**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI**

**JAVLIYEV SARVAR KURBONMIRATOVICH**

# HISOBLANUVCHI AJRATILUVCHI EKVIVALENTLIKLAR USTIDA ALGEBRAIK TIZIMLAR

**01.01.06 – Algebra**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

**Toshkent – 2024**

**UDK: 510.5+510.6**

**Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences**

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

---

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI**

**JAVLIYEV SARVAR KURBONMIRATOVICH**

# HISOBLANUVCHI AJRATILUVCHI EKVIVALENTLIKLAR USTIDA ALGEBRAIK TIZIMLAR

**01.01.06 – Algebra**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

**Toshkent – 2024**

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attes komissiyasida B2023.1.PhD/FM842 raqam bilan ro'yxatga olingan.**

Dissertatsiya Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz(rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://kengash.mathinst.uz) va "ZiyoNet" Axborot ta'lim portalida (http://www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

| | |
|---|---|
| **Ilmiy rahbar:** | **Kasimov Nadimulla Xabibullayevich**<br>fizika-matematika fanlari doktori, professor |
| **Rasmiy opponentlar:** | **Morozov Andrey Sergeyevich**<br>fizika-matematika fanlari doktori, professor |
| | **Xudoyberdiyev Abror Xakimovich**<br>fizika-matematika fanlari doktori, professor |
| **Yetakchi tashkilot:** | **Qozon federal universiteti (Rossiya)** |

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil "06" fevral soat 17:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100174,Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika Institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (177-raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40.)

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil "19" yanvar kuni tarqatildi.
(2024 yil "19" yanvardagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

**U.A.Rozikov**
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi,f.-m.f.d., akademik

**J.K.Adashev**
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

**A.R.Hayotov**
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi o'rinbosari,f.-m.f.d., professor

## KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

**Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurligi.** Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy hamda amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda hisoblanuvchi ajratiluvchi ekvivalentliklarni xossalarini o‘rganishni taqozo etmoqda. Ajratiluvchi nomerlash tushunchasini, o‘z algoritmlari bilan berilgan murakkab tizim tushunchasining matematik ta’riflashlaridan biri sifatida talqin qilish mumkin. Shu bilan birga, ajralitilish qobiliyati turli xil elementlarni algoritmik jihatdan aniqlangan mos atroflari bilan ajratish orqali tanib olish imkonini beradi. N.X.Kasimov nomerlangan universal algebrani hisoblanuvchi bo‘lishi uning negativ algebralar bilan approksimatsiyalanishiga teng kuchli bo‘ladi, ya’ni hisoblanuvchi ajratiluvchi algebralarning strukturaviy nazariyasini qurishda negativ algebralardan foydalanilishini isbotladi. Bundan tashqari, N.X.Kasimov negativ approksimatsiyalanuvchi algebralarni hisoblanuvchi ajratiluvchi kriteriyasi ixtiyoriy algebraik tizimlar uchun ham amal qilishini ko‘rsatdi; bunda munosabatning ixtiyoriy yolg‘onlik nuqtasi uchun rostlik sohasi bilan kesishmaydigan $\nu$-hisoblanuvchi atrofi mavjud bo‘lsa, bu munosabat $\nu$ tasvirlanishda hisoblanuvchi ajratiluvchi deyiladi.

Hozirgi vaqtda chiziqli tartiblangan to‘plam tushunchasi matematikaning fundamental obyekti bo‘lganligi uchun, ularning algoritmik xossalarini o‘rganishga tabiiy qiziqish uyg‘otadi. Chiziqli tartiblarni ko‘pgina tatbiqlarida, mazkur tartiblarga mos keladigan muayyan amallar tizimlari bilan birgalikda ko‘rib chiqiladi. Xususan, endomorfizmli chiziqli tartiblar amallar aniqlangan chiziqli tartiblar orasida eng soddasidir. Xrestomatik misol sifatida natural sonlar to‘plamidagi tabiiy tartib va keyingisini mos qo‘yish funksiyasi, ya‘ni $S_{\leq} = \langle \omega; \leq, s \rangle$ tizimni, bu yerda $\leq$ natural sonlar to‘plamidagi tartib va $s(n) = n+1$, qarasak bo‘ladi. Presburger arifmetikasi $\langle \omega; s, + \rangle$ va Peano arifmetikasi $\langle \omega; s, +, \times \rangle$ standard modellarida tartib munosabati aniq kiritilmagan, lekin boshqa aksiomatikalashtirishlarda taklif qilinadi. Aynan endomorfizmli tartibning mavjudligi pozitiv, shuningdek, negativ algoritmik tasvirlanishlar sinflarida arifmetika standart modelining algoritmik tasvirlanishini yagonaligini (hisoblanuvchi izomorfizm aniqligida) ko‘rsatish imkonini beradi.

Mamlakatimizda so‘nggi yillarda fundamental ilmiy va amaliy tadbiqlarga ega bo‘lgan dolzarb yo‘nalishlariga qiziqish ortib boradi. Nazariy informatika va abstrakt hisoblash nazariyasida tadqiqotning asosiy obyektlaridan biri pozitiv tizimlar hisoblansa ham negativ tasvirlanishlar pozitiv tasvirlanishdan kam bo‘lmagan ahamiyatga ega. Boshqa tomondan, so‘zlarning tengligining hal etilmaydigan muammosi bo‘lgan har qanday cheklangan tizim (masalan, gruppa) pozitiv, lekin negativ tizim emas. Shunga qaramay, negativ tizimlar pozitiv tizimlar soyasida qolmoqda. “Algoritmlar nazariyasi” va “Hisoblanuvchanlik nazariyasi” fanlarining ustuvor yo‘nalishlarida jahon standartlari darajasida samarali signaturaning negativ algebraik tizimini tadqiq qilish ilmiy tadqiqotning asosiy maqsad va yo‘nalishlari sifatida belgilangan[1].

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha xarakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-sonli “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-sonli “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

**Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi.** Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

**Muammoning o‘rganilganlik darajasi.** Hisoblanuvchi ajratiladigan algebralar hisoblanuvchi algebralar nazariyasida ham, nazariy informatika fanida ham muhim rol o‘ynaydi. A.I.Maltsev o‘zining ilmiy ishlarida faqat chekli indeksli nolga teng bo‘lmagan kongruensiyaga ega bo‘lgan chekli hosil qilingan ixtiyoriy pozitiv algebralari nomerlanishini hisoblanuvchi ekanligini ko‘rsatdi va umumiy holatda (chekli hosil qilinganlik shartisiz) ushbu tasdiqning to‘g‘riligi haqidagi savolni qo‘ydi. Ma‘lum bo‘lishicha, hisoblanuvchi ajratiluvchi algebralar sinfida inkor qiladigan misollar mavjud. Bundan tashqari, ixtiyoriy sanoqli kongruensiyalar panjaralik pozitiv nomerlangan algebralarning (xususan, Nyoter bo‘lganda) hisoblanuvchi ajratuvchi bo‘ladi. Yana bir misol, abstrakt ma’lumotlar turlari nazariyasidagi Bergstra-Takker muammosi, har qanday chekli hosil qilingan pozitiv algebra uchun chekli bazalangan ko‘pxilliklarni boshlang‘ich mavjudligi haqidagi muammodir. Ushbu muammoning negativ yechimi xarakteristik transversali immun bo‘lgan hisoblanuvchi ajratiluvchi pozitiv nomerlashga ega bo‘lgan chekli yaratilgan algebraning tegishli misolini taqdim etish orqali olingan.

Nomerlangan algebralar hisoblanuvchi bo‘lishi uchun uning negativ algebralar bilan approksimatsiyalanishi zarur va yetarlidir, ya‘ni hisoblanuvchi ajratiluvchi algebralarning alohida xususiyati, boshqa raqamlangan tizimlardan farqli o‘laroq, ularning negativ algebralar bilan approksimatsiyalanishi uchun negativ algebralar hisoblanuvchi ajratiluvchi algebralar orasidagi muhim o‘rin tutadi.

Algebra $S=\langle \omega ; s\rangle$ (tartib munosabatisiz) hisoblanuvchi bo‘lmagan negativ nomerlashga ega bo‘lsa ham, pozitiv tasvirlanishlarda turg‘un hisoblanuvchi bo‘ladi. Ma‘lumki, pozitiv tasvirlanuvchi, lekin hisoblanuvchi tasvirlanishga ega bo‘lmagan chiziqli tartibga Feynerning klassik mavjud. Osongina ko‘rsatish

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi «O‘zbekiston Respublikasi fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tatqiqot muasasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to’g’risida»gi 292-sonli qarori

mumkinki, ixtiyoriy negativ tasvirlanadigan chiziqli tartiblar hisoblanuvchi tasvirlanishga ega bo‘ladi. Bundan endomorfizmli negativ tasvirlanadigan chiziqli tartiblar hisoblanuvchi tasvirlanishga ega ekanligi haqidagi prinsipial savol tug‘iladi. Birinchi bobda negativ tasvirlanadigan ikkita endomorfizmli chiziqli tartiblar pozitiv tasvirlanishga ega emasligi ko‘rsatilgan, lekin negativ tasvirlanadigan bitta endomorfizmli chiziqli tartiblar pozitiv tasvirlanishga ega ekanligi haqidagi savol hozirgacha yechilmagan.

**Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta‘lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi.** Dissertatsiya ishi Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetining ilmiy-tadqiqot rejalariga muvofiq amalga oshirildi.

**Tadqiqotning maqsadi** hisoblanuvchi endomorfizmli chiziqli tartiblarning strukturaviy xossalari va ularning tasvirlanish darajalari nazariyasi doirasida negativ tasvirlanishlarini aniqlash, shuningdek, chekli universal algebralar va ularning hisoblanuvchi ajratiluvchi tasvirlanishlari orasidagi bog‘liqlikni o‘rnatishdan iborat.

**Tadqiqotning vazifalari:**

hisoblanuvchi avtomorfizmlarining yarim gruppasini gruppa bo‘lishini isbotlash yoki gruppa bo‘lmasligiga misol qurish;

pozitiv tasvirlanishga ega bo‘lmagan negativ tasvirlarga ega bo‘lgan endomorfizmli chiziqli tartiblarni tadqiq qilish;

endomorfizmli chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanish darajalarining tuzilishini tavsiflash;

turli cheklilik shartlariga ega bo‘lgan, jumladan, chekli approksimatsiyalanuvchi, chekli va lokal chekli ajratiluvchi, lokal chekli universal algebralarning hisoblanuvchi ajratiluvchi algoritmik tasvirlanishlarini tadqiq qilish;

nomerlangan klassik tizimlarni (gruppa, xalqa, panjara, yarimgruppa) algoritmik xossalari va ularni ekvivalentlar ustidagi tasvirlanishlarini tadqiq qilish.

**Tadqiqotning obyekti.** Unar algebralar, endomorfizmli negativ chiziqli tartiblar, ularning tasvirlanish darajalari, hisoblanuvchi ajratiluvchi algebralar, shuningdek, klassik algebraik tizimlarning algoritmik tasvirlari.

**Tadqiqotning predmeti.** Hisoblanuvchanlik nazariyasi, algoritmlar nazariyasi, universal algebralar nazariyasi.

**Tadqiqotning usullari.** Dissertatsiya ishida matematik mantiq, universal algebralar, modellar nazariyasi va algoritmlar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

**Tadqiqotning ilmiy yangiligi** quyidagilardan iborat:

hisoblanuvchi avtomorfizmlar yarim gruppasi gruppa bo‘lmaydigan, negativ unar algebraga oid misol keltirilgan;

endomorfizmli chiziqli tartiblarni taqqoslanmaydigan, minimal va maksimal negativ tasvirlanish darajalari topilgan hamda ularni cheksiz antizanjir tashkil qilishi isbotlangan;

Yu.L.Yershov ma’nosida nomerlashlarning keltirilishi va chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanish darajalari o‘rtasida anti-izomorfizm qurilgan;

tekis hisoblanuvchi ajratiluvchi ekvivalentlik uchun uning xarakteristik transversalining immunligi ushbu ekvivalentlik ustida tasvirlanuvchi barcha algebralarning chekli approksimatsiyalanuvchiligi isbotlangan;

tekis m-ekvivalentlik tushunchasi kiritilgan va har qanday gruppani algoritmik tasvirlashining yadrosi tekis m-ekvivalent ekanligi isbotlangan hamda gruppaning ixtiyoriy nomerlashi qisman to‘liq bo‘lmasligi ko‘rsatilgan.

**Tadqiqotning amaliy natijasi.** Dissertatsiya ishi nazariy xarakterga ega. Uning natijalarini ham modellar nazariyasi, universal algebralar va algoritmlar nazariyasida, ham Theoritical Computer Science qo‘llash mumkin. Xususan, chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanish darajalaridan universal va quyida joylashgan (nomerlashning keltirilishiga nisbatan) tartiblangan ma’lumotlar strukturalarini algoritmik negativ tasvirlarini qurish uchun ishlatilishi mumkin.

**Tadqiqot natijalarining ishonchliligi** matematik mantiq, algebra, to‘plamlar nazariyasi usullarini qo‘llash, shuningdek, matematik fikrlashning qat‘iyligi bilan izohlanadi.

**Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.** Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ishida olingan ilmiy natijalar ham hisoblanuvchi algebralar nazariyasi, ham informatika fanining bir qator masalalarini yechishda foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati pozitiv tasvirlanishga ega bo‘lmagan hisoblanuvchi endomorfizmli negativ chiziqli tartiblarni algoritmik xossalari va ularning negativ tasvirlanish darajalarini qurish orasidagi bog‘liqlikni o‘rnatish, shuningdek, algebralarni algoritmik masalalarini yechishda zarur bo‘ladigan ekvivalentlik ustidan tasvirlanadigan lokal chekli ajratiluvchi va chekli approksimatsiyalanuvchi algebralarning algoritmik kriteriyalarini topishda foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

**Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi.** Hisoblanuvchi ajratiluvchi ekvivalentliklar ustida algebraik tizimlar bo‘yicha olingangan natijalar asosida:

chiziqli tartiblarni tasvirlanish darajalaridan BV-M-F4-004 raqamli “Funksional jadvallar algebrasi asosi murakkab tizimlar boshqarishini algoritmlash prinsiplarini ishlab chiqish” mavzudagi fundamental loyihada murakkab tizimlarning monoton bul funksiyalari tizimini yechishda foydalanildi (O‘zbekiston Milliy universitetining 2023 yil 17 noyabrdagi 04/11-7976-sonli ma‘lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi umumiy xossalarga ega bo‘lgan kiruvchi parametrlarni sinflarga ajratish imkonini bergan;

klassik tizimlar nomerlashlarining algoritmik xossalari, endomorfizmli chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanish darajalari strukturasi va ularning ekvivalentliklar ustida tasvirlanishidan 22-21-20024 raqamli “Yechilmaslikning darajalarining axborot ekspressivligi” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida endomorfizmli chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanish darajalarini aniqlashda foydalanilgan (Volga federal okrugi matematik ilmiy-ta’lim markazining 2023 yil 14 noyabrdagi NP-01/11-sonli ma’lumotnomasi, Rossiya federatsiyasi). Ilmiy natijalarning qo’llanilishi negativ tasvirlanadigan endomorfizmli chiziqli tartiblarni taqqoslanmaydigan darajalarini topishni imkonini bergan.

**Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi.** Dissertatsiyaning asosiy mazmuni

4 ta xalqaro va 2 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

**Tadqiqot natijalarining e‘lon qilinganligi.** Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 12 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta ilmiy maqola, jumladan, 2 tasi xorijiy va 4 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

**Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi.** Dissertatsiya kirish qismi, to‘rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 98 betni tashkil etgan.

## DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

**Kirish** qismda dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan bo‘lib tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi va nashr etilgan ishlar, shuningdek, dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar mavjud.

**“Hisoblanuvchi endomorfizmli negativ chiziqli tartiblar”** nomli dissertatsiyaning birinchi bobida zarur tushunchalar va yordamchi natijalar keltirilgan. Ba‘zi tabiiy sinflarda pozitiv va negativ chiziqli tartiblangan unar algebralarning hisoblanuvchi ekanligi isbotlangan hamda hisoblanuvchi avtomorfizmlarning yarim gruppasi gruppa bo‘lmaydigan negativ unar mavjudligi isbotlangan.

Aytaylik, $\langle M;\Sigma\rangle$ – algebraik tizim va $\Sigma$ uning effektiv signaturasi bo‘lsin.

**1-ta‘rif.** Agar $\nu$ natural sonlar to‘plami $\omega$ ni $M$ to‘plamga akslantirishi uchun $\Sigma$-operatsiyalar tizimni ifodalaydigan $F$ hisoblanuvchi funksiyalarning hisoblanuvchi oilasi mavjud bo‘lsa, ya’ni ixtiyoriy $\sigma\in\Sigma$ uchun effektiv tarzda $f\in F$ hisoblanuvchi funksiya topilib, bunda $\sigma\nu\bar{x}=\nu f\bar{x}$ o‘rinli bo‘lsa, $\nu$ akslantirishga $M$ tizimining algoritmik tasviri (yoki nomerlashi) deyiladi.

$\eta$ ekvivalentlik $\omega$ da aniqlangan bo‘lsin. $\omega$ to‘plamning ba’zi $\eta$-sinflarining birlashmasi bo‘lgan $\alpha$ qism to‘plamiga (ya’ni $x\in\alpha$ $x=y(mod\eta)\rightarrow y\in\alpha$ ) $\eta$-yopiq to‘plam deyiladi.

