{3d} алгебра учун ҳосил қилувчиларни ҳисоблашнинг самарали усулини таклиф қилишди. Уларнинг натижаларидан фойдаланиб Х.Аслаксен, В.Дренский ва Л.Садиковалар C_{32} алгебра учун янги минимал ҳосил қилувчилар тўпламини тақдим этдилар ва улар орасидагни муносабатни топдилар. Ниҳоят, В.Дренский, Л.Садикова ва Д.Джоковичлар томонидан C_{42} алгебра учун минимал ҳосил қилувчилар тўплами тақдим этилди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номидаги Математика институтининг ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87 рақамли «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизикли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос + Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва сиртларнинг глобал инвариантлари назарияси ва унинг механикага татбиқлари» (2017-2019 йиллар) ва ЁФА-Фтех-2018-77 рақамли «Яримсодда ва нилпотент алгебраларининг когомологик группалари» (2018-2019 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқасида Пуассон алгебра структурасини аниқлаш ва бу структурадан фойдаланиб Калоджеро-Мозер фазоларининг алгебраик тавсифини беришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

учинчи ва тўртинчи Калоджеро-Мозер фазолари координата ҳалқаларининг минимал ҳосил қилувчилари тўпламини топиш;

Калоджеро-Мозер фазолари координата ҳалқаларининг ҳосил қилувчилари орасидаги муносабатларни топиш;

Калоджеро-Мозер фазоларида Пуассон алгебра структурасини аниқлаш;

аффин Кремона группасини иккинчи Калоджеро-Мозер фазосига таъсирини чексиз транзитив таъсир эканлигини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти. Калоджеро-Мозер фазоси, координата ҳалқа, кўпҳадли муносабат.

Тадқиқотнинг предмети. Пуассон алгебралар назарияси, инвариантлар назарияси, матрицалар назарияси ва кўпҳадлар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда ассоциатив алгебралар назарияси методлари, индукция методи, шунингдек инвариантлар назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

учинчи ва тўртинчи Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқаларининг минимал ҳосил қилувчилари топилган;

учинчи ва тўртинчи Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқаларининг ҳосил қилувчилари орасидаги муносабатлар топилган ва умумий ҳолда айрим ҳосил қилувчилар орасида муносабат мавжудлиги исботланган;

Пуассон алгебра структураси орқали Калоджеро-Мозер фазоларини тавсифлаш усули яратилган ва бу усул ёрдамида учинчи ва тўртинчи Калоджеро-Мозер фазолари тавсифланган;

аффин Кремона группасининг таъсири иккинчи Калоджеро-Мозер фазосида чексиз транзитив эканлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Диссертацияда олинган натижалар ва фойдаланилган усулларни олий ўқув юртлари магистрантлари ва таянч докторантлари учун махсус курсларда ўқитиш мумкин. Шунингдек, Пуаасон структурасига доир натижалар инвариант матрицалар назариясининг гипотезаларини ҳал этишга ёрдам беради.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги натижалар инвариантлар назариясини, ҳамда алгебралар назариясининг фундаментал натижаларини қўллаш орқали олинганлиги билан изоҳланади. Олинган натижалар математик жиҳатдан тўғри. Учинчи ва тўртинчи Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқаларида топилган муносабатлар Mathematica 12 дастурининг стандарт буйруқлари орқали текшириш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, ишда олинган натижалардан турли алгебраларнинг кўпхиллигини тадқиқ қилишда, хусусан, диссертацияда келтирилган усул ва методларни қўллаб, инвариантлар назариясидаги гипотезани ҳал қилишда фойдаланилганлига билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалардан алгебраик структуралар назариясида қўллаш мумкин. Шунингдек, диссертацияда олинган натижалар ва фойдаланилган усулларни олий ўқув юртлари магистрантлари ва таянч докторантлари учун махсус курсларда ўқитиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Калоджеро-Мозер фазоларининг тавсифи бўйича олинган натижалар асосида:

учинчи ва тўртинчи Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқаларининг минимал ҳосил қилувчилари тўпламидан №MTM2016-79661-P рақамли «Группа ва ноассоциатив алгебраларнинг гомологиялари, гомотопик ва категорик инвариантлари» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида ҳосил қилувчилар орасидаги муносабатларни аниқлашда фойдаланилган (Сантьяго де Компостела университетининг 2022 йил 15 апрелдаги маълумотномаси, Испания). Илмий натижани қўлланилиши умумий ҳолда юқори тартибли инвариант матрицалар ҳалқасидаги муносабатни аниқлашни имконини берган;

Калоджеро-Мозер фазоларида Пуассон алгебра структурасини аниқланишидан ОТ–Ф4–31 рақамли «Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар» мавзусидаги фундаментал лойиҳада Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқасини тавсифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университетининг 2022 йил 21 апрелдаги маълумотномаси). Илмий натижани қўлланилиши учинчи ва тўртинчи Калоджеро-Мозер фазоларининг минимал ҳосил қилувчиларининг

Пуассон кўпайтма жадвалини аниқ топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 2 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 11 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та илмий мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 85 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган бўлиб тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар, ҳамда диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертатциянинг биринчи боби «**Дастлабки маълумотлар ва натижалар**» деб номланган. Бу бобда асосий тушунчалар ва диссертатцияда ишлатиладиган баъзи терминлар келтирилган. Шунингдек, Калоджеро-Мозер фазолари инвариант матрицалар ҳалқасига кирганлиги сабабли бу ҳалқага тегишли машҳур натижалар эслатиб ўтилган.

1-таъриф. Айтайлик, G группа ва бўш бўлмаган S тўплам берилган бўлсин. Агар $\cdot : G \times S \to S$ функция учун $\cdot(g,x) \to g \cdot x$ белгилаш киритилиб, бу функция барча $x \in S$, $g_1, g_2 \in G$ учун

(i) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$,

(ii) $e \cdot x = x$, бу ерда e элемент G группанинг бирлик элементи,

шартларни қаноатлантирса, G группа S тўпламга таъсир этади дейилади.

Агар G группанинг S тўпламга таъсири мавжуд бўлса, у ҳолда S тўплам G **-тўплам** дейилади.

$\mathcal{M}_n := M_n(\mathbb{C})$ орқали $\mathbb{C}$ комплекс сонлар майдони устидаги $n \times n$ матрицаларнинг ассоциатив алгебрасини белгилаймиз. Айтайлик d мусбат бутун сон бўлсин. Тескариланувчи $n \times n$ матрицаларнинг $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ группаси $\mathcal{M}_n$ алгебранинг d та нусхасидан иборат $\mathcal{M}_n^d$ тўғри кўпайтмасига табиий равишда таъсир этади:

$$g\cdot(X_1,...,X_d)=(gX_1g^{-1},\ldots,gX_dg^{-1}),\quad g\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}). \tag{1}$$

Бу таъсир $\mathcal{M}_n^d$ тўғри кўпайтмадаги $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d]$ кўпҳадлар алгебрасида таъсир ҳосил қилади, яъни $\varphi\in\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d]$ ва $g\in \mathrm{GL}_n$ учун қуйидагича аниқланади:

$$(g*\varphi)(X_1,\ldots,X_d):=\varphi(g^{-1}.(X_1,\ldots,X_d)),$$

бу ерда $i=1,\ldots,d$ учун X_i нинг элементларини чизиқли функциялар сифатида қараш мумкин.

$\mathcal{M}_n^d$ тўғри кўпайтмани dn^2 ўлчамли аффин фазо сифатида ҳам аниқлаш мумкилиги эслатиб ўтамиз, яъни $M_n^d\cong\mathbb{C}^{dn^2}$.

$\mathcal{M}_n^d/\mathrm{GL}_n$ орбита фазосини алгебраик кўпхиллик сифатида тавсифлаш классик инвариантлар назариясининг мураккаб масалаларидан бири ҳисобланади. Бундай муаммоларни ҳал этиш учун Давид Мамфорд 1965 йилда Гильбертнинг инвариантлар назариясидаги ғояларидан фойдаланиб янги $V/\!/G$ орбита фазосини киритди, бу ерда V алгебраик кўпхиллик ва G эса бу кўпхилликка таъсир этувчи алгебраик группа. Бошқача қилиб айтганда, $V/\!/G$ орбита фазоси V устидаги ёпиқ G-орбиталардан иборат.

Ихтиёрий V алгебраик кўпхиллик ўзидаги $\mathbb{C}[V]$ кўпҳадлар алгебраси билан аниқланганлиги сабабли $\mathcal{M}_n^d/\!/\mathrm{GL}_n$ орбита фазосини тавсифлашнинг ўрнига $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d/\!/\mathrm{GL}_n]$ кўпҳадлар алгебрасини тавсифлаш етарлидар.

V устидаги G-таъсир барча $f\in\mathbb{C}[V]$, $g\in G$ лар учун $\mathbb{C}[V]$ устида қуйидаги формула билан аниқланган:

$$(g*f)(v):=f(g^{-1}\cdot v).$$

G-таъсир ҳосил қилганлинги сабабли G-инвариант кўпҳадларнинг қуйидагича қисм-алгебрасини аниқлаймиз:

$$\mathbb{C}[V]^G:=\{f\in\mathbb{C}[V]\ \mid\ g*f=f\quad \text{барча } g\in G\}.$$

Қуйидаги теорема 1965 йилда Д. Мамфорд томонидан исботланган.

1-теорема. Айтайлик, V алгебраик кўпхилликга таъсир этувчи G алгебраик группа берилган бўлсин. У ҳолда

$$\mathbb{C}[V/\!/G]\cong\mathbb{C}[V]^G.$$

Шунинг учун, Мамфорднинг теоремасига кўра, $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d/\!/\mathrm{GL}_n]$ алгебранинг тавсифлаш масаласини қуйидаги икки масалани ўрганишга келтириш мумкин:

i) $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d/\!/\mathrm{GL}_n]$ алгебранинг ҳосил қилувчиларини топиш,

ii) бу ҳосил қилувчилар орасидаги барча боғлиқликларни топиш.

Биз GL_n-инвариант кўпҳадларнинг $C_{nd}:=\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d]^{\mathrm{GL}_n}$ алгебрасини тавсифлаш масаласини ўрганамиз. Юқоридаги i) масалани ечиш мақсадида мустақил равишда С. Прочези ва Ю.П. Размысловлар қуйидаги машхур натижаларни исботладилар.

2-теорема. C_{nd} ҳалқа комплекс сонлар майдони устида барча

$\mathrm{Tr}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j})$, $1 \le j \le n^2$ лар орқали ҳосил қилинади, бу ерда $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_j} \in \{A_1, A_2, \ldots, A_d\}$.

Энди юқоридаги масаланинг иккинчи қисмини хал этишда муҳим аҳамиятга эга бўлган Кэли-Гамильтон теоремасини келтирамиз.

3-теорема. Ихтиёрий $A \in \mathcal{M}_n$ матрица учун $f_n(A) = 0$ тенглик ўринлидир, бу ерда $f_n(x) - A$ матрицанинг характеристик кўпҳади.

Қуйидаги теорема ҳам С. Прочези ва Ю.П. Размысловлар томонидан исботланган:

4-теорема. Ноль характеристикали майдон устидаги матрицалар алгебрасининг барча из тенгликлари Кэли-Гамилтон теоремаси натижасида хосил бўлади.

$n \ge 0$ сон учун, $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ декарт кўпайтманинг қуйидагича қисм тўпламини аниқлаймиз:

$$\overline{\mathcal{C}}_n := \{(X,Y) \in \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \mid \operatorname{rank}([X,Y] + I_n) = 1\},$$

бу ерда I_n матрица $n \times n$ ўлчамли бирлик матрица. $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ да аниқланган (1) кўринишдаги таъсир $\overline{\mathcal{C}}_n$ да ҳам таъсир хосил қилади.

