

**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI  
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI  
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

---

**MATEMATIKA INSTITUTI**

**SIPATDINOVA BIYBINAZ KENESBAYEVNA**

**CHEGARALANMAGAN PARALLELEPIPED KO'RINISHIDAGI  
SOHADA IKKINCHI TUR, IKKINCHI TARTIBLI UCH O'LCHOVLI  
ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN TO'G'RI VA TESKARI  
MASALALAR**

**01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)  
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

**TOSHKENT – 2025**

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi  
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по  
физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-  
mathematical sciences**

**Sipatdinova Biybinaz Kenesbayevna**

Chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishdagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun to'g'ri va teskari masalalar..... 3

**Сипатдинова Бийбиназ Кенесбайевна**

Прямые и обратные задачи для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде..... 19

**Sipatdinova Biybinaz Kenesbayevna**

Direct and inverse problems for three-dimensional equation of mixed type of the second kind, second order in the domain of an unbounded parallelepiped..... 35

**E'lon qilingan ishlar ro'yxati**

Список опубликованных работ

List of published works ..... 39

**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI  
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI  
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

---

**MATEMATIKA INSTITUTI**

**SIPATDINOVA BIYBINAZ KENESBAYEVNA**

**CHEGARALANMAGAN PARALLELEPIPED KO'RINISHIDAGI  
SOHADA IKKINCHI TUR, IKKINCHI TARTIBLI UCH O'LCHOVLI  
ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN TO'G'RI VA TESKARI  
MASALALAR**

**01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)  
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

**TOSHKENT – 2025**

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B2024.1.PhD/FM1005 raqam bilan ro'yxatga olingan.**

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (<https://kengash.mathinst.uz>) va "ZiyoNet" ta'lim axborot tarmog'ida (<http://www.ziynet.uz>) joylashtirilgan.

**Ilmiy rahbar:**

**Djamalov Sirojiddin Zuxriddinovich**  
fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Rasmiy opponentlar:**

**Durdiev Durdimurod Qalandarovich**  
fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Zunnunov Rahimjon Temirbekovich**  
fizika-matematika fanlari doktori, dotsent

**Yetakchi tashkilot:**

**O'zbekiston Milliy universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025 yil «11» fevral soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40, e-mail: [uzbmash@umail.uz](mailto:uzbmash@umail.uz), Website: [www.mathinst.uz](http://www.mathinst.uz)).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (№ 197-raqam bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9- uy. Tel.: (+99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil «24» yanvar kuni tarqatildi.  
(2025-yil «24» yanvardagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).



**U.A. Roziqov**

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., akademik

**J.K. Adashev**

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiykengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

**A.A. Azamov**

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash huzuridagi Ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., akademik

## KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

**Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati.** Zamonaviy dunyoda ilm-fan va amaliy tadqiqotlarning jadal rivojlanayotgan ko'plab sohalari aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rganishga olib keladi. Aralash tipdagi tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari matematik fizikaning klassik masalalarini o'rganish jarayonida shakllandi va hozirgi kunda amaliy masalalarni yechishda keng qo'llaniladi. Biroq, tabiatshunoslikning zamonaviy muammolari yangi masalalarni sifatli shakllantirish va tadqiq qilish zaruriyatiga olib keladi, buning yorqin misoli sifatida nolokal masalalarni keltirishimiz mumkin. So'ngi o'n yillarda xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun nolokal masalalar ko'plab matematiklar tomonidan chuqur o'rganilmoqda. Ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalarni o'rganishda, ularning gaz dinamikasi, tovush tezligiga yaqin va tovush tezligidan yuqori bo'lgan magnit-gidrodinamik jarayonlar, Alfen tezligi boshqa fizika va mexikaning masalalari bilan bog'liqdir.

Hozirgi kunda nolokal chegaraviy masalalarni tadqiq qilish jarayonida, nolokal chegaraviy shartlari va teskari masalalar o'rtasida uzviy bog'liklik borligi aniqlangan. Matematik fizika tenglamalari uchun teskari masalalarni o'rganishga bo'lgan qiziqish ularning mexanika, seysmologiya, tibbiy tomografiya, geofizikaning turli bo'limlarida qo'llanishining muhimligi bilan bog'liq, shuningdek qisqa muddatli sunami jarayonlarini bashorat qilish ham teskari masalalarni o'rganishga keltiriladi. Bugungi kungacha matematik fizikaning klassik tenglamalari uchun nolokal chegaraviy va chiziqli teskari masalalar juda yaxshi o'rganilgan. Hozirga kelib bunday masalalar noklassik tenglamalar uchun juda kam o'rganilgan. Ilmiy va amaliy hayotning bir qancha sohalarida nolokal chegaraviy va teskari masalalarni yechishga talab keng tarqalganligi sababli ularni tadqiq qilish ustuvor yo'nalishlardan biri hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning amaliy tatbiqqa ega bo'lgan yo'nalishlariga alohida e'tibor qaratilmoqda va fan oldiga fundamental tadqiqotlarni amaliyotga tadqiq qilish vazifasi qo'yildi. Bunday masalalarni yechishda noklassik tenglamalar, xususan aralash tipdagi tenglamalar muhim rol o'ynaydi. Matematika fanlarining ustuvor yo'nalishlari, ya'ni funksional analiz, differensial tenglamalar va matematik fizika, shuningdek dinamik sistemalar nazariyasi, amaliy matematika va matematik modellash tirish bo'yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish Matematika institutining asosiy vazifalari va faoliyat yo'nalishlari hisoblanadi<sup>1</sup>.

Mazkur dissertatsiya ishining mavzusi va obyekti, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi Farmoni, 2017-yil 17-fevraldagi PQ-2789-son "Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish

---

<sup>1</sup>O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash, shuningdek O'zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarori.

chora tadbirlari to'g'risida"gi, 2017-yil 20-apreldagi PQ- 2909- son "Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida" gi va 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash, shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarorlari va 2020-yil 7-maydagi "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4708-sonli Qarori hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

**Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi.** Ushbu dissertatsiya O'zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishi IV. «Matematika, mexanika va informatika» bo'yicha amalga oshirildi.

**Masalaning o'rganilganlik darajasi:** Xususiy hosilali tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalarning dastlabki tadqiqotiga A.V. Bitsadze va A.A. Samarskiylarning ishlarini keltirishimiz mumkin. Bu ishda elliptik tenglamalarning ma'lum bir sinfi uchun fazoviy nolokal masalalar qo'yilgan hamda o'rganilgan, masalani tadqiq qilishda ushbu masala elliptik tenglama uchun o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan spektral masalalarni o'rganishga keltirilgan. Natijada bunday masala Bisadze-Samarskiy masalasi deb nomlangan. Nolokal chegaraviy masalalar nazariyasining turli jabhalarida A.V. Bisadze, A.A. Samarskiy, A.A. Dezin, V.A. Ilin, M.S. Salohiddinov, T.J. Jo'rayev, E.I. Moiseev, A.I. Kojanov, T.SH. Kalmenov, M.A. Sadybekov va boshqa ko'plab olimlarning ilmiy ishlarida o'rganilgan va rivojlantirilgan.

Ma'lumki A.V. Bisadzening ishida aralash tipdagi tenglamalar uchun Dirixle masalasi nokorrekt qo'yilganligi ko'rsatilgan. A.V. Bisadze tomonidan: "Aralash tipdagi tenglamalar uchun Dirixle masalasiga o'xshash bo'lgan, sohani hamma joyini qamrab oluvchi va masalaning korrektiligini ta'minlaydigan, boshqa chegaraviy shartlar bilan almashtirib bo'ladigan masala qo'yish mumkinmi?"- degan savol qo'yilgan. Aralash tipdagi tenglamalar uchun bunday masalalar (nolokal chegaraviy) birinchi marta F.I. Franklning gaz dinamikasi sohasiga oid masalalarini yechishda o'rganilgan. Shunga o'xshash nolokal chegaraviy masalalarning yagona yechimga ega ekanligini, chegaralangan sohalarda ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamalar uchun A.N. Terexov, S.N. Glazatov, M.G. Karatopraklieva va S.Z. Djamalovlarning ilmiy ishlarida, vaznli Sobolev fazolari va Laks fazosida o'rganilgan.

Nolokal masalalarni o'rganish jarayonida, nolokal chegaraviy shartli va teskari masalalar o'rtasida yaqin bog'liqlik borligi aniqlangan. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalalar matematik fizikaning nokorrekt qo'yilgan masalalari guruhiga kiradi. Nokorrekt qo'yilgan masalalar yechishning sxemasi A.N. Tixonov tomonidan ishlab chiqilgan va A.N. Tixonov, M.M. Lavrentev, V.G. Romanov, Yu.E. Anikonov, B.A. Bubnov, A.I. Kozhanov, S.I. Kabanixin, K.S. Fayazov, D.K. Durdiev va boshqa olimlar tomonidan

rivojlantirgan. A.G. Megrabov, K.B. Sabitov va ularning shogirdlarini ilmiy ishlarida tekislikdagi aralash tipdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy shartli teskari masalalar ya'ni tenglamaning o'ng tomonidagi funksiyani aniqlash masalasi spektral analiz usullaridan foydalanib o'rganilgan. Bu ishlarda masala yechimning mavjudligi, yagonaligi va turg'unligi teoremlar orqali isbotlangan. S.Z. Djmalovning ishlarida chegaralangan sohalarda birinchi va ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy shartli ba'zi chiziqli teskari masalalarning korrektiligi o'rganilgan. Keyinchalik bunday lokal va nolokal chegaraviy shartli teskari masalalar chegaralangan sohalarda ko'p o'lchovli hollarida S.Z. Djmalov va R.R. Ashurov, S.Z. Djmalov va S.G. Pyatkov, S.Z. Djmalov, R.R. Ashurov va A.I. Kozhanov larning ishlarida, chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada esa birinchi tur uch o'lchovli aralash tipdagi Trikom tenglamasi uchun teskari masalalar S.Z. Djmalov va X. To'raqulov ishlarida o'rganilgan.

Ushbu dissertatsiyada chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglamalar uchun to'g'ri masalalarning yechimini mavjudligi, yagonaligi va sillikligi Sobolev anizotrop fazolarida o'rganilgan. Teskari masalalarning esa Adamar ma'nosidagi korrektiligi o'rganilgan. Teskari masalalarni o'rganish uchun, teskari masalalarni chegaralangan to'g'ri to'rtburchakdagi nolokal chegaraviy shartli ikkinchi tur aralash tipdagi cheksiz yuklangan integro-differensial tenglamalar oilasi uchun to'g'ri masalani yechishga asoslangan usul keltiriladi.

**Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim yoki ilmiy tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi.** Dissertatsiya ishi O'zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti «Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari» laboratoriyasining ilmiy-tadqiqot ishlarining rejalashtirilgan mavzusiga va O'zR FA Matematika instituti F-FA-2021-424 «Butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish» ilmiy grantiga muvofiq amalga oshirildi.

**Tadqiqotning maqsadi** chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy shartli to'g'ri va teskari masalalar nazariyasini qurish va uni rivojlantirishdan iborat.

### **Tadqiqot vazifalari**

Sobolev fazolarida chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglamalar uchun yarimdavriy va davriy chegaraviy masalalarning bir qiymatli umumlashgan yechimiga ega ekanligini va silliqqligini Sobolevning anizotrop fazolarida tadqiq qilish;

ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaralanmagan sohalarda yarimnolokal va nolokal chegaraviy masalalarni yechimining yagonaligi, mavjudligi va yechimni silliqqligini Sobolevning anizotrop fazolarida isbotlash;

Sobolevning anizotrop fazolarida ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'ldhovli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada yarimdavriy va davriy chegara shartlari bilan berilgan teskari masalalarning korrektililigini isbot qilish;

ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'ldhovli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada yarimnolokal va nolokal chegara shartlari bilan berilgan teskari masalalarning yechimini yagona va mavjudligini Sobolevning anizotrop fazolarida tadqiq qilish;

**Tadqiqotning ob'yekti:** ikkinchi tur uch o'ldhovli aralash tipdagi tenglama, kichik parametrli tarkibiy tipdagi differensial tenglamalar, cheksiz yuklangan integro-differensial tenglamalardan iborat.

**Tadqiqotning predmeti:** chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'ldhovli aralash tipdagi tenglama uchun to'g'ri va teskari masalalarni Sobolevning anizotrop fazolarida o'rganishdan iborat.

**Tadqiqot usullari** tadqiqot ishida matematik va funksional analiz, matematik fizika, qatorlar va operatorlarning spektral nazariyalaridan foydalanildi.

**Tadqiqotning ilmiy yangiligi** quyidagilardan iborat:

Sobolevning anizotrop fazolarida chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'ldhovli aralash tipdagi tenglamalar uchun yarimdavriy, davriy chegaraviy masalalarning bir qiymatli umumlashgan yechimga ega ekanligi va silliqiligi isbotlangan;

ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'ldhovli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaralanmagan sohalarda yarimnolokal, nolokal chegaraviy masalalarning yechimini Sobolevning anizotrop fazolarida mavjud, yagona va silliq ekanligi isbotlangan;

Sobolevning anizotrop fazolarida ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'ldhovli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada yarimdavriy, davriy chegara shartlari bilan berilgan teskari masalalarning korrektililigi isbotlangan;

ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'ldhovli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada yarimnolokal va nolokal chegara shartlari bilan berilgan teskari masalalarning yechimini yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

**Tadqiqotning amaliy natijalari** chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'ldhovli aralash tipdagi tenglamalar uchun davriy va nolokal chegaraviy shartli to'g'ri va teskari masalalar takomillashtirilgan, shuningdek taklif qilingan tadqiqot usullari turli fizik-kimyoviy, giofizik, biologik, tibbiy, seysmologik jarayonlarni o'rganishda qo'llash mumkinligi bilan izohlanadi.

**Tadqiqot natijalarining ishonchliligi:** matematik va funksional analiz usullari, differensial tenglamalar va matematik fizika, qatorlar nazariyasi va operatorlarning spektral nazariyasidan foydalangan holda matematik yondashuvlar yordamida amalga oshirildi.



**Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.** Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati aralash tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasini va o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan, musbat aniqlangan elliptik operatorlarning spektral nazariyasini rivojlantirishda, xususan aralash tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun nolokal va teskari masalalarni umumlashgan yechimlarining yagonaligi, mavjudligi va silliqqligini isbotlashlarga qo'llanishi mumkin.

Natijalarning amaliy ahamiyati fizik-kimyoviy, giofizik, biologik, tibbiy, seysmologik jarayonlarni o'rganishda qo'llash imkoniyati bilan asoslanadi. Jumladan, ikkinchi tur, uch o'lchovli aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal va teskari masalalarni o'rganish muhimligi, ularning gaz dinamikasi, tovush tezligiga yaqin va tovush tezligidan yuqori bo'lgan magnit gidrodinamik jarayonlar, Alfen tezligi va boshqa fizik-mexanikaviy jarayonlarni bashorat qilish va kerakli natijaga erishish uchun jarayon parametrlarini to'g'ri tanlash imkonini beradi.

**Tadqiqot natijalarini joriy etish:** Chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun to'g'ri va teskari masalalar bo'yicha olingan natijalar asosida:

Sobolev fazolarida chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglamalar uchun yarimdavriy, davriy chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechimidan V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti va Kosmofizika tadqiqotlari va radioto'lqinlar tarqalishi institutlarining hamkorlikdagi 124012300245-2 raqamli "diffuziya to'lqin jarayonlarini" mavzusidagi tadqiqotlarni amalga oshirishda foydalanilgan (Kosmofizika tadqiqotlari va radioto'lqinlar tarqalish instituti 2024-yil 2-dekabrda №478-sonli ma'lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijaning qo'llanishi kasr tartibli diffuziya tenglamalari va buzilgan giperbolik tenglamalaridagi nolokal masalalarni yechishni imkonini bergan;

chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun teskari masalalar yechilish usullaridan AP09258836 raqamli "Anomal diffuziyaning differentsial matematik modellari uchun raqamli algoritmlarni ishlab chiqish" mavzusidagi xorijiy fundamental loyihada anomal diffuziya uchun to'g'ri va teskari tenglamalarni yechishda foydalanilgan (Xo'ja Axmad Yassaviy nomidagi xalqaro Qozoq-Turk universitetining 2024-yil 15-noyabrda №05/3177-sonli ma'lumotnomasi, Qozog'iston). Ilmiy natijani qo'llash, aprior baholar usulidan foydalangan holda anomal diffuziya tenglamasining to'g'ri masalasi yechimi uchun ayirma sxemasining turg'unligini isbotlash imkonini bergan.

**Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi.** Mazkur tadqiqot natijalari 13 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, shu jumladan 9 ta xalqaro va 4 ta respublika miqyosida muhokama qilindi.

**Tadqiqot natijalarining chop etilganligi.** Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 22 ta ilmiy ishlar chop etilgan bo'lib, shulardan 7 ta maqola O'zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya Komissiyasi tomonidan falsafa doktori ilmiy darajasini olish, dissertatsiya himoyasi uchun tavsiya qilingan ilmiy nashriyotlarda

chop etilgan, ulardan 3 tasi xorijiy nufuzli jurnallarda va 4 tasi respublika ilmiy jurnallarida chop qilingan.

**Dissertatsiya hajmi va tuzilishi.** Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 113 betni tashkil etadi.

## DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

**Kirish** qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga muvofiqligi asoslangan, dissertatsiya mavzu bo'yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar tahlili berilgan, muammoning o'rganilganlik darajasi yoritilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob'ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ilmiy ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun to'g'ri masalalar”** deb nomlangan birinchi bobida chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishdagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun davriy va nolokal chegaraviy shartli ba'zi to'g'ri masalalarning yechimlarini yagonaligi, mavjudligi va silliqiligi Sobolevning anizotrop fazolarida o'rganilgan.

**Ushbu bobning birinchi paragrafida**, asosiy natijalarni olish uchun zarur bo'lgan funksional analiz nazariyasidagi ba'zi ma'lum faktlar, shu jumladan Gilbert va Banax fazolari, ushbu fazolardagi skalyar ko'paytma va normalar, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasidagi turli tengsizliklar va lemmalar keltirilgan.

Tadqiqod natijasida qo'yilgan masalalarni yechish uchun zarur bo'lgan ba'zi funksional fazolar va belgilashlar kiritilgan.

$G = (0,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z), x \in (0,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R\}$  chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishdagi soha bo'lsin.

Quyidagi belgilashlarni keltiramiz:

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z) e^{-i\lambda z} dz$$

formula yordamida  $u(x,t,z)$  funksiyaning  $z$  o'zgaruvchi bo'yicha Furye almashtirishini,

$$u(x,t,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,t,\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda$$

esa teskari Furye almashtirishini belgilaymiz.

Endi Furye almashtirishi yordamida Sobolevning anizotrop  $W_{2,x,t,y}^{l,l,s}(G) \equiv W_2^{l,s}(G)$  fazosini belgilaymiz, fazodagi normani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\|u\|_{W_2^{l,s}(G)}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|_{W_2^l(Q)}^2 d\lambda, \quad (A)$$

bu yerda  $l, s$  – ixtiyoriy musbat butun sonlar.

$W_2^l(Q)$  ( $l=0$  da  $W_2^0(Q) = L_2(Q)$ ) orqali esa  $(u, \mathcal{G})_l$  skalyar ko‘paytmali va

$$\|\mathcal{G}\|_l^2 = \|\mathcal{G}\|_{W_2^l(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_Q |D^\alpha \mathcal{G}|^2 dx dt$$

normali Sobolev fazosini belgilaymiz. Bu yerda  $\alpha$  – multiindeks,  $D^\alpha$  –  $x$  va  $t$  o‘zgaruvchilari bo‘yicha umumlashgan hosila tushiniladi.

Ma‘lumki  $W_2^{l,s}(G)$  fazo (A) norma bilan Banach fazosi bo‘ladi.

