V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

BOBORAXIMOVA MAXBUBA IXTIYOROVNA

ATMOSFERADAGI, SUV MUHITIDAGI VA RAQOBAT TIZIMIDAGI JARAYONLARNING FAZOVIY-VAQT EKOLOGIK MODELLARI

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2024

UDK: 517.956.4

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

BOBORAXIMOVA MAXBUBA IXTIYOROVNA

ATMOSFERADAGI, SUV MUHITIDAGI VA RAQOBAT TIZIMIDAGI JARAYONLARNING FAZOVIY-VAQT EKOLOGIK MODELLARI

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy Attestatsiya komissiyasida №B2023.4.PhD/FM945 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (http://kengash.mathinst.uz) va “ZiyonNet” Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Taxirov Jozil Ostanovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Ashurov Ravshan Rajabovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	O’rozboyev G’ayrat O’rozaliyevich fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil « 16 » aprel kuni soat 17:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (99871) 207-91-40, website: www.mathinst.uz, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (180-raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil « 03 » aprel kuni tarqatildi.
(2024 yil « 03 » apreldagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A. Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., akademik

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A.A. Azamov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Reaksiya-diffuziya tizimlari xaotik harakat va kimyoviy reaksiyalar asosiy o‘yinchilar bo‘lgan muhitlar dinamikasining makroskopik tavsifini beruvchi matematik modellardir. Odatda reaksiya-diffuziya sistemalari bog‘langan bir nechta xususiy xosilali differensial tenglamalardan iborat. Ma’lumki, XXI-asr tadqiqotlarining eng faol yo‘nalishlaridan biri muhim matematik soha chiziqsiz, xususiy xosilali differensial tenglamalardir. Atrof-muhitdagi organizmlarning fazoviy tarqalishini modellashtirish, ayniqsa invaziv turlarga nisbatan juda faol tadqiqot sohasi bo‘lib qolmoqda. Olingan modellarning qat’iy matematik tahlili ko‘p yillar davomida murakkab matematik muammolarning boy manbai bo‘lib kelgan.

Mazkur dissertatsiya ishida fazoviy ekologiyaning ba’zi zamonaviy muammolarini reaksiya-diffuziya modellari yordamida fazoviy bir hil bo‘lmagan muhitda organizmlarning saqlanishi, raqobati va evolyutsiyasiga e’tibor qaratgan holda ko‘rib chiqilgan. Mavzular Lotka-Volterra raqobat modellari, daryo ekotizim modellari va raqobatdosh turlar modellarini o‘z ichiga olgan. Xususan, noma’lum chegara bilan bog‘liq muammolar. Masalan, atmosfera fizikasining bir qator ilmiy muammolarini hal qilish uchun aralashmalarning transformatsiyasini hisobga olgan holda, atmosferaning gaz va chang (aerozol) aralashmalari bilan ifloslanishini tezkor baholash va qisqa muddatli prognozlar talab qilinadi. Shu bilan birga ifloslanishning atrof-muhit bilan o‘zaro ta’siri deyarli o‘rganilmagan. Populyatsiyalar doimiy ravishda quyi oqimga oqib borsa, qanday qilib ular daryolarda saqlanadi? Bu muammo esa quyi oqimda yashash sharoitining sifati juda yomon bo‘lganda yanada kuchayadi. Fazoviy ekologiyaning asosiy muammolaridan biri atrof-muhitdagi fazoviy-bir hil bo‘lmagan muhitda ekzotik turlarning kirib kelishiga va mahalliy va ekzotik turlar o‘rtasidagi raqobat natijasiga qanday ta’sir qilishidir.

Mamlakatimizda innovatsion xarakterdagi fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqlarga ega bo‘lgan dolzarb yo‘nalishlariga qiziqish ortib bormoqda. Matematika fanlarining ustuvor yo‘nalishlari, ya’ni differensial tenglamalar va matematik fizika, amaliy matematika va matematik modellashtirish bo‘yicha xalqaro talablar darajasida ilmiy natijalarga erishish Matematika institutining asosiy vazifalari va faoliyati yo‘nalishlaridan biridir[1].

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017 yil 20 apreldagi PQ-2909- son “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi va 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada

[1]O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4387-son qarori

rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalarni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur dissertatsiya O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Atrof-muhit muammolarini matematik modellashtirish sohasidagi zamonaviy yutuqlar akademik G. I. Marchuk shogirdlari va izdoshlari asarlarida o‘z aksini topgan. Xususan, A.E Aloyanning ishlarida atmosferadagi gazsimon aralashmalar va aerozollarning o‘zgaruvchanligini aniqlaydigan dinamik va kinetik jarayonlarni birgalikda tavsiflash uchun asosiy matematik modellarni o‘z aksini topgan va V. V. Penenkoning ishlarida esa modellashtirish metodologiyasining ba’zi jihatlari, ya’ni variatsion tamoyillar va optimallashtirish usullari tasvirlangan sonli modellardan foydalanish va ma’lumotlar monitoringi qaralgan. V.I. Naats va I.E. Naatslarning natijalarida esa atmosferaning chegara qatlamida ifloslantiruvchi moddalarning beqaror tashilishini matematik va sonli modellashtirish sohasidagi yutuqlar ko‘rsatilgan. Populyatsiyani modellashtirish ekologiyada katta ahamiyatga ega, masalan, yirtqich va o‘ljaning o‘zaro ta’siri va raqobatini tasvirlash, hujayralar bo‘linish dinamikasini va yuqumli kasalliklarni bashorat qilish. Populyatsiya modellari turlar sonining tug‘ilish, o‘lim va pozitsiyadan pozitsiyaga (kosmosda) yoki bosqichdan bosqichga (yoshi, hajmi va boshqalar) harakati tufayli o‘zgarishini tavsiflaydi.

So‘nggi yarim asrda matematiklar va ekologlar populyatsiyalar o‘rtasidagi raqobat bo‘yicha ko‘plab tadqiqotlar o‘tkazdilar. Matematik modellar matematikaning turli sohalarida, jumladan oddiy differensial tenglamalar, ayirmali tenglamalar va xususiy xosilali differensial tenglamalar kabi har xil turlarda o‘rganiladi. Bunga R. S. Kantrell va S. Kozner, M. V. Xirsh va N. Smit, S. Chen, D. Tang va boshqalarning ishlari misol bo‘ladi. Dreyf paradoksi deb nomlanuvchi hodisaga, ya’ni suvda yashovchi organizmlarning doimo quyi oqimda yuvilib turishiga qaramay, advektiv yashash muhitida mavjud bo‘lish qobiliyatiga matematik tushuntirish berish lozim. Reaktsiya-diffuziya-adveksiya modellari oqim populyatsiyalarining fazoviy-vaqt dinamikasini tavsiflash uchun ishlatilgan va ular paradoks uchun ba’zi sifatli tushuntirishlarini beradi. Daryolar ekotizimlarida populyatsiyaning barqarorligini o‘rganish populyatsiya dinamikasini, bosqinlarni va daryo o‘zaniga bo‘lgan ehtiyojni tushunish uchun kalit hisoblanadi.

Hozirgi vaqtda dunyoning ko‘pgina yetakchi ilmiy markazlarida ekologik, biotibbiyot va shunga o‘xshash jarayonlarni matematik modellashtirishda keng qo‘llaniladigan noma’lum chegaraga ega reaksiya-diffuziya-adveksiya modellarini qurish va o‘rganish bo‘yicha jadal izlanishlar olib borilmoqda. Qayd etilgan sohalarda quyida nomlari keltirilgan mualliflarning natijalarini ta’kidlash lozim: A.

Fridman, C.Rao, Y.Du, Y.Tao, X.Chen, Z.Lin, L.Li, M.Vang va boshqalar. Biz bu bo‘ronli oqimga qo‘shilishga harakat qilamiz.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan ilmiy tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi.

Dissertatsiya ishi O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Matematika institutining “Tibbiy, biologik va fizik jarayonlarning matematik modellarini ishlab chiqish, tadqiqot, monitoring va prognozlashning matematik usullarini qurish” ilmiy yo‘nalishi bo‘yicha ilmiy tadqiqot rejasiga muvofiq amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi fazoviy bir xil bo‘lmagan muhitda ekologiya va raqobatdosh turlarning matematik modellariga doir parabolik tenglamalar va reaksiya-diffuziya-adveksiya tipidagi sistemalar uchun logistik masalalar nazariyasini qurishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

suv ekotizimlarida ifloslantiruvchi moddalarning tarqalishi va populyatsiya dinamikasini noma’lum chegaraga ega modellarni va yechish usullarini ishlab chiqish;

ifloslanishning atrof-muhit bilan o‘zaro ta’siri va ifloslantiruvchi moddalarning atmosferada tarqalishining modellarini qurish va yechish usullarini ishlab chiqish;

parabolik sistema va Keller-Segel xemotaksis modeli uchun ikki fazali masalaning davriy yechimlarini qurish;

yechish usullarini ishlab chiqish, aprior baholarni o‘rnatish, yechimning yagonalik va global mavjudlik teoremalarini isbotlash, taqqoslash tamoyilini o‘rnatish, yechimlarning ayrim xossalarini o‘rganish.

Tadqiqot ob’ekti. Atmosfera, suv muhiti va raqobatbardosh tizimdagi jarayonlarning fazoviy-vaqtinchalik ekologik modellari.