2-таъриф. $\overline{\mathcal{C}}_n /\!/ \mathrm{GL}_n$ орбита фазосига n-Калоджеро-Мозер фазоси дейилади.

Калоджеро-Мозер фазолари Вилсон ишларида кенг қамровли ўрганилган ва у қуйидаги теоремани исботлаган:

5-теорема. n-Калоджеро-Мозер $\mathcal{C}_n$ фазоси $2n$ ўлчамли силлиқ, ажралмайдиган комплекс симплект аффин кўпхиллиги бўлади.

Энди Пуассон алгебраси таърифининг қисми ҳисобланган Ли алгебраси таърифини келтирамиз. Кейинчалик C_{nd} ҳалқани Пуассон алгебра структурасига эга эканлигини кўрсатамиз. Натижада бу структура Калоджеро-Мозер фазосининг координата ҳалқасида Пуассон структура ҳосил қилади.

3-таъриф. $\mathbb{F}$ майдон устида аниқланган L алгебранинг ихтиёрий *x, y, z* элементлари учун қуйидаги айниятлар бажарилса:

$[x,x] = 0$ − антикоммутативлик айнияти,

$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ − Якоби айнияти,

у ҳолда L алгебра Ли алгебраси дейилади, бу ерда $[-,-]$ − L алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

Энди Пуассон алгебраси таърифини келтирамиз.

4-таъриф. $(R,\cdot)$ коммутатив, ассоциатив алгебрада $\{-,-\}$ амал аниқланган бўлиб, ихтиёрий a,b,c элементлар бу амалга нисбатан қуйидаги айниятларни бажарса:

i) $\{a,b\} = -\{b,a\}$,

ii) $\{a,\{b,c\}\} + \{b,\{c,a\}\} + \{c,\{a,b\}\} = 0$,

iii) $\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b,c\} + b \cdot \{a,c\}$,

у ҳолда R алгебрага Пуассон алгебраси дейилади.

Лейбниц алгебра таърифини келтирайлик.

5-таъриф. $\mathbb{F}$ майдон устида аниқланган L алгебранинг ихтиёрий *x, y, z* элементлари учун қуйидаги

$$[[x,y],z]=[[x,z],y]+[x,[y,z]]$$

Лейбниц айнияти бажарилса, L алгебра Лейбниц алгебраси дейилади, бу ерда $[-,-]-L$ алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

Энди C_{nd} да Пуассон алгебра структураси қандай аниқланишини кўриб чиқамиз.

Айтайлик $\omega: V\times V\to\mathbb{C}$ икки ўлчамли $V=\mathbb{C}x\oplus\mathbb{C}y$ вектор фазосида

$$\omega(x,y)=-\omega(y,x)=1,\ \omega(x,x)=\omega(y,y)=0$$

шартлар билан аниқланган бичизиқли форма, R эса x ва y элементлар орқали ҳосил қилинган эркин ассоциатив алгебра бўлсин. $\{-,-\}: R\times R\to R$ бичизиқли акслантиришни қуйидагича аниқлайлик:

$$\{u_1\dots u_p, v_1\dots v_q\}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\omega(u_i,v_j)u_{i+1}\dots u_p u_1\dots u_{i-1}v_{j+1}\dots v_q v_1\dots v_{j-1},$$

бу ерда $u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q$ лар x ёки y ни қабул қилади.

1993 йилда М.Концевич бу кўпайтмани Лейбниц айниятини қаноатлантиришини исботлади ва бу натижа R алгебранинг бу кўпайтмага нисбатан Лейбниц алгебраси бўлишини кўрсатади. R алгебранинг $\mathrm{Com}(R)=Span\{ab-ba\,|\,a,b\in R\}$ қисм-фазосини аниқлайлик. $\mathrm{Com}(R)$ қисм-фазо R алгебранинг маркази $Z(R)$ да ётишини кўрсатиш қийин эмас. $\mathcal{L}=R/\mathrm{Com}(R)$ фактор Лейбниц алгебрани кўриб чиқамиз. Қуйидаги натижа Гинзбургнинг ишида исботланган:

1-тасдиқ. $\mathcal{L}=R/\mathrm{Com}(R)$ фактор алгебра ҳосил қилинган кўпайтмага нисбатан Ли алгебра бўлади.

Бу Ли алгебра шода Ли алгебрага мисол бўлади ва инвариант матрицалар ҳалқасида Ли алгебра структурасини аниқлашда муҳим аҳамият касб этади. Ҳақиқатан ҳам, қуйидагича аниқланган акслантириш:

$$tr:\mathcal{L}\to\mathbb{C}[(M_n\times M_n)//\mathrm{GL}_n]$$
$$x^{k_1}y^{l_1}\dots x^{k_m}y^{l_m}\mapsto((X,Y)\mapsto\mathrm{Tr}(X^{k_1}Y^{l_1}\dots X^{k_m}Y^{l_m}))$$

C_{nd} алгебрада Ли алгебра структураси ва натижада Пуассон алгебра структурасини ҳосил қилади.

Шунингдек, биз Калоджеро-Мозер фазоларида группа таъсирини ҳам ўрганамиз.

6-таъриф. Айтайлик $\mathcal{G}$ группа ва бўш бўлмаган S тўплам берилган бўлсин. Агар $s,r\in S$ элементлар учун шундай $g\in\mathcal{G}$ элемент топилиб $g\cdot s=r$ бўлса, у ҳолда $\mathcal{G}$ группа S тўпламда транзитив таъсир этади, ёки таъсир транзитив дейилади.

Энди n-транзитив тушунчасини келтирамиз.

7-таъриф. Агар $(s_1,\dots,s_n)$ ва $(r_1,\dots,r_n)$ лар S тўпламдаги турли n-ликлар

учун шундай $g \in \mathcal{G}$ элемент топилиб, бу элемент учун

$$g \cdot (s_1,\ldots,s_n) = (g \cdot s_1,\ldots,g \cdot s_n) = (r_1,\ldots,r_n)$$

шарт бажарилса, у ҳолда $\mathcal{G}$ группа S тўпламда n-транзитив таъсир этади, ёки таъсир n-транзитив дейилади.

Қуйидаги таъриф чексиз транзитив тушунчасини тавсифлайди.

8-таъриф. Агар ҳар бир мусбат n сони учун $\mathcal{G}$ группанинг S тўпламдаги таъсири n-транзитив бўлса, у ҳолда бу таъсир чексиз транзитив дейилади.

Икки ўзгарувчили кўпҳадлар $\mathbb{C}[x,y]$ ҳалқасининг унимодуляр автоморфизмларининг G группаси $\mathcal{C}_n$ Калоджеро-Мозер фазосида таъсир этади.

Қуйидаги теорема Г.Вилсон ва Ю.Берестлар ишида исботланган:

6-теорема. Ҳар бир $n \geq 0$ учун G группа $\mathcal{C}_n$ да транзитив таъсир этади.

Шунингдек, Ю. Берест, А. Эшматов, Ф. Эшматовлар қуйидаги теоремани исботлашган:

7-теорема. Хар бир $n \geq 0$ учун G группа $\mathcal{C}_n$ га 2-транзитив таъсир этади.

Шунингдек, улар томонидан бу таъсир чексиз транзитив бўлиши ҳақида гипотеза берилган. Бу гипотеза К. Кюмзиян томонидан исботланган:

8-теорема. $\mathcal{C}_n$ Калоджеро-Мозер фазосининг автоморфизмлари группаси таъсири чексиз транзитив бўлади.

Диссертациянинг «**Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқасидаги муносабатлар**» деб номланувчи иккинчи бобида, инвариант матрицалар назарияси учун қаралган масалаларни Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқаси учун ечимлари берилади. Калоджеро-Мозер фазолари инвариантлар ҳалқасининг фактори бўлганлига сабабли бу масалаларни ўрганиш мумкин.

П.Этингоф ва В.Гинзбургларнинг ишларида

$$\{\mathrm{Tr}(X^iY^j) \mid 0 \leq i,j \leq n\}$$

тўплам Калоджеро-Мозер фазоларининг $\mathbb{C}[\mathcal{C}_n]$ координата ҳалқасини коммутатив алгебра сифатида ҳосил қилиши исботланган. $\mathcal{P}$ орқали $\mathbb{C}[\mathcal{C}_n]$ нинг қуйидаги ҳосил қилувчиларидан иборат тўпламни белгилаймиз:

$$\begin{array}{l}
\mathrm{Tr}(X),\ \mathrm{Tr}(Y),\\
\mathrm{Tr}(A^2),\ \mathrm{Tr}(AB),\ \mathrm{Tr}(B^2),\\
\mathrm{Tr}(A^3),\ \mathrm{Tr}(A^2B),\ \mathrm{Tr}(AB^2),\ \mathrm{Tr}(B^3),\\
\mathrm{Tr}(A^4),\ \mathrm{Tr}(A^3B),\ \mathrm{Tr}(A^2B^2),\ \mathrm{Tr}(AB^3),\ \mathrm{Tr}(B^4),\\
\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\ddots\\
\mathrm{Tr}(A^n),\ \mathrm{Tr}(A^{n-1}B),\ldots,\ \mathrm{Tr}(AB^{n-1}),\ \mathrm{Tr}(B^n),
\end{array}$$

бу ерда $A = X - \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(X)I_n$, $B = Y - \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(Y)I_n$.

9-Теорема. $\mathcal{P}$ тўпламдаги ҳосил қилувчилар орасида камида битта муносабат мавжуд.

Қайд этиш керакки $\mathcal{P}$ тўплам Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқаси учун минимал ҳосил қилувчилар тўплами эмас. Бироқ, 9-

Теоремани исботида қўлланилган метод $\mathcal{P}$ тўплам элементлари орасидаги муносабат кўринишини аниқ ёзишга ёрдам беради.

$\{\mathrm{Tr}(X^iY^j), 0 \le i, j \le n\}$ тўплам $\mathbb{C}[\mathcal{C}_n]$ алгебрани коммутатив алгебра сифатида ҳосил қилганлигидан ва Кэли-Гамильтон теоремасидан фойдаланиб қуйидаги тасдиқни оламиз.

2-тасдиқ. Қуйидаги излар

$$\mathrm{Tr}(X), \mathrm{Tr}(Y),$$
$$\mathrm{Tr}(A^2), \mathrm{Tr}(AB), \mathrm{Tr}(B^2),$$
$$\mathrm{Tr}(A^3), \mathrm{Tr}(A^2B), \mathrm{Tr}(AB^2), \mathrm{Tr}(B^3),$$
$$\mathrm{Tr}(A^4), \mathrm{Tr}(A^3B), \mathrm{Tr}(A^2B^2), \mathrm{Tr}(AB^3), \mathrm{Tr}(B^4),$$
$$\mathrm{Tr}(A^3B^2), \mathrm{Tr}(A^2B^3), \mathrm{Tr}(A^3B^3)$$

$\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$ ни ҳосил қилади.

Бироқ, у минимал ҳосил қилувчилар тўплами эмас. Қуйида биз баъзи «аралаш» излар ва «тартибланган» излар орасида боғланиш мавжудлигини келтирамиз.