Keyinchalik bizga, Sobolevning joylashish teoremlaridan kelib chiqadigan quyidagi baholar kerak bo‘ladi:

$$\|\mathcal{G}\|_{C^\alpha(\bar{Q})}^2 \leq c_{\alpha+2} \|\mathcal{G}\|_{W_2^{\alpha+2}(\bar{Q})}^2.$$

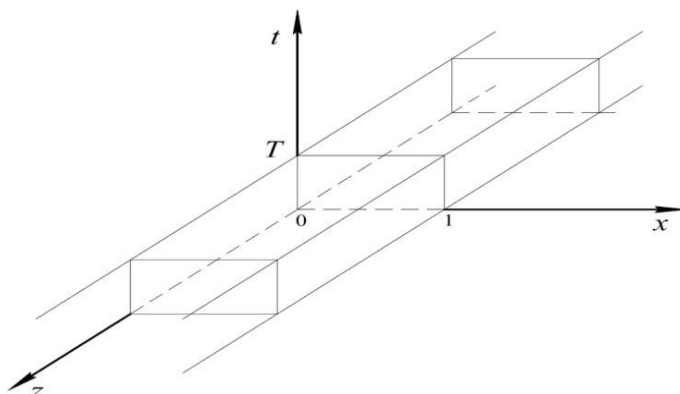
Bu yerda  $c_{\alpha+2}$  ( $\alpha = 0, 1, \dots$ ) – orqali turli musbat o‘zgaruvchilarni belgilaymiz va

$$c_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(1+\lambda^2)^3} = \frac{3\pi}{4} \text{ ga teng.}$$

**Ushbu bobning ikkinchi paragrafida** chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun yarimdavriy va davriy chegaraviy masalalarning umumlashgan yechimining bir qiymatli yechilishi va silliqqligini Sobolevning anizotrop fazolarida o‘rganilgan.

Ushbu

$$G = (0,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z); x \in (0,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R\}$$



sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli aralash tipdagi tenglamani qaraymiz:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t,z), \quad (1)$$

bu yerda  $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$  — Laplas operatori.  $k(0) = k(T) = 0$  o‘rinli bo‘lsin.

$[0, T]$  segmentda (1) tenglama uchun  $t$  o‘zgaruvchi bo‘yicha  $k(t)$  funksiyaning ishorasiga hech qanday boshqa cheklollar qo‘yilmaganligi sababli (1) tenglama ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama deb ataladi.

Faraz qilamiz (1) tenglamaning barcha koeffitsientlari  $\bar{Q}$  sohada yetarlicha

silliqlik funksiyalar bo'lsin.

**Yarimdavriy chegaraviy masala.** (1) tenglamani Sobolevning anizotrop  $W_2^{2,3}(G)$  fazosida quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin

$$u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \quad (3)$$

$$\text{Bundan tashqari } |z| \rightarrow \infty \text{ bo'lganda } u(x, t, z) \text{ va } u_z(x, t, z) \rightarrow 0 \text{ bo'lsin.} \quad (4)$$

**1-ta'rif.**  $G$  sohaning deyarli hamma joyida (1) tenglamani hamda (2)-(4) shartlarni qanoatlantiruvchi  $u(x, t, z) \in W_2^{2,3}(G)$  funksiyaga (1)-(4) masalaning umumlashgan yechimi deb aytiladi.

**1-teorema.** Faraz qilaymiz shunday  $\mu$  musbat son mavjud bo'lib va (1) tenglamaning koeffitsientlari uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin:

$$1) \text{ barcha } (x, t) \in \bar{Q} \text{ lar uchun } 2a(x, t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \geq \delta_1 > 0, \\ \mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_2 > 0, \quad a_t \leq a_0 < 0 \text{ tengsizliklar va;}$$

$$2) \text{ barcha } x \in [0, 1] \text{ larda } a(x, 0) = a(x, T), \quad c(x, 0) = c(x, T) \text{ tengliklar o'rinli bo'lsin.}$$

U holda  $f(x, 0, z) = f(x, T, z)$  shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $f \in W_2^{1,3}(G)$  funksiya uchun Sobolevning anizotrop  $W_2^{2,3}(G)$  fazosida (1)-(4) masalaning yagona umumlashgan yechimi mavjud va bu yechim uchun quyidagi aprior baholar o'rinli bo'ladi:

$$I) \|u\|_{W_2^{1,3}(G)}^2 \leq c_1 \|f\|_{W_2^{0,3}(G)}^2,$$

$$II) \|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 \leq c_2 \|f\|_{W_2^{1,3}(G)}^2.$$

Kelgusida  $c_i$  orqali musbat, noldan farqli, turli o'zgasmas sonlarni belgilaymiz.

### (1)-(4) masalani umumlashgan yechimining silliqligi.

Endi (1)-(4) masalani umumlashgan yechimini Sobolevning anizotrop  $W_2^{m+2,s}(G)$  fazolarida silliqligini o'rganamiz. (bu yerda  $m, s$  – butun chekli musbat sonlar.)

Quyida soddalik uchun (1) tenglamaning koeffitsientlari  $\bar{Q}$  yopiq sohada yetarlicha differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin deb faraz qilamiz.

**2-teorema.** Faraz qilamiz 1-teoremaning barcha shartlari barajarilgan bo'lsin, bundan tashqari barcha  $(x, t) \in \bar{Q}$  lar uchun  $D_t^q a|_{t=0} = D_t^q a|_{t=T}$ ,  $D_t^q c|_{t=0} = D_t^q c|_{t=T}$  tengliklar o'rinli bo'lsin. U holda  $D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$ , ( $q = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ ) shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $f \in W_2^{m+1,s}(Q)$  funksiya uchun (1)-(4) masalaning umumlashgan yechimi Sobolevning anizotrop  $W_2^{m+2,s}(G)$  fazolarida yagona va

mavjud bo‘ladi. (bu yerda  $s \geq m + 3$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ )

$W_2^{m+2,s}(G)$  Sobolevni anizotrop fazosida umumlashgan yechimini yagonalik, mavjudlik va silliqlikligiga oid teoremlar aprior baholashlar, Galyorkin va “ $\varepsilon$ -regularizatsiya” usullari orqali isbot qilingan.

**Ushbu paragrafida** yana chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada ikkinchi tur uch o‘lchovli aralash tipdagi tenglama uchun davriy chegaraviy masalani umumlashgan yechimning yagonaligi, mavjudligi va silliqligi o‘rganilgan.

Yarimdavriy chegaraviy masalada bo‘lgani kabi davriy chegaraviy masalaning ham Sobolevning anizotrop  $W_2^{m+2,s}(G)$  fazolarida ham umumlashgan yechimning yagonaligi, mavjudligi va silliqlikligiga oid teoremlar aprior baholashlar, Galyorkin va “ $\varepsilon$ -regularizatsiya” usullari orqali isbot qilingan. Bu yerda  $m, s$  – butun chekli musbat sonlar, bunda  $s \geq m + 3$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

**Ushbu bobning uchunchi paragrafida** chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada ikkinchi tur uch o‘lchamli aralash tipdagi tenglama uchun yarimnolokal chegaraviy masalaning umumlashgan yechimning yagonaligi, mavjudligi va silliqligi o‘rganilgan.

**Yarimnolokal chegaraviy masala.** (1) tenglamani Sobolevning anizotrop  $W_2^{2,3}(G)$  fazosiga tegishli hamda quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi  $u(x, t, z)$  umumlashgan yechimini toping

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (5)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (6)$$

$$|z| \rightarrow \infty \text{ intilganda } u(x, t, z) \text{ va } u_z(x, t, z) \rightarrow 0 \text{ bo‘lsin,} \quad (7)$$

bu yerda,  $\gamma$  – noldan farqli biror musbat son bo‘lib, qiymati quyida aniqlanadi.

**2-ta’rif.**  $G$  sohaning deyarli hamma joyida (1) tenglamani, hamda (5)-(7) shartlarni qanoatlantiruvchi  $u(x, t, z)$  funksiyaga (1), (5)-(7) masalaning  $W_2^{2,3}(G)$  fazodagi umumlashgan yechimi deyiladi.

**3-teorema.** Faraz qilaylik (1) tenglama koeffitsientlari uchun quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsin;

$$1) \text{ barcha } (x, t) \in \bar{Q} \text{ lar uchun } 2a(x, t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \geq \delta_1 > 0,$$

$$\mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_2 > 0 \text{ tengsizliklar va;}$$

$$2) \text{ barcha } x \in [0, 1] \text{ larda } a(x, 0) = a(x, T), \quad c(x, 0) = c(x, T) \text{ tengliklar o‘rinli bo‘lsin.}$$

U holda  $\gamma \cdot f(x, 0, z) = f(x, T, z)$  shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $f \in W_2^{1,3}(G)$  funksiya uchun  $W_2^{2,3}(G)$  fazoda (1), (5)-(7) masalaning yagona umumlashgan yechimi mavjud va bu yechim uchun quyidagi aprior baholar o‘rinli bo‘ladi:

$$I) \quad \|u\|_{W_2^{1,3}(G)}^2 \leq c_1 \|f\|_{W_2^{0,3}(G)}^2,$$

$$II) \quad \|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 \leq c_2 \|f\|_{W_2^{1,3}(G)}^2.$$

Endi  $W_2^{m+2,s}(G)$  fazolarda yarimnolokal masalani umumlashgan yechimini silliqqligini tadqiq qilamiz, bu yerda  $s, m$  – butun musbat chekli sonlar. Faraz qilamiz (1) tenglamaning koeffitsientlari  $\bar{Q}$  sohada yetarlicha differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin.

**4-teorema.** Faraz qilamiz 3-teoremaning barcha shartlari bajarilgan bo‘lsin, bundan tashqari barcha  $(x, t) \in \bar{Q}$  lar uchun  $D_t^q a|_{t=0} = D_t^q a|_{t=T}$ ,  $D_t^q c|_{t=0} = D_t^q c|_{t=T}$  tengliklar o‘rinli bo‘lsin. U holda  $\gamma \cdot D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$  ( $q = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ ) shartlarni qanotlantiruvchi ixtiyoriy  $f \in W_2^{m+1,s}(G)$  funksiya uchun  $W_2^{m+2,s}(G)$ , ( $s \geq m+3, m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) fazolarda (1), (5)-(7) masalani yagona umumlashgan yechimi mavjud bo‘ladi.

$W_2^{m+2,s}(G)$  Sobolevning anizotrop fazosidagi umumlashgan yechimini yagonalik, mavjudlik va silliqlik teoremlari aprior baholar, Galyorkin va “ $\varepsilon$ -regularizatsiya” usullari orqali isbot qilingan.

**Ushbu bobning to‘rtinchi paragrafida** chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada ikkinchi tur uch o‘lchovli aralash tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy masalani umumlashgan yechimning yagonaligi, mavjudligi va silliqligi o‘rganilgan. Uchunchi paragrafda bo‘lgani kabi Sobolevning anizotrop  $W_2^{m+2,s}(G)$  fazosida (bu yerda  $m, s$  – butun chekli musbat sonlar, bunda  $s \geq m+3, m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), nolokal chegaraviy masalani umumlashgan yechimni bir qiymatli yechilishi va silliqligi isbot qilingan.