Tadqiqot predmeti Aprior baholar o‘rnatish muammolari, yechimning yagonalik va mavjudlik teoremalarining isboti, taqqoslash teoremalarining isboti, shuningdek qidirilayotgan funksiyalarning sifat xossalarini o‘rganishdan iborat.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot ishida matematik va funksional analizning usullari, differensial tenglamalar va matematik fizika, matematik modellashtirish usullaridan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ifloslangan suv ekotizimlarida ekologik toksik moddalarning populyatsiya dinamikasiga ta’siri jarayonining noma’lum chegarasi bo‘lgan jarayonga yo‘naltirilgan chiziqsiz model ishlab chiqilgan;

reaksiya-diffuziya-adveksiya tenglamasi yordamida tavsiflangan noma’lum chegaraga ega logistik masala shaklida daryo ekotizimlari populyatsiyasi dinamikasining chiziqsiz modeli ishlab chiqildi;

ifloslanishning atrof-muhit bilan o‘zaro ta'sirining konvektiv va diffuzion jarayonlarini hisobga olgan holda matematik modeli qurilgan va ikki komponentli chiziqsiz parabolik sistema uchun chegaraviy masalani echish uchun Gyolder fazolarining normalarida aprior baholarni olish usuli ishlab chiqilgan va ular asosida masalaning bir qiymatli echilishi isbotlangan;

atmosferaning chegara qatlamlarida zararli aralashmalarning ko‘chishi va tarqalishining matematik modeli reaksiya-diffuziya tenglamasi ko‘rinishida tuzilgan

va aprior baholar o‘rnatilgan hamda echimning turg‘unligi, yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

ikki raqobatdosh tur populyatsiyasining fazoviy-vaqtinchalik xatti-harakatlarini modellashtiruvchi parabolik tenglamalar sistemasi taklif qilinib, ularning ikkalasi ham bir xil signal beruvchi vosita tomonidan xemotaktik tarzda jalb qilinadi.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

Parabolik tenglamalar va raqobat-diffuziya-adveksiya sistemalari uchun ishlab chiqilgan va o‘zgartirilgan matematik modellar, shuningdek tavsiya etilgan tadqiqot usullari turli xil ekologik va biologik muammolarni hal qilish uchun qo‘llanilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik va funksional analiz usullari, differensial tenglamalar va matematik fizika, matematik modellashtirish usullari va zamonaviy matematikaning boshqa yangi natijalaridan foydalangan holda matematik yondashuvlar yordamida amalga oshirildi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, ular xususiy xosilali differensial tenglamalar nazariyasi va matematik fizikada, chiziqsiz parabolik tenglamalar sistemasi nazariyasida, shuningdek, turli xil ekologik va biologik jarayonlarni modellashtirishda qo‘llanilishi mumkin.

Natijalarning amaliy ahamiyati ularni ekologik, biotibbiyot va boshqa jarayonlarni kuzatish va prognozlashda qo‘llash imkoniyati bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi atmosferadagi, suv muhitidagi va raqobat tizimidagi jarayonlarning fazoviy-vaqt ekologik modellari bo‘yicha olingan natijalar asosida:

ifloslanishning atrof-muhit bilan o‘zaro ta’sirining konvektiv va diffuzion jarayonlarini hisobga olgan holda matematik modelidan IL5321091543 raqamli “Gaz ta’minoti tizimlarining topologik modellarini qurish va ularni simulyatsiya qilishni ishlab chiqish” mavzusidagi innovatsion loyihada gaz ta’minoti tizimlarining topologik modellarini qurishda foydalanilgan (Toshkent axborot texnologiyalari universitetining 2023 yil 12-dekabrdagi №4406/05-2-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijani qo‘llanishi gaz ta’minoti tizimlarining topologik modellarini qurish va ularning simulyatsiyasini ishlab chiqish imkonini beradi;

atmosferaning chegara qatlamlarida zararli aralashmalarning ko‘chishi va tarqalishining matematik modelidan A-OT-2021-108 raqamli “Orol dengizining ekologik holatini monitoring qilish va prognozlash axborot-tahliliy dasturiy mahsulotini ishlab chiqish” mavzusidagi amaliy loyihada ekologik holatini monitoring qilishda foydalanilgan (Raqamli texnologiyalar va AI rivojlantirish ilmiy-tadqiqot institutining 2024 yil 19-yanvardagi №03-8/028-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijani qo‘llanishi gaz va aerozol holatlaridagi ifloslantiruvchi moddalarning ko‘chishi va o‘zgarishi advektiv modellarini qurish imkonini beradi.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 5 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokama qilindi.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 12 ta ilmiy ish chop etilgan bo‘lib, shulardan, 5 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari (PhD) asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda, jumladan 1 tasi Scopus halqaro ma’lumotlar bazasiga kirgan jurnalda nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, to‘rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 90 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Dissertatsiyaning kirish qismida mavzuning dolzarbligi va zarurligi asoslab berilgan, tadqiqotning O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalarini rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlariga muvofiqligi qayd etildi, dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar haqida umumiy ma’lumot berildi, muammoni o‘rganish darajasi tavsiflandi, maqsad va vazifalar shakllantirildi.

Dissertatsiya ishining **“Parabolik tenglamalar sistemasi va noma’lum chegara nazariyasidan dastlabki ma’lumotlar”** deb nomlangan birinchi bobida dissertatsiya natijalarini taqdim etishda foydalaniladigan ma’lum natijalar keltirilgan.

Dissertatsiyada ko‘rib chiqilgan muammolar (shu jumladan noma’lum chegaralarga ega bo‘lgan) chiziqsiz bo‘lganligi sababli, asosiy maqsad aprior baholarni o‘rnatish, global yagona yechim haqidagi teoremalarni (ular asosida) isbotlash (vaqt bo‘yicha), shuningdek yechimning ba’zi xususiyatlarni va noma’lum chegaralarning xatti-harakati o‘rganishdir.

Dissertasiya ishining ikkinchi bobi “**Daryolar ekotizimlarida noma’lum chegara bilan bog‘liq muammolar**” suv havzalarining ekologik muammolarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Drift paradoksining va ichki oqim talablari yechimlaridan biri shundaki, diffuziv va advektiv harakatlar o‘rtasidagi muvozanat oqim populyatsiyasining saqlanib qolishiga imkon beradi. Savol tug‘iladi: ifloslangan daryolarda aholi zaharli moddalar bilan o‘zaro ta’sirlashganda bu muvozanat qanday o‘zgaradi? Bu o‘zgarish aholining yashashi va fazoda tarqalishiga qanday ta’sir qiladi?

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida ifloslangan suv ekotizimlarida populyatsiyalar dinamikasiga ekologik toksikantlarining ta’siri jarayonini ifodalovchi noma’lum chegarali chiziqsiz model o‘rganiladi. Advektiv muhitda populyatsiya va toksikantning o‘zaro ta’sirini tavsiflovchi jarayonga yo‘naltirilgan noma’lum chegara modeli taklif etiladi.

$$
\begin{aligned}
&a(u)u_t = d_1u_{xx} - k_1u_x + u[a_1 - b_1u - c_1v], \quad Q = \{(t,x): t > 0, 0 < x < L\},\\
&b(v)v_t = d_2v_{xx} - k_2v_x + [m(x) - b_2uv - c_2v], \quad D = \{(t,x): t > 0, 0 < x < s(t)\},\\
&d_1u_x(t,0) - k_1u(t,0) = u_x(t,L) = 0, t > 0,\ d_2v_x(t,0) - k_2v(t,0) = v(t,s(t)) = 0, t > 0, \quad (1)\\
&u(0,x) = u_0(x) > 0, 0 < x < L,\ v(0,x) = v_0(x) > 0,\ 0 < x < s_0 = s(0),\\
&\qquad s'(t) = -\mu v_x(t,s(t))e^{\frac{-k_2S(t)}{d_2}} \qquad t > 0,
\end{aligned}
$$

bunda $x = s(t)$ suv muhitida toksik moddalar tarqalish frontini ifodalaydi, qo‘zg‘aluvchan (noma’lum) chegara, $u(x,t)$-populyatsiya zichligi, $v(x,t)$-x nuqta va t vaqtdagi toksikantning konsentratsiyasi, modelning parametrlari d_1, d_2, k_1, k_2, a_1, b_1, c_1, b_2 va c_2 musbat konstantalardir. Chegaralangan funksiya $m(x)$-toksikantning daryoga ekzogen kirish tezligini ifodalaydi, $b_2 uv$–daryo muhiti tomonidan toksik moddalarni singdirish tezligi, b_2 – yutilish koeffitsienti, c_2 - toksik moddalarni chiqarishning o‘ziga xos tezligi.

1-lemma. $s(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$ funksiyalar (1) masalaning yechimlari bo‘lsa $t \in [0,T], T > 0$, u holda quyidagi $0 < u(t,x) \le \max\{\frac{a_1}{b_1}, \| u_0 \|\} = M_1, \quad t > 0, x \in [0,L],$

$$0 < v(t,x) \le \max_x\{|m(x)| + \| v_0 \|\} = M_2, \quad t > 0, x \in [0, s(t)], \; 0 < \dot{s}(t) \le M_3 \quad t > 0, \tag{2}$$

tengsizliklar o‘rinli va M_3 faqat berilganlarga bog‘liq.

Lemma maksimum prinsipi va taqqoslash teoremasi yordamida isbotlangan. (2) baho aralash fazali jarayonni ma’lum vaqt qiymatiga qadar davom ettirish uchun zaruriy shartdir, ya’ni. $s(t) < L, \quad 0 < t \le T.$

1-teorema. 1-lemmaning shartlari bajarilsin. U holda (1) masalaning yechimi yagona bo‘ladi.