1-лемма. Ихтиёрий $(X,Y) \in \mathcal{C}_4$ жуфтлик учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$12\mathrm{Tr}(A^3B^2) = \mathrm{Tr}(A^3)\mathrm{Tr}(B^2) + 6\mathrm{Tr}(A^2B)\mathrm{Tr}(AB) + 3\mathrm{Tr}(AB^2)\mathrm{Tr}(A^2),$$
$$12\mathrm{Tr}(A^2B^3) = \mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(B^3) + 6\mathrm{Tr}(AB^2)\mathrm{Tr}(AB) + 3\mathrm{Tr}(A^2B)\mathrm{Tr}(B^2).$$
$$\begin{aligned} 20\mathrm{Tr}(A^3B^3) = &-\mathrm{Tr}^3(AB) + 6\mathrm{Tr}(A^2B)\mathrm{Tr}(AB^2) + 3\mathrm{Tr}(A^3B)\mathrm{Tr}(B^2) \\ &+ 9\mathrm{Tr}(A^2B^2)\mathrm{Tr}(AB) + 3\mathrm{Tr}(AB^3)\mathrm{Tr}(A^2) \\ &+ \frac{2}{3}\mathrm{Tr}(A^3)\mathrm{Tr}(B^3) - \frac{3}{2}\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(AB)\mathrm{Tr}(B^2) - 16\mathrm{Tr}(AB). \end{aligned}$$

Бу леммадан 2-Тасдиқдаги изларнинг охирги иккитаси кўпҳад шаклида қолганлари орқали ифодаланиши келиб чиқади. Шунингдек, қуйидаги натижа ўринлидир:

10-теорема. Қуйидаги излар

$$\mathrm{Tr}(X), \mathrm{Tr}(Y),$$
$$\mathrm{Tr}(A^2), \mathrm{Tr}(AB), \mathrm{Tr}(B^2),$$
$$\mathrm{Tr}(A^3), \mathrm{Tr}(A^2B), \mathrm{Tr}(AB^2), \mathrm{Tr}(B^3),$$
$$\mathrm{Tr}(A^4), \mathrm{Tr}(A^3B), \mathrm{Tr}(A^2B^2), \mathrm{Tr}(AB^3), \mathrm{Tr}(B^4)$$

$\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$ нинг минимал ҳосил қилувчилари тўпламини ҳосил қилади.

Қуйидаги теорема $\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$ нинг ҳосил қилувчилари орасидаги муносабатни аниқ шаклини кўрсатади.

11-теорема. $\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$ да қуйидагича муносабат ўринли бўлади:

$$\begin{aligned} &-\mathrm{Tr}^2(A^2)\mathrm{Tr}(B^2) + \mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}^2(AB) + 2\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(A^2B^2) - 4\mathrm{Tr}(AB)\mathrm{Tr}(A^3B) \\ &+2\mathrm{Tr}(B^2)\mathrm{Tr}(A^4) + 2\mathrm{Tr}(A^3)\mathrm{Tr}(AB^2) - 2\mathrm{Tr}(A^2B)^2 + 8\mathrm{Tr}(A^2) = 0; \end{aligned}$$

C_{32} алгебра учун даражаси 6 дан ошмайдиган 11 элементдан иборат минимал ҳосил қилувчилар тўплами Тераниши томонидан топилган. Улар қуйидагича: $\mathrm{Tr}(X), \mathrm{Tr}(Y)$ ва

$$\mathrm{Tr}(X^2), \mathrm{Tr}(XY), \mathrm{Tr}(Y^2), \mathrm{Tr}(X^3), \mathrm{Tr}(X^2Y), \mathrm{Tr}(XY^2), \mathrm{Tr}(Y^3), \quad (2)$$
$$\mathrm{Tr}(X^2Y^2), \mathrm{Tr}(X^2Y^2XY). \quad (3)$$

К.Накамото ягона ва жуда мураккаб бўлган алгебраик муносабатни топган. Х.Аслаксен, В.Дренский ва Л.Садиковаларнинг ишида бошқа бир минимал ҳосил қилувчилар тўплами топилган. Бу ҳосил қилувчилар юқоридаги ҳосил қилувчилардан қуйидагича фарқ қилади: дастлабки икки из ўзгармайди, (2) даги излардаги X ва Y матрицалар мос равишда ўзларининг изсиз A ва B матрицалари билан ва (3) даги излар қуйидаги

$$v = \mathrm{Tr}(A^2B^2) - \mathrm{Tr}(ABAB), \tag{4}$$

$$w = \mathrm{Tr}(A^2B^2AB) - \mathrm{Tr}(B^2A^2BA) \tag{5}$$

излар билан алмаштирилган. Ушбу янги ҳосил қилувчилар орқали улар орасидаги муносабатни кўринишини ёзиш анча осонлашади ва бу натижа Х.Аслаксен, В.Дренский ва Л.Садиковаларнинг ишидаги асосий натижа ҳисобланади. Шунингдек, муаллифлар қуйидагини исботлашган:

3-тасдиқ. C_{32} да қуйидагича тенглик ўринли бўлади:

$$\mathrm{Tr}(ABAB) - \mathrm{Tr}(A^2B^2) = \frac{1}{2}n(n-1). \tag{6}$$

(6) тенглик C_{32} алгебрадаги v ҳосил қилувчини $\mathcal{C}_3$ Калоджеро-Мозер фазосининг координата ҳалқасида ўзгармас сонга тенг эканлини билдиради, яъни $v = -3$. Қуйида C_{32} алгебранинг w ҳосил қилувчини $\mathcal{C}_3$ Калоджеро-Мозер фазосининг координата ҳалқасида қандай бўлиши ҳақида маълумот беради.

4-тасдиқ. Ихтиёрий $(X,Y) \in \mathcal{C}_n$ жуфтлик учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$\mathrm{Tr}(A^2BAB^2) = \mathrm{Tr}(A^2B^2AB) - \frac{1}{3}n(n-1)(n-2).$$

4-Тасдиққа кўра w ҳосил қилувчи ҳам 2 га тенг қиймат билан $\mathcal{C}_3$ Калоджеро-Мозер фазосининг координата ҳалқасида ўзгармас бўлади. Шунинг учун, қуйидаги теоремани исботлашимиз мумкин:

12-теорема. Қуйидаги излар

$$\mathrm{Tr}(X), \mathrm{Tr}(Y), \mathrm{Tr}(A^2), \mathrm{Tr}(AB), \mathrm{Tr}(B^2),$$
$$\mathrm{Tr}(A^3), \mathrm{Tr}(A^2B), \mathrm{Tr}(AB^2), \mathrm{Tr}(B^3)$$

$\mathbb{C}[\mathcal{C}_3]$ нинг минимал ҳосил қилувчилари тўпламини ҳосил қилади.

Шунингдек, қуйидаги теорема $\mathbb{C}[\mathcal{C}_3]$ нинг ҳосил қилувчилари орасидаги муносабатни аниқ шаклини кўрсатади.

13-теорема. $\mathbb{C}[\mathcal{C}_3]$ да қуйидагича муносабат ўринли бўлади:

$$\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(B^3) - 2\mathrm{Tr}(AB)\mathrm{Tr}(AB^2) + \mathrm{Tr}(B^2)\mathrm{Tr}(A^2B) = 0.$$

Диссертациянинг «**Калоджеро-Мозер фазоларида Пуассон структураси**» деб номланувчи учинчи бобида, $\mathbb{C}[(M_n \times M_n) /\!/ \mathrm{GL}_n]$ инвариантлар алгебрасининг баъзи ҳосил қилувчиларнинг Пуассон кўпайтмалари ҳисобланади. Шода Ли алгебрадан келиб чиққан Пуассон кўпайтмани одатий ҳосил қилувчилар учун ҳисоблаш осон бўлсада, изсиз матрицалар учун уларнинг Пуассон кўпайтмаларини ҳисоблаш мураккаб ҳисобланади.

2-лемма. Ихтиёрий $p,q \geq 2$ сонлар учун қуйидаги ўринлидир:

$$\{\mathrm{Tr}(A^p), \mathrm{Tr}(B^q))\} = pq\mathrm{Tr}(A^{p-1}B^{q-1}) - \frac{pq}{n}\mathrm{Tr}(A^{p-1})\mathrm{Tr}(B^{q-1}).$$

Энди Х.Аслаксен, В.Дренский ва Л.Садиковаларнинг ишида берилган минимал ҳосил қилувчилар учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\begin{aligned} &a_1 = \mathrm{Tr}(X), a_2 = \mathrm{Tr}(Y), a_3 = \mathrm{Tr}(A^2), a_4 = \mathrm{Tr}(AB), a_5 = \mathrm{Tr}(B^2), \\ &a_6 = \mathrm{Tr}(A^3), a_7 = \mathrm{Tr}(A^2B), a_8 = \mathrm{Tr}(AB^2), a_9 = \mathrm{Tr}(B^3), \\ &v = \mathrm{Tr}(A^2B^2) - \mathrm{Tr}(ABAB), w = \mathrm{Tr}(A^2B^2AB) - \mathrm{Tr}(B^2A^2BA). \end{aligned} \tag{7}$$

14-теорема. $\mathbb{C}[\mathcal{M}_3 \times \mathcal{M}_3]^{\mathrm{GL}_3}$ нинг ҳосил қилувчиларининг Пуассон кўпайтма жадвали қуйидагича бўлади:

$$\{a_1, a_2\} = 3$$

	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_4	$-2a_3$					
a_5	$-4a_4$	$-2a_5$				
a_6	0	$3a_6$	$6a_7$			
a_7	$-2a_6$	a_7	$4a_8$	$-\frac{1}{2}a_3^2$		
a_8	$-4a_7$	$-a_8$	$2a_9$	$-a_3a_4$	$-\frac{5}{6}a_3a_5 + v + \frac{1}{3}a_4^2$	
a_9	$-6a_8$	$-3a_9$	0	$-3v + \frac{3}{2}a_3a_5 - 3a_4^2$	$-a_4a_5$	$-\frac{1}{2}a_5^2$

бу ерда жадвалнинг юқори диагонал қисми анти-симметрикдир ва берилмаган кўпайтмалар нолга тенг.

$\mathbb{C}[\mathcal{M}_3 \times \mathcal{M}_3]^{\mathrm{GL}_3}$ даги Пуассон структура $\mathbb{C}[\mathcal{C}_3]$ да $v = -3, w = 2$ қийматлар билан бирга Пуассон структура ҳосил қилади. Энди 13-Теоремада келтирилган $\mathcal{C}_3$ Калоджеро-Мозер фазосининг координата ҳалқасидаги муносабатни (7) даги белгилашлар орқали ёзамиз:

$$a_3a_9 - 2a_4a_8 + a_5a_7 = 0. \tag{8}$$

(8) ифоданинг чап тарафини r_1 орқали белгилайлик. Ушбу ҳисоблаш

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{a_3, r_1\} &= 3a_3a_8 - 2a_3a_8 - 4a_4a_7 + 2a_4a_7 + a_6a_5 \\ &= a_6a_5 - 2a_4a_7 + a_3a_8 \end{aligned}$$

$\mathbb{C}[\mathcal{C}_3]$ да бошқа бир муносабатни келтириб чиқаради ва уни r_2 орқали белгилаймиз.

Ўхшаш ҳолда қуйидаги муносабатларни ҳам ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} r_3 &= 9a_3 - a_3a_4^2 + a_3^2a_5 + 6a_6a_8 - 6a_7^2 = \{r_1, a_6\}, \\ r_4 &= 9a_4 + a_3a_4a_5 + 3a_6a_9 - 3a_7a_8 - a_4^3 = \frac{3}{2}\{r_1, a_7\}, \\ r_5 &= 9a_5 - a_4^2a_5 + a_3a_5^2 + 6a_7a_9 - 6a_8^2 = 3\{r_1, a_8\}. \end{aligned}$$

9-таъриф. Айтайлик R Пуассон алгебра ва $\mathcal{I}$ унинг бўш бўлмаган қисм-тўплами бўлсин. Агар $\mathcal{I}$ тўплам R алгебранинг идеали бўлиб, ва $\{\mathcal{I},R\}\subseteq\mathcal{I}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда $\mathcal{I}$ Пуассон идеал дейилади.