**Dissertatsiya ishining ikkinchi bobi “Chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishidagi sohada ikkinchi tur uch o‘lchovli aralash tipdagi tenglama uchun davriy chegaraviy shartli teskari masalalar”** deb nomlangan bo‘lib, chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada ikkinchi tur uch o‘lchovli aralash tipdagi tenglama uchun yarimdavriy va davriy chegaraviy shartli teskari masalarni Adamar ta’rifi bo‘yicha korrektiligi o‘rganilgan.

**Ikkinchi bobning birinchi paragrafida** chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada ikkinchi tur uch o‘lchovli aralash tipdagi tenglama uchun yarimdavriy chegaraviy shartli chiziqli teskari masalani bir qiymatli yechilishi isbot qilingan.

Ushbu

$$G = (0,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z), x \in (0,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R\}$$

sohada ikkinchi tur uch o‘lchovli aralash tipdagi tenglamani qaraymiz:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x,t)u = \psi(x,t,z), \quad (8)$$

bu yerda  $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$  — Laplas operatori va  $k(0) = k(T) = 0$  sharti o‘rinli bo‘lsin. (8)-tenglamaning o‘ng tomonidagi funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin  $\psi(x,t,z) = g(x,t,z) + h(x,t) \cdot f(x,t,z)$ , bu yerda  $g(x,t,z)$  va  $f(x,t,z)$  berilgan funksiyalar,  $h(x,t)$  aniqlanishi kerak bo‘lgan funksiya.

(8) tenglama uchun  $[0, T]$  segmentda  $t$  o'zgaruvchi bo'yicha  $k(t)$  funksiyaning ishorasiga hech qanday boshqa cheklovlar qo'yilmaganligi sababli (8) tenglama ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama deb ataladi.

**Yarimdavriy chiziqli teskari masala.** (8) tenglamani hamda quyidagi shartlarni:

$$u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (9)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (10)$$

$$\text{va } |z| \rightarrow \infty \text{ da } u(x, t, z) \text{ va } u_z(x, t, z) \rightarrow 0 \text{ bo'lsin} \quad (11)$$

hamda

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t), \text{ bu yerda } \ell_0 \in R. \quad (12)$$

qanoatlantiruvchi va  $U = \{(u, h) | u \in W_2^{2,3}(G), h \in W_2^2(Q)\}$  sinfga tegishli bo'lgan  $u(x, t, z)$  va  $h(x, t)$  funksiyalar topilsin.

**3-ta'rif.**  $G$  sohaning deyarli hamma joyida (8) tenglamani hamda (9)-(12) shartlarni qanoatlantiruvchi  $\{u(x, t, z), h(x, t)\}$  funksiyalarga (8), (9)-(12) masalaning  $U$  – sinfdagi umumlashgan yechimi deb ataladi.

Faraz qilaymiz (8) tenglamaning barcha koeffitsientlari  $\bar{Q}$  sohada yetarlicha silliq funksiyalar bo'lsin. (8) tenglamaning koeffitsientlariga, o'ng tomonidagi berilgan funksiyalarga hamda berilgan  $\varphi_0(x, t)$  funksiyaga nisbatan quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin;

**1-shart:**

**Nolokal shartlari:**  $a(x, 0) = a(x, T), c(x, 0) = c(x, T),$

$$g(x, 0, z) = g(x, T, z), f(x, 0, z) = f(x, T, z),$$

**Silliqlik shartlari:**  $f(x, t, \ell_0) = f_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}), g(x, t, \ell_0) = g_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}),$

$$|f_0(x, t)| \geq \eta > 0, f \in W_2^{3,3}(G), g \in W_2^{1,3}(G).$$

Undan tashqari, shunday  $\mu$  musbat soni va barcha  $(x, t) \in \bar{Q}$  uchun  $2a(x, t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \geq B_1 > 0, \quad \mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq b_2 > 0, \quad a_t \leq a_0 < 0$  tengsizliklar bajarilgan bo'lsin.

**2-shart:**  $\varphi_0(x, t) \in W_2^3(Q), D_t^q \varphi_0|_{t=0} = D_t^q \varphi_0|_{t=T}, q = 0, 1, 2, \varphi_0|_{x=0} = \varphi_0|_{x=1} = 0.$

**5-teorema.** Faraz qilamiz (8) tenglamaning koeffitsientlari uchun yuqorida keltirilgan 1- va 2- shartlar bajarilgan bo'lsin, Undan tashqari  $b_0 - 14\mu^2\sigma^{-1} = \delta > 0, M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$  baholar o'rinli bo'ladigan shunday  $\sigma$  musbat son mavjud bo'lsin. (Bu yerda  $b_0 = \min\{B_1, \mu, b_2\}, M = 15\pi c_2 c_3 \sigma \mu^2 \delta^{-1} \eta^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})}^2$  - musbat son,  $c_i (i = 2, 3)$  – yuqorida aniqlangan o'zgarmas sonlar). U holda (8), (9)-(12) teskari masala  $U = \{(u, h) | u \in W_2^{2,3}(G), h \in W_2^2(Q)\}$  sinfdagi yagona yechimga ega bo'ladi.

5-teorema “ $\varepsilon$  -regularizatsiya” aprior baholar, ketma-ket yaqinlashishlar va

qisqartirib akslantirishlar usullari, hamda Furrye almashtirishi yordamida isbot qilingan.

**Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida** birinchi paragrafda bo‘lgani kabi chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada ikkinchi tur uch o‘lchovli aralash tipdagi tenglama uchun davriy shartli teskari masalaning umumlashgan yechimning bir qiymatli yechilishi isbot qilingan.

**Dissertatsiya ishining uchinchi bobi** “Chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada ikkinchi tur uch o‘lchovli aralash tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy shartli teskari masalalar” deb nomlangan bo‘lib, bu bobda chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada uch o‘lchovli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamasi uchun yarimnolokal va nolokal chegaraviy shartli teskari masalalarning Adamar ta‘rifi bo‘yicha korrektiligi o‘rganilgan.

**Uchinchi bobning birinchi paragrafida** chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada ikkinchi tur uch o‘lchovli aralash tipdagi tenglama uchun yarimnolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalaning bir qiymatli yechilishi isbot qilingan.

**Yarimnolokal chiziqli teskari masala.** (8) tenglamani hamda quyidagi shartlarni

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (13)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (14)$$

bu yerda  $\gamma$  – biror noldan farqli son bo‘lib, qiymati quyida aniqlanadi.

Bundan tashqari  $|z| \rightarrow \infty$  da  $u(x, t, z)$  va  $u_z(x, t, z) \rightarrow 0$  bo‘lsin (15) hamda qo‘shimcha shartni

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t), \quad \text{bunda } \ell_0 \in R. \quad (16)$$

qanoatlantiruvchi va  $U = \{(u, h) | u \in W_2^{2,3}(G), h \in W_2^2(Q)\}$  sinfga tegishli bo‘lgan  $u(x, t, z)$  ba  $h(x, t)$  funksiyalar topilsin.

Bu yerda  $W_2^{2,3}(G)$  fazo birinchi bobning § 1.1 da aniqlangan.

**4-ta‘rif.**  $G$  sohaning deyarli hamma joyida (8) tenglamani hamda (13)-(16) shartlarni qanoatlantiruvchi  $\{u(x, t, z), h(x, t)\} \in U$  funksiyalar (8), (13)-(16) masalaning umumlashgan yechimi deb ataladi.

Faraz qilaylik (8) tenglamaning barcha koeffitsientlari  $\bar{Q}$  sohada yetarlicha silliq funksiya bo‘lsin. (8) tenglamaning o‘ng tomonidagi funksiya hamda berilgan  $\varphi_0(x, t)$  funksiyaga nisbatan quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsin;

**3-shart:**

**Nolokal shartlari:**  $a(x, 0) = a(x, T), c(x, 0) = c(x, T),$   
 $\gamma \cdot g(x, 0, z) = g(x, T, z), \gamma \cdot f(x, 0, z) = f(x, T, z);$

**Silliqlik shartlari:**  $f(x, t, \ell_0) = f_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}), g(x, t, \ell_0) = g_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}),$   
 $|f_0(x, t)| \geq \rho > 0, f \in W_2^{3,3}(G), g \in W_2^{1,3}(G).$

Bundan tashqari barcha  $(x, t) \in \bar{Q}$  lar uchun  $2a(x, t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \geq B_1 > 0$



$\mu c(x,t) - c_t(x,t) \geq b_2 > 0$  shartlar bajarilgan bo'lsin, bunda  $\mu = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$ ,  $|\gamma| > 1$ .

**4-shart:**

$\varphi_0(x,t) \in W_2^3(Q)$ ,  $\gamma D_t^q \varphi_0|_{t=0} = D_t^q \varphi_0|_{t=T}$ ,  $q=0,1,2$ ,  $\varphi_0|_{x=0} = \varphi_0|_{x=1} = 0$ .

**6-teorema.** Faraz qilamiz (8) tenglamaning koeffitsientlari uchun 3- va 4-shartlar bajarilgan bo'lsin; Bundan tashqari  $b_0 - 14\sigma^{-1} \geq \delta > 0$ ,  $q = M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$  o'rinli bo'ladigan shunday  $\sigma$  musbat son mavjud bo'lsin. (Bu yerda  $b_0 = \min\{B_1, \mu, b_2\}$ ,  $M = 15\pi c_2 c_3 \sigma \delta^{-1} \rho^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})}^2$  - musbat son,  $c_i (i=2,3)$  - yuqorida aniqlangan o'zgarmas sonlar). U holda (8), (13)-(16) teskari masalani,  $U = \{(u,h) | u \in W_2^{2,3}(G), h \in W_2^2(Q)\}$  sinfda yagona yechimi mavjud bo'ladi.

6-teorema “ $\varepsilon$  – regularizatsiya”, aprior baholar, ketma-ket yaqinlashishlar va qisqartirib akslantirishlar usullari yordamida Furrye almashtirishini qo'llab isbot qilingan.

**Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida** chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishdagi sohada ikkinchi tur uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalaning bir qiymatli yechilishi isbot qilingan.