**2-ta‘rif.** $\eta$ ekvivalent bo‘lmagan ixtiyoriy juftliklar uchun birini ikkinchisidan ajratadigan hisoblanuvchi $\eta$-yopiq to‘plam mavjud bo‘lsa, $\eta$ hisoblanuvchi ajratiluvchi ekvivalentlik deyiladi.

**3-ta‘rif.** $A$ algebraning $\nu$-nomerlarda effektiv qo‘llab-quvvatlanadigan $\varphi$ endomorfizmiga (avtomorfizmiga) $\nu$-hisoblanuvchi (ya’ni $A$ algebraning $\nu$ tasvirlanishida hisoblanuvchi bo‘lgan) endomorfizm (avtomorfizm) deyiladi. Boshqacha aytganda, shunday $f:\omega\rightarrow\omega$ hisoblanuvchi funksiya mavjudki, bunda

$\varphi\nu = \nu f$ o‘rinli.

**1-jumla.** Ixtiyoriy nomerlangan tizimlarning endomorfizmlari to‘plami birga ega bo‘lgan yarim gruppani tashkil qiladi.

Ravshanki, ixtiyoriy pozitiv algebralarning hisoblanuvchi avtomorfizmlari yarim gruppasi gruppa tashkil qiladi. Shuningdek, hisoblanuvchi avtomorfizmlar to‘plami gruppa tashkil qilishining ba‘zi yetarli algebraik shartlari mavjud. Masalan, agar tizimning avtomorfizmlari gruppasi davriy bo‘lsa, u holda ushbu tizimning har qanday tasvirlanishi uchun bu yarim gruppa gruppa bo‘ladi.

**1-teorema.** Hisoblanuvchi avtomorfizmini teskarisi hisoblanuvchi bo‘lmaydigan negativ unar mavjud.

**1-natija.** Hisoblanuvchi avtomorfizmlarning yarim gruppasi gruppa bo‘lmaydigan negativ unar mavjud.

$\eta$ ekvivalentlik $\omega$ da aniqlangan bo‘lsin.

**4-ta‘rif.** $\{\langle x, y\rangle \mid x = y \pmod{\eta}\}$ to‘plam hisoblanuvchi (sanaluvchi, kosanaluvchi) bo‘ladigan $\eta$ ekvivalentlikka hisoblanuvchi (pozitiv, negativ) ekvivalentlik deyiladi.

**5-ta‘rif.** Ixtiyoriy turli juftliklarini ajratuvchi $\nu$-hisoblanuvchi to‘plami mavjud bo‘ladigan nomerlangan $(A,\nu)$ algebraga hisoblanuvchi ajratiluvchi algebra deyiladi.

**6-ta‘rif.** Barcha $x \neq y(\operatorname{mod} ker(\nu))$ elementlar uchun shunday qismiy hisoblanuvchi $g(x, y, z)$ funksiya topilib, bunda $\lambda z.g(x, y, z)$ funksiya $x$ ni $y$ elementdan ajratuvchi $ker(\nu)$-yopiq to‘plamning xarakteristik funksiyasi bo‘lsa, $(A,\nu)$ nomerlangan algebraga tekis hisoblanuvchi ajratiluvchi algebra deyiladi.

Ma‘lumki, hisoblanuvchi tasvirlanishga ega bo‘lmagan pozitiv tasvirlanuvchi chiziqli tartiblar mavjud. Boshqa tarafdan, ixtiyoriy negativ tasvirlanuvchi chiziqli tartiblar hisoblanuvchi tasvirlanishga ega ekanligi ravshan. Shuning uchun, endomorfizmlar bilan negativ tasvirlanuvchi chiziqli tartiblarning hisoblanuvchi tasvirlarining mavjudligi masalasi fundamental ahamiyatga ega.

**2-teorema.** Pozitiv tasvirlanishga ega bo‘lmagan ikkita endomorfizmli negativ tasvirlanuvchi chiziqli tartib mavjud.

**2-natija.** Hisoblanuvchi tasvirlanishga ega bo‘lmagan endomorfizmli negativ tasvirlanuvchi chiziqli tartib mavjud.

“**Chiziqli tartiblar darajalari**” deb nomlangan dissertatsiyaning ikkinchi bobida chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanish darajalarining qisman tartiblangan to‘plami tuzilishi o‘rganilgan. Asosiy e‘tibor endomorfizmli chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanishiga qaratilgan. Xususan, bu strukturalar uchun taqqoslanmaydigan, maksimal va minimal darajalar, cheksiz zanjirlar va antizanjirlarning mavjudligi aniqlangan. Chiziqli tartiblarning manfiy tasvirlanish darajalari to‘plamida $1+\omega^{*}$ tartibli ordinalga izomorf zanjir borligi ko‘rsatilgan.

$\eta_0, \eta_1$ – ekvivalentliklar $\omega$ da aniqlangan bo‘lsin. Agar $x = y(\operatorname{mod}\eta_0) \Leftrightarrow g(x) = g(y)(\operatorname{mod}\eta_1)$ va $\forall y \exists x(g(x) = y \pmod{\eta_1}))$ shartlarni qanoatlantiradigan $g$ hisoblanuvchi funksiya mavjud bo‘lsa, u holda $\eta_0$

ekvivalentlik $\eta_1$ ga $m$-keltiriladi deyiladi. Mazkur yondashuv nomerlashlar nazariyasi mafkurasiga asoslanadi. Bunday $g$ funksiyaga $\eta_0$ ni $\eta_1$ ga $m$-keltiruvchi deyiladi. Agar $\eta_0 \leqslant_m \eta_1 \wedge \eta_1 \leqslant_m \eta_0$ bo‘lsa, $\eta_0 \equiv_m \eta_1$ deb olamiz. U holda $\equiv_m$ ekvivalentlik bo‘ladi, to‘g‘ri aniqlangan $\leqslant_m$ indutsirlangan qisman tartib sinflarini ham xuddi shu kabi belgilaymiz. Odatdagidek, $\{\eta' \mid \eta \equiv_m \eta'\}$ to‘plamni ekvivalentlikning ($d_m(\eta)$ belgilashda) $m$-darajasi deb ataymiz.

**2-jumla.** Agar pozitiv (negativ) chiziqli tartib negativ (pozitiv) ekvivalentlik ustida tasvirlansa, u holda tartib ham, ekvivalentlik ham hisoblanuvchi bo‘ladi.

$\eta$ negativ ekvivalentlik ustida negativ tasvirlanuvchi barcha chiziqli tartiblarni $L(\eta)$ orqali belgilaymiz, ya’ni shu kabi strukturalarning izomorf tiplari va $\omega$ dagi barcha negativ ekvivalentlar to‘plami $\Pi$ da quyidagicha binar munosabat kiritamiz $\leqslant_{ln}$:

$$\eta_1 \leqslant_{ln} \eta_2 \Leftrightarrow L(\eta_1) \subseteq L(\eta_2),$$

bunda $\Pi$ to‘plamda qism tartib va uning simmetrik yopilmasi $\equiv_{ln}$ - ekvivalentlik bo‘ladi, faktorlash esa barcha negativ tasvirlanuvchi ekvivalentliklarni $\equiv_{ln}$ ustida ekvivalentlik sinflarga bo‘ladi. $\langle \Pi / \equiv_{ln}; \leqslant_{ln} \rangle$ qisman tartibga *chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanish strukturalari*, uning elementlarini esa *chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanish darajalari* deyiladi.

Barcha endomorfizmlari hisoblanuvchi, $\nu$-nomerlari to‘plamining tenglik va tartib munosabati hisoblanuvchi (pozitiv, negativ) bo‘lgan nomerlangan ekvivalentligi $\eta$ ga teng bo‘lgan $\nu$ nomerlash mavjud bo‘lsa, u holda $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots$ endomorfizmli $\langle L; \leq, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots \rangle$ chiziqli tartibga $\omega$ natural sonlar to‘plamidagi $\eta$ ekvivalentlik ustida hisoblanuvchi (pozitiv, negativ) tasvirlanadi deyiladi.

$\eta$ negativ ekvivalentliklar ustida negativ tasvirlanuvchi barcha endomorfizmli chiziqli tartiblarni $L_e(\eta)$ orqali belgilaymiz va negativ ekvivalentlar to‘plami $\Pi$ da quyidagicha binar munosabat kiritamiz $\leqslant_{ln-e}$:

$$\eta_1 \leqslant_{ln-e} \eta_2 \Leftrightarrow L(\eta_1) \subseteq L(\eta_2),$$

bunda $\Pi$ to‘plamda qism tartib va uning simmetrik yopilmasi $\equiv_{ln-e}$ - ekvivalentlik bo‘ladi, faktorlash esa barcha negativ tasvirlanuvchi ekvivalentliklarni $\equiv_{ln-e}$ ustida ekvivalentlik sinflarga bo‘ladi. $\langle \Pi / \equiv_{ln-e}; \leqslant_{ln-e} \rangle$ qisman tartibga *endomorfizmli chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanish strukturalari*, uning elementlarini esa *endomorfizmli chiziqli tartiblarning negativ tasvirlanish darajalari* deyiladi.