Dastlab, biz noma’lum chegara uchun integral ifodani tuzib olamiz. Buning uchun (1) masalaning ikkinichi tenglamasinini quyidagicha yozamiz

$$(q(v))_t - d_2 v_{xx} - k_1 v_x = (m(x) - b_2 uv - c_2 v), \qquad D, \tag{3}$$

bunda $q(v) = \int_0^u b(\eta) d\eta.$ (3) tenglamani D soha bo‘yicha integrallaymiz

$$\frac{d_2}{\mu} s(t) = \frac{d_2}{\mu} s_0 + k_2 \int_0^t v(\eta, 0) d\eta - \int_0^{s(\eta)} q(v) d\xi + \int_0^{s_0} q(v_0) d\xi + \iint_D f(u,v) d\xi d\eta, \tag{4}$$

bunda $f(u,v) = [m(x) - b_2 uv - c_2 v)$. $s_1(t)$, $v_1(t,x)$, $u_1(t,x)$ va $s_2(t)$, $v_2(t,x)$, $u_2(t,x)$ funksiyalar (1) masalaning yechimlari, bundan tashqari, $y(t) = \min\left(s_1(t), s_2(t)\right)$, $h(t) = \max\left(s_1(t), s_2(t)\right)$ bo‘lsin. Keyinchalik, ayirmalar ko‘rib chiqiladi.

2-lemma. 2),4) shartlar va 1-lemmaning shartlari qanoatlantirsin. $m_1 - c_2 k < a$, $s_0 + \frac{\mu}{d_2} \int_0^{s_0} q(v_0(\xi)) d\xi < L$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsin. U holda $\lim_{t \to \infty} s(t) = s_\infty < L,$ ya’ni $s(t) < L$ ixtiyoriy $t > 0$.

Bunda (1) masalaning $v(t,x)$ uchun tenglamasini quyidagicha yozamiz

$$(e^{-cx} q(v))_t - (d_2 e^{-cx} u_x)_x = (m(x) - b_2 uv - c_2 v) e^{-cx}, \tag{5}$$

$$q(v) = \int_0^v b(\eta) d\eta, c = \frac{k_2}{d_2}.$$

(4) tenglamani $(0, s(t))$ oraliqda x bo‘yicha integrallaymiz

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}(e^{-c\xi}q(v(t,\xi)))d\xi+\frac{d_2}{\mu}\dot{s}(t)+k_2v(t,0)\le\int_0^{s(t)}e^{-cx}(m(x)-c_2v(t,x))dx. \qquad (6)$$

Integral hadning o‘ng tomonida quyidagicha almashtirish bajaramiz.

$$I=\int_0^{s(t)}e^{-cx}(m(x)-c_2v(t,x))dx\le\int_0^{s^*(t)}e^{-cx}(m_1-c_2k)dx+\int_{s^*(t)}^{s(t)}e^{-cx}(m(x)-c_2v(t,x))dx<0.$$

U holda, $v(t,0)$ musbatligini hisobga olgan holda (6) ifoda quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi $\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}(e^{-c\xi}q(v)d\xi+\frac{d_2}{\mu}\dot{s}(t)\le 0\cdot \qquad (7)$

(7) tengsizlikni t bo‘yicha integrallaymiz, $s(t)\le s_0+\frac{\mu}{d_2}\int_0^{s_0}q(v_0(\xi))d\xi<L.$

Bu yerdan $\lim_{t\to\infty}s(t)=s_\infty<L.$

Yuqori tartibli aprior baholar. Keyingi aprior baholarni o‘rnatish uchun biz sistemani quyidagicha alohida masalarga ajratib olamiz:

(A)
$$\begin{cases}u_t=\bar{a}(u)u_{xx}+f_1(u,v,u_x) & (t,x)\in Q,\\ u(0,x)=u_0(x), 0\le x\le L,\\ u_x(t,0)=0,\ u(t,L)=0.\end{cases}$$

(B)
$$\begin{cases}v_t=\bar{b}(v)v_{xx}+f_2(u,v,v_x) & (t,x)\in D,\\ v(0,x)=v_0(x), 0\le x\le s_0,\ \ v_x(t,0)=0,\ v(t,s(t))=0,\\ s(t)=-\mu\, v_x(t,s(t)).\end{cases}$$

Bunda
$$\bar{a}(u)=\frac{d_1}{a(u)},\quad f_1(\cdot)=\frac{1}{a(u)}[k_1u_x+u(a_1-b_1u-c_1v)],$$
$$\bar{b}(v)=\frac{d_2}{b(v)},\quad f_2(\cdot)=\frac{1}{b(v)}[k_2v_x+(h(x)-b_2uv-c_2v)].$$

2- teorema. Faraz qilaylik, 1-lemmaning shartlari bajarilsin va $\bar{D}$ sohada uzluksiz bo‘lgan $v(t,x)$ (B) masalaning shartlarini qanoatlantirsin. Agar $v(t,x)$ ning hosilalari v_{tx},v_{xx} D sohada kvadratik integrallanuvchi bo‘lsin. U holda quyidagi tengsizliklar o‘rinli

$$|u_x(t,x)|\le M_4(M_2,b_0,d_2,v_0),\quad (t,x)\in\bar{D},$$
$$|u_x(t,x)|^D_{1+\gamma}\le M_5(M_4),\quad |v_x(t,x)|^D_{2+\beta}\le M_6(M_5).$$

Baholar [2]ish natijalari yordamida olingan. (B) masalada $\tau=t, y=\frac{x}{s(t)}$ o‘zgartirishdan foydalanib, chegarani to‘g‘rilaymiz. D soha $\Omega=\{(t,y):0<\tau,0<y<1\}$, sohaga mos tushadi, $w(\tau,y)=v(\tau,ys(\tau))$ uchun esa cheklangan koeffitsientlar va o‘ng tomoni bo‘lgan tenglamani olamiz. [2]ishning natijalaridan foydalanib $\bar{\Omega}$ sohada$|w_y|,|w|_{1+\gamma}$ baholarni o‘rnatamiz. Yuqori tartibli hosilalar uchun aprior baholar chiziqli nazariyadan foydalanib olingan.

Yechimning mavjudligi. Barcha kerakli hisob-kitoblar o‘rnatilganligi sababli, [2] ishning, teorema 2) ishning g‘oyasi va natijalarini qo‘llaymiz .

[2] Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. Тр.ММО., Т.16. 1967. С.~329-346.

3-teorema. Faraz qilaylik, 2-teorema va 1-lemma shartlari qanoatlansin. $u(t,x)\in C_{2+\alpha}^{\bar{Q}}, v(t,x)\in C_{2+\beta}^{\bar{D}}, s(t)\in C_{1+\gamma}(0\le t\le T)$. U holda (1) masalaning yechimi mavjud.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida “drift paradoks” muammosi muhokama qilinadi. Daryo ekotizimlari bir yo‘nalishli oqim turlarning tarqalishiga ta’sir qiladigan muhitning yorqin namunasidir.

Biz daryo ekotizimlarining populyatsiya dinamikasining matematik modelini noma’lum chegaraga ega masala ko‘rinishida taklif qilamiz va reaktsiya-diffuziya-adveksiya tenglamasi bilan tavsiflangan quyidagi logistik masalaga asoslanadi.

$$\begin{gathered} k(u)u_t = du_{xx} + cu_x + u(a-bu), \\ D=\{(t,x): t>0, 0<x<s(t)\}, \\ u(0,x)=u_0(x), \quad 0<x<s(0) \quad s(0)=s_0,\ du_x(0,t)+cu(0,t)=0, \\ u(t,s(t))=0, \quad t>0,\ s'(t)=-\mu u_x(t,s(t)), \quad t>0, \end{gathered} \tag{8}$$

bunda $x=s(t)$ - turning tarqalish sohasini belgilovchi harakatlanuvchi (noma’lum) chegara, $u(t,x)$- (t,x) nuqtadagi turning kontsentratsiyasi. a,b,c lar musbat konstantalar bo‘lib, boshlang‘ich shart va “biologik sig‘imi” koeffitsiyenti uchun quyidagi shartlar o‘rinli.

$$u_0\in C^2([0,s_0]),\ u_0(x)>0,\ x\in[0,s_0), k(u)>k_0>0,\ u>0.$$

Yechimning mavjudligi. Yechim mavjudligini isbotlashdan oldin, biz Gyolder normasi uchun bir qancha aprior baholarni o‘rnatamiz $|u|_{1+\alpha}$ va $|u|_{2+\alpha}$ D_T sohada.

4-teorema. Faraz qilaylik u (8) masalaning yechimi bo‘lsin, $M_1=\max\limits_{Q}|u|$ va $u(t,x), u_x(t,x)$ $Q=\{(t,x): 0\leqslant x\leqslant s_0, \quad 0\leqslant t\leqslant T\}$ sohada uzliksiz. U holda quyidagi tengsizlik o‘rinli $|u_x(t,x)|\leqslant C_1(M_1), \quad (t,x)\in Q.$

Bundan tashqari, agar ikkinchi tartibli hosilalar u_{xx}, u_{tx} $L^2(Q)$ da mavjud bo‘lsin, u holda shunday $\alpha=\alpha(M,\delta)$, uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$|u|_{1+\alpha,Q}\leqslant C_2(M_1,C_1).$$

$u(t,x)$ Q sohada (8) masalaning yechimi bo‘lsin va o‘zining hosilalari bilan uzliksiz u_t, u_x, u_{xx} va $|u|_{2+\alpha,Q}<\infty$ bo‘lsin. U holda $|u|_{2+\alpha,Q}\leqslant C_3(M_1,C_1,C_2)$.