## XULOSA

Dissertatsiya ikkinchi tur uch o'lchovli aralash tipdagi tenglamalar uchun davriy va nolokal chegaraviy masalalarni umumlashgan yechimlarining yagonalik, mavjudlik va silliqqligini isbotlashga va ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun teskari masalalarning Adamar ta'rifi bo'yicha korrektiligini o'rganishga bag'ishlangan.

Tadqiqot natijalaridan quyidagi xulosalarni chiqarishimiz mumkin:

1. Chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun Sobolevning anizotrop fazolarida yarimdavriy, davriy, yarimnolokal va nolokal shartli to'g'ri masalalarning yechimlarining yagonaligi mavjudligi va silliqqligi haqidagi teoremlar isbot qilingan. Olingan yechimlarning  $W_2^{m+2,s}(G)$  Sobolevning anizotrop fazolarida silliqqligi tadqiq qilingan, bu yerdagi  $m, s$  - chekli butun musbat sonlar bo'lib,  $s \geq m+3$ .

2. Integrallanuvchi funksiyalar sinfida ikkinchi tur, uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada yarimdavriy va davriy teskari masalalarning yagonalik, mavjudlik teoremlari isbot qilingan.

3. Ikkinchi tur, uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun cheksiz parallelepiped ko'rinishidagi sohada yarimnolokal va nolokal chegaraviy shartli

teskari masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlar integrallanuvchi funksiyalar sinfida isbotlangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, dissertatsiyada olingan ilmiy natijalar cheksiz parallelepiped ko'rinishidagi sohalarda ikkinchi tur aralash tipdagi ko'p o'lchovli tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasini yanada rivojlantirishda qo'llanilishi mumkin.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01  
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ  
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**  

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

**СИПАТДИНОВА БИЙБИНАЗ КЕНЕСБАЙЕВНА**

**ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО  
УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА, ВТОРОГО  
ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ**

**01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика**

**АВТОРЕФЕРАТ  
ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)  
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Ташкент – 2025**

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2024.1.PhD/FM1005.

Диссертация выполнена в Институте математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://kengash.mathinst.uz>) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (<http://www.ziyo.net>).

|                               |                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Научный руководитель:</b>  | <b>Джамалов Сирожиддин Зухриддинович</b><br>доктор физико-математических наук, профессор                                                                                         |
| <b>Официальные оппоненты:</b> | <b>Дурдиев Дурдимурод Каландарович</b><br>доктор физико-математических наук, профессор<br><br><b>Зуннунов Рахимжон Темирбекович</b><br>доктор физико-математических наук, доцент |
| <b>Ведущая организация:</b>   | <b>Национальный университет Узбекистана</b>                                                                                                                                      |

Защита диссертации состоится «11» февраля 2025 г. в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: [uzbmath@umail.uz](mailto:uzbmath@umail.uz), Website: [www.mathinst.uz](http://www.mathinst.uz)).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И. Романовского (зарегистрирована за № 197 ). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «24» января 2025 г.  
(протокол рассылки № 2 от «24» января 2025 г.).



**У.А. Розиков**

Председатель Научного совета по  
присуждению ученых степеней,  
д.ф.-м.н., академик

**Ж.К. Адашев**

Ученый секретарь Научного совета по  
присуждению ученых степеней,  
д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

**А.А. Азамов**

Председатель Научного семинара при  
Научном совете по присуждению ученых  
степеней, д.ф.-м.н., академик

## **ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))**

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** В современном мире многие стремительно развивающиеся направления науки и прикладные исследования приводят к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа. Однако современные проблемы естествознания приводят к необходимости качественной постановки и исследования новых задач, ярким примером которых является класс нелокальных задач. В последние десятилетия нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных активно изучаются многими математиками. В этих работах было указано на важность изучения нелокальных задач для уравнения смешанного типа, учитывая их связь с вопросами трансзвуковой газовой динамики, магнитогидродинамическими течениями с переходом через скорость звука и скорость Альфена и другими проблемами физики и механики.

На сегодняшний день в процессе исследования нелокальных задач была выявлена их тесная взаимосвязь с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. Отметим, что интерес к исследованию обратных задач для уравнения математической физики обусловлен важностью их приложений в различных разделах механики, медицинской томографии, геофизики, также обратные задачи возникают при изучении краткосрочного прогноза цунами, сейсмики и в задачах томографии. К настоящему времени достаточно хорошо изучены нелокальные краевые и обратные задачи для классических уравнений математической физики. На данном этапе такие задачи являются менее изученными для уравнения смешанного типа второго рода. В связи с широкой востребованностью решения нелокальных краевых и обратных задач в ряде областей повседневной научной и практической жизни их решение представляет одно из приоритетных направлений.

В нашей республике особое внимание уделяется фундаментальным наукам. Перед наукой ставится задача сближения фундаментальных исследований с практикой. В решении поставленной задачи теория уравнений неклассического типа, в частности для уравнений смешанного типа, призвана играть важную роль. Научные исследования на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук, а именно функциональному анализу, дифференциальным уравнениям и математической физике, включая теорию динамических систем, а также по прикладной математике и математическому моделированию являются основными задачами и направлениями деятельности Института математики.

Тема и объект исследования настоящей диссертационной работы соответствуют поручениям, обозначенным в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О

мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан», и № УП-4708 от 7 мая 2020 года «О повышении качества обучения в сфере математики и о мерах развития научных исследований; кроме того, настоящее диссертационное исследование в определенной мере служит реализации задач, определенных в постановлениях и других нормативных правовых актах<sup>1</sup>, касающихся данной деятельности.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. "Математика, механика и информатика".

**Степень изученности проблемы.** К числу первых исследований нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных можно отнести статью А.В. Бицадзе и А.А. Самарского. В этой работе были поставлены и исследованы пространственно-нелокальные задачи для определенного класса эллиптических уравнений, которые привели к изучению несамосопряженных спектральных задач. Впоследствии эта сформулированная задача была названа задачей Бицадзе–Самарского. Различным аспектам теории нелокальных краевых задач посвящены работы А.В.Бицадзе, А.А.Самарского, А.А.Дезина, А.Ильина, Е.И.Моисеева, М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, Т.Ш.Кальменова, А.И.Кожанова и многих других ученых.

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работах Ф.И.Франкля при изучении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения. Как близкие по постановке к изучаемым задачам в ограниченных областях для уравнения смешанного типа второго рода решены в работах А.Н. Терехова, С.Н. Глазатова, М.Г. Каратопраклиева и С.З.Джамалова, в частности, поставлены и изучены задачи по однозначной разрешимости некоторых нелокальных краевых задач в весовых пространствах Соболева и в пространстве Лакса. В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными условиями и обратными задачами. Обратные задачи для дифференциальных

---

<sup>1</sup>Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

уравнений в частных производных относятся к некорректным задачам математической физики. Общий подход к решению некорректных задач был сформулирован А.Н. Тихоновым и развит в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, Ю.Е. Аниконова, В. С. И. Кабанихина, К.С. Фаязова и др.

Отметим, что в работе А.Г. Меграбова, К.Б. Сабитова и их учеников методами спектрального анализа изучены обратные задачи с локальными и нелокальными краевыми условиями для модельных уравнений смешанного типа в плоскости по определению правой части. В этих работах доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения. В работах С.З. Джамалова в трехмерных пространствах для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода, второго порядка были изучены некоторые линейные обратные задачи с нелокальными краевыми условиями в ограниченных областях. Далее такие задачи изучены в многомерных пространствах в работах С.З. Джамалова и Р.Р. Ашурова, С.З. Джамалова и С.Г. Пятькова, С.З. Джамалова, Р.Р. Ашурова и А.И. Кожанова в ограниченных областях. В неограниченном параллелепипеде такие задачи для уравнения Трикоми изучены в работах С.З. Джамалова и Х.Ш. Туракулова.

В данной диссертации были предложены и изучены линейные обратные задачи для уравнений смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде.

В целях исследования разрешимости линейных обратных задач для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде в диссертации предложен метод, основанный на сведении обратной задачи к прямым нелокальным краевым задачам для бесконечных нагруженных систем дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода в прямоугольнике.

**Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация.**

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ лаборатории «Дифференциальные уравнения и их приложения» и научным грантом F-FA- 2021-424 “Решение краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных целого и дробного порядков” этой лаборатории в Институте математики АН РУз.

**Целью исследования** является развитие теории нелокальных краевых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго рода в неограниченных областях.

**Задачи исследования:**

доказательство однозначной разрешимости и гладкости обобщенного решения полупериодических и периодических краевых задач в неограниченных областях для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в анизотропных пространствах Соболева;

доказательство однозначной разрешимости и гладкости решения полунелокальных и нелокальных краевых задач в неограниченных областях для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в анизотропных пространствах Соболева;

доказательство корректности обратных задач с полупериодическими и периодическими краевыми условиями в неограниченных областях для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в классе интегрируемых функций;

доказательство корректности обратных задач с полунелокальными и нелокальными краевыми условиями в неограниченных областях для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в классе интегрируемых функций.

**Объектом исследования:** являются трехмерные уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка. Уравнения составного типа с малым параметром, бесконечные нагруженные интегро-дифференциальные уравнения для перечисленных уравнений.

**Предметом исследования** являются прямые и обратные задачи для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченных областях.

**Методы исследования:** в диссертации использованы методы математического и функционального анализа, математической физики, спектральной теории операторов и рядов.

**Научная новизна исследования заключается в следующем:**

доказаны единственность, существование и гладкость обобщённого решения полупериодических и периодических краевых задач в неограниченном параллелепипеде для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в анизотропных пространствах Соболева;

доказаны единственность, существование и гладкость решения полунелокальных и нелокальных краевых задач в неограниченном параллелепипеде для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в анизотропных пространствах Соболева;

доказана корректность обратных задач с полупериодическими и периодическими краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде в анизотропных пространствах Соболева;

доказаны существование и единственность решения обратных задач с полунелокальными и нелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде.

**Практические результаты исследования состоят в следующем:**

усовершенствованы прямые и обратные задачи с периодическими и нелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде. Предложенные методы исследования могут быть использованы при изучении



различных механических, физико-химических, биологических, медицинских, геофизических и сейсмологических процессов.

**Достоверность результатов исследования** подтверждается строгим использованием методов функционального анализа, математической физики, спектральной теории операторов для решения прямых и обратных задач.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.**

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что научные результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы при развитии теории уравнений смешанного типа и спектральной теории несопряженных положительно определенных эллиптических операторов, в частности, при доказательстве единственности, существования и гладкости обобщенных решений нелокальных и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных и уравнения смешанного типа второго порядка.