O‘tgan bobdagi 2-teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

**3-natija.** Endomorfizmli negativ tasvirlangan chiziqli tartiblarning taqqoslanmaydigan darajalari mavjud.

**4-natija.** Qisman tartiblangan $\langle \Pi / \equiv_{ln-e}; \leqslant_{ln-e} \rangle$ darajalar to‘plami yuqori yarim panjarani tashkil qilmaydi.

**3-jumla.** $\equiv_{ln-e} \subseteq \equiv_m$.

**4-jumla.** $\leqslant_{ln-e} \subsetneqq \leqslant_m$. Negativ $m$-darajalar to‘plamida eng kichik element mavjud va $d_{ln-e}(id\ \omega)$ daraja $\leqslant_{ln-e}$ tartibga nisbatan maksimal element.

Bilamizki, ixtiyoriy turli ikkita elementi taqqoslanmaydigan qisman tartiblangan to‘plam antizanjir deyiladi.

**3-teorema.** Shunday $\eta_0, \eta_1, \ldots,$ negativ ekvivalentliklar ketma-ketligi mavjudki, bunda mos $m$-darajalar ketma-ketligi $\leqslant_m$ tartibga nisbatan $\omega$ tip bo‘yicha qat‘iy o‘suvchi, $ln$-darajalar ketma-ketligi $\leqslant_m$ tartibga nisbatan $\omega^*$ tip bo‘yicha qat‘iy kamayuvchi (bunda tabiiy moslashtirish $\{d_m(\eta_n)\} \to \{d_{ln}(\eta_n)\}$ – antiizomorfizm) bo‘ladi, $ln-e$-darajalar ketma-ketligi esa $\leqslant_{ln-e}$ tartibga nisbatan antizanjir tashkil qiladi.

“**Chekli approksimatsiyalanuvchi algebralarning hisoblanuvchi ajratiluvchi nomerlashi**” deb nomlangan dissertatsiyaning uchinchi bobida tekis hisoblanuvchi ekvivalentliklar ustida tasvirlanadigan har qanday algebraning chekli approksimatsiyalanishi ushbu ekvivalentlikning xarakteristik transversalining immunligiga ekvivalent ekanligi aniqlangan. $\alpha^2 \cup id\ \omega$ ko‘rinishidagi ekvivalentliklar ustida tasvirlanadigan algebralarning lokal chekli ajratiluvchanligi, $\alpha$ to‘plamning to‘ldiruvchisi immunligiga teng kuchliligi ko‘rsatilgan.

Bilamizki, $(A,\mu)$, $(B,\nu)$ – nomerlangan algebralar bo‘lsa, u holda nomerlarda effektiv bo‘lgan $\varphi: A \to B$ gomomorfizmga morfizm deyiladi, ya’ni shunday hisoblanuvchi funksiya mavjudki, bunda $\varphi\mu = \nu f$ o‘rinli. $\mathfrak{B} = \{(B_i, \nu_i) \mid i \in I\}$ – nomerlangan algebralar oilasi bo‘lib, $(A,\mu)$ nomerlangan algebraning ixtiyoriy elementlari $a_0, a_1 \in A$ uchun $(A,\mu)$ algebrani mos turli $\mathfrak{B}$-algebralarga akslantiruvchi shunday $\varphi_{\{a_0,a_1\}}$ morfizm topilsaki, u holda $(A,\mu)$ algebrani $\mathfrak{B}$-algebraga approksimatsiyalanadi deyiladi (ya’ni $\varphi_{\{a_0,a_1\}}(a_0) \neq \varphi_{\{a_0,a_1\}}(a_1)$).

$\alpha \subseteq \omega$ bo‘lsin. U holda:

1) $\eta^\alpha = \{\langle 2x, 2x+1\rangle \mid x \in \alpha\rangle\} \cup \{\langle 2x+1, 2x\rangle \mid x \in \alpha\rangle\} \cup id\ \omega$;

2) $\eta_\alpha = \alpha^2 \cup id\ \omega$.

**5-jumla.** Ixtiyoriy $\alpha \subseteq \omega$ to‘plam uchun $\eta^\alpha$ ekvivalentlik tekis hisoblanuvchi ajratiluvchi bo‘ladi.

**7-ta‘rif.** Ixtiyoriy (chekli hosil qilingan) qism algebrasi $A_0$ va ixtiyoriy $a \in A \setminus A_0$ elementi uchun chekli indeksli kongruensiya topilsaki, $a$ element $A_0$ qism algebraning barcha elementlaridan modul bo‘yicha farq qilsa, $A$ universal algebraga (lokal) chekli ajratiluvchi algebra deyiladi.

**4-teorema.** Ixtiyoriy kocheksiz $\alpha \subseteq \omega$ to‘plamlar uchun quyidagi shartlar teng kuchli:

(1) $tr(\eta_\alpha)$ – immun;

(2) ixtiyoriy $tr(\eta_\alpha)$–algebra chekli approksimatsiyalanadi;

(3) ixtiyoriy $tr(\eta_\alpha)$–algebra lokal chekli ajratiluvchi.

**5-teorema.** Cheksiz tekis hisoblanuvchi ajratiluvchi $\eta$ ekvivalentliklar uchun quyidagi shartlar teng kuchli:

(1) xarakteristik transversali $tr(\eta)$ immun;

(2) $\eta$ ustida tasvirlanuvchi ixtiyoriy algebralar chekli approksimatsiyalanuvchi bo‘ladi.

“**Gruppalar va panjaralarning nomerlanishi**” deb nomlangan dissertatsiyaning to‘rtinchi bobida natural sonlar to‘plamidagi ekvivalentlik munosabati ustida algebraik strukturalarni tasvirlanish muammolari ko‘rilgan. Bundan tashqari N.X.Kasimov tomonidan kiritilgan tekis m-ekvivalentlik tushunchasi o‘rganilgan. Ixtiyoriy nomerlangan gruppaning nomerlangan ekvivalentligi tekis m-ekvivalentlik bo‘lishi isbotlangan. Boshqa tarafdan, hech qanaqa gruppa tasvirlanmaydigan tekis m-ekvivalentlikka misol keltirilgan.

**8-ta‘rif.** Shunday hisoblanuvchi funksiyalarning oilasi (hisoblanuvchi funksiyalarning sanaluvchi oilasi) mavjud bo‘lsaki, $\eta$ ekvivalentlik bo‘yicha $\omega/\eta$ faktor-to‘plamlarning indutsirlangan almashtirishlarida ixtiyoriy $x, y$ natural sonlar juftliklari uchun $\{x\}/\eta$ sinf $\{y\}/\eta$ sinfga $f \in F$ funksiya yordamida $m$-keltirilsa, bunday ekvivalentlikka $m$-ekvivalentlik (tekis $m$-ekvivalentlik) deyiladi.

**6-teorema.** Agar $(G,\nu)$ – nomerlangan gruppa bo‘lsa, u holda uning nomerlashining $ker(\nu)$ yadrosi tekis $m$-ekvivalent bo‘ladi.

**6-jumla.** $\omega$ ni cheksiz sondagi orbitalarga bo‘luvchi chekli sikllarga ega bo‘lmagan $f$ hisoblanuvchi almashtirishlar uchun kontinuum tekis $m$-ekvivalentlar mavjudki, bunda $F_f$ hisoblanuvchi oila $m$-keltiriladi.

**7-jumla.** Yadrosi hisoblanuvchi bo‘lmagan pozitiv nomerlangan ixtiyoriy gruppaning barcha sinflari hisoblanuvchi izomorf bo‘ladi (ya‘ni $\omega/\eta$, faktor-to‘plamlarda indutsirlangan almashtirishlarda yadroning ixtiyoriy qo‘shni sinflarining biridan ikkinchisiga akslantiruvchi hisoblanuvchi almashtirish mavjud). Bunda, $\omega/\eta$ faktor-to‘plamlarda $\{x\}/\eta$ sinfni $\{y\}/\eta$ sinfga akslantiruvchi $x, y$ ga bog‘liq bo‘lgan $\omega$ da hisoblanuvchi izomorfizmning xarakteristik indeksini tekis effektiv qurish tartibi mavjud.

**9-ta‘rif**. Agar chekli sikllarga ega bo‘lmagan hisoblanuvchi almashtirishlarni cheksiz sondagi orbitalaridan aynan bittadan elementni o‘z ichiga oluvchi to‘plamga hisoblanuvchi tiklanuvchi to‘plam deyiladi.