5-teorema. Aytaylik 3-va 4-teoremalarning shartlari o‘rinli bo‘lsin. U holda $u(t,x)\in C^{2+\alpha}(D)$, $s(t)\in C^{1+\alpha}[0,T]$ (8) masalaning yechimidir.

Biz yuqorida Gyolder normasida Shauder tipidagi kerakli baholarni o‘rnatdik, noma’lum chegara $x=s(t)$da t vaqtning ortib borayotgan funktsiyasidir. Shuningdek, $s'(t)$ uchun biz Gyolderlikni ko‘rsatdik va $C^{2+\alpha}$ normalar baholarni oldik. Shuning uchun biz teoremani isbotlashni standart mulohazalar bilan yakunlashimiz mumkin.

6-teorema. Agar $s_\infty<\infty$ bo‘lsa, u holda quyidagi tengsizlik o‘rinli $s_\infty\leqslant L_c=\dfrac{\pi}{2}\left(a-\dfrac{c^2}{2d}\right)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{d}.$

Bunda T ni fiksirlaymiz va quyidagi funksiyani qaraymiz $v(x) = u(T,x)$. (8) sistemadan quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$-dv'' - cv' = v(a - bv), \quad 0 < x < l,\ dv'(0) + cv(0) = 0, \quad v(l) = 0. \tag{9}$$

Yuqorida $u_x(T,x) = v'(x) < 0, 0 < x \leqslant L$ shu munosabat isbotlangan va $v(x) < \frac{a}{b}$. [3]ishning 4.4 Lemmasiga binoan (8) masala $a < \lambda_1$ bo'lganda trivial yechimga ega va $a > \lambda_1$ bo'lganda yagona musbat yechimga ega bo'ladi, bunda λ_1 asosiy xos qiymat hisoblanadi

$$-\lambda y'' - cy' = \lambda y, \quad -L < x < L,\ y(-L) = y(L) = 0. \tag{10}$$

Biz λ_1 uchun quyidagi aniq yechimni qurishimiz mumkin: $\lambda_1 = \frac{c^2}{2d} + d(\frac{\pi}{2L})^2 > 0$. Agar $a > \lambda_1$ bo'lsa, u holda $L \geqslant \frac{\pi}{2}(a - \frac{c^2}{2d})^{-\frac{1}{2}}\sqrt{d} = L_c$. Keyinchalik buni isbotlaymiz $s_\infty \leqslant L_c$. Bundan kelib chiqadiki $s(t) \leqslant L_c$. Biz $\lambda_1 = a$, sohaning chegaraviy qiymati sifatida olamiz va kritik qiymat deb ataymiz L_c: $L_c = \frac{\pi d}{\sqrt{2ad - c^2}}$.

Izoh. Adveksiya kritik qiymatga yetganda $C_c = \sqrt{2da}$, kritik sohaning o'lchami cheksiz bo'ladi va butun quyi oqim populyatsiyasi yuvilib ketadi.

Uchinchi bobda ekologik muammolarning reaktsiya-diffuziya modellari ko'rib chiqiladi. Modelning asosiy farazi shundan iboratki, atrof-muhit ifloslanishni ma'lum chegaragacha faol ravishda o'zlashtiradi va qayta ishlaydi.

Bobning birinchi paragrafida ifloslanishning atrof-muhit bilan o'zaro ta'sirining matematik modeli muhokama qilinadi. Ma'lumki, ifloslanish atrof-muhit bilan doimiy o'zaro ta'sirda bo'ladi, atrof-muhit ifloslanishiga tozalovchi ta'sir ko'rsatadi.Atrof-muhitni ifloslantiruvchi tizim yopiq hisoblanadi.

$u(t,P)(v(t,P))$ t vaqt va $P = (x,y,t)$ nuqtadagi ifloslanish kontsentratsiyasi (biomasa zichligi), Ω -silliq chegara bilan chegaralangan soha, $\partial\Omega$- va tashqi normal ν, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T), T > 0$.

Ikki komponentli chiziqsiz sistema uchun chegaraviy masala ko'rinishidagi modelni taklif qilamiz

$$\begin{aligned}
u_t &= \nabla(d_1(u)\nabla u) - \nabla(\theta u) + r_1 u(1 - \frac{u}{K_1}) - \frac{a_1 uv}{b_1 + c_1 u} \quad Q_T,\\
v_t &= \nabla(d_2(v)\nabla v) - \nabla(\theta v) + r_2 v(1 - \frac{v}{K_2}) - \frac{a_2 uv}{b_2 + c_2 v} \quad Q_T,\\
u(0,x) &= u_0(x) \geqslant 0, v(0,x) = v_0(x) \geqslant 0, x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad S_T.
\end{aligned} \tag{11}$$

Bunda $d_i(\xi)(i = 1,2)$ – chiziqsiz diffuziya koeffitsientlari, $\theta = \theta_x i + \theta_y j + \theta_z k$ -havo zarrachalarining tezlik vektori, $r_i\xi\left(1 - \frac{\xi}{K_i}\right)$ - logistika komponentining o'sish sur'ati,

[3] Pao, C.V., Nonlinaer Parabolic and Elliptic Equations. Plenum Press, New York. 1992.

$f_i = \frac{a_i uv}{b_i + c_i \xi}$ (agar $i = 1,$ bo‘lsa $\xi = u$, agar $i = 2$ bo‘lsa $\xi = v$) – trofik funktsiyalar (yoki o‘zaro ta’sir funktsiyalari), $f_1 \geqslant 0$ - ifloslantiruvchi moddalarning parchalanishi va kimyoviy o‘zgarishini tavsiflaydi (ya’ni ifloslantiruvchi moddalarni singdirish va qayta ishlash), $f_2 \geqslant 0$ - ifloslanishning atrof-muhitga halokatli ta’sirini tavsiflovchi atama, K_1 - ifloslanish kontsentratsiyasining chegaraviy qiymati, K_2 - biomassa chegara qiymati, r_1 - ifloslanish kontsentratsiyasining o‘sish sur’ati, r_2 - biomassaning ifloslanish kontsentratsiyasining o‘sish tezligi.

$\frac{b_1}{a_1} = \lambda_1 > 0$ -tabiatning ifloslanishga ta’sir qilish darajasini tavsiflaydi, ushbu qiymat qanchalik yuqori bo‘lsa, ifloslanishning tirik tabiat tomonidan singdirilish darajasi shunchalik past bo‘ladi va aksincha.

$\frac{b_2}{a_2} = \lambda_2 > 0$ - ifloslanishning tabiatga ta’siri darajasi.

Boshlang‘ich shart va model koeffitsiyentlari uchun quyidagi shartlar o‘rinli:

I. $d_i(u) \geqslant d_0 > 0, d_i(u) \in C^1([0,\infty))(i = 1,2)$ ixtiyoriy chegaralangan $u \geqslant 0$ uchun;

II. $a_i, b_i, c_i (i = 1,2)$ musbat konstantalar deb qabul qilinadi;

III. $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}, u_0(x), v_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), 0 < \alpha < 1; \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial v_0(x)}{\partial \nu} = 0$ $\partial\Omega$ da.

Masala quyidagi ketma-ketlik bo‘yicha o‘rganiladi. Birinchidan, yechimlarning lokal mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Keyinchalik, biz Schauder tipidagi ba’zi aprior baholarni o‘rnatamiz va ular asosida yechimlarning global mavjudligi va yagonaligi isbotlaymiz.

7-teorema. Faraz qilaylik I.-III. shartlar bajarilsin.U holda (11) $U(x,t) = (u,v) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T)$ masalaning kichik $T > 0$ uchun yagona yechimi mavjud, qaysiki $\| U_0(x) \|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} = \| u_0(x) \|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} + \| v_0(x) \|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}$.

Bundan tashqari, $u(x,t) \geqslant 0, v(x,t) \geqslant 0$.

Yechimning global mavjudligi. Dastlab, (11) masalani yechish uchun bir necha aprior baholarni o‘rnatamiz.

8-teorema. Faraz qilaylik, $U = (u,v) \in C^{2,1}(Q_T)$ (11) masalaning yechimidir. U holda quyidagi tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi $0 \leqslant u \leqslant K_1, \quad 0 \leqslant v \leqslant K_2$.

(11) masalaning birinchi tenglamasidan quyidagi ifodaga erishamiz

$$u_t - d_1(u)\Delta u - d_1'(u)|\nabla u|^2 + \nabla \cdot (\theta u) - r_1 u\left(1 - \frac{u}{K_1}\right) + \\ + \frac{a_1 uv}{b_1 + c_1 u} = 0 \leqslant \frac{m_1 K_1 v}{b_1 + c_1 K_1}, Q_T, \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, S_T, u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, x \in \Omega, \tag{12}$$

bundan ko’rinadiki K_1 (12) masalaning yuqori yechimidir va $u \equiv 0$ esa quyi yechimidir. Maksimum prinsipiga ko‘ra quyidagi tengsizlik o’rinli $0 \leqslant u(x,t) \leqslant K_1$ Boshqa tomondan, (12) masalaning ikkinchi tenglamasidan quyidagi kelib chiqadi

$$v_t - a_2(v)\Delta v - d_2'(v)|\nabla v|^2 + \nabla\cdot(\theta v) - r_2\left(1-\frac{v}{K_2}\right)+$$

$$+\frac{a_2 uv}{b_2+c_2 v}=0\leqslant\frac{a_2 K_2 u}{b_2+c_2 K_2} \quad Q_T\, da,\ \frac{\partial v}{\partial \nu}=0 \quad S_T\, da, v(x,0)=v_0(x), x\in\Omega,$$

Xuddi shunday $0\leqslant v(x,t)\leqslant K_2$ tengsizlik o‘rinli bo’ladi.