15-Теоремадан фойдаланиб ҳисоблашлар натижасида қуйидаги жадвални тўлдириш мумкин:

	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
r_1	$-2r_2$	$-r_1$	0	r_3	$\frac{2}{3}r_4$	$\frac{1}{3}r_5$	0
r_2	0	r_2	$2r_1$	0	$-\frac{1}{3}r_3$	$-\frac{2}{3}r_4$	$-r_5$
r_3	0	$2r_3$	$4r_4$	0	$-a_3r_2$	$-2a_3r_1$	$-6a_4r_1+3a_5r_2$
r_4	$-2r_3$	0	$2r_5$	$\frac{3}{2}a_3r_2$	$-a_4r_2+\frac{3}{2}a_3r_1$	$a_4r_1-\frac{3}{2}a_5r_2$	$-\frac{3}{2}a_5r_1$
r_5	$-4r_4$	$-2r_5$	0	$6a_4r_2-3a_3r_1$	$2a_5r_2$	a_5r_1	0

Бу қуйидаги натижани беради:

15-теорема. r_1 орқали ҳосил қилинган $\mathcal{I}=\mathbb{C}[(M_3\times M_3)//\mathrm{GL}_3]$ Пуассон идеал $\mathcal{I}r_1+\mathcal{I}r_2+\mathcal{I}r_3+\mathcal{I}r_4+\mathcal{I}r_5$ идеалга изоморфдир.

Бу биргина муносабатни билиш орқали бошқа 4 та муносабатни ҳам ҳосил қилиш мумкинлигини кўрсатади.

$\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$ да қуйидагича белгилашлар:

$$a_1=\mathrm{Tr}(X),\ a_2=\mathrm{Tr}(Y),\ a_3=\mathrm{Tr}(A^2),\ a_4=\mathrm{Tr}(AB),\ a_5=\mathrm{Tr}(B^2),$$
$$a_6=\mathrm{Tr}(A^3),\ a_7=\mathrm{Tr}(A^2B),\ a_8=\mathrm{Tr}(AB^2),\ a_9=\mathrm{Tr}(B^3),$$
$$a_{10}=\mathrm{Tr}(A^4),\ a_{11}=\mathrm{Tr}(A^3B),\ a_{12}=\mathrm{Tr}(A^2B^2),\ a_{13}=\mathrm{Tr}(AB^3),\ a_{14}=\mathrm{Tr}(B^4),$$

ва кўпҳадларни киритайлик:

$$R_1=-a_3^2a_5+a_3a_4^2+2a_3a_{12}-4a_4a_{11}+2a_5a_{10}+2a_6a_8-2a_7^2+8a_3,$$
$$R_2=-a_3a_4a_5+a_4^3+2a_3a_{13}-4a_4a_{12}+2a_5a_{11}+a_6a_9-a_7a_8-4a_4,$$
$$R_3=-a_3a_5^2+a_4^2a_5+2a_3a_{14}-4a_4a_{13}+2a_5a_{12}+2a_7a_9-2a_8^2+8a_5,$$
$$R_4=-3a_3^2a_8+6a_3a_4a_7+a_3a_5a_6-4a_4^2a_6+12a_6a_{12}-24a_7a_{11}+12a_8a_{10}+48a_6,$$
$$R_5=a_3a_5a_9-4a_4^2a_9+6a_4a_5a_8-3a_5^2a_7+12a_7a_{14}-24a_8a_{13}+12a_9a_{12}+48a_9,$$
$$R_6=-a_3^2a_9+3a_3a_5a_7-2a_4a_5a_6+8a_6a_{13}-12a_7a_{12}+4a_9a_{10},$$
$$R_7=-2a_3a_4a_9+3a_3a_5a_8-a_5^2a_6+4a_6a_{14}-12a_8a_{12}+8a_9a_{11},$$
$$R_8=3a_3^3a_5-3a_3^2a_4^2-12a_3^2a_{12}+24a_3a_4a_{11}-6a_3a_5a_{10}+2a_3a_6a_8-6a_4^2a_{10}$$
$$-4a_4a_6a_7+2a_5a_6^2-6a_3^2+24a_{10}a_{12}-24a_{11}^2+24a_{10},$$
$$R_9=3a_3a_5^3-3a_4^2a_5^2-12a_5^2a_{12}+24a_4a_5a_{13}-6a_3a_5a_{14}+2a_5a_7a_9-6a_4^2a_{14}$$
$$-4a_4a_8a_9+2a_3a_9^2-6a_5^2+24a_{12}a_{14}-24a_{13}^2+24a_{14},$$
$$R_{10}=4a_4a_5a_6-3a_3a_5a_7-12a_4^2a_7+18a_3a_4a_8-7a_3^2a_9+12a_9a_{10}-24a_8a_{11}$$
$$+12a_7a_{12}+48a_7,$$
$$R_{11}=4a_3a_4a_9-3a_3a_5a_8-12a_4^2a_8+18a_4a_5a_7-7a_5^2a_6+12a_6a_{14}-24a_7a_{13}$$
$$+12a_8a_{12}+48a_8,$$
$$R_{12}=3a_3^2a_4a_5-3a_3a_4^3-3a_3^2a_{13}-3a_3a_4a_{12}+3a_3a_5a_{11}+2a_3a_6a_9+12a_4^2a_{11}-9a_4a_5a_{10}$$
$$-4a_4a_6a_8+2a_5a_6a_7+12a_3a_4+12a_{10}a_{13}-12a_{11}a_{12}-48a_{11},$$

$$R_{13} = 3a_3a_4a_5^2 - 3a_4^3a_5 - 3a_5^2a_{11} - 3a_4a_5a_{12} + 3a_3a_5a_{13} + 2a_5a_6a_9 + 12a_4^2a_{13} - 9a_3a_4a_{14} - 4a_4a_7a_9 + 2a_3a_8a_9 + 12a_4a_5 + 12a_{11}a_{14} - 12a_{12}a_{13} - 48a_{13},$$

$$R_{14} = a_3^2a_5^2 + a_3a_4^2a_5 - 2a_4^4 - a_3^2a_{14} - 6a_3a_4a_{13} + 2a_3a_5a_{12} + 2a_3a_7a_9 + 10a_4^2a_{12} - 2a_4a_5a_{11} - 4a_7a_8 - 3a_5^2a_{10} + 2a_5a_7^2 + 10a_3a_5 + 32a_4^2 + 4a_{10}a_{14} + 8a_{11}a_{13} - 12a_{12}^2 - 72a_{12} - 96,$$

$$R_{15} = a_3^2a_{14} - 4a_3a_4a_{13} + 2a_3a_5a_{12} + 4a_4^2a_{12} - 4a_4a_5a_{11} + a_5^2a_{10} + 12a_3a_5 - 4a_{10}a_{14} + 16a_{11}a_{13} - 12a_{12}^2 - 48a_{12}.$$

$\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$ нинг ҳосил қилувчиларининг Пуассон кўпайтмасини ҳисоблаш билан ушбу натижани оламиз:

16-теорема. $1 \le i \le 15$ учун R_i кўпҳадлар $\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$ да муносабатлар бўлади.

Диссертациянинг «**Калоджеро-Мозер фазоларида унимодулар группа таъсири**» деб номланувчи тўртинчи бобида, $\mathcal{C}_2$ Калоджеро-Мозер фазосида унимодулар группа таъсирининг чексиз транзитив бўлиши конструктив усулда исботланади.

G орқали $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ нинг қуйидагича икки турдаги автоморфизмларидан ҳосил қилинган группани белгилаймиз:

$$(i) \quad \Phi_p : (X, Y) \mapsto (X, Y + p(X)), \text{ бу ерда } p \in \mathbb{C}[t],$$

$$(ii) \quad \Psi_q : (X, Y) \mapsto (X + q(Y), Y), \text{ бу ерда } q \in \mathbb{C}[t].$$

В.Ван дер Кулк ишида G группа қуйидагига изоморф эканлиги исботланган:

$$\mathrm{SAut}(\mathbb{C}[x, y]) = \{f = (f_1, f_2) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}[x, y]) \mid \mathrm{Jac}(f_1, f_2) = 1\},$$

бу ерда $\mathrm{Jac}(f_1, f_2)$ ифода (f_1, f_2) акслантиришнинг Якобиян матрицасининг детерминанти.

17-теорема. $\mathcal{C}_2$ да G группа таъсири барча $n \in \mathbb{Z}_+$ учун $n-$транзитив бўлади ва шунинг учун чексиз транзитивдир.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация Калоджеро-Мозер фазоларининг алгебраик тавсифини беришдан иборат.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Калоджеро-Мозер фазосининг координата ҳалқасининг баъзи ҳосил қилувчилари орасидаги муносабатни аниқлаш методи берилган;
2. учинчи ва тўртинчи Калоджеро-Мозер фазолари координата ҳалқаларининг минимал ҳосил қилувчилари тўпламлари топилган;
3. изсиз матрицаларнинг даражаларидан иборат изларнинг Пуассон кўпайтмалари аниқланган;
4. $n \times n$ инвариант матрицаларда Пуассон алгебра структураси аниқланган;
5. тартиби учга ва тўртга тенг бўлган икки квадрат матритцалар инвариантлари алгебрасининг ҳосил қилувчиларнинг Пуассон кўпайтма жадвали қурилган.
6. учинчи ва тўртинчи Калоджеро-Мозер фазоларининг координата ҳалқасининг ҳосил қилувчилари орасидаги баъзи муносабатлар келтирилган.
7. икки ўзгарувчили кўпҳадлар ҳалқасининг унимодулар автоморфизмлари группаси иккинчи Калоджеро-Мозер фазосига чексиз транзитив таъсир этиши исботланган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

NORMATOV ZAFAR SHERMIRZA O‘G‘LI

DESCRIPTION OF THE CALOGERO-MOSER SPACES

01.01.06-Algebra

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.1.PhD/FM673.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Eshmatov Farkhod Khasanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
Official opponents:	**Omirov Bakhrom Abdazovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Xabier Garcia Martinez Doctor of Mathematical Sciences
Leading organization:	**Andijan State University**

Defense will take place « 28 » June 2022 at 17:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered № 139). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on « 15 » June 2022 year
(Mailing report № 2 on « 15 » June 2022 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

B.A.Omirov
Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD dissertation)

Actuality and demand of the theme of the dissertation. Many scientific and practical types of research conducted around the world are mostly focused on the analysis of statistical physics and the theory of invariants. In physics, the n-body problem is the problem of predicting the individual motions of a group of celestial objects interacting with each other gravitationally. Physical laws that govern the motion of each particle may or may not be simple. However, the study of the collection of particles is extremely complex. Thus, many-body theoretical physics most often rely on a set of approximations specific to the problem at hand and ranks among the most computationally intensive fields of science. The Calogero-Moser dynamical system is a well-known one-dimensional many-body problem. One can think of Calogero-Moser system as n particles moving on a line governed by inverse square Hamiltonian, which has an explicit solution. The problems of describing the corresponding phase space of this particle system, n-Calogero-Moser space, is important in solving the problems of statistical physics, dynamic systems, invariant theory and information technology.

Nowadays, the n-th Calogero-Moser space is considered as a typical example of a Nakajima quiver variety. For that reason Calogero-Moser spaces have various applications in algebraic geometry, representation of theory of quivers, preprojective and Cherednik algebras. One of the most fundamental features of the Calogero-Moser space is that it is diffeormic to the Hilbert scheme of n points on the complex plane. Hence all known (co)homological constructions for the Hilbert scheme should have its counterparts for the Calogero-Moser space. Unlike the Hilbert scheme, the Calogero-Moser space is a smooth affine algebraic variety, which is determined by its algebra of polynomial functions. An explicit description of the algebra of polynomial functions is one of the open problems of the theory of invariant matrices.