**8-jumla.** Ixtiyoriy cheksiz, kocheksiz va kosanaluvchi to‘plamlar hisoblanuvchi tiklanuvchi to‘plam bo‘ladi.

**9-jumla.** Kontinuum hisoblanuvchi tiklanuvchi to‘plamlar mavjud.

**5-natija.** Kontinuum tekis $m$-ekvivalentliklar mavjud.

**10-jumla.** Hech qanaqa gruppa tasvirlanmaydigan tekis $m$-ekvivalentlik mavjud.

## XULOSA

Dissertatsiya ishida tartiblangan unarlarning algoritmik tasvirlari, hisoblanuvchi endomorfizmli chiziqli tartiblar, endomorfizmli chiziqli tartiblar darajalari, chekli approksimatsiyalanadigan algebralarning hisoblanuvchi ajratiluvchi nomerlashlari, $\alpha^2 \cup id\,\omega$ ekvivalentliklar ustida tasvirlanadigan lokal chekli algebralarni algoritmik kriteriyalari o‘rganildi, shuningdek, klassik tizimlar (gruppalar, xalqalar, maydonlar) nomerlashining ayrim algoritmik atributlari topildi.

Dissertatsiya ishida quyidagi asosiy natijalar olindi:

1. Hisoblanuvchi avtomorfizmlari yarim gruppasi gruppa bo‘lmaydigan negativ unar mavjudligi isbotlangan;
2. pozitiv tasvirlarga ega bo‘lmagan ikkita hisoblanuvchi endomorfizmlar bilan negativ chiziqli tartib qurilgan;
3. endomorfizmli chiziqli tartiblarning solishtirilmaydigan negativ tasvirlanish darajalari va ularning cheksiz antizanjirlar mavjudligi aniqlangan. Shu bilan birga chiziqli tartiblarning cheksiz negativ tasvirlanish darajalar zanjirlarini mavjudligi isbotlangan;
4. berilgan ekvivalentliklar ustida tasvirlanuvchi chekli approksimatsiyalanish va lokal chekli ajratilish xossalariga ega universal algebralarning algoritmik kriteriyasi topilgan;
5. ixtiyoriy nomerlangan gruppani nomerlangan ekvivalentligi tekis m-ekvivalentlik bo‘lishi ko‘rsatilgan va ustida hech qanday gruppa tasvirlanmaydigan effektiv $T_1$-ajratiluvchi tekis m-ekvivalentlik misoli taqdim etilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01**
**ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ**
**ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА**

**ДЖАВЛИЕВ САРВАР КУРБОНМИРАТОВИЧ**

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НАД ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫМИ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЯМИ

**01.01.06 – Алгебра**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PHD)**
**ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Ташкент-2024**

**Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Наука и Инноваций Республики Узбекистан за № B2023.1.PhD/FM842.**

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | **Касымов Надимулла Хабибуллаевич**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| **Официальные оппоненты:** | **Морозов Андрей Сергеевич**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| | **Худойбердиев Аброр Хакимович**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| **Ведущая организация:** | **Казанский федеральный университет (Россия)** |

Защита диссертации состоится «06» февраля 2024 года в 17:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 177). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40.)

Автореферат диссертации разослан «19» января 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от «19» января 2024 года).

**У.А.Розиков**
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

**Ж.К.Адашев**
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

**А.Р.Хаётов**
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

## ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD)

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** Многие научные и практические исследования, проводимые во всем мире, очень часто сводятся к изучению вычислимых отделимых эквивалентностей. Понятие отделимой нумерации можно трактовать как одно из математических уточнений понятия сложной системы, заданной алгоритмами своего развития. При этом, отделимость позволяет распознавать различные элементы путем разделения их подходящими алгоритмически определяемыми окрестностями. Н.Х. Касымов доказал, что вычислимая отделимость нумерованной универсальной алгебры равносильна ее аппроксимируемости негативными, т.е. негативные алгебры образуют тот строительный материал, на котором базируется структурная теория вычислимо отделимых алгебр. Более того, как показано Н.Х.Касымовым критерий вычислимой отделимости как аппроксимируемости негативными справедлив и для произвольных алгебраических систем; при этом, отношение называется вычислимо отделимым в представлении $\nu$ если всякая точка его ложности имеет $\nu$-вычислимую окрестность, не пересекающуюся с областью истинности этого отношения.

В настоящее время понятие линейно упорядоченного множества является фундаментальным объектом математики, что обуславливает естественный интерес к изучению алгоритмических свойств линейных порядков. Во многих приложениях линейные порядки рассматриваются вместе с некоторыми системами операций, согласованных с порядком. В частности, простейший случай линейного порядка с операциями задают линейные порядки с их эндоморфизмами. Хрестоматийным примером такого рода является натуральный ряд с его естественным порядком и функцией следования, т.е. система $S_{\leq} = \langle \omega; \leq, s \rangle$, где $\omega$ обозначает множество натуральных чисел, $\leq$ - естественный порядок на $\omega$ и $s(n) = n+1$. Стандартные модели арифметики Пресбургера $\langle \omega; s, + \rangle$ и арифметики Пеано $\langle \omega; s, +, \times \rangle$ не содержат в явном виде отношение порядка, которое предлагается в некоторых других аксиоматизациях. Как будет показано ниже, именно наличие порядка с эндоморфизмом позволяет показать единственность (с точностью до вычислимого изоморфизма) алгоритмического представления стандартной модели арифметики как в классе позитивных, так и в классе негативных алгоритмических представлений.

В нашей стране в последние годы усилился интерес к актуальным направлениям фундаментальных наук, имеющих научное и практическое применение. Негативные представления алгебраических систем можно считать не менее приоритетными, чем позитивные, хотя, например, в теоретической информатике и теории абстрактной вычислимости именно позитивные системы считаются одними из главных объектов исследования. С другой стороны, любая конечно-определенная система (например - группа) с неразрешимой проблемой равенства слов дает естественный пример позитивной, но не негативной системы. Тем не менее, негативные системы остаются в тени позитивных. Исследования негативных алгебраических систем эффективных сигнатур на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Теория алгоритмов» и «Теория вычислимости» обозначены как основные цели и направления научных исследований[1].

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики**. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** Вычислимо отделимые алгебры играют и, по-видимому, будут играть в обозримой перспективе заметную роль как в теории вычислимых алгебр, так и в теоретической информатике. А.И. Мальцевым показано, что всякая позитивная нумерация конечно порожденной алгебры, обладающей ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса, является вычислимой, что поставило вопрос о справедливости данного утверждения в общем случае (без условия конечной порожденности). Оказалось, что имеются контрпримеры, причем именно в классе вычислимо отделимых алгебр. Более того, всякая всякая позитивная нумерация алгебры со счетной (в частности, нетеровой) решеткой конгруэнций является вычислимо отделимой. Другой пример - проблема Бергстры-Такера в теории абстрактных типов данных о существовании инициального в конечно-базируемом многообразии обогащения для любой конечно порожденной позитивной алгебры. Отрицательное решение этой проблемы было получено предъявлением соответствующего примера конечно порожденной алгебры, имеющей вычислимо отделимую позитивную нумерацию с иммунной характеристической трансверсалью.

Особое место среди вычислимо отделимых алгебр занимают негативные алгебры, т.к. нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами, т.е. исключительной особенностью вычислимо отделимых алгебр, в отличие от других нумерованных систем, является их аппроксимируемость негативными алгебрами.

Алгебра $S=\langle\omega;s\rangle$ (без отношения порядка) вычислимо устойчива относительно позитивных представлений, хотя она имеет невычислимые негативные нумерации. Известен классический пример Фейнера позитивно представимого линейного порядка, не имеющего вычислимых представлений.

[1] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

Легко показать, что всякий негативно представимый линейный порядок имеет вычислимое представление. Поэтому возникает принципиальный вопрос о существование вычислимых представлений негативно представимых линейный порядков с эндоморфизмами. В дессертации показано, что существуют негативные линейные порядки с двумя эндоморфизмами, которые не имеют позитивных представлений, но вопрос о том, имеет ли всякий негативный линейный порядок с одним вычислимым эндоморфизмом позитивное представление остается открытым.

**Связь темы диссертации с научно – исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация.**

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами научно-исследовательских работ Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

**Цель исследования** состоит в определении соотношений между структурными свойствами линейных порядков с эндоморфизмами и их негативными представлениями в рамках теории степеней представимости, а также установлении связей между универсальными алгебрами с условиями конечности и их вычислимо отделимыми представлениями.