4-lemma. Faraz qilaylik $U=(u,v)\in C^{2,1}(Q_T)$ (11) maslalaning yechimi bo‘lsin. U holda $\|u\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)}\leqslant N, \|v\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)}\leqslant N$.

9-teorema. I.-III. shartlar o‘rinli bo‘lsa $U=(u,v)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ ixtiroriy $T>0$ lar uchun (11) masalaning yechimi yagonadir. Bundan tashqari,

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant K_1, \quad 0\leqslant v(x,t)\leqslant K_2, \quad x\in\Omega, t>0.$$

Ikkinchi paragrafda atmosferada ifloslantiruvchi moddalar tarqalishining logistik modeli ko‘rib chiqiladi. Ω chekli sohada R^3 silliq chegara bilan qaraladi $\partial\Omega$, $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $S_T=\partial\Omega\times(0,T), T>0$

Ushbu ishda biz uch o‘lchovli parabolik-logistik tenglama uchun chegaraviy masala bilan tavsiflangan atmosfera chegara qatlamidagi aralashmalarning reaktsiya-diffuziya tashishini o‘rganamiz.

$$\partial u(P,t)/\partial t - \left[\partial(d_2(P,t)u_x(P,t))/\partial x + \partial(d_3(P,t)u_y(P,t))/\partial y + \partial(d_1P,t)u_z(P,t))/\partial z\right] -$$

$$\partial\left(c_2(P,t)u\right)/\partial x - \partial\left(c_3(P,t)u\right)/\partial y - \partial\left(c_1(P,t)u\right)/\partial z = u(a-bu) \quad Q_T. \quad (13)$$

(13) tenglamani quyidagi ko‘rinishda qayta yozamiz

$$Lu\equiv L_0 u - u_t \equiv \left(d_2 u_{xx} + d_3 u_{yy} + d_1 u_{zz}\right) + a_2 u_x + a_3 u_y + d_1 u_z + cu - u_t = bu^2 \quad Q_T, \quad (14)$$

boshlang‘ich va chegara shartlari bilan

$$u(P,0)=\varphi(P), \quad P\in\Omega, \ u(P,t)=\psi(P,t) \qquad S_T, \qquad (15)$$

$$P=P(x,y,z), P\in\Omega\subset R^3, t\in[0,T], \quad a_2(P,t)=d_{2x}(P,t)+c_2(P,t),$$
$$a_3(P,t)=d_3 y(P,t)+c_3(P,t), \quad a_1(P,t)=d_1 z(P,t)-c_1(P,t),$$
$$c(P,t)=c_2 x + c_3 y + c_1 z + a.$$

Bunda $u(P,t)$ - P nuqta va t vaqtdagi joylashgan aralashmalarning kontsentratsiyasi, a,b-musbat konstantalardir va a - kimyoviy jarayonlar tufayli ma’lum hajmdagi aralashmalarni olib tashlash yoki kiritish darajasi, b - konsentratsiyaning o‘zgarish tezligi, $d_i (i=\overline{1,3})$ - turbulent diffuziya koeffitsientlari $c_i (i=\overline{1,3})$ - shamol tezligi vektorining komponenti.

“**Parabolik sistemalarning davriy yechimlari to‘g‘risida”** deb nomlangan **to‘rtinchi bobda** chiziqli davriy chegara shartlariga ega bo‘lgan bog‘langan parabolik tenglamalar sistemalarining fazoviy davriy yechimlari tuzilgan.

Bobning birinchi paragrafida davriy chegara shartlariga ega parabolik sistema uchun ikki fazali masala o‘rganiladi. $D_1=\{(x,t): -l\le x\le 0, 0\le t\le T\}$-daryoning pastki qismini ifodalaydi va $D_2=\{(x,t): 0\le x\le l, 0\le t\le T\}$-daryoning yuqori qismini ifodalaydi. Turlarning evolyutsiyasi quyidagi masala bilan tavsiflanadi:

$$u_t - u_{xx} - c_1 u_x = u(1-u), \quad (t,x)\in D_1, \quad v_t - v_{xx} - c_2 v_x = v(1-v), \quad (t,x)\in D_2,$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad -l\le x\le 0, \tag{16}$$
$$v(x,0)=v_0(x),\quad 0\le x\le l,\ u(t,-l)=v(t,l),u_x(t,-l)=v_x(t,l),\quad 0\le t\le T,$$
$$u(t,0)=v(t,0),u_x(t,0)=v_x(t,0)\quad 0\le t\le T,.$$

Aprior baholar va global mavjudlik.

5-lemma. $u(t,x)$ va $v(t,x)$ (16) masalaning yechimi bo‘lsin. U holda quyidagi tengsizliklar o‘rinli

$0\le u(t,x)\le M_1=1,\quad (t,x)\in D_1,\ 0\le v(t,x)\le M_2=1,\quad (t,x)\in D_2,$

10-teorema. D_1 va D_2 sohada $u(t,x), v(t,x)$ funksiyalar, hamda ularning hosilalari u_x, v_x bilan uzluksiz bo‘lsin va (16) masalaning shartlarini qanoatlantirsin. U holda quyidagi tengsizlik o‘rinli $|u_x(t,x)|\le C_1(M_1),\quad (t,x)\in D_1, |v_x(t,x)|\le C_2(M_2),\quad (t,x)\in D_2$.

Agar $u(t,x),v(t,x)$ funksiyalar $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ sohada kvadratlari bilan jamlanuvchi $u_{xx}(v_{xx})$, $u_{tx}(v_{tx})$ umumlashgan hosilaga ega bo‘lsa, u holda $|u|^{D_1}_{1+\alpha_1}\le C_3(M_1,C_1),\quad |v|^{D_2}_{1+\alpha_2}\le C_4(M_2,C_2).$

$u(t,x)$ va $v(t,x)$ funksiyalar x ga nisbatan ikkinchi tartibli hosilalari bilan birga uzluksiz va $|u|^{D_1}_{2+\alpha_1}<\infty,\quad |v|^{D_2}_{2+\alpha_2}<\infty.$

U holda $|u|^{D_1}_{2+\alpha_1}\le C_5(M_1,C_1,C_3),\quad |v|^{D_2}_{2+\alpha_2}\le C_6(M_2,C_2,C_4).$

Funksiyani kiritamiz. $w(t,x)=\begin{cases}u(t,x), & (t,x)\in D_1\\ v(t,x), & (t,x)\in D_2\end{cases}$

U holda (16) masalni quyidagicha qayta yozishimiz mumkin

$$w_t-w_{xx}-c_1w_x-b_1(t,x)w=0,\quad (t,x)\in Q=D_1\cup D_2$$
$$w(0,x)=w_0(x),\quad -l\le x\le l,\ w(t,-l)=w(t,l),w_x(t,-l)=w_x(t,l) \tag{17}$$

Belgilangan (teorema 3[2]) teoremada $w_{|x=\pm l}=0$ chegaraviy shartlar mavjudligi sababli muallif yechimni yon tomonlar orqali davom ettirish usulini taklif qiladi. Bizning holatda, $w(t,x)$ funktsiyani Q soha bo‘yicha yon chegaralariga davom ettirishni taklif qilamiz

$$w(t,x)=w(t,2l+x),\qquad -3l\le x\le -l,\ w(t,x)=w(t,x-2l),\qquad l\le x\le 3l,$$

Yangi funksiya (belgisini saqlab qolaylik $w(t,x)$) to‘rtburchaklarning barcha nuqtalarida $\{(t,x):0\le t\le T,|x+\frac{3}{2}l|\le\frac{3}{2}l\}$ uzluksiz hosilaga ega va 10-teorema shartlaridagi kabi xususiyatlarga ega (17) ko‘rinishdagi “kengaytirilgan” tenglamani qanoatlantiradi.

Bunda yuqorida keltirilgan teorema asosida ichki baholar olinadi va chegaralarda baholar yuqoridagi qoidaga muvofiq davom ettirishish usuli bilan topiladi.

Qabul qilish usulidan foydalanib $|u|^{D_1}_{1+\alpha_1}\le C_3(M_1,C_1),\quad |v|^{D_2}_{1+\alpha_2}\le C_4(M_2,C_2).$ uchun muammoga U va V topamiz $|u_x(t,x)|^{D_1}_{1+\gamma_1}\le C_1,|v_x(t,x)|^{D_2}_{1+\gamma_2}\le C_2.$

$u_t(t,x)$ va $v_t(t,x)$ lar uchun baholar (16) masala tenglamalaridan olinadi.

11-teorema. Aytaylik, 10-teorema shartlari bajarilsin. U holda (16) masala yechimi mavjud bo‘ladi va $u(t,x)\in C^{2+\alpha_1}(D_1), v(t,x)\in C_{2+\alpha_2}(D_2)$.