In our country much attention has been paid to mathematics, physics, geology and biological sciences, which have scientific and practical applications of fundamental sciences. In particular, special attention was paid to the development of fundamental research on non-associative algebras. Within the frame of this fundamental research, significant results have been obtained in the study of the Calogero-Moser spaces. Conducting research[1] at the level of international standards on the priority areas “Algebra and Functional Analysis” is the main task and direction of activity of mathematics. To ensure the implementation of the task, it is important to describe the Calogero-Moser spaces for the application of scientific results in the relevant field of science.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees of the President of the Republic of Uzbekistan UP-4947 of February 7, 2017 “On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan”, UP-2789 dated February 17, 2017 “On measures to further

[1] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017 year 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

improvement of the activities of the Academy of Sciences, organization, management and financing of research activities", PP-3682 from April 27, 2018 "On measures to further improve the system of practical implementation of innovative ideas, technologies and projects" and PP-4387 from July 9, 2019 "On measures to further development of mathematical education and science, and also root improvement of the activity of the Uzbekistan Academy of Sciences V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics", as well as in other regulations related to basic science.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, " Mathematics, Mechanics and Computer Science".

The degree of scrutiny of the problem. Since pioneering works by F.Calogero, J.Moser, D.Kazhdan, B.Kostant, and S.Sternberg, there have been extensive research on connection between the Calogero-Moser systems and Kadomtsev-Petviashvili (KP) system. In a series of papers, Krichever made a surprising discovery on KP and Calogero-Moser systems. Explicitly, he observed that the poles of rational solutions of the KP equation move according to the Calogero-Moser system. That mystery was resolved by Wilson, who constructed a natural bijective correspondence between Calogero-Moser spaces and a certain infinite-dimensional Grassmannian Gr^{ad}. The adelic Grasmannian Gr^{ad} parametrizes rational solutions of the KP equation. Furthermore, he showed that bijection was commuting with KP flows. Berest and Wilson used that work to establish the Calogero-Moser correspondence between the space of isomorphism classes of ideals of the first Weyl algebra A1 and Calogero-Moser spaces. In the subsequent paper, they showed there was a natural action of the plane affine Cremona group G on each of the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_n$, and it was a transitive action. Y.Berest, A.Eshmatov, and F.Eshmatov proved that G acts doubly transitively and conjectured infinite transitivity of G-action. The BEE conjecture was proved by Kuyumzhiyan.

One of the fundamental results of Etingof and Ginzburg states that the spherical subalgebra of rational Cherednik algebra $H_c(S_n)$ associated with the symmetric group of degree n is commutative algebra isomorphic to the coordinate ring of the Calogero-Moser variety $\mathcal{O}(\mathcal{C}_n)$. Furthemore, $H_c(S_n)$ is Morita equivalent to $\mathcal{O}(\mathcal{C}_n)$, and there is one-to-one correspondence between simple representations of $H_c(S_n)$ and points of $\mathcal{C}_n$. Using these facts, they have investigated the Poisson algebra structure on the algebra $\mathcal{O}(\mathcal{C}_n)$ coming from the symplectic structure of $\mathcal{C}_n$. In particular, they have found an algebra and Poisson generators of $\mathcal{O}(\mathcal{C}_n)$. Motivated by transitivity of G action and the fact that on $\mathcal{C}_n$ is a hyper-K¨ahlar manifold, Hitchin and Wilson have asked if $\mathcal{C}_n$ is a coadjoint orbit of some infinite-dimensional Lie algebra. A positive answer to this question has been given independently by Ginzburg and Bocklandt and Le Bruyn. They have constructed a natural surjective

Lie algebra homomorphism from the Necklace Lie algebra associated with $\mathcal{C}_n$ to the algebra $\mathcal{O}(\mathcal{C}_n)$. The homomorphism factors through the ring of invariant polynomials on pair of $n \times n$ matrices. Thus the description of coordinate rings of Calogero-Moser spaces is closely related to the invariant theory of $n \times n$ matrices.

The invariant theory of $n \times n$ matrices studies the algebra C_{nd} of invariants of the general group GL_n acting on d of $n \times n$ matrices by simultaneous conjugation. The problem consists of two parts: determining a minimum set of generators of the ring C_{nd} and finding polynomial relations between them. K.S.Sibirskii proved that a generating set of C_{2d} consists of trace functions. Later, M.Artin proved that invariants of small-sized matrices can be generated by all trace functions, and conjectured that this result would be true for invariants of arbitrary-sized matrices as well. Yu.P.Razmyslov and C.Procesi independently proved Artin's conjecture and showed that the power of a set of generators is limited. They also proved that relations between these generators come from the Cayley-Hamilton theorem. However, a minimal generating set of C_{nd} and exact relations among them remain largely open problems. Some of known results are following. Dubnov showed that C_{22} is the polynomial algebra in five variables with no relations. It follows from K.S.Sibirskii and E.Formanek that C_{23} is a polynomial algebra with a single relation. Teranishi found that a minimal generating set of 11 trace functions for C_{32} and calculated its Hilbert series. It follows from the description of this series that there is a single polynomial relation in C_{32}. K.Nakamoto found the exact form of this relation. In 1989, Abeasis and Pittaluga offered an effective method for computation of generators for any C_{3d}. Using their result Aslaksen, Drensky, and Sadikova presented a new minimal generating set for C_{32} and found its defining relation. Finally, for C_{42}, minimal generating set were presented by Drensky and Sadikova, and by Dokovic.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The dissertation work is carried out in accordance with the given topic of scientific research OT-F4-82 + OT-F4-87 "Local derivations and automorphisms of operator and nonassociative algebras, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems" + "The theory of global invariants of curves and surfaces in Euclidean and pseudo-Euclidean spaces and its applications in mechanics" (2017-2019) and "YoOT-Ftex-2018-77, Cohomology groups of semi-simple and nilpotent algebras" in V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (2018-2019 yy).

The aim of research work is to define Poisson structure on the coordinate ring of the Calogero-Moser spaces and using this structure to give the complete algebraic description of the Calogero-Moser spaces.

Research problems:

to find the minimal generating set for the coordinate ring of the third and fourth Calogero-Moser spaces;

to find defining relations among the generators of the coordinate ring of the

Calogero-Moser spaces;

to describe the Poisson structure on the Calogero-Moser spaces.

The research object: Calogero-Moser space, coordinate ring, polynomial relationship.

The research subject: The theory of the Poisson algebras, invariant theory, theory of matrices and theory of polynomials.

Research methods: In the dissertation the methods of the theory of associative algebras, inductive method, as well as, the methods of invariant theory are applied.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

the explicit generators of the coordinate ring of the third and fourth Calogero-Moser spaces are found;

the defining relations between the minimal generators of the coordinate ring of the third and fourth Calogero-Moser spaces are found and in generally, it is proved that there exists a relation among traces of products of matrices of degree less or equal to the half of the dimension of the Calogero-Moser spaces;

using Poisson algebra structure, a method to describe the Calogero-Moser spaces was developed and the third and fourth Calogero-Moser spaces are described with this method;

the action of the affine Cremona group was proved to be infinitely transitive in the second Calogero-Moser space.

Practical results of the research. The taken results and used methods in the dissertation can be taught as a graduate course for masters and doctoral students of higher education institutions. In addition, the results of the dissertation concerning the Poisson structure allow to verify hypothesis about the theory of invariant matrices.

The reliability of the results of the study. Our results have been obtained by using the invariant theory, as well as fundamental results of the theory of algebras. The proofs of obtained results are mathematically correct. Found defining relations for the coordinate ring of the third and fourth Calogero-Moser spaces can be checked by using standart procedures of Mathematica 12.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the results of research is that the results obtained in the work can be used for further research of varieties of other algebras. In particular, the techniques and methods developed in this dissertation can be used to solve the hypothesis on arbitrary Calogero-Moser type spaces.

The practical significance of the dissertation is that the obtain results can be used in the theory of invariant matrices. The taken results and used methods in the dissertation can be taught as a graduate course for masters and doctoral students of higher education institutions.

Implementation of the research results. Based on the results obtained by the description of the Calogero-Moser spaces:

the minimal generating sets for the coordinate ring of the third and fourth Calogero-Moser spaces were used to find defining relations between the generators in the fundamental scientific project No. MTM2016-79661-P “Homology,

Homotopy and Categorical invariants in groups and nonassociative algebras" (Reference from Agencia Estatel de Investigacion (AEI), Ministerio de Ciencia e Innovacion, Spain, developed in the University of Santiago de Compostela № 15782, 15.04.2022). The application of the scientific result allowed to establish the defining relation of the ring of invariants of a pair of matrices in the general case;

the Poisson algebra structure analyzed on Calogero-Moser spaces was used to describe the coordinate ring of the Calogero-Moser spaces in the fundamental scientific project "Non-commutative modules, Leibniz algebras and polynomial cascades on simplexes", No. OT-F4-31 (Reference from National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 21.04.2022). The application of the scientific result allowed to establish the table of Poisson multiplication on the generators of the third and fourth Calogero-Moser spaces.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 2 international and 4 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation, 11 scientific papers were published, 5 of which are included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of theses of the Doctor of Philosophy, including 2 of them published in foreign journals and 3 in national scientific journals and 6 abstracts.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of the introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The total volume of the thesis is 85 pages.

MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In **introduction** the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic are given, we present degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we give the theoretical and practical importance of the obtained results, and also give information on the implementation of the research results, published works and the structure of dissertation.

In the first chapter of the dissertation, titled "**Preliminaries and results**", we introduce necessary basic notions and concepts which are used throughout the dissertation. Furthermore, we remind some well-known results concerning the ring of invariant matrices since the Calogero-Moser space is embedded in it.

Definition 1. Let G be a group and S be a nonempty set. An action of the group G on the set S is a function $\cdot : G \times S \to S$ (denoted by $\cdot(g,x) \to g \cdot x$) such that for all $x \in S$, $g_1, g_2 \in G$ the following holds:

i) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$,

ii) $e \cdot x = x$, where e is the identity of G.

If there is an action of G on S, it is said that G acts on S and S is called a G **-set**.

We denote by $\mathcal{M}_n := M_n(\mathbb{C})$ the $\mathbb{C}$-algebra of $n \times n$ matrices over the field of complex numbers $\mathbb{C}$. Let d be a positive integer. The general linear group $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ acts on the direct product $\mathcal{M}_n^d$ of d copies of $\mathcal{M}_n$ in the natural way:

$$g \cdot (X_1,...,X_d) = (gX_1g^{-1},\ldots,gX_dg^{-1}), \quad g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}). \tag{1}$$

This action induces an action of GL_n on the algebra $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d]$ of polynomial functions on $\mathcal{M}_n^d$ i.e. for $\varphi \in \mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d]$ and $g \in \mathrm{GL}_n$:

$$(g * \varphi)(X_1,\ldots,X_d) := \varphi(g^{-1}.(X_1,\ldots,X_d)),$$

where the entries of X_i, for $i = 1,\ldots,d$, can be viewed as linear functions.

Note that one can identify $M_n^d \cong \mathbb{C}^{dn^2}$, the affine space of dimension dn^2.

Description of the orbit space $\mathcal{M}_n^d / \mathrm{GL}_n$ as an algebraic variety is a difficult problem in the classical invariant theory. To resolve such issues, in 1965 David Mumford developed a new orbit space $V // G$ (GIT quotient) using Hilbert's ideas on invariant theory, where V is an algebraic variety and G is an algebraic group acting on V. Roughly, the space $V // G$ consists of closed G-orbits on V.