**Задачи исследования диссертационной работы следующие:**

доказать, что полугруппа вычислимых автоморфизмов любого негативного унара является группой или построить соответствующей контрпример;

исследовать вопросы существования линейных порядков с эндоморфизмами, обладающими негативными представлениями, но не имеющими позитивных представлений;

описать структуру степеней негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами;

исследовать вычислимо отделимые алгоритмические представления универсальных алгебр с различными условиями конечности, в т.ч. финитной аппроксимируемости, финитной и локально финитной отделимости, локальной конечности;

исследовать алгоритмические свойства нумераций классических систем (групп, колец, решеток, полугрупп) и вопросы их представимости над эквивалентностями.

**Объектом исследования** являются унарные алгебры, негативные линейные порядки с эндоморфизмами, их степени представимости, вычислимо отделимые алгебры, а также алгоритмические представления классических алгебраических систем.

**Предмет исследования.** Теория вычислимости, теория алгоритмов, теория универсальных алгебр.

**Методы исследования.** В работе используются методы математической логики, универсальной алгебры, теории моделей и теории алгоритмов.

**Научная новизна исследования** состоит в следующем:

построен пример негативной унарной алгебры, полугруппа вычислимых автоморфизмов которого не является группой;

доказано существование несравнимых, максимальных и минимальных степеней негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами, а также их бесконечных антицепей;

построен антиизоморфизм между сводимостью нумераций в смысле Ю.Л.Ершова и степенями негативной представимости линейных порядков;

доказано, что для равномерно вычислимо отделимой эквивалентности финитная аппроксимируемость всякой представимой над ней алгебры равносильна иммунности характеристической трансверсали этой эквивалентности;

введено понятие равномерной m-эквивалентности и доказано, что ядро алгоритмического представления любой группы является равномерной m-эквивалентностью и установлено, что никакая нумерация группы не является предполной.

**Практические результаты исследования.** Работа носит теоретический характер. Однако её результаты могут найти применение как в теории моделей, универсальной алгебре и теории алгоритмов, так и в Theoritical Computer Science. В частности, результаты о структуре негативно представимых степеней линейных порядков могут быть использованы для построения универсальных и низко расположенных (относительно сводимости нумераций) алгоритмических негативных представлений упорядоченных структур данных.

**Достоверность результатов исследования** обоснована использованием методов математической логики, алгебры, теории множеств, а также строгостью математических рассуждений.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.** Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты оказалось полезными для решения ряда вопросов как в теории вычислимых алгебр, так и в Computer science.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты устанавливают связи между алгоритмическими свойствами негативных линейных порядков с вычислимыми эндоморфизмами и строением их степеней негативной представимости, а также демонстрируют возможности применения разработанных алгоритмических критериев локально финитной отделимости и финитной аппроксимируемости для универсальных алгебр, представимых над эквивалентностями типа $\alpha^2 \cup id\,\omega$ для решения алгоритмических задач алгебры.

**Внедрение результатов исследования.** Результаты диссертации были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Степени негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами были использованы для решения системы монотонных булевых функций сложных систем в фундаментальном проекте «Разработка алгоритмических принципов управления сложными системами на основе по алгебре функциональных таблиц» № БВ-М-Ф4-004 (Справка Национального университета Узбекистана № 04/11-7976 от 17 ноября 2023 года). Применение научных результатов позволило разделить входящие параметры на классы с общими свойствами.

Описание структуры степеней негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами и алгоритмические свойства нумераций классических систем и их представимости над эквивалентностями использованы для определения степеней негативного представления линейных порядков с эндоморфизмами в зарубежном грантовом проекте № 22-21-20024 по теме «Информационная выраженность степеней разрешимости» (Справка Математического научно-образовательного центра Приволжского федерального округа № НП-01/11 от 14 ноября 2023 г). Применение научных результатов позволило найти несравнимые степени негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами.

**Апробация результатов исследования.** Основное содержание диссертации обсуждалось на 4 международных и 2 республиканских научно–практических конференциях.

**Публикации результатов исследования.** По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертации доктора философии, из них 2 опубликованы в зарубежных журналах (входящих в базы WoS и Scopus), 4 в республиканских научных изданиях.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения и четырёх глав, разбитых на 14 параграфов. Объем диссертации 98 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования и опубликованных работах, а также о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Негативные линейные порядки с вычислимыми эндоморфизмами**», приведены необходимые понятия и вспомогательные результаты. Доказана вычислимость позитивных и негативных линейно упорядоченных унарных алгебр из некоторых естественных классов и приведен пример негативного унара, полугруппа вычислимых автоморфизмов которого не является группой.

Пусть $\langle M;\Sigma\rangle$ – алгебраическая система эффективной сигнатуры $\Sigma$.

**Определение 1.** Отображение $\nu$ из множества натуральных чисел $\omega$ на $M$ называется алгоритмическим представлением (или нумерацией) системы $M$, если существует вычислимое семейство $F$ вычислимых функций, представляющих $\Sigma$-операции системы $M$ в нумерации $\nu$, т.е. для всякой $\Sigma$-операции $\sigma\in\Sigma$ системы $M$ равномерно эффективно найдется такая вычислимая функция $f\in F$, что $\sigma\nu\overline{x}=\nu f\overline{x}$.

Пусть $\eta$ – эквивалентность на $\omega$. Подмножество $\alpha$ множества $\omega$

называется $\eta$-замкнутым, если оно является объединением подходящих $\eta$-классов (т.е. $x \in \alpha \;\; x = y(mod\,\eta) \rightarrow y \in \alpha$ ).

**Определение 2.** Эквивалентность $\eta$ на множестве натуральных чисел называется вычислимо отделимой, если для всякой пары различных по модулю $\eta$ натуральных чисел найдется $\eta$-замкнутое вычислимое множество, отделяющее первое число от второго.

**Определение 3.** Эндоморфизм (автоморфизм) $\varphi$ алгебры $A$ называется $\nu$-вычислимым (т.е. вычислимым в представлении $\nu$ алгебры $A$), если он эффективно поддерживается на $\nu$-номерах. Другими словами, существует такая вычислимая функция $f:\omega \rightarrow \omega$, что коммутативна диаграмма $\varphi\nu = \nu f$ .

Следующее утверждение очевидно.

**Предложение 1.** Множество вычислимых эндоморфизмов любой нумерованной системы является полугруппой с единицей.

Легко заметить, что полугруппа вычислимых автоморфизмов любой позитивной алгебры является группой. Имеются также некоторые достаточные алгебраические условия, выполнение которых гарантирует, что вычислимые автоморфизмы образуют группу. Например, если группа автоморфизмов системы периодическая, то для любого алгоритмического представления данной системы эта полугруппа есть группа.

**Теорема 1.** Существуют негативный унар и такой его вычислимый автоморфизм, обратный к которому не является вычислимым.

**Следствие 1.** Существует негативный унар, полугруппа вычислимых автоморфизмов которого не является группой.

**Определение 4.** Отношение эквивалентности $\eta$ на $\omega$ называется вычислимым (позитивным, негативным), если множество $\{\langle x, y\rangle \mid x = y\left(\operatorname{mod}\eta\right)\}$ вычислимо (перечислимо, соответственно коперечислимо).

**Определение 5.** Нумерованная алгебра $(A,\nu)$ называется вычислимо отделимой, если всякая пара различных ее элементов отделяется подходящим $\nu$-вычислимым множеством.

**Определение 6.** Нумерованная алгебра $(A,\nu)$ называется равномерно вычислимо отделимой, если существует частичная вычислимая функция $g(x, y, z)$ такая, что для всех $x \neq y \;\left(\operatorname{mod} ker(\nu)\right)$ функция $\lambda z.g(x, y, z)$ является характеристической для некоторого $ker(\nu)$-замкнутого множества, отделяющего $x$ от $y$.

Известно, что существует позитивно представимый линейный порядок, не имеющий вычислимых представлений. С другой стороны, почти очевидно, что всякий негативно представимый линейный порядок имеет вычислимое представление. Поэтому принципиальным является вопрос о существовании вычислимых представлений негативно представимых линейных порядков с эндоморфизмами.

**Теорема 2.** Существует негативно представимый линейный порядок с двумя эндоморфизмами, не имеющий позитивных представлений.

**Следствие 2.** Существует негативно представимый линейный порядок с эндоморфизмами, не имеющий разрешимых представлений.

Во второй главе диссертации, названной «**Степени линейных порядков**», изучено строение частично упорядоченных множеств степеней негативной представимости линейных порядков. Особое внимание уделяется строению множества степеней негативной представимости линейных порядков с вычислимыми эндоморфизмами. В частности, для этих структур установлено существование несравнимых, максимальных и минимальных степеней, а также бесконечных антицепей. Показано, что множество степеней негативной представимости линейных порядков содержит цепь, изоморфную ординалу $1+\omega^*$ .