Ikkinchi paragrafda logistik manbaga ega Keller-Segel modelining davriy yechimlari o‘rganiladi. Biz $\Omega=\{(x,t)\ ;\ 0<x<L, t>0\}$ sohadagi ikkita raqobatdosh turning populyatsiya dinamikasini modellashtiradigan kvazi chiziqli tizim uchun davriy chegara shartlari bilan bog‘liq muammoni o‘rganamiz, ularning ikkalasi ham bir xil signal beruvchi modda tomonidan xemotaksis tarzda tortiladi

$$u_t = (d_1u_x - \chi u w_x)_x + \mu_1(1-u-a_1v)u,\ v_t = (d_2v_x - \xi v w_x)_x + \mu_2(1-a_2u-v)v,\ (x,t)\in\Omega,$$
$$w_t = w_{xx} - \lambda w + u + v, \qquad (18)$$
$$u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x),\ w(x,0)=w_0(x), \quad x\in(0,L),$$
$$U(0,t)=U(L,t),\ U_x(0,t)=U_x(L,t), \quad t>0,$$

bunda $U(x,t)=(u,v,w)$, $u(x,t)$ va $v(x,t)$ ikki raqobatdosh turning (x,t) fazoviy vaqt bo‘yicha zichligi va $w(x,t)$ –jalb qiluvchi kontsentratsiya, d_i, μ_i, a_i, $i=1,2$, λ - musbat konstantalardir, χ va ξ-manfiy bo‘lmagan o‘zgarmaslar deb qabul qilinadi.

Yechimlning mavjudligi. Dastlab lokal mavjudlikni olish uchun

H. Ammanning ma’lum natijalarini qo‘llaymiz, keyin esa (u, v, w) lar uchun global mavjudlikni L_1 - baholarni o‘rnatish orqali erishamiz.

Apriori baholar va global mavjudlik. Endi L_p baholarni o‘rnatishga o‘tamiz (u,v,w) - yuqoridagi shartlar ostida. (18) masalaning global mavjudligi bir nechta lemmalarning natijasidir. Manfiy yechimning yo‘qligi parabolik maksimum printsipidan kelib chiqadi.

6-lemma. $\mu_1, \mu_2 > 0$ bo‘lsin va (u,v,w) $(0,T_{max})$uchun (18) sistemaning yagona manfiy bo‘lmagan yechimi bo‘lsin. Shunday o‘zgarmas $C>0$ mavjudki $\|u_0, v_0, w_0\|_{L^1}$ va L ga bog‘liq, u holda quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(0,L)} + \|v(\cdot,t)\|_{L^1(0,L)} + \|w(\cdot,t)\|_{L^1(0,L)} \le C, \quad \forall t\in(0,T_{max}).$$

7-lemma. (u_0, v_0, w_0)lar uchun 6-lemmadagi kabi shartlarni qabul qilaylik. U holda ixtiyoriy $q\in(1,\infty)$ uchun, shunday musbat o‘zgarmas $C(q)$ mavjud, qaysiki quyidagi tengsizlik bajarilsin $\|w(\cdot,t)\|_{w^{1,q}(0,L)} \le C(q), \forall t\in(0,T_{max})$.

12-teorema. $a_i, \mu_i, i=1,2,$ va λ-musbat konstantalar bo‘lsin. U holda musbat berilganlar uchun $(u_0,v_0,w_0)\in H^1(0,L)\times H^1(0,L)\times H^1(0,L)$ va

o‘zgarmaslar $\chi, \xi \in R$, $[0,L]\times[0,\infty)$ sohada (18) masala yagona chekli musbat yechimga ega $(u(x,t), v(x,t), w(x,t))$ xuddi shunday $(u(\cdot,t), v(\cdot,t), w(\cdot,t))\in C$ va $([0,\infty), H^1(0,L)\times H^1(0,L)\times H^1(0,L))(u,v) \in C^{2+\alpha,2+\alpha,1+\alpha}_{loc}([0,L]\times[0,\infty))$, $\alpha\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

Xulosa

Dissertatsiya biologik va ekologik jarayonlarda chiziqsiz reaksiya-diffuziya modellarini (shu jumladan noma’lum chegaralarga ega) qurish va o‘rganishga bag‘ishlangan bo‘lib, quyidagi natijalarga erishildi:

1. Ifloslangan daryo yoki oqimdagi populyatsiya va toksikant o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirni tavsiflovchi jarayonga yo‘naltirilgan, noma’lum chegaraviy fazoviy vaqt modeli taklif qilingan. Bu yerda noma’lum chegara toksikantning suv muhitida tarqalish frontini tavsiflaydi.
2. “Drift paradoks hodisasi” ni o‘rganish uchun noma’lum chegaraga ega matematik model qurilgan. Taklif etilayotgan model bir nechta tekshiriladigan farazlarni ilgari suradi. Bunda, adveksiya kritik qiymatga yetganda kritik sohaning kattaligi cheksiz bo‘lib va butun populyatsiya quyi oqimga yuvilib ketadi.
3. Ifloslanish tarqalishining konvektiv va diffuziya jarayonlarini hisobga olgan holda ifloslanishning atrof-muhit bilan o‘zaro ta’sirining matematik modeli tuzildi va masalaning global bir qiymatli yechimga egaligi isbotlandi. Shuni ta’kidlash kerakki, populyatsiya modellarining o‘zaro ta’sirining umumiy g‘oyasi ifloslanish-tabiat tizimiga ham qo‘llash mumkin.
4. Atmosferaning chegara qatlamlarida zararli aralashmalarning o‘tishi va tarqalishining matematik modeli reaksiya-diffuziya tenglamasi shaklida tuzilgan. Bu tenglama uchun aprior baholar olingan va yechimning turg‘unligi, yagonaligi va mavjudligi masalalari hal qilingan.
5. Chiziqli davriy chegara shartlari bilan bog‘liq parabolik tenglamalar sistemalarining fazoviy o‘zgaruvchisi bo‘yicha davriy yechimlari qurilgan.
6. Uchta parabolik tenglamalar sistemasiga keladigan bir xil signal moddasi tomonidan kimyo-taktik jalb qilingan turlarning ikki raqobatdosh populyatsiyasining fazoviy-vaqt holatini ifodalaydigan model qurildi. Bunda individlar tasodifiy diffuziya va kimyo-taktik holatiga ko‘ra harakat qilishi va ikkala populyatsiya ham klassik Lotka-Volterra kinetikasiga ko‘ra ko‘payishi hamda o‘zaro raqobatlashishi kelib chiqadi.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БОБОРАХИМОВА МАХБУБА ИХТИЁРОВНА

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ В АТМОСФЕРЕ, ВОДНОЙ СРЕДЕ И В КОНКУРЕНТНОЙ СИСТЕМЕ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2024

Тема диссертации доктора философии (DoctorofPhilosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за №B2023.4.PhD/FM945.

Диссертация выполнена в Институте математики им. В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz/ и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» по адресу www.ziyonet.uz

Научный руководитель:	**Тахиров Жозил Останович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ашуров Равшан Ражабович** доктор физико-математических наук, профессор
	Урозбоев Гайрат Урозалиевич доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 16 » апреля 2024 года в 17:00 часов на заседании Научного совета Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазрский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)207-91-40, e-mail: kengash@mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 180). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазрский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 03 » апреля 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от « 03 » апреля 2024 года).

У.А. Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К. Адашев
Научный секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.А. Азамов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Системы реакции-диффузии представляют собой математические модели, которые обеспечивают макроскопическое описание динамики сред, в которой хаотическое движение и химические реакции являются основными игроками. Обычно системы реакции-диффузии состоит из нескольких связанных дифференциальных уравнений в частных производных. А нелинейные уравнения в частных производных, важная математическая область, были одной из наиболее активных областей исследований в XXI веке. Моделирование пространственного распространения организмов в окружающей среде продолжает оставаться весьма активной областью исследований, особенно в отношении инвазивных видов. Строгий математический анализ полученных моделей на протяжении многих лет был богатым источником сложных математических задач.

В диссертации мы рассматриваем некоторые современные проблемы пространственной экологии с помощью моделей реакции-диффузии, уделяя особое внимание выживанию, конкуренции и эволюции организмов в пространственно-неоднородных средах. Темы включают модели конкуренции Лотки-Вольтерры, модели речных экосистем и модели конкурирующих видов. В частности, проблемы со свободной границей. Напр., для решения с учетом трансформации примесей, ряда научных проблем физики атмосферы необходимы экспресс-оценки и краткосрочные прогнозы загрязненности атмосферы газовыми и пылевыми (аэрозольными) примесями. Почти не изучены вопросы взаимодействия загрязнения с окружающей средой. Как популяции сохраняются в ручьях, если они постоянно подвергаются сносу вниз по течению? Эта проблема усугубляется, когда качество среды обитания в нижнем течении очень плохое. Один из основных вопросов пространственной экологии заключается в следующем: как пространственная неоднородность окружающей среды влияет на вторжение экзотических видов и на результат конкуренции местных и экзотических видов?

В нашей стране возрастает интерес к актуальным направлениям фундаментальных наук инновационного характера, имеющих научное и практическое применение. Получение научных результатов на уровне международных требований в приоритетных областях математических наук, а именно, дифференциальных уравнениях и математической физике, прикладной математике и математическом моделировании , является одной из основных задач и направлений деятельности Института математики[1].

Тема и объект исследования настоящей диссертации соответствуют задачам, обозначенным в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-

[1]Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и №ПП-4387 от 09 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Современные достижения в области математического моделирования экологических проблем отражены в работах учеников и последователей академика Г. И. Марчука. В частности, в работах А.Э. Алояна представлены основные математические модели для совместного описания динамических и кинетических процессов, определяющих изменчивость газообразных примесей и аэрозолей в атмосфере, а в работах В. В. Пененко изложены некоторые аспекты методологии моделирования, а именно вариационные принципы и методы оптимизации для совместного использования численных моделей и данных мониторинга. В результатах Наац В.И. и Наац И.Э. изложены достижения в области математического и численного моделирования нестационарного переноса загрязняющих примесей в пограничном слое атмосферы. Популяционное моделирование имеет большое значение в экологии, например, для описания взаимодействия и конкуренции хищник-жертва, для прогнозирования динамики деления клеток и инфекционных заболеваний. Популяционные модели описывают изменения числа видов вследствие рождения, смертности и перемещения от положения к положению (в пространстве) или от этапа к этапу (возраст, размер и т. д.).