Since any algebraic variety V is determined by its algebra of polynomial functions $\mathbb{C}[V]$, it is sufficient to describe the algebra $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d // \mathrm{GL}_n]$ instead of the ring $\mathcal{M}_n^d // \mathrm{GL}_n$. The first step in understanding this algebra is the following result due to D.Mumford. Since G-action on V induces G-action on $\mathbb{C}[V]$:

$$(g * f)(v) := f(g^{-1} \cdot v),$$

for $f \in \mathbb{C}[V]$, $g \in G$, we define the subalgebra of G-invariant polynomials

$$\mathbb{C}[V]^G := \{f \in \mathbb{C}[V] \quad | \quad g * f = f \quad \text{for all} \quad g \in G\},$$

and the following theorem is proved by Mumford in 1965.

Theorem 1. Let G be an algebraic group acting on an algebraic variety. Then

$$\mathbb{C}[V // G] \cong \mathbb{C}[V]^G.$$

Thus, by Mumford's theorem, the problem of the description of the algebra $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d // \mathrm{GL}_n]$ can be reduced to study of the following two problems:

(i) Find generators of C_{nd}.

(ii) Find all relations between these generators.

We study the problem of the description of the algebra $C_{nd} := \mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d]^{\mathrm{GL}_n}$ of GL_n-invariant polynomials. C. Procesi and Yu.P. Razmsylov proved independently the following well-known results to solve the above problem (i).

Theorem 2. The ring C_{nd} is generated over $\mathbb{C}$ by all traces $\mathrm{Tr}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_j})$, $1 \le j \le n^2$, where $A_{i_1}, A_{i_2},..., A_{i_j} \in \{A_1, A_2,..., A_d\}$.

Now we remind the Cayley-Hamilton theorem since it plays an essential role in solving the second part of the above problem.

Theorem 3. For any $A \in \mathcal{M}_n$, $f_n(A) = 0$, where $f_n(x)$ is the characteristic polynomial of A.

The following theorem is proved in Procesi's and Razmyslow's works:

Theorem 4. All trace identities of the full matrix algebra over a field of characteristic zero are consequences of the Cayley-Hamilton identity f_n.

For an integer $n \geq 0$, let $\overline{\mathcal{C}}_n$ be the subset of $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ defined as

$$\{(X,Y) \in \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \mid \operatorname{rank}([X,Y] + I_n) = 1\},$$

where I_n is the identity $n \times n$ matrix. The action (1) on $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ restricts to an action on $\overline{\mathcal{C}}_n$.

Definition 2. The n^{th} Calogero-Moser space $\mathcal{C}_n$ is the quotient variety $\overline{\mathcal{C}}_n /\!/ \mathrm{GL}_n$.

The Calogero-Moser spaces were studied in detail by Wilson's works and he proved the following theorem:

Theorem 5. The Calogero-Moser space $\mathcal{C}_n$ is a smooth affine irreducible complex symplectic variety of dimension $2n$.

Now, we recall the definition of a Lie algebra since it is a part of the definition of Poisson algebra, which we will show that the ring C_{nd} have a Poisson algebra structure. As a result this structure induces a Poisson structure on the coordinate ring of the Calogero-Moser space.

Definition 3. A Lie algebra is a vector space g over a field $\mathbb{F}$ with a bilinear operation $[-,-]: \mathrm{g} \times \mathrm{g} \to \mathrm{g}$, which we call a Lie bracket, such that the following axioms are satisfied:

- It is skew symmetric: $[x,x] = 0$, which implies $[x,y] = -[y,x]$ for all $x, y \in \mathrm{g}$.
- It satisfies the Jacobi identity: $[[x,y],z] + [[y,+z],x] + [[z,+x],y] = 0$ for all $x, y, z \in \mathrm{g}$.

Now we give the definition of a Poisson algebra.

Definition 4. A commutative $\mathbb{C}$-algebra R with a bilinear map $\{-,-\}$ is said to be a Poisson algebra if

(i) $\{a,b\} = -\{b,a\}$ for all $a,b \in R$,

(ii) $\{a,\{b,c\}\} + \{b,\{c,a\}\} + \{c,\{a,b\}\} = 0$ for all $a,b,c \in R$,

(iii) $\{ab,c\} = a\{b,c\} + b\{a,c\}$ for all $a,b,c \in R$.

Let us remind the definition of Leibniz algebra.

Definition 5. [Lo] A Leibniz algebra L is a vector space over $\mathbb{F}$ equipped with a bilinear map (multiplication) satisfying the Leibniz identity

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$$

for all $x, y, z \in L$.

Now we consider how Poisson structure is defined on C_{nd}.

Let $\omega: V \times V \to \mathbb{C}$ be a bilinear form on a two diminsional vector space $V = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$ defined by

$$\omega(x,y) = -\omega(y,x) = 1, \ \omega(x,x) = \omega(y,y) = 0.$$

Let R be a free $\mathbb{C}$-algebra on the generators x and y. Define a bilinear mapping $\{-,-\}: R\times R\to R$ by

$$\{u_1\dots u_p, v_1\dots v_q\}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\omega(u_i,v_j)u_{i+1}\dots u_p u_1\dots u_{i-1}v_{j+1}\dots v_q v_1\dots v_{j-1},$$

where elements $u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q$ are either x or y.

In 1993 Kontsevich showed that this bracket statisfies the Leibniz identity in his work which implies that R with this bracket is a Leibniz algebra. Let us introduce the subspace $\mathrm{Com}(R)=Span\{ab-ba\,|\,a,b\in R\}$ of R. One can verify that $\mathrm{Com}(R)$ belongs to $Z(R)$ and thus it is a Leibniz algebra ideal. We can consider the quotient Leibniz algebra $\mathcal{L}=R/\mathrm{Com}(R)$. Moreover, the following result is proved in Ginzburg's work:

Proposition 1. The quotient algebra $\mathcal{L}=R/\mathrm{Com}(R)$ with the induced bracket is a Lie algebra.

This Lie algebra is an example of a Necklace Lie algebra. It plays an important role in endowing Lie algebra structure on the invariants of pairs of matrices. Indeed, a map defined as follows:

$$tr:\mathcal{L}\to\mathbb{C}[(M_n\times M_n)//\mathrm{GL}_n]$$
$$x^{k_1}y^{l_1}\dots x^{k_m}y^{l_m}\mapsto((X,Y)\mapsto\mathrm{Tr}(X^{k_1}Y^{l_1}\dots X^{k_m}Y^{l_m}))$$

endows C_{nd} with a Lie, and consequently with a Poisson algebra structure.

We also study the group action on the Calogero-Moser spaces.

Definition 6. Let $\mathcal{G}$ be a group and S be a nonempty set. It is said that a group $\mathcal{G}$ acts transitively, or that the action is transitive, if for every pair of elements $s,r\in S$, there is a $g\in\mathcal{G}$ such that $g\cdot s=r$.

Now we give the definition for the notion of n-transitivity.

Definition 7. The group $\mathcal{G}$ acts n transitively, or the action is $n-$transitive, if it can map any n-tuple of distinct points of the set to any other n-tuple of distinct points. In other words, if $(s_1,\dots,s_n)$ and $(r_1,\dots,r_n)$ are n-tuples of distinct elements in S, then there is some $g\in\mathcal{G}$ such that

$$g\cdot(s_1,\dots,s_n)=(g\cdot s_1,\dots,g\cdot s_n)=(r_1,\dots,r_n).$$

The following definition describes the notion of infinite transitivity.

Definition 8. We say that the action of $\mathcal{G}$ on S is infinitely transitive if it is n-transitive for every positive integer n.

The group G of unimodular automorphisms of $\mathbb{C}[x,y]$ acts on the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_n$ and the following theorem is proved by G. Wilson and Yu. Berest in their work:

Theorem 6. For each $n\geq 0$, the group G acts transitively on $\mathcal{C}_n$.

Moreover, in Yu. Berest, A. Eshmatov, F. Eshmatov's work authors proved that

Theorem 7. For each $n\geq 1$, the action of G on $\mathcal{C}_n$ is doubly transitive.

They also conjectured that this action is infinitely transitive. This conjecture was proved by K. Kuyumzhiyan:

Theorem 8. The group of automorphisms of a Calogero-Moser space $\mathcal{C}_n$ acts infinitely transitively.

In the second chapter of the thesis, titled "**Relations in the coordinate ring of the Calogero-Moser spaces**", we give some answers to the questions addressed for the invariant theory of pairs of matrices for the coordinate ring of the Calogero-Moser spaces, which are also valid to be asked since they are quotients of the ring of invariants.

In P. Etingof, V. Ginzburg's work, it has been proved that

$$\{\mathrm{Tr}(X^iY^j) \mid 0 \le i,j \le n\}$$

generates $\mathbb{C}[\mathcal{C}_n]$ as a commutative algebra. Let us denote by $\mathcal{P}$ the set consisting of the following generators of $\mathbb{C}[\mathcal{C}_n]$:

$$\begin{array}{l}
\mathrm{Tr}(X), \mathrm{Tr}(Y),\\
\mathrm{Tr}(A^2), \mathrm{Tr}(AB), \mathrm{Tr}(B^2),\\
\mathrm{Tr}(A^3), \mathrm{Tr}(A^2B), \mathrm{Tr}(AB^2), \mathrm{Tr}(B^3),\\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots\\
\mathrm{Tr}(A^n), \mathrm{Tr}(A^{n-1}B), \ldots, \mathrm{Tr}(AB^{n-1}), \mathrm{Tr}(B^n),
\end{array}$$

where $A = X - \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(X)I_n$, $B = Y - \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(Y)I_n$.

Theorem 9. There exists at least one defining relation between the generators in the set $\mathcal{P}$.

Note that the set $\mathcal{P}$ is not a minimal generating set for the coordinate ring of the Calogero-Moser space. However, a method used in the proof of Theorem 9 helps us to write an explicit defining relation between the elements of $\mathcal{P}$.

Since $\{\mathrm{Tr}(X^iY^j),\ 0 \le i,j \le n\}$ generates $\mathbb{C}[\mathcal{C}_n]$ as a commutative algebra, combining with Cayley-Hamilton theorem, we obtain the following proposition.

Proposition 2. The traces

$$\begin{array}{l}
\mathrm{Tr}(X), \mathrm{Tr}(Y),\\
\mathrm{Tr}(A^2), \mathrm{Tr}(AB), \mathrm{Tr}(B^2),\\
\mathrm{Tr}(A^3), \mathrm{Tr}(A^2B), \mathrm{Tr}(AB^2), \mathrm{Tr}(B^3),\\
\mathrm{Tr}(A^4), \mathrm{Tr}(A^3B), \mathrm{Tr}(A^2B^2), \mathrm{Tr}(AB^3), \mathrm{Tr}(B^4),\\
\mathrm{Tr}(A^3B^2), \mathrm{Tr}(A^2B^3), \mathrm{Tr}(A^3B^3)
\end{array}$$

generate $\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$.

However, it is not a minimal generating set. We need the following auxiliary statement which state that there are relations among some of "mixed" traces and "pure" traces.