Практическая значимость результатов основана на возможности их применения при изучении механических, физико-химических, биологических, медицинских, геофизических и сейсмологических процессов. В частности, изучение нелокальных и обратных задач для уравнения смешанного типа второго рода в целях предсказания газодинамики, магнитогидродинамических процессов, близких к скорости звука и выше скорости звука, скорости Альфена, многих других физико-механических процессов и достижения желаемого результата позволяет правильно подобрать параметры процессов.

**Внедрение результатов исследования.** Полученные результаты по прямым и обратным задачам для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде внедрены на практике в следующих проектах:

Исследование однозначной разрешимости полупериодических, периодических краевых задач для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в области, являющейся неограниченным параллелепипедом в анизотропных пространствах Соболева, позволило использовать полученные результаты в совместном проекте «Диффузия волновых процессов» № 124012300245-2 Института Математики им. В.И. Романовского и Института космофизических исследований и распространения радиоволн (Справка № 478 от 2 декабря 2024 г. Института космофизических исследований и распространения радиоволн, Российская Федерация). Применение научных результатов позволило решить нелокальные задачи в уравнениях диффузии дробного порядка и в вырождающихся гиперболических уравнениях;

Методы доказательства единственности и существования решений обратных задач для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде были использованы в зарубежном научном гранте AP09258836 «Разработка численных алгоритмов для дифференциальных математических моделей аномальной диффузии».

Результаты, полученные в зарубежном фундаментальном проекте по этой теме, были использованы при исследовании прямых и обратных задач для уравнения аномальной диффузии. (Справка Международного Казахско-Турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави от 11 ноября 2024 года № 05/3177). Применение научного результата позволило доказать устойчивость разностной схемы для прямой задачи уравнения аномальной диффузии при помощи метода априорных оценок, предложенного в диссертации.

**Апробация результатов исследования.** Результаты исследований обсуждались на 13 научно-практических конференциях, в том числе 9 международных и 4 национальных.

**Опубликованность результатов исследования.** По теме диссертации опубликованы 22 научные работы, в том числе 7 статей в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD), из них 3 статьи опубликованы в зарубежных рецензируемых журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 113 страниц.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

**Во введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в республике, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

**В первой главе диссертации, названной «Прямые задачи для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде»,** изучены некоторые прямые задачи с полупериодическими, периодическими, полунелокальными и нелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

**В первом параграфе этой главы** приводятся некоторые известные факты из теории функционального анализа, в том числе понятия гильбертовых и банаховых пространств, скалярных произведений и нормы в этих пространствах, различные неравенства и леммы из теории краевых задач для уравнений в частных производных, которые необходимы для получения основных результатов.

Для решения в дальнейшем поставленных прямых и обратных задач нам необходимо ввести определения следующих функциональных пространств и некоторые обозначения.

Пусть

$$G = (0,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z); x \in (0,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R\}.$$

Обозначим через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z) e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной  $z$ , функции  $u(x,t,z)$ , а через

$$u(x,t,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,t,\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda$$

обратное преобразование Фурье.

Теперь с помощью преобразования Фурье определим анизотропное пространство  $W_{2,x,t,z}^{l,l,s}(G) \equiv W_2^{l,s}(G)$  Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_2^{l,s}(G)}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|_{W_2^l(Q)}^2 d\lambda, \quad (A)$$

где  $l, s$  – любые положительные целые числа.

Через  $W_2^l(Q)$  (при  $l=0, W_2^0(Q) = L_2(Q)$ ) определяется пространство Соболева со скалярным произведением  $(u, \mathcal{G})_l$  и нормой

$$\|\mathcal{G}\|_l^2 = \|\mathcal{G}\|_{W_2^l(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_Q |D^\alpha \mathcal{G}|^2 dx dt.$$

Здесь  $\alpha$  – мультииндекс,  $D^\alpha$  – обобщённая производная по переменным  $x$  и  $t$ .

Очевидно, что пространство  $W_2^{l,s}(G)$  с нормой (A) является банаховым пространством.

В дальнейшем нам понадобятся следующие оценки, которые следуют из теорем вложений Соболева:

$$\|\hat{f}\|_{C^\alpha(Q)}^2 \leq c_{\alpha+2} \|\hat{f}\|_{W_2^{\alpha+2}(Q)}^2.$$

Здесь через  $c_{\alpha+2} (\alpha=0,1)$  – определяем различные положительные фиксированные числа. Через  $c_1$  обозначим  $c_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(1+\lambda^2)^3} = \frac{3\pi}{4}.$

**Во втором параграфе этой главы** рассматриваются вопросы однозначной разрешимости и гладкости обобщенного решения полупериодических и периодических краевых задач для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

В области

$$G = (0,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z); x \in (0,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R\}$$

рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t,z), \quad (1)$$

здесь  $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$  - оператор Лапласа и пусть  $k(0) = k(T) = 0$ .

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, второго порядка, так как на знак функции  $k(t)$  по переменной  $t$  внутри отрезка  $[0, T]$  не налагается никаких ограничений.

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области  $\bar{Q}$ .

### **Полупериодическая краевая задача.**

Найти обобщённое решение  $u(x, t, z)$  уравнения (1) из анизотропного пространства Соболева  $W_2^{2,3}(G)$ , удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \quad (3)$$

$$\text{Далее будем считать, что } u(x, t, z) \text{ и } u_z(x, t, z) \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

**Определение 1.** Обобщённым решением задачи (1)-(4) будем называть функцию  $u(x, t, z) \in W_2^{2,3}(G)$ , удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области  $G$ , с условиями (2)-(4).

**Теорема 1.** Пусть существует положительное число  $\mu$  и пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1):

$$1) \quad 2a(x, t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \geq \delta_1 > 0, \quad \mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_2 > 0, \quad a_t \leq a_0 < 0, \\ \text{для всех } (x, t) \in \bar{Q},$$

$$2) \quad a(x, 0) = a(x, T), \quad c(x, 0) = c(x, T) \text{ для всех } x \in [0, 1].$$

Тогда для любой функции  $f \in W_2^{1,3}(G)$ , такой, что  $f(x, 0, z) = f(x, T, z)$ , существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(4) из анизотропного пространства Соболева  $W_2^{2,3}(G)$  и для решения задачи (1)-(4) справедливы следующие оценки:

$$I) \quad \|u\|_{W_2^{1,3}(G)}^2 \leq c_1 \|f\|_{W_2^{0,3}(G)}^2.$$

$$II) \quad \|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 \leq c_2 \|f\|_{W_2^{1,3}(G)}^2.$$

В дальнейшем через  $c_i (i=1, 2, 3)$  будем обозначать положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.

### **Гладкость обобщенного решения задачи (1)-(4).**

Теперь обратимся к исследованию гладкости обобщенного решения задачи (1)-(4) в пространствах  $W_2^{m+2,s}(G)$ , где  $m, s$  — целые конечные положительные числа.

Ниже, для простоты, предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно дифференцируемые функции в замкнутой области  $\bar{Q}$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме того, пусть  $D_t^q a|_{t=0} = D_t^q a|_{t=T}, D_t^q c|_{t=0} = D_t^q c|_{t=T}$  для всех  $x \in [0,1]$ . Тогда для любой функции  $f \in W_2^{m+1,s}(Q)$ , такой, что  $D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$  ( $q=0,1,2,3,\dots,m$ ), существует, причем единственное, обобщенное решение задачи (1)-(4) из пространств  $W_2^{m+2,s}(G)$ , где  $m,s$  – целые конечные положительные числа, причем  $s \geq m+3$ ,  $m=0,1,2,3,\dots$ .

Теоремы единственности, существования и гладкости обобщенного решения в анизотропных пространствах Соболева  $W_2^{m+2,s}(G)$  доказаны методами априорных оценок, Галеркина и “ $\varepsilon$ -регуляризации”.

**В этом же параграфе** рассматриваются вопросы корректности периодических краевых задач для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

Аналогично, в анизотропных пространствах Соболева  $W_2^{m+2,s}(G)$ , как в полупериодических краевых задачах, доказаны теоремы единственности, существования и гладкости обобщенного решения. При доказательстве использованы методы априорных оценок, Галеркина и “ $\varepsilon$ -регуляризации”, где  $s,m$  – любые целые конечные положительные числа, такие, что  $s \geq m+3$ ,  $m=0,1,2,3,\dots$

**В третьем параграфе этой главы** рассматриваются вопросы корректности полунелокальных краевых задач для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

#### **Полунелокальная краевая задача.**

Найти обобщённое решение  $u(x,t,z)$  уравнения (1) из пространства  $W_2^{2,3}(G)$ , удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (5)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (6)$$

где  $\gamma$  – некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Далее будем считать, что  $u(x,t,z)$  и  $u_z(x,t,z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ . (7)

**Определение 2.** Обобщённым решением задачи (1), (5)-(7) будем называть функцию  $u(x,t,z) \in W_2^{2,3}(G)$ , удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области  $G$ , с условиями (5)-(7).

**Теорема 3.** Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1) и:

1) пусть  $2a(x,t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \geq \delta_1 > 0$   $\mu c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$  для

всех  $(x,t) \in \bar{Q}$ , где  $\mu = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$  при  $|\gamma| > 1$ ;

2)  $a(x,0) = a(x,T)$ ,  $c(x,0) = c(x,T)$  для всех  $x \in [0,1]$ .

Тогда для любой функции  $f \in W_2^{1,3}(G)$ , такой, что  $\gamma \cdot f(x, 0, z) = f(x, T, z)$ , существует единственное обобщенное решение задачи (1), (5)-(7) из пространства  $W_2^{2,3}(G)$  и для решения задачи (1), (5)-(7) справедливы следующие оценки:

$$\text{I)} \quad \|u\|_{W_2^{1,3}(G)}^2 \leq c_1 \|f\|_{W_2^{0,3}(G)}^2,$$

$$\text{II)} \quad \|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 \leq c_2 \|f\|_{W_2^{1,3}(G)}^2.$$

**Гладкость обобщенного решения задачи (1), (5)-(7).**

Теперь обратимся к исследованию гладкости обобщенного решения задачи (1), (5)-(7) в пространствах  $W_2^{m+2,s}(G)$ , где  $0 \leq m, s$  – целые конечные числа. Ниже, для простоты, предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно дифференцируемые функции в замкнутой области  $\bar{Q}$ .