За последние полвека математики и экологи провели множество исследований, посвященных изучению конкуренции между популяциями. Математические модели изучаются в различных типах, таких как обыкновенные дифференциальные уравнения, разностные уравнения и уравнения в частных производных. Например, работы R. S Cantrell and C.Cosner, M. W. Hirsch and H. Smith, S. Chen, D. Tang и др. Надо была дать математическое объяснение феномену, известному как парадокс дрейфа, то есть способность водных организмов существовать в адвективных средах обитания несмотря на то, что постоянно омывается вниз по течению. Модели реакции-диффузии-адвекции использовались для описания пространственно-временной динамики популяции ручьев, и они

обеспечивают некоторые качественные объяснения парадокса. Изучение устойчивости популяции в речных экосистемах является ключом к пониманию динамики популяции, инвазий и потребностей русла реки

В настоящее время во многих ведущих научных центрах мира проводятся интенсивные исследования по построению и изучению моделей реакции-диффузии-адвекции со свободной границей, которые широко используются при математическом моделировании экологических, медико-биологических и подобных процессов. По указанным направлениям нужно отметить результаты авторов**:** A. Friedman, C. Pao, Y. Du, Y. Tao, X.Chen, Z. Lin, L. Li, M. Wang и другие. Мы постараемся присоединиться в этот бурный поток.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательского учреждения, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по научному направлению «Разработка и развитие математических моделей медико-биологических и физических процессов, построение математических методов исследования, мониторинга и прогнозирования» Института математики АН РУз.

Целью исследования является построение и развитие теории логистических задач для параболических уравнений и систем типа реакция-диффузия-адвекция математических моделей экологии и конкурирующих видов в пространственно-неоднородных средах.

Задачи исследования:

разработка моделей и методов решения задач со свободной границей распространения загрязняющих веществ и динамика популяций в водных экосистемах;

построение моделей и методов решения задач взаимодействия загрязнений с окружающей средой и распространения загрязняющих веществ в атмосфере;

построение периодических решений двухфазной задачи для параболической системы и модели хемотаксиса Келлера-Сегеля**;**

разработка способов решения, установление априорных оценок, доказательство теорем единственности и глобального существования решения, установление принципа сравнения, изучение некоторых свойств решений.

Объектами исследования являются пространственно-временные экологические модели процессов в атмосфере, водной среде и в конкурентной системе.

Методы исследования. В исследованиях использованы результаты математического и функционального анализа, методы дифференциальных уравнений и математической физики, методы математического моделирования.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Разработана процессно-ориентированная нелинейная модель со свободной (неизвестной) границей процесса влияния экологических токсикантов на динамику популяций в загрязненных водных экосистемах.

разработана нелинейная модель популяционной динамики речных экосистем в виде логистической задачи со свободной границей, описываемой уравнением реакции-диффузии-адвекции;

построена математическая модель взаимодействия загрязнений с окружающей средой с учетом конвективных и диффузионных процессов распространения примеси и разработан метод получения априорных оценок в нормах пространств Гёльдера для решения краевой задачи для двухкомпонентной нелинейной параболической системы и на их основе доказана однозначная разрешимость задачи;

построена математическая модель переноса и диффузии вредных примесей в пограничных слоях атмосферы в виде уравнения реакции-диффузии и установлены априорные оценки, решены вопросы устойчивости, единственности и существования решения;

предложена система параболических уравнений, которая моделирует пространственно-временное поведение двух конкурирующих популяций видов, оба из которых хемотаксически привлекаются одним и тем же сигнальным агентом.

Практические результаты исследования состоит в следующем:

Разработанные и модифицированные математические модели для для параболических уравнений и систем конкуренции-диффузии-адвекции, а также предложенные способы исследования могут быть применены при решении различных экологических и биологических проблем.

Достоверность результатов исследования обоснована при помощи методов математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений и математической физики, методов математического моделирования и других новых результатов прикладной математики.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследований заключается в том, что они могут найти применение в теории уравнений в частных производных и математической физике, в теории систем нелинейных параболических уравнений, а также при моделировании различных экологических и биологических процессов.

Практическая значимость результатов обоснована возможностью использования в мониторинге и прогнозировании экологических, биомедицинских и других процессов.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по исследованию некоторых математических моделей экологии и конкурирующих видов в пространственно-неоднородных средах были внедрены в практику по следующим направлениям:

предложенные математические модели окружающей среды с учетом конвективных и диффузионных процессов использовались при построении топологических моделей систем газоснабжения в рамках инновационного

проекта IL-5321091543 «Построение топологических моделей систем газоснабжения и разработка их симуляции» (Справка ТУИТ № 4406/05-2 от 12 декабря 2023 г.). Применение научных результатов позволило построить топологические модели систем газоснабжения и разработать их симуляции;

предложенные экологические математические модели переноса и диффузии вредных примесей в пограничных слоях атмосферы использовались при мониторинге экологического состояния в рамках прикладного проекта A-OT-2021-108 «Разработка информационно-аналитического программного продукта мониторинга и прогнозирования экологического состояния Приаралья» (Справка НИИ цифровых технологии и развитие ИИ № 03-8/028 от 19 января 2024 г.). Применение научных результатов позволило построить адекватные модели переноса и трансформации загрязняющих примесей в газовом и аэрозольных состояниях.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были обсуждены на 4 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 6 статей опубликованы в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соисканий ученой степени доктора философии (PhD), в том числе 1 статья опубликована в зарубежном издании.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 90 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности и востребованности темы диссертации, отмечено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, описана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи.

В первой главе диссертации под названием **«Предварительные сведения из теории систем параболических уравнений и задач со свободной границей»,** приведены некоторые известные результаты, которые будут использованы при изложении результатов диссертации.

Поскольку рассматриваемые в диссертации задачи (в т.ч. со свободными границами) являются нелинейными, основной целью является установление априорных оценок, доказательство (на их основе) теорем о глобальной однозначной разрешимости (во времени), а также изучение некоторых свойств решений и поведение свободной границы.

Вторая глава диссертации **«Задачи со свободной границей в речных экосистемах»,** посвящена изучению экологических проблем водных бассейнов. Одним из решений парадокса дрейфа и требований внутреннего

потока является то, что баланс между диффузионными и адвективными движениями позволяет популяции потока сохраняться . Возникает вопрос: как меняется этот баланс при взаимодействии популяции с токсикантом в загрязненных реках? Как это изменение влияет на выживание и пространственное распределение популяции?

В первом параграфе второй главы исследована нелинейная модель со свободной границей процесса влияния экологических токсикантов на динамику экспонированных популяций в загрязненных водных экосистемах. Предложена процессно-ориентированная модель свободной границей, описывающая взаимодействие популяции и токсиканта в адвективной среде

$$
\begin{aligned}
&a(u)u_t = d_1u_{xx} - k_1u_x + u[a_1 - b_1u - c_1v], Q = (t,x): t > 0, 0 < x < L,\\
&b(v)v_t = d_2v_{xx} - k_2v_x + [m(x) - b_2uv - c_2v], D = (t,x): t > 0, 0 < x < s(t) < L,\\
&\qquad d_1u_x(t,0) - k_1u(t,0) = u_x(t,L) = 0, t > 0, \qquad (1)\\
&\qquad d_2v_x(t,0) - k_2v(t,0) = v(t,s(t)) = 0, t > 0,\\
&\qquad u(0,x) = u_0(x) > 0, 0 < x < L, v(0,x) = v_0(x) > 0, 0 < x < s_0 = s(0),\\
&\qquad s'(t) = -\mu v_x(t,s(t))e^{\frac{-k_2S(t)}{d_2}}, t > 0,
\end{aligned}
$$

где $x = s(t)$ подвижная (неизвестная) граница, определяющая фронт распространения токсиканта в водной среде, $u(x,t)$ плотность популяций, $v(x,t)$ концентрация токсиканта в точке x и время t, параметры модели d_1, d_2, k_1, k_2, a_1, b_1, c_1, b_2 и c_2 являются положительными константами. Ограниченная функция *m(x)* представляет собой скорость экзогенного поступления токсиканта в реку, b_2uv–скорость поглощения токсиканта речной средой, b_2–коэффициент поглощения, c_2 -удельная скорость выделения токсиканта.

Лемма 1. Пусть $(u,v,s(t))$ являются решением (1) для $t \in [0,T], T > 0$. Тогда

$$0 < u(t,x) \le \max\{\frac{a_1}{b_1}, \max_x |u_0(x)|\} = M_1, \quad t > 0, x \in [0,L], \qquad (2)$$

$$0 < v(t,x) \le \max_x\{|H(x)| + \max_x |v_0(x)|\} = M_2, \quad t > 0, x \in [0,s(t)], 0 < \dot{s}(t) \le M_3 \quad t > 0,$$

где M_3 в зависись только от данных.

Доказательство проводится с использованием принципа максимума и теоремы сравнения.

Оценка (2) является необходимым условием продолжения смешанно-фазового процесса до заданного значения времени, т.е. $s(t) < l, \quad 0 < t \le T.$

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда решение задачи (1) единственно.