Lemma 2. For $(X,Y) \in \mathcal{C}_4$, we have

$$12\mathrm{Tr}(A^3B^2) = \mathrm{Tr}(A^3)\mathrm{Tr}(B^2) + 6\mathrm{Tr}(A^2B)\mathrm{Tr}(AB) + 3\mathrm{Tr}(AB^2)\mathrm{Tr}(A^2),$$

$$12\mathrm{Tr}(A^2B^3) = \mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(B^3) + 6\mathrm{Tr}(AB^2)\mathrm{Tr}(AB) + 3\mathrm{Tr}(A^2B)\mathrm{Tr}(B^2).$$

$$\begin{aligned}
20\mathrm{Tr}(A^3B^3) = &-\mathrm{Tr}^3(AB) + 6\mathrm{Tr}(A^2B)\mathrm{Tr}(AB^2) + 3\mathrm{Tr}(A^3B)\mathrm{Tr}(B^2)\\
&+ 9\mathrm{Tr}(A^2B^2)\mathrm{Tr}(AB) + 3\mathrm{Tr}(AB^3)\mathrm{Tr}(A^2)\\
&+ \frac{2}{3}\mathrm{Tr}(A^3)\mathrm{Tr}(B^3) - \frac{3}{2}\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(AB)\mathrm{Tr}(B^2) - 16\mathrm{Tr}(AB).
\end{aligned}$$

The last three traces in Proposition 2 are expressed as a polynomial of other traces. Moreover, we have the following result:

Theorem 10. The traces

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(X),\mathrm{Tr}(Y),\\&\mathrm{Tr}(A^2),\mathrm{Tr}(AB),\mathrm{Tr}(B^2),\\&\mathrm{Tr}(A^3),\mathrm{Tr}(A^2B),\mathrm{Tr}(AB^2),\mathrm{Tr}(B^3),\\&\mathrm{Tr}(A^4),\mathrm{Tr}(A^3B),\mathrm{Tr}(A^2B^2),\mathrm{Tr}(AB^3),\mathrm{Tr}(B^4)\end{aligned}$$

form a minimal set of generators of $\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$.

The following theorem shows an explicit form of the defining relation between the generators of $\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$.

Theorem 11. The following is a defining relation in $\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$:

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Tr}^2(A^2)\mathrm{Tr}(B^2)+\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}^2(AB)+2\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(A^2B^2)-4\mathrm{Tr}(AB)\mathrm{Tr}(A^3B)\\&+2\mathrm{Tr}(B^2)\mathrm{Tr}(A^4)+2\mathrm{Tr}(A^3)\mathrm{Tr}(AB^2)-2\mathrm{Tr}(A^2B)^2+8\mathrm{Tr}(A^2)=0;\end{aligned}$$

For the algebra C_{32}, a minimal generating set consisting of 11 trace monomials of degree not exceeding 6 was found by Teranishi: $\mathrm{Tr}(X),\mathrm{Tr}(Y)$ and

$$\mathrm{Tr}(X^2),\mathrm{Tr}(XY),\mathrm{Tr}(Y^2),\mathrm{Tr}(X^3),\mathrm{Tr}(X^2Y),\mathrm{Tr}(XY^2),\mathrm{Tr}(Y^3), \tag{2}$$

$$\mathrm{Tr}(X^2Y^2),\mathrm{Tr}(X^2Y^2XY). \tag{3}$$

Nakamoto found a complicated algebraic relation, which turns out is the only defining relation. It is written much simpler if one uses another minimal set of generators, which is the main result of H. Aslaksen, V. Drensky, L. Sadikova's work: along with $\mathrm{Tr}(X)$ and $\mathrm{Tr}(Y)$, in (2) replace X and Y with their traceless versions of A and B, correspondingly, and instead of (3) use

$$v=\mathrm{Tr}(A^2B^2)-\mathrm{Tr}(ABAB), \tag{4}$$

$$w=\mathrm{Tr}(A^2B^2AB)-\mathrm{Tr}(B^2A^2BA). \tag{5}$$

Furthermore the authors have proved following:

Proposition 3. The following equation holds in C_{32}:

$$\mathrm{Tr}(ABAB)-\mathrm{Tr}(A^2B^2)=\frac{1}{2}n(n-1) \tag{6}$$

Equation (6) tells us the generator v of the algebra C_{32} in the coordinate ring of the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_3$ is a constant i.e. $v=-3$. Below we give a statement on the generator w of the algebra C_{32} is in the coordinate ring of the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_3$.

Proposition 4. For $(X,Y)\in\mathcal{C}_n$, we have

$$\mathrm{Tr}(A^2BAB^2)=\mathrm{Tr}(A^2B^2AB)-\frac{1}{3}n(n-1)(n-2).$$

According to Proposition 6 the generator w is also constant with the value 2 in the coordinate ring of the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_3$. Hence, we can prove

Theorem 12. The traces

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(X),\mathrm{Tr}(Y),\mathrm{Tr}(A^2),\mathrm{Tr}(AB),\mathrm{Tr}(B^2),\\&\mathrm{Tr}(A^3),\mathrm{Tr}(A^2B),\mathrm{Tr}(AB^2),\mathrm{Tr}(B^3)\end{aligned}$$

form a minimal set of generators of $\mathbb{C}[\mathcal{C}_3]$.

Furthermore, the following theorem shows an explicit form of the defining relation between the generators of $\mathbb{C}[\mathcal{C}_3]$.

Theorem 13. For traceless pairs of matrices $(A,B)\in\mathcal{C}_3$ we have

$$\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(B^3)-2\mathrm{Tr}(AB)\mathrm{Tr}(AB^2)+\mathrm{Tr}(B^2)\mathrm{Tr}(A^2B)=0.$$

In the third chapter of the thesis, titled **"Poisson structure on the Calogero-Moser spaces"**, we attempt to compute some Poisson brackets of certain generators of the algebra of invariants $\mathbb{C}[(M_n\times M_n)/\!/\mathrm{GL}_n]$. While the Poisson structure from the Necklace Lie algebra is easily computable on usual generators, it gets complicated when using traceless matrices.

Lemma 4. For any $p,q\geq 2$ the following holds

$$\{\mathrm{Tr}(A^p),\mathrm{Tr}(B^q))\}=pq\mathrm{Tr}(A^{p-1}B^{q-1})-\frac{pq}{n}\mathrm{Tr}(A^{p-1})\mathrm{Tr}(B^{q-1}).$$

Now make the following notations for the generators of the invariants of two 3×3 matrices, which are given in H. Aslaksen, V. Drensky, L. Sadikova's work:

$$\begin{aligned}&a_1=\mathrm{Tr}(X),\ a_2=\mathrm{Tr}(Y),\ a_3=\mathrm{Tr}(A^2),\ a_4=\mathrm{Tr}(AB),\ a_5=\mathrm{Tr}(B^2),\\&a_6=\mathrm{Tr}(A^3),\ a_7=\mathrm{Tr}(A^2B),\ a_8=\mathrm{Tr}(AB^2),\ a_9=\mathrm{Tr}(B^3),\\&v=\mathrm{Tr}(A^2B^2)-\mathrm{Tr}(ABAB),\ w=\mathrm{Tr}(A^2B^2AB)-\mathrm{Tr}(B^2A^2BA).\end{aligned}\tag{7}$$

Theorem 14. The Poisson multiplication table of the generators of $\mathbb{C}[\mathcal{M}_3\times\mathcal{M}_3]^{\mathrm{GL}_3}$ is as follows:

$$\{a_1,a_2\}=3$$

	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_4	$-2a_3$					
a_5	$-4a_4$	$-2a_5$				
a_6	0	$3a_6$	$6a_7$			
a_7	$-2a_6$	a_7	$4a_8$	$-\frac{1}{2}a_3^2$		
a_8	$-4a_7$	$-a_8$	$2a_9$	$-a_3a_4$	$-\frac{5}{6}a_3a_5+v+\frac{1}{3}a_4^2$	
a_9	$-6a_8$	$-3a_9$	0	$-3v+\frac{3}{2}a_3a_5-3a_4^2$	$-a_4a_5$	$-\frac{1}{2}a_5^2$

where the upper diagonal part of the table is skew-symmetric, and the rest of the brackets are zero.

The Poisson structure on $\mathbb{C}[\mathcal{M}_3\times\mathcal{M}_3]^{\mathrm{GL}_3}$ induces a Poisson structure on $\mathbb{C}[\mathcal{C}_3]$ with $v=-3, w=2$. Now, consider the defining relation, which is obtained in Theorem 13, of the coordinate ring of the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_3$ in the notations (7):

$$a_3a_9-2a_4a_8+a_5a_7=0.\tag{8}$$

Let us denote by r_1 the left-hand side of (8). Computing

$$\frac{1}{2}\{a_3, r_1\} = 3a_3a_8 - 2a_3a_8 - 4a_4a_7 + 2a_4a_7 + a_6a_5$$
$$= a_6a_5 - 2a_4a_7 + a_3a_8$$

yields another relation of $\mathbb{C}[\mathcal{C}_3]$, which we denote by r_2.

Similarly, we can derive the following relations:

$$r_3 = 9a_3 - a_3a_4^2 + a_3^2a_5 + 6a_6a_8 - 6a_7^2 = \{r_1, a_6\},$$
$$r_4 = 9a_4 + a_3a_4a_5 + 3a_6a_9 - 3a_7a_8 - a_4^3 = \frac{3}{2}\{r_1, a_7\},$$
$$r_5 = 9a_5 - a_4^2a_5 + a_3a_5^2 + 6a_7a_9 - 6a_8^2 = 3\{r_1, a_8\}.$$

Definition 9. Let R be a Poisson algebra and $\mathcal{I}$ be its nonempty subset. Then $\mathcal{I}$ is called a Poisson ideal if it is an ideal of R and satisfies $\{\mathcal{I}, R\} \subseteq \mathcal{I}$.

By straightforward calculation using Theorem 15 we can complete the following table:

	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
r_1	$-2r_2$	$-r_1$	0	r_3	$\frac{2}{3}r_4$	$\frac{1}{3}r_5$	0
r_2	0	r_2	$2r_1$	0	$-\frac{1}{3}r_3$	$-\frac{2}{3}r_4$	$-r_5$
r_3	0	$2r_3$	$4r_4$	0	$-a_3r_2$	$-2a_3r_1$	$-6a_4r_1 + 3a_5r_2$
r_4	$-2r_3$	0	$2r_5$	$\frac{3}{2}a_3r_2$	$-a_4r_2 + \frac{3}{2}a_3r_1$	$a_4r_1 - \frac{3}{2}a_5r_2$	$-\frac{3}{2}a_5r_1$
r_5	$-4r_4$	$-2r_5$	0	$6a_4r_2 - 3a_3r_1$	$2a_5r_2$	a_5r_1	0

This prove the following statement.

Theorem 15. A Poisson ideal of $\mathcal{I} = \mathbb{C}[(M_3 \times M_3)//\mathrm{GL}_3]$ generated by r_1 is isomorphic to the ideal $\mathcal{I}r_1 + \mathcal{I}r_2 + \mathcal{I}r_3 + \mathcal{I}r_4 + \mathcal{I}r_5$.

This shows that knowing one relation, we can generate other 4 relations.