**Теорема 4.** Пусть выполнены все условия теоремы 3, кроме этого, пусть  $D_t^q a|_{t=0} = D_t^q a|_{t=T}$ ,  $D_t^q c|_{t=0} = D_t^q c|_{t=T}$  для всех  $x \in [0, 1]$ . Тогда для любой функции  $f \in W_2^{m+1,s}(G)$ , такой, что  $\gamma \cdot D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$  ( $q = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ ), существует, причем единственное, обобщенное решение задачи (1), (5)-(7) из пространств  $W_2^{m+2,s}(G)$ , где  $s \geq m + 3$ ;  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Теоремы единственности, существования и гладкости обобщенного решения из анизотропного пространства Соболева  $W_2^{m+2,s}(G)$  (где  $m, s$  – целые конечные положительные числа) доказаны методами априорных оценок, Галеркина и “ $\varepsilon$ -регуляризации”.

**В четвертом параграфе этой главы** рассматриваются вопросы корректности нелокальных краевых задач для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

Аналогично, как в третьем параграфе, доказана однозначная разрешимость обобщенного решения нелокальных краевых задач в анизотропных пространствах Соболева  $W_2^{m+2,s}(G)$ , где  $s, m$  – любые целые конечные положительные числа, такие, что  $s \geq m + 3$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

**Во второй главе диссертации, названной «Обратные задачи с периодическими краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде»,** изучена корректность по Адамару линейных обратных задач с полупериодическими и периодическими краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

**В первом параграфе второй главы** доказывается однозначная разрешимость линейной обратной задачи с полупериодическими краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

В области

$$G = (0,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z); x \in (0,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа второго рода:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x,t)u = \psi(x,t,z), \quad (8)$$

где  $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$  - оператор Лапласа, и пусть  $k(0) = k(T) = 0$ . Здесь  $\psi(x,t,z) = g(x,t,z) + h(x,t) \cdot f(x,t,z)$ ,  $g(x,t,z)$  и  $f(x,t,z)$  - заданные функции, а функция  $h(x,t)$  подлежит определению.

### Полупериодическая линейная обратная задача.

Найти функции  $\{u, h\}$  из  $U = \{u, h : u \in W_2^{2,3}(G), h \in W_2^2(Q)\}$  класса, удовлетворяющие уравнению (8) в области  $G$ , такие, что функция  $u(x,t,z)$  удовлетворяет следующим полупериодическим краевым условиям

$$u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (9)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad (10)$$

и условиям на бесконечности  $u(x,t,z) \rightarrow 0$  и  $u_z(x,t,z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ . (11)

Кроме того, решение задачи (8)-(11) удовлетворяет дополнительному условию

$$u(x,t, \ell_0) = \varphi_0(x,t), \text{ где } \ell_0 \in R \quad (12)$$

и с функций  $h(x,t)$  принадлежит классу  $U$ , где  $W_2^{2,3}(G)$ -пространство, определенное в первом параграфе главы 1.

**Определение 3.** Обобщённым решением задачи (8), (9)-(12) будем называть функцию  $u(x,t,z) \in U$ , удовлетворяющую уравнению (8) почти всюду в области  $G$ , с условиями (9)-(12).

Пусть все коэффициенты уравнения (8) достаточно гладкие функции в области  $\bar{Q}$  и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов правой части уравнения (8) и заданной функции  $\varphi_0(x,t)$ .

### Условия 1:

**Нелокальные условия:**  $a(x,0) = a(x,T), c(x,0) = c(x,T),$

$$g(x,0,z) = g(x,T,z), f(x,0,z) = f(x,T,z),$$

**Условия гладкости:**  $f(x,t, \ell_0) = f_0(x,t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}), g(x,t, \ell_0) = g_0(x,t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}),$

$$|f_0(x,t)| \geq \eta > 0, f \in W_2^{3,3}(G), g \in W_2^{1,3}(G).$$

Кроме того, пусть выполняются  $2a(x,t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \geq B_1 > 0,$   
 $\mu c(x,t) - c_t(x,t) \geq b_2 > 0, a_t(x,t) \leq a_0 < 0$  для всех  $(x,t) \in \bar{Q}$  и некоторого положительного числа  $\mu$ .

### Условия 2:

$$\varphi_0(x,t) \in W_2^3(Q); D_t^q \varphi_0|_{t=0} = D_t^q \varphi_0|_{t=T}, q=0,1,2, \varphi_0|_{x=0} = \varphi_0|_{x=1} = 0.$$

**Теорема 5.** Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнения (8), кроме того, пусть существует положительное

число  $\sigma$  такое, что для него имеют место оценки  $b_0 - 14\sigma^{-1} \geq \delta > 0$ ,  $q = M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$  (здесь  $b_0 = \min\{B_1, b_2\}$   $M = 15\pi c_2 c_3 \sigma \mu^2 \delta^{-1} \eta^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})}^2$  - положительное число,  $c_i (i = 2, 3)$  определены выше). Тогда существует единственное решение линейной обратной задачи (8), (9)-(12) из указанного класса  $U$ .

Теорема доказывается методами « $\varepsilon$ -регуляризации», априорных оценок, последовательных приближений и сжимающихся отображений с применением преобразования Фурье.

**Во втором параграфе второй главы**, как и в первом параграфе второй главы, аналогично доказывается однозначная разрешимость линейной обратной задачи с периодическими краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

**В третьей главе диссертации**, названной «Обратные задачи с нелокальными условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде», изучены корректность по Адамару линейных обратных задач с полунелокальными и нелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

**В первом параграфе третьей главы** доказывается однозначная разрешимость линейной обратной задачи с полунелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

**Полунелокальная линейная обратная задача.** Найти функции  $\{u(x, t, z), h(x, t)\}$ , удовлетворяющие уравнению (8) в области  $G$ , такие, что функция  $u(x, t, z)$  удовлетворяет следующим полунелокальным краевым условиям

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (13)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (14)$$

где  $\gamma$  – некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже;

условиям на бесконечности  $u(x, t, z) \rightarrow 0$ ,  $u_z(x, t, z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , (15) с дополнительным условием

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t), \text{ где } \ell_0 \in R, \quad (16)$$

и с функцией  $h(x, t)$ , принадлежащей классу

$$U = \left\{ \{u, h\} \mid u \in W_2^{2,3}(G), h \in W_2^2(Q) \right\}.$$

**Определение 4.** Обобщённым решением задачи (8), (13)-(16) будем называть функцию  $u(x, t, z) \in U$ , удовлетворяющую уравнению (8) почти всюду в области  $G$ , с условиями (13)-(16).



Пусть все коэффициенты уравнения (8) достаточно гладкие функции в области  $\bar{Q}$  и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов и правой части уравнения (8) и заданной функции  $\varphi_0(x, t)$ .

**Условия 3:**

**Нелокальные условия:**  $a(x, 0) = a(x, T), c(x, 0) = c(x, T),$

$$\gamma \cdot g(x, 0, z) = g(x, T, z), \quad \gamma \cdot f(x, 0, z) = f(x, T, z);$$

**Условия гладкости:**  $f(x, t, \ell_0) = f_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}), g(x, t, \ell_0) = g_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}),$

$$|f_0(x, t)| \geq \rho > 0, f \in W_2^{3,3}(G), g \in W_2^{1,3}(G).$$

Кроме того, пусть  $2a(x, t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \geq B_1 > 0, \mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq b_2 > 0$

для всех  $(x, t) \in \bar{Q}$ , где  $\mu = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0, |\gamma| > 1.$

**Условия 4:**

$$\varphi_0(x, t) \in W_2^3(Q), \quad \gamma D_t^q \varphi_0|_{t=0} = D_t^q \varphi_0|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2, \quad \varphi_0|_{x=0} = \varphi_0|_{x=1} = 0.$$

**Теорема 6.** Пусть выполнены вышеуказанные условия 3 и 4 для коэффициентов уравнения (8); кроме того, пусть существует положительное число  $\sigma$ , такое, что для него имеют место оценки  $b_0 - 14\sigma^{-1} \geq \delta > 0$ ,  $q = M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$  (здесь  $b_0 = \min\{B_1, \mu, b_2\}$   $M = 15\pi c_2 c_3 \sigma \delta^{-1} \rho^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})}^2$  - положительное постоянное число, числа  $c_i (i = 2, 3)$  определены выше). Тогда существует единственное решение линейной обратной задачи (8), (13)-(16) из указанного класса  $U = \{ \{u, h\} | u \in W_2^{2,3}(G), h \in W_2^2(Q) \}.$

Теорема доказывается методами “ $\varepsilon$ -регуляризации”, априорных оценок, последовательности приближений и сжимающихся отображений, с применением преобразования Фурье.

**Во втором параграфе третьей главы** аналогично доказывается однозначная разрешимость линейной обратной задачи с нелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена развитию теории и общих методов решения периодических и нелокальных краевых задач для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка и применению к изучению вопросов корректности по Адамару обратных задач для уравнения смешанного типа второго рода и нагруженных интегро-дифференциальных уравнений в неограниченном параллелепипеде.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследования:

1. Для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде доказаны теоремы о единственности, существовании и гладкости решения полупериодических, периодических, полунелокальных и нелокальных краевых задач в анизотропных пространствах Соболева  $W_2^{m+2,s}(G)$ , где  $m, s$  – целые конечные положительные числа, причем  $s \geq m + 3$ .

2. В пространстве интегрируемых функций для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода доказаны теоремы единственности и существования решения обратных задач с полупериодическими и периодическими краевыми условиями в неограниченном параллелепипеде.

3. Доказаны теоремы о единственности и существовании решения обратных задач с полунелокальными и нелокальными краевыми условиями в неограниченном параллелепипеде для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в пространстве интегрируемых функций.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в дальнейшем развитии теории краевых задач для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в бесконечных призматических областях.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES  
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED  
AFTER V.I.ROMANOVSKIY**

---

**INSTITUTE OF MATHEMATICS**

**SIPATDINOVA BIYBINAZ KENESBAYEVNA**

**DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR THE THREE-DIMENSIONAL  
MIXED TYPE EQUATION OF THE SECOND KIND, SECOND ORDER IN  
AN UNBOUNDED PARALLELEPIPED**

**01.01.02-Differential equations and mathematical physics**

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON  
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**Tashkent-2025**

**The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number № B2024.1.PhD/FM1005.**

Dissertation has been prepared at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website <http://kengash.mathinst.uz> and in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal <http://www.ziynet.uz>.