Пусть $\eta_0,\eta_1$ – две эквивалентности на $\omega$. Будем говорить, что $\eta_0$ $m$-сводится к $\eta_1$ (в обозначениях $\eta_0\leqslant_m\eta_1$), если существует такая вычислимая функция $g$, что $x=y \pmod{\eta_0} \Leftrightarrow g(x)=g(y) \pmod{\eta_1}$ и $\forall y\exists x(g(x)=y \pmod{\eta_1})$ ). Этот подход основан на идеологии теории нумераций. Такую функцию $g$ назовем $m$-сводящей $\eta_0$ к $\eta_1$. Если $\eta_0\leqslant_m\eta_1 \wedge \eta_1\leqslant_m\eta_0$, то полагаем $\eta_0\equiv_m\eta_1$. Тогда $\equiv_m$ - эквивалентность, на классах которой корректно определен индуцированный $\leqslant_m$ частичный порядок, который мы будем обозначать тем же знаком. Как обычно, $m$-степенью эквивалентности $\eta$ (в обозначениях $d_m(\eta)$) назовем множество $\{\eta' \mid \eta\equiv_m\eta'\}$.

**Предложение 2.** Если линейный порядок позитивно (негативно) представим над негативной (позитивной) эквивалентностью, то и порядок, и эквивалентность разрешимы.

Для негативной эквивалентности $\eta$ обозначим через $L(\eta)$ класс всех линейных порядков, негативно представимых над $\eta$, т.е. типов изоморфизмов таких структур, и на множестве $\Pi$ всех негативных эквивалентностей на $\omega$ введем следующее бинарное отношение $\leqslant_{ln}$ :

$$\eta_1\leqslant_{ln}\eta_2 \Leftrightarrow L(\eta_1)\subseteq L(\eta_2),$$

которое является предпорядком на множестве $\Pi$ и его симметричное замыкание $\equiv_{ln}$ - есть эквивалентность, факторизация по которой разбивает множество всех негативных эквивалентностей на классы $\equiv_{ln}$-эквивалент-ности. Частичный порядок $\langle \Pi/\equiv_{ln};\leqslant_{ln}\rangle$ будем называть *структурой негативной представимости линейных порядков*, а его элементы - *степенями негативной представимости линейных порядков*.

Будем говорить, что линейный порядок $\langle L;\leq,\varepsilon_0,\varepsilon_1\ldots\rangle$ с эндоморфизмами $\varepsilon_0,\varepsilon_1\ldots$ вычислимо (позитивно, негативно) *представим над эквивалентностью* $\eta$ на множестве натуральных чисел $\omega$, если существует такая его нумерация $\nu$ с нумерационной эквивалентностью равной $\eta$, в которой все эндоморфизмы вычислимы, а множества $\nu$-номеров отношений равенства и порядка – разрешимы (позитивны, соответственно негативны).

Для негативной эквивалентности $\eta$ через $L_e(\eta)$ обозначим класс всех линейных порядков с эндоморфизмами, негативно представимых над $\eta$ и на множестве $\Pi$ введем следующее бинарное отношение $\leqslant_{ln-e}$ :

$$\eta_1\leqslant_{ln-e}\eta_2 \Leftrightarrow L_e(\eta_1)\subseteq L_e(\eta_2),$$

которое является предпорядком на множестве $\Pi$ и его симметричное замыкание $\equiv_{ln-e}$ – есть эквивалентность, факторизация по которой разбивает множество всех негативных эквивалентностей на $\equiv_{ln-e}$-классы эквивалентности. Частично упорядоченное множество $\langle \Pi/\equiv_{ln-e};\leqslant_{ln-e}\rangle$ будем называть *структурой негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами*, а его элементы – *степенями негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами*.

Из теоремы 2 предыдущей главы вытекают следующие факты.

**Следствие 3.** Существуют несравнимые степени негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами.

**Следствие 4.** Частично упорядоченное множество степеней $\langle \Pi/\equiv_{ln-e};\leqslant_{ln-e}\rangle$ не является верхней полурешеткой.

**Предложение 3.** $\equiv_{ln-e}\subseteq\equiv_m$.

**Предложение 4.** $\leqslant_{ln-e}\subsetneqq\leqslant_m$. В множестве негативных $m$-степеней существует наименьший элемент и степень $d_{ln-e}(id\ \omega)$ максимальна относительно $\leqslant_{ln-e}$.

Напомним, что подмножество частичного порядка называется антицепью, если никакая пара различных его элементов не является сравнимой относительно данного порядка.

**Теорема 3.** Существует последовательность негативных эквивалентностей $\eta_0,\eta_1,\ldots$, для которой соответствующая последовательность $m$-степеней является строго возрастающей относительно порядка $\leqslant_m$ по типу $\omega$, последовательность $ln$-степеней строго убывающая относительно $\leqslant_{ln}$ по типу $\omega^*$ (при этом естественное вложение $\{d_m(\eta_n)\}\to\{d_{ln}(\eta_n)\}$ – антиизоморфизм), а последовательность $ln-e$-степеней относительно $\leqslant_{ln-e}$ образует антицепь.

В третьей главе диссертации, названной “**Вычислимо отделимые нумерации финитно аппроксимируемых алгебр**”, установлено, что для равномерно вычислимо отделимой эквивалентности финитная аппроксимируемость всякой представимой над ней алгебры равносильна иммунности характеристической трансверсали этой эквивалентности. Показано, что для эквивалентностей вида $\alpha^2\cup id\ \omega$ локально финитная отделимость всякой представимой над ней универсальной алгебры равносильна иммунности дополнения $\alpha$.

Напомним, что если $(A,\mu)$, $(B,\nu)$ – нумерованные алгебры, то гомоморфизм $\varphi: A\to B$ называется морфизмом, если он эффективен на номерах, т.е. существует вычислимая функция $f$ такая, что $\varphi\mu=\nu f$. Если $\mathfrak{B}=\{(B_i,\nu_i)\mid i\in I\}$ - семейство нумерованных алгебр, то говорят, что нумерованная алгебра $(A,\mu)$ аппроксимируется $\mathfrak{B}$-алгебрами, если для всякой пары различных элементов $a_0,a_1\in A$ существует морфизм $\varphi_{\{a_0,a_1\}}$ из $(A,\mu)$ в подходящую $\mathfrak{B}$-алгебру, различающий эти элементы (т.е. $\varphi_{\{a_0,a_1\}}(a_0)\neq\varphi_{\{a_0,a_1\}}(a_1)$).

Пусть $\alpha\subseteq\omega$. Тогда:

1) $\eta^\alpha=\{\langle 2x,2x+1\rangle\mid x\in\alpha\rangle\}\cup\{\langle 2x+1,2x\rangle\mid x\in\alpha\rangle\}\cup id\ \omega$;

2) $\eta_\alpha = \alpha^2 \cup id\ \omega$;

**Предложение 5.** Для любого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность $\eta^\alpha$ является равномерно вычислимо отделимой.

**Определение 7.** Универсальная алгебра $A$ называется (локально) финитно отделимой, если для всякой ее (конечно порожденной) подалгебры $A_0$ и любого элемента $a \in A \setminus A_0$ найдется такая конгруэнция конечного индекса, по модулю которой элемент $a$ отличен от всех элементов подалгебры $A_0$.

**Теорема 4.** Для любого кобесконечного $\alpha \subseteq \omega$ равносильны следующие условия:

(1) $tr(\eta_\alpha)$ – иммунна;

(2) всякая $\eta_\alpha$ – алгебра финитно аппроксимируема;

(3) всякая $\eta_\alpha$ – алгебра локально финитно отделима.

**Теорема 5.** Для бесконечной равномерно вычислимо отделимой эквивалентности $\eta$ следующие условия равносильны:

(1) характеристическая трансверсаль $tr(\eta)$ иммунна;

(2) всякая алгебра, представимая над $\eta$ является финитно аппроксимируемой.

В четвертой главе диссертации, названной «**Нумерации групп и решеток**», рассматрены вопросы представимости алгебраических структур (групп, решеток, полугрупп и т. д.) над отношениями эквивалентности на натуральных числах. Изучено понятие равномерной m-эквивалентности, введенной Н.Х. Касымовым. Доказано, что нумерационная эквивалентность любой нумерованной группы является равномерной m-эквивалентностью. С другой стороны, построен пример равномерной m-эквивалентности, над которой не представима никакая группа.

**Определение 8.** Эквивалентность $\eta$ называется $m$-эквивалентностью (равномерной $m$-эквивалентностью), если существует такое семейство $F$ вычислимых функций (перечислимое семейство $F$ вычислимых функций), индуцирующих перестановки фактор-множества $\omega/\eta$, что для всякой пары натуральных чисел $x, y$ найдется такая функция $f \in F$, которая $m$-сводит класс $\{x\}/\eta$ к классу $\{y\}/\eta$.