Let us make the following notations in $\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$:

$$a_1 = \mathrm{Tr}(X),\ a_2 = \mathrm{Tr}(Y),\ a_3 = \mathrm{Tr}(A^2),\ a_4 = \mathrm{Tr}(AB),\ a_5 = \mathrm{Tr}(B^2),$$
$$a_6 = \mathrm{Tr}(A^3),\ a_7 = \mathrm{Tr}(A^2B),\ a_8 = \mathrm{Tr}(AB^2),\ a_9 = \mathrm{Tr}(B^3),$$
$$a_{10} = \mathrm{Tr}(A^4),\ a_{11} = \mathrm{Tr}(A^3B),\ a_{12} = \mathrm{Tr}(A^2B^2),\ a_{13} = \mathrm{Tr}(AB^3),\ a_{14} = \mathrm{Tr}(B^4),$$

and introduce the following polynomials:

$$R_1 = -a_3^2a_5 + a_3a_4^2 + 2a_3a_{12} - 4a_4a_{11} + 2a_5a_{10} + 2a_6a_8 - 2a_7^2 + 8a_3,$$
$$R_2 = -a_3a_4a_5 + a_4^3 + 2a_3a_{13} - 4a_4a_{12} + 2a_5a_{11} + a_6a_9 - a_7a_8 - 4a_4,$$
$$R_3 = -a_3a_5^2 + a_4^2a_5 + 2a_3a_{14} - 4a_4a_{13} + 2a_5a_{12} + 2a_7a_9 - 2a_8^2 + 8a_5,$$
$$R_4 = -3a_3^2a_8 + 6a_3a_4a_7 + a_3a_5a_6 - 4a_4^2a_6 + 12a_6a_{12} - 24a_7a_{11} + 12a_8a_{10} + 48a_6,$$
$$R_5 = a_3a_5a_9 - 4a_4^2a_9 + 6a_4a_5a_8 - 3a_5^2a_7 + 12a_7a_{14} - 24a_8a_{13} + 12a_9a_{12} + 48a_9,$$
$$R_6 = -a_3^2a_9 + 3a_3a_5a_7 - 2a_4a_5a_6 + 8a_6a_{13} - 12a_7a_{12} + 4a_9a_{10},$$
$$R_7 = -2a_3a_4a_9 + 3a_3a_5a_8 - a_5^2a_6 + 4a_6a_{14} - 12a_8a_{12} + 8a_9a_{11},$$

$$R_8 = 3a_3^3a_5 - 3a_3^2a_4^2 - 12a_3^2a_{12} + 24a_3a_4a_{11} - 6a_3a_5a_{10} + 2a_3a_6a_8 - 6a_4^2a_{10} - 4a_4a_6a_7 + 2a_5a_6^2 - 6a_3^2 + 24a_{10}a_{12} - 24a_{11}^2 + 24a_{10},$$

$$R_9 = 3a_3a_5^3 - 3a_4^2a_5^2 - 12a_5^2a_{12} + 24a_4a_5a_{13} - 6a_3a_5a_{14} + 2a_5a_7a_9 - 6a_4^2a_{14} - 4a_4a_8a_9 + 2a_3a_9^2 - 6a_5^2 + 24a_{12}a_{14} - 24a_{13}^2 + 24a_{14},$$

$$R_{10} = 4a_4a_5a_6 - 3a_3a_5a_7 - 12a_4^2a_7 + 18a_3a_4a_8 - 7a_3^2a_9 + 12a_9a_{10} - 24a_8a_{11} + 12a_7a_{12} + 48a_7,$$

$$R_{11} = 4a_3a_4a_9 - 3a_3a_5a_8 - 12a_4^2a_8 + 18a_4a_5a_7 - 7a_5^2a_6 + 12a_6a_{14} - 24a_7a_{13} + 12a_8a_{12} + 48a_8,$$

$$R_{12} = 3a_3^2a_4a_5 - 3a_3a_4^3 - 3a_3^2a_{13} - 3a_3a_4a_{12} + 3a_3a_5a_{11} + 2a_3a_6a_9 + 12a_4^2a_{11} - 9a_4a_5a_{10} - 4a_4a_6a_8 + 2a_5a_6a_7 + 12a_3a_4 + 12a_{10}a_{13} - 12a_{11}a_{12} - 48a_{11},$$

$$R_{13} = 3a_3a_4a_5^2 - 3a_4^3a_5 - 3a_5^2a_{11} - 3a_4a_5a_{12} + 3a_3a_5a_{13} + 2a_5a_6a_9 + 12a_4^2a_{13} - 9a_3a_4a_{14} - 4a_4a_7a_9 + 2a_3a_8a_9 + 12a_4a_5 + 12a_{11}a_{14} - 12a_{12}a_{13} - 48a_{13},$$

$$R_{14} = a_3^2a_5^2 + a_3a_4^2a_5 - 2a_4^4 - a_3^2a_{14} - 6a_3a_4a_{13} + 2a_3a_5a_{12} + 2a_3a_7a_9 + 10a_4^2a_{12} - 2a_4a_5a_{11} - 4a_7a_8 - 3a_5^2a_{10} + 2a_5a_7^2 + 10a_3a_5 + 32a_4^2 + 4a_{10}a_{14} + 8a_{11}a_{13} - 12a_{12}^2 - 72a_{12} - 96,$$

$$R_{15} = a_3^2a_{14} - 4a_3a_4a_{13} + 2a_3a_5a_{12} + 4a_4^2a_{12} - 4a_4a_5a_{11} + a_5^2a_{10} + 12a_3a_5 - 4a_{10}a_{14} + 16a_{11}a_{13} - 12a_{12}^2 - 48a_{12}.$$

Using Poisson multiplication of the generators of $\mathbb{C}[\mathcal{C}_4]$, we obtain the following statement.

Theorem 16. The polynomials $R_i, 1 \le i \le 15$ are defining relations in $\mathcal{C}_4$.

In the fourth chapter of the thesis, titled **"Unimodular group action on the Calogero-Moser spaces"**, we prove infinite transitivity of the unimodular group action on the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_2$ in a more constructive way.

We denote by G the group generated by the following two kinds of automorphisms of $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$:

$$i) \quad \Phi_p : (X,Y) \mapsto (X, Y + p(X)), \text{ where } p \in \mathbb{C}[t],$$

$$ii) \quad \Psi_q : (X,Y) \mapsto (X + q(Y), Y), \text{ where } q \in \mathbb{C}[t].$$

By W. Van der Kulk's work, it is known that the group G is isomorphic to

$$\mathrm{SAut}(\mathbb{C}[x,y]) = \{f = (f_1, f_2) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}[x,y]) \mid \mathrm{Jac}(f_1, f_2) = 1\},$$

where $\mathrm{Jac}(f_1, f_2)$ is the determinant of the Jacobian matrix of the map (f_1, f_2).

Theorem 17. The action of G on $\mathcal{C}_2$ is a $n-$transitive group action for all $n \in \mathbb{Z}_+$, and hence infinitely transitive.

CONCLUSION

The thesis is devoted to give an algebraic description of the Calogero-Moser spaces.

The main results of the research are as follows:

1. a method to find a relation between some generators of the coordinate ring of the Calogero-Moser space is provided.
2. the minimal sets for generators of the coordinate ring of the third and fourth Calogero-Moser spaces are found.
3. some Poisson brackets of the traces of powers of the traceless matrices are determined.
4. Poisson algebra structure on the invariants of pairs of $n \times n$ matrices is investigated.
5. Poisson algebra multiplication tables on the generators of the algebra of invariants of two matrices of degree three and four are found.
6. some defining relations between the generators of the coordinate ring of the third and fourth Calogero-Moser spaces are established.
7. the group of unimodular autorphisms of a ring of two-variable polynomials is proved to be infinitely transitive in the second Calogero-Moser space.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

НОРМАТОВ ЗАФАР ШЕРМИРЗА УГЛИ

ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВ КАЛОДЖЕРО-МОЗЕР

01.01.06 –Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.1.PhD/FM673.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский(резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Эшматов Фарход Хасанович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Официальные оппоненты:	**Омиров Бахром Абдазович** доктор физико-математических наук, профессор
	Хабьер Гарсия Мартинес доктор математических наук
Ведущая организация:	**Андижанский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 28 » июня 2022 года в 17:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И. Романовского (зарегистрирована за № 139). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 15 » июня 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от « 15 » июня 2022 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Б.А.Омиров
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.,профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Целью исследования является определение структуры Пуассона на координатном кольце пространств Калоджеро-Мозера и использование этой структуры для полного алгебраического описания пространств Калоджеро-Мозера.

Объект исследования: Пространство Калоджеро-Мозера, координатное кольцо, полиномиальные отношения.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдены явные образующие координатного кольца третьего и четвертого пространств Калоджеро-Мозера;

найдены определяющие соотношения между минимальными образующими координатного кольца третьего и четвертого пространств Калоджеро-Мозера и в общем случае доказано, что между конкретными элементами образующих есть алгебраическое соотношение;

полностью проанализирована пуассоновская структура пространств Калоджеро-Мозера и явно описаны третье и четвертое пространства Калоджеро-Мозера;

доказано, что действие аффинной группы Кремоны бесконечно транзитивно во втором пространстве Калоджеро-Мозера.

Внедрение результатов исследования. На основании результатов, полученных при описании пространства Калоджеро-Мозера:

минимальные множества образующих для координатного кольца третьего и четвертого пространств Калоджеро-Мозера использовались для нахождения определяющих соотношений между образующими в фундаментальном научном проекте № MTM2016-79661-P «Гомологии, гомотопические и категориальные инварианты в группах и неассоциативных алгебрах». (Справка Университета Сантьяго де Компостела от 15 апреля 2022 г., №15782, Испания). Применение научного результата позволило установить определяющее соотношение кольца инвариантов пары матриц в общем случае;

структура алгебры Пуассона, рассмотренная на пространствах Калоджеро-Мозера, использовалась для описания координатного кольца пространств Калоджеро-Мозера в фундаментальном научном проекте «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексах», № OT-F4-31 (Справка из Национального университета от 21 апреля 2022 г.). Применение научного результата позволило установить таблицу умножения Пуассона на образующих третьего и четвертого пространств Калоджеро-Мозера.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четыре глав, заключения и библиографии. Объем диссертации 85 страницы.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Normatov Z. On a minimal set of generators for Calogero-Moser space $\mathcal{C}_4$. // Uzbek Mathematical Journal. – 2019. – No. 3. – P. 104-111. (01.00.00, № 6).
2. Kesten J., Mathers S., Normatov Z. Infinite transitivity on the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_2$. // Algebra and Discrete Mathematics. – 2021. – Vol. 31(2). – P. 227-250. (3.Scopus. IF=0.25).
3. Normatov Z., Turdibaev R. On Calogero-Moser Space $\mathcal{C}_3$. // Doklady Acad. Nauk RUz. (2021) No. 3. –P. 3-6. (01.00.00, № 7).
4. Normatov Z., Turdibaev R. Poisson algebra structure on the invariants of pairs of matrices of degree three. // Journal of Algebra and its Applications. – 2021. DOI:10.1142/S0219498823500652. (3.Scopus. IF=0.736).
5. Normatov Z. A relation on the coordinate ring of Calogero-Moser space. // Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2022. – Vol. 5(2). – P. 26-32. (01.00.00, № 17).

II бўлим (2 часть; part 2)

6. Normatov Z.Sh. On a minimal set of generators for the Coordinate Ring of Calogero-Moser space $\mathcal{C}_4$. // Abstracts of the International Conference “Inverse and ill-posed problems”. – Samarkand. 2-4 October, 2019. – P. 113-115.
7. Normatov Z.Sh. Trace identities in Calogero-Moser space $\mathcal{C}_3$. // Abstracts of the International Conference “Modern problems of differential equations and related branches of mathematics”, – Fergana. 12-13 March, 2020. – P. 159-160.
8. Normatov Z.Sh. On some ideal of Poisson algebra $\mathcal{C}_3$. // Abstracts of the Republican scientific conference “Modern problems of stochastic analysis”. – Tashkent. 21-22 September, 2020. – P. 67-69.
9. Normatov Z.Sh. Calogero-Moser type spaces in the variety of two 3×3 matrices. // Abstracts of the Republican scientific conference with participation of foreign scientists “Sarimsakov’s readings”. – Tashkent. 16-18 Sentabr, 2021. – P. 254–255.
10. Normatov Z.Sh. Trace identities in the coordinate ring of the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_4$. // Abstracts of the Republican scientific conference “Differential equations and related problems of analysis”. – Bukhara. 4-5 Noyabr, 2021. – P. 118–119.
11. Normatov Z.Sh. Poisson structure on invariants of two 3x3 matrices. // Abstracts of the International Conference “Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies – al-Khwarizmi 2021”. – Tashkent. 15-17 November, 2021. – P. 93.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2022 йил 6 июнда таҳрирдан ўтказилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,5. Адади 100 дона. Буюртма № 35/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.