**Scientific supervisor:**

**Dzhamalov Sirojiddin Zuxriddinovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**Official opponents:**

**Durdiev Durdimurod Kalandarovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**Zunnunov Rahimjon Temirbekovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent

**Leading organization:**

**Tashkent National University**

Defense will take place «11» February 2025 at 16:00 the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail : [uzbmath@umail.uz](mailto:uzbmath@umail.uz), Website : [www.mathinst.uz](http://www.mathinst.uz)).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 197 ) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «24» January 2025 year  
(mailing report № 2 on «24» January 2025 year)



**U.A. Roziqov**

Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Academician

**J.K. Adashev**

Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Senior researcher

**A.A. Azamov**

Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Academician

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**Purpose of the research.** The aim of this dissertation work is to develop the theory of nonlocal boundary value and inverse problems for the three-dimensional mixed type equation of the second kind, second order in unbounded domains.

**The object of the research:** the three-dimensional mixed type equation of the second kind, third-order equations with a small parameter, loaded integro-differential equations for the above equations.

**The scientific novelty of the research:**

the uniqueness, existence and smoothness of the solution of semi-periodic and periodic boundary value problems in an unbounded parallelepiped for the three-dimensional mixed type equation of the second kind, second order in anisotropic Sobolev spaces are proved;

the uniqueness, existence and smoothness of the solution of semi-nonlocal and nonlocal boundary value problems in an unbounded parallelepiped for the three-dimensional mixed type equation of the second kind, second order in anisotropic Sobolev spaces are proved;

the correctness of inverse problems with semi-periodic and periodic boundary conditions for a three-dimensional mixed type equation of the second kind, second order in an unbounded parallelepiped in anisotropic Sobolev spaces is proved;

the existence and uniqueness of the solution of inverse problems with semi-nonlocal and nonlocal boundary conditions for the three-dimensional mixed type equation of the second kind, second order in an unbounded parallelepiped are proved.

**Implementation of the research results:**

The results obtained on direct and inverse problems for the three-dimensional mixed type equation of the second kind in an unbounded parallelepiped form domain were implemented into practice in the following projects:

The study of the unique solvability of semiperiodic, periodic boundary value problems for the three-dimensional mixed-type equation of the second kind, second order in an unbounded parallelepiped domain in Sobolev spaces made it possible to use the obtained results in the joint project "Diffusion of Wave Processes" №. 124012300245-2 of the Romanovsky Institute of Mathematics and the Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation (Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, reference № 478 dated December 2, 2024, Russian Federation). The application of scientific results made it possible to solve nonlocal problems in fractional-order diffusion equations and in degenerate hyperbolic equations;

methods for proving the uniqueness and existence of solutions to inverse problems for the three-dimensional mixed-type equation of the second kind, second order in an unbounded parallelepiped were applied in the international scientific grant AP09258836 "Development of numerical algorithms for differential mathematical models of anomalous diffusion". The results obtained in a foreign fundamental project on this topic were used in the study of direct and inverse for the anomalous diffusion equation. (Reference International Kazakh-

Turkish University named after Hodja Ahmed Yasawi dated November 11, 2024, № 05/3177). The application of the scientific result made it possible to prove the stability of the difference scheme for the direct problem of the anomalous diffusion equation using the method of a priori estimates proposed in the dissertation.

**The structure and volume of the dissertation.** The dissertation consists of an introduction, three chapters divided into nine paragraphs, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 113 pages.

**E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI**  
**СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**  
**LIST OF PUBLISHED WORKS**

**I bo'lim (Часть I; Part I)**

1. S.Z.Dzhamalov, B.K.Sipatdinova. On a semi-nonlocal boundary value problem for a three-dimensional mixed-type equation of the second kind in an unbounded parallelepiped // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Volume. 44, No. 3, P. 1145–1152. (3. Scopus, IF=0,42).

2. S.Z.Dzhamalov, B.K.Sipatdinova. On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional mixed-type equation of the second kind in an unbounded parallelepiped. // AIP CP, Bukhara 2022. AIP Conf. Proc. 3004, 040003 (2024). (3. Scopus IF=0,152).

3. S.Z.Dzhamalov, B.K.Sipatdinova On one linear inverse problem with nonlocal boundary conditions for the second kind, second order mixed type equation in an unbounded parallelepiped. // Uzbek Mathematical Journal 2024, Volume 68, Issue 3, P.24-36. (3. Scopus 01.00.00; №6).

4. С.З.Джамалов, Б.К.Сипатдинова О линейной обратной задаче с нелокальным краевым условием периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде // Бюллетень Института математики. 2024. 7(1), С.65-71. (01.00.00; №17)

5. Б.К.Сипатдинова Об одной периодической краевой условии для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде. // Научный вестник БухГУ. 2024. №3, С.54-73. (01.00.00; №3).

6. С.З.Джамалов, Б.К.Сипатдинова О линейной обратной задаче с периодическим краевым условием для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде. // Вестник НУУз, 2024 №2.1.1 С.130-143. (01.00.00; №8).

7. Б.К.Сипатдинова Об одной полупериодической краевой задаче для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде. // «Вестник молодых ученых» АН РУз, 2024. 1(4) С.38-48.

**II bo'lim (Часть II; Part II)**

1. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К. Об одной нелокальной краевой задаче периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде. // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. №1. С. 58-68

2. Djamalov S.Z. Sipatdinova B.K. Uch o'lchovli ikkinchi tartibli tipi buziladigan giperbola-parabolik tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy masala haqida. // O'zFA QQ "Axborotnomasi" jurnali, Nukus, 2022. №4(269). 5-12-b.

3. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К., Д.Исломова. Об однозначной разрешимости одной полупериодической краевой задаче для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде. // «Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари» мавзусида халқаро илмий-амалий конференция. Бухоро ш. 11-12 май 2022 йил. бет 199-200.

4. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К. Об одной полунелокальной краевой задаче для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде. // II Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование». г Улан-Удэ, 22-23 август 2022 г. С. 31-32.

5. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К. Об одной линейной обратной задачи для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода с полунелокальной краевой условие в призматической неограниченной области. // Международная конференция «Актуальные задачи математики, механики и информатики». г Караганда, 8-9 сентябрь 2022 г. С. 110-111.

6. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К., Д.Исломова. Об одной периодической краевой задаче для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде. // Научной конференции «Операторные алгебры, неассоциативные структуры и смежные проблемы». г Тошкент, 14-15 сентябрь 2022 г. ст 219-220.

7. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К. Об одной линейной обратной задаче для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка с нелокальным краевым условием в неограниченном параллелепипеде. // Международную научную конференцию «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», г Тошкент, 6-8 октябрь, 2022 г. С 88-90.

8. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К., Д.Исламова. Г.Мирзаева. Об одной линейной обратной задаче для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода с нелокальным краевым условием в неограниченном параллелепипеде. // International conference «Алгебра ва анализнинг долзарб масалалари» Республика илмий-амалий анжумани, г Термиз, 18-19 ноябрь 2022 йил. бет 99-101.

9. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К., К.А.Мамбетсапаев. Об одной линейной обратной задаче для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка с полупериодической краевой условия в неограниченном параллелепипеде // Международную научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий», г Нукус, 2-3 май, 2023 г. ст 256-258.

10. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К., Б.Б. Халхаджаев. Об одной линейной обратной задаче для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка с полунелокальной краевой условия периодического типа в неограниченном параллелепипеде. // Международную



научную конференцию «Актуальные проблемы математики и образования», г. Ош, 12-13 май, 2023 г. С 23-27.

11. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К. О нелокальной краевой задаче для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде. // Международной научной конференции «уфимская осенняя математическая школа – 2023», г. Уфа, 4-8 октября, 2023 г. С. 118-120.

12. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К., Б.Б. Халхаджаев. The linear inverse problem with a non-local boundary condition of periodic type for a mixed type equation of the second kind of the second order in an unbounded parallelepiped. // VII Всемирного Конгресса математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023), г.Туркестан, Казахстан, 20-23 сентября, 2023 г. С 291-293.

13. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К. О линейной обратной задаче с нелокальной краевой условиями для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде. // Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», г.Ташкент, Узбекистан, 23-25 ноября, 2023 г. С. 58-60.

14. С.З.Джамалов, Б.К.Сипатдинова. Об одной нелокальной краевой задаче периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде // VII Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», г.Нальчик, Кабардино-Балгарская Республика, 4-8 декабря, 2023 г. С. 96-98.

15. Сипатдинова Б.К. Периодическая краевая задача для уравнения смешанного типа второго рода. // «Замонавий математиканинг долзарб муаммолари ва татбиқлари» ёш олимларнинг илмий конференцияси Тошкент ш. 14-15 март, 2024 йил. 242-244 бет .

16. Djamalov S.Z. Sipatdinova B.K. Chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun yarimdavriy chegaraviy masala. // «Amaliy matematika, matematik modellash va informatikaning dolzarb muammolari» respublika ilmiy konferensiya. Nukus shahar, 2024 yil 24-25-may, 99-100 b.

17. Djamalov S.Z. Sipatdinova B.K. Chegaralanmagan parallelepiped ko'rinishidagi sohada ikkinchi tur, ikkinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun davriy chegaraviy shartli chiziqli teskari masala. // «Amaliy matematikaning zamonaviy muammolari va istiqvullari» respublika ilmiy-amaliy konferensiya. Qarshi shahar, 2024 yil 24-25-may, 444-446 b.

18. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К. Линейная обратная задача для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде // Международной научно - практической конференции «современные проблемы математики и её преподавания». Худжанд, Таджикистан, 21-22 июня 2024г. С.238-240

19. Джамалов С.З., Сипатдинова Б.К. Об одной линейной обратной задаче с полупериодическими краевыми условиями для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде. // Суздаль 28 июня-3 июля 2024г. С.152-154.

Avtoreferat «O‘zbekiston matematika jurnali» tahririyatida 2024-yil 23-dekabrda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

**Bosmaxona litsenziyasi:**



**9338**

Bichimi: 84x60  $\frac{1}{16}$ . «Times New Roman» garniturası.  
Raqamli bosma usulda bosildi.  
Shartli bosma tabog‘i: 3. Adadi 100 dona. Buyurtma № 7/25.

Guvohnoma № 851684.  
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.  
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.