**Теорема 6.** Если $(G,\nu)$ – нумерованная группа, то ядро $ker(\nu)$ ее нумерации – равномерная $m$-эквивалентность.

**Предложение 6.** Для любой вычислимой перестановки $f$ без конечных циклов, разбивающей $\omega$ на бесконечное число орбит, существует континуум таких равномерных $m$-эквивалентностей, для которых вычислимое семейство $F_f$ является $m$-сводящим.

**Предложение 7.** Всякая пара смежных классов ядра неразрешимой позитивной нумерации любой группы является вычислимо изоморфной (т.е. для любой пары смежных классов ядра существует вычислимая перестановка на $\omega$, индуцирующая перестановку фактор-множества $\omega/\eta$, переводящая один из этих классов на другой). При этом, существует равномерно эффективно зависящая от

$x, y$ процедура построения характеристического индекса вычислимого изоморфизма на $\omega$, являющегося перестановкой на $\omega / \eta$ и переводящего $\{x\}/\eta$ в $\{y\}/\eta$.

**Определение 9**. Множество называется вычислимо прошиваемым, если существует вычислимая перестановка без конечных циклов с бесконечным числом орбит, в каждой из которых содержится ровно один элемент этого множества.

**Предложение 8.** Всякое бесконечное, кобесконечное и коперечислимое множество вычислимо прошиваемо.

**Предложение 9.** Существует континуум вычислимо прошиваемых множеств.

**Следствие 5.** Существует континуум равномерных m-эквивалентностей.

**Предложение 10.** Существует равномерная m-эквивалентность, над которой не представима никакая группа.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационном исследовании изучены алгоритмические представления упорядоченных унаров, линейные порядки с вычислимыми эндоморфизмами, степени негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами, вычислимо отделимые нумерации финитно аппроксимируемых алгебр, определен алгоритмический критерий локально финитной отделимости всякой алгебры, представимой над эквивалентностью $\alpha^2 \cup id\,\omega$, а также найдены некоторые алгоритмические атрибуты нумераций классических систем (групп, колец, полей). Основные результаты, полученные в работе, следующие:

1. Доказано существование негативного унара, полугруппа вычислимых автоморфизмов которого не является группой;
2. построен негативный линейный порядок с двумя вычислимыми эндоморфизмами, не имеющий позитивных представлений;
3. установлено существование несравнимых степеней негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами, а также их бесконечных антицепей и бесконечных цепей степеней негативной представимости линейных порядков;
4. найден алгоритмический критерий финитной аппроксимируемости и локально финитной отделимости универсальных алгебр, представимых над эквивалентностями типа некоторых типов;
5. показано, что нумерационная эквивалентность любой нумерованной группы является равномерной m-эквивалентностью и предъявлен пример эффективно $T_1$-отделимой равномерной m-эквивалентности, над которой не представима никакая группа.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY**

**NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

**Javliev Sarvar Kurbonmiratovich**

# ALGEBRAIC SYSTEMS OVER COMPUTABLY SEPARABLE EQUIVALENCES

**01.01.06-Algebra**

**ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**Tashkent-2024**

**The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2023.1.PhD/FM842.**

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

| | |
|---|---|
| **Scientific supervisor:** | **Kasymov Nadimulla Khabibullaevich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor |
| **Official opponents:** | **Morozov Andrei Sergeevich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor |
| | **Khudoyberdiyev Abror Khakimovich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor |
| **Leading organization:** | **Federal university of Kazan (Russia)** |

Defense will take place "06" february 2024 at 17:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered № 177. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40.)

Abstract of dissertation sent out on "19" january 2024 year
(Mailing report № 2 on "19" january 2024 year)

**U.A.Rozikov**
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., academician

**J.K.Adashev**
Scientific secretary of Scientific Councilon award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

**A.R.Hayotov**
Deputy chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of the research work** is to study is to determine the relationships between the structural properties of linear orders with endomorphisms and their negative representations within the framework of the theory of degrees of representability, as well as to establish connections between universal algebras with finiteness conditions and their computably separable representations.

**The objects of the research work** are unary algebras, negative linear orders with endomorphisms, their degrees of representability, computably separable algebras, as well as algorithmic representations of classical algebraic systems.

**Scientific novelty of the research work** is as follows:

an example of a negative unary algebra is constructed whose semigroup of computable automorphisms is not a group;

the existence of incomparable, maximum and minimum degrees of negative representability of linear orders with endomorphisms, as well as their infinite antichains, is proven;

an anti-isomorphism was constructed between the reducibility of numberings in the sense of Yu.L. Ershov and the degrees of negative representability of linear orders;

it is proved that for a uniformly computably separable equivalence, the finite approximability of any algebra representable over it is equivalent to the immunity of the characteristic transversal of this equivalence;

the concept of uniform m-equivalence was introduced and it was proved that the core of the algorithmic representation of any group is uniform m-equivalence and it was shown that no numbering of a group is precomplete.

**Implementation of the research results.** The results of the thesis were used in the following research projects:

Degrees of negative representability of linear orders with endomorphisms were used to solve a system of monotonic Boolean functions of complex systems in the fundamental project “Development of algorithmic principles for controlling complex systems based on the algebra of functional tables” No. BV-M-F4-004 (Certificate of the National University of Uzbekistan No. 04/ 11-7976 dated November 17, 2023). The application of scientific results made it possible to divide the input parameters into classes with common properties.

Description of the structure of degrees of negative representability of linear orders with endomorphisms and algorithmic properties of numberings of classical systems (groups, rings, lattices, semigroups) and questions of their representability over equivalences within the framework of the implementation of the project “Information expressiveness of degrees of indecidability” RSF No. 22-21-20024 (Certificate of the Mathematical Scientific and Educational Center of the Volga Federal District No. NP-01/11 dated November 14, 2023).

**The structure and volume of the thesis.** The thesis consists of the introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The total volume of the thesis is 98 pages.

## E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
## LIST OF PUBLISHED WORKS

### I bo'lim (1 часть; part 1)


1. Касымов Н.Х., Джавлиев С.К. Алгоритмические представления упорядоченных унаров. // Бюллетень Института Математики, 2020, 3, №4, с. 98-104. (01.00.00, № 17).
2. Kasymov N.Kh., Javliev S.K. Negative representability degree structures of linear orders with endomorphisms. // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2021, Vol 4, Issue 2, p. 169-184. (01.00.00, № 8).
3. Касымов Н.Х., Дадажанов.Р.Н., Джавлиев С.К. Структуры степеней негативной представимости линейных порядков. // Известия вузов РФ, 2021, **65**, №12, с. 1-25. (3. Scopus. IF=0. 356).
4. Касымов Н.Х., Дадажанов.Р.Н., Джавлиев С.К. Равномерные m-эквивалентности и нумерации классических систем. // Сибирские электронные математические известия, 2022, **19**, № 1, с. 49-65. (3. Scopus. IF=0.42).
5. Javliev S.K. Algorithmic criterion of locally finite separability of algebras represented over equivalence $\alpha^2 \cup Id\,\omega$. // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2022,Vol 5, Issue 2, p. 85-92. (01.00.00, № 8).
6. Касымов Н.Х., Джавлиев С.К. Вычислимо отделимые нумерации финитно аппроксимируемых алгебр. // Бюллетень Института математики, 2023, Vol 6, №3, с. 48-58. (01.00.00, № 17).


### II bo'lim (2 часть; part 2)


7. Джавлиев С.К. О группах вычислимых автоморфизмов алгоритмических представлений унаров. «Современные задачи математики». Материалы Республиканской научной конференции, Термез, 21-23 октябрь, 2020, с.101-102.
8. Касымов Н.Х., Дадажанов.Р.Н., Джавлиев С.К. О степенях негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами. «Мальцевские чтения». Материалы Международная научная конференция, Новосибирск, 16-20 ноябрь, 2020, с. 116.
9. Касымов Н.Х., Джавлиев С.К. Об алгоритмических представлениях групп. «Сарымсаковские чтения». Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых, Ташкент, 16-18 сентября, 2021, с. 79-80.
10. Касымов Н.Х., Дадажанов.Р.Н., Джавлиев С.К. О нумерациях классических систем. «Мальцевские чтения». Материалы Международная научная конференция, Новосибирск, 20-24 сентября, 2021, с. 67.

11. Джавлиев С.К. Об арифметических нумерациях строгих линейных порядков. «Мальцевские чтения». Материалы Международная научная конференция, Новосибирск, 14-19 ноября, 2022, с. 68.

12. Джавлиев С.К. Вычислимо отделимые нумерации финитно аппроксимируемых алгебр. «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий». Международной научно-практической конференции, Нукус, 2-3 май, 2023, с. 61-63.

Avtoreferat «O‘zMU xabarlari» jurnali tahririyatida 2023 yil 25 dekabrda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

**Bosmaxona litsenziyasi:**

**9338**

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,25. Adadi 100 dona. Buyurtma № 5/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.