Сначала выведем интегральное выражение для свободной границы. Для этого перепишем первое уравнение (1) в виде

$$(q(v))_t - d_2v_{xx} - k_1v_x = (m(x) - b_2uv - c_2v), \qquad D, \qquad (3)$$

где $q(v)=\int_0^u b(\eta)d\eta$. Интегрируя (3) по D $\int_0^t d\eta \int_0^{s(\eta)} [(d_2 v_\xi - k_2 v)_\xi - (q(v))_\eta]d\xi + \int_0^t d\eta \int_0^{s(\eta)} [m(x) - b_2 uv - c_2 v]d\xi = 0,$ находим

$$\frac{d_2}{\mu}s(t) = \frac{d_2}{\mu}s_0 + k_2\int_0^t v(\eta,0)d\eta - \int_0^{s(\eta)} q(v)d\xi + \int_0^{s_0} q(v_0)d\xi + \iint_D f(u,v)d\xi d\eta, \quad (4)$$

где $f(u,v)=[m(x)-b_2uv-c_2v).$

Пусть $s_1(t)$, $v_1(t,x)$, $u_1(t,x)$ и $s_2(t)$, $v_2(t,x)$, $u_2(t,x)$ являются решениями задачи (1), и, кроме того, $y(t)=\min\left(s_1(t),s_2(t)\right)$, $h(t)=\max\left(s_1(t),s_2(t)\right)$.

Далее рассматривается разность и с помощью априорных оценок доказывается, что она равна нулю.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и $0<m_0\le m_x\le m_1$, $v_0(x)\ge k>0$, $m_1-c_2k<a$, $s_0+\frac{\mu}{d_2}\int_0^{s_0} q(v_0(\xi))d\xi < L.$ Тогда $\lim_{t\to\infty} s(t) = s_\infty < L,$ т.е. $s(t)<L$ для любого $t>0$.

Перепишем уравнение для $v(t,x)$ системы в виде

$$(e^{-cx}q(v))_t - (d_2e^{-cx}u_x)_x = (m(x)-b_2uv-c_2v)e^{-cx}, \quad (5)$$

$$q(v)=\int_0^v b(\eta)d\eta, c=\frac{k_2}{d_2}.$$

Интегрируя (5) по $(0,s(t))$, мы получаем

$$\int_0^{s(t)} (e^{-c\xi}q(v))_t d\xi - \int_0^{s(t)} (d_2e^{-cx}v_x)_x dx = \int_0^{s(t)} (m(x)-b_2uv-c_2v)e^{-cx}dx.$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} (e^{-c\xi}q(v(t,\xi)))d\xi + \frac{d_2}{\mu}\dot{s}(t) + k_2v(t,0) \le \int_0^{s(t)} e^{-cx}(m(x)v - c_2v(t,x))dx. \quad (6)$$

Преобразуем интегральный член в правой части

$$I = \int_0^{s(t)} e^{-cx}(m(x)v - c_2v(t,x))dx \le \int_0^{s(t)} e^{-cx}(m_1 - c_2k)dx < 0.$$

Тогда, учитывая положительность $v(t,0)$ формула (6) примет форму

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} (e^{-c\xi}q(v)d\xi + \frac{d_2}{\mu}\dot{s}(t) \le 0. \quad (7)$$

Интегрируя (7) по t, мы получаем

$$s(t) \le s_0 + \frac{\mu}{d_2}\int_0^{s_0} q(v_0(\xi))d\xi < L.$$

Отсюда $\lim_{t\to\infty} s(t) = s_\infty < L.$

Априорные оценки более высокого порядка. Для установления дальнейших априорных оценок для каждого уравнения системы сформулируем соответствующую задачу:

$$(\text{A}) \qquad \begin{cases} u_t = \bar{a}(u)u_{xx} + f_1(u,v,u_x) & (t,x) \in Q, \\ u(0,x) = u_0(x), 0 \le x \le L, \\ u_x(t,0) = 0,\ u(t,L) = 0. \end{cases}$$

$$(\text{B} \quad \begin{cases} v_t = \bar{b}(v)v_{xx} + f_2(u,v,v_x) & (t,x) \in D, \\ v(0,x) = v_0(x), 0 \le x \le s_0,\ \ v_x(t,0) = 0,\ v(t,s(t)) = 0. \\ s(t) = -\mu\, \mathrm{v}_x(t,s(t)) \end{cases}$$

где $$\bar{a}(u) = \frac{d_1}{a(u)}, \quad f_1(\cdot) = \frac{1}{a(u)}[k_1 u_x + u(a_1 - b_1 u - c_1 v)],$$

$$\bar{b}(v) = \frac{d_2}{b(v)}, \quad f_2(\cdot) = \frac{1}{b(v)}[k_2 v_x + (h(x) - b_2 uv - c_2 v)].$$

Теорема 2. Предположим, что условия леммы 1 выполнены, и пусть непрерывная по $\bar{D}$ функция $v(t,x)$ удовлетворяет условиям (B). Если $v(t,x)$ имеет производные v_{tx}, v_{xx} квадратично интегрируемые в D .Тогда

$$|u_x(t,x)| \le M_4(M_2, b_0, d_2, v_0), \quad (t,x) \in \bar{D},$$

$$|u_x(t,x)|^D_{1+\gamma} \le M_5(M_4), \quad |v_x(t,x)|^D_{2+\beta} = M_6(M_5).$$

Доказательство основано на результате работы[2]. В случае (B) с помощью преобразования $\tau = t, y = \frac{x}{s(t)}$, мы выпрямляем границу. Области D будет сопоставлен $\Omega = \{(t,y): 0 < \tau, 0 < y < 1\}$, в то время как для $w(\tau, y) = v(\tau, ys(\tau))$ получим уравнение с ограниченными коэффициентами и правой частью. Используя результаты работ[2], установим оценки для $|w_y|, |w|_{1+\gamma}$ в $\bar{\Omega}$. Для производных высшего порядка оценки были получены с использованием линейной теории .

Существование решения.Поскольку все необходимые оценки установлены, применяя идею и результаты работы[2], теорема 2) можно завершить доказательство теоремы.

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия теоремы 2 и леммы 1.

Тогда существует решение $u(t,x) \in C^{\bar{Q}}_{2+\alpha}, v(t,x) \in C^{\bar{D}}_{2+\beta}, \ s(t) \in C_{1+\gamma} (0 \le t \le T)$ проблемы (1).

Во втором параграфе второй главы рассматривается проблема «парадокса дрейфа». Речные экосистемы являются ярким примером среды, где однонаправленный поток влияет на распределение видов. Как известно, популяции способны противостоять смыву и сохраняться в местообитаниях в течение длительного периода времени.

---

[2] Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. Тр.ММО., Т.16. 1967. С.~329-346.

Нами предлагается математическая модель динамики популяции речных экосистем в виде задачи со свободной (неизвестной)границей и основан на следующей логистической задаче, описываемой уравнением реакции-диффузии-адвекции

$$\begin{aligned} &k(u)u_t = du_{xx} + cu_x + u(a-bu) \quad в \\ &D = \{(t,x): t>0, 0<x<s(t)\}, \\ &u(0,x) = u_0(x), \quad 0<x<s(0) \quad s(0) = s_0, \\ &du_x(0,t) + cu(0,t) = 0, \quad u(t,s(t)) = 0, \quad t>0,\ s'(t) = -\mu u_x(t,s(t)), \quad t>0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $x = s(t)$ - движущаяся (неизвестная) граница, определяющая фронт распространения вида, $u(t,x)$-концентрация (интенсивность) вида.

Предположим, что a,b,c являются положительными константами,

$$u_0 \in C^2([0,s_0]), u_0(x) > 0, x \in [0,s_0), k(u) > k_0 > 0 \quad для \quad u > 0.$$

Существовании решения. Прежде чем доказать существования решения, установим оценки норм Гёльдера $|u|_{1+\alpha}$ и $|u|_{2+\alpha}$ в D_T. Пусть

$$Q = (t,x): 0 \leqslant x \leqslant s_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Теорема 4. Пусть $M_1 = \max\limits_{Q} |u|$ и предположим, что $u(t,x), u_x(t,x)$ непрерывны в Q и u удовлетворяет (8) в Q.

Тогда $$|u_x(t,x)| \leqslant C_1(M_1), \quad (t,x) \in Q.$$

Более того, если слабые вторые производные u_{xx}, u_{tx} существуют в $L^2(Q)$, тогда существует $\alpha = \alpha(M,\delta)$, такой, что $|u|_{1+\alpha,Q} \leqslant C_2(M_1, C_1)$.

Кроме того, предположим, что, $u(t,x)$ удовлетворяющее (8) в Q, непрерывен со своими производными u_t, u_x, u_{xx} и $|u|_{2+\alpha,Q} < \infty$.

Тогда $$|u|_{2+\alpha,Q} \leqslant C_3(M_1, C_1, C_2).$$

Теорема 5. В условиях теорем 3 и 4 существует решение $u(t,x) \in C^{2+\alpha}(D)$, $s(t) \in C^{1+\alpha}[0,T]$ задачи (8).

Заметим, что мы установили необходимые границы типа Шаудера в норме Гёльдера, свободная граница $x = s(t)$ является возрастающей функцией времени t. Мы также показали гельдеровость $s'(t)$ и получил границы норм в $C^{2+\alpha}$. Поэтому мы можем завершить доказательство теоремы стандартными рассуждениями.

Теорема 6. Если $s_\infty < \infty$, то $s_\infty \leqslant L_c = \dfrac{\pi}{2}\left(a - \dfrac{c^2}{2d}\right)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{d}$.

Сначала мы покажем, что $s_\infty \leqslant L_c$. Предположим, что $s_\infty \geqslant L_c$. Тогда существует T, такой, что $L = s(T) > L_c$. Для этого фиксируем T и рассматриваем следующую функцию $v(x) = u(T,x)$. Из системы (8) следует, что

$$-dv'' - cv' = v(a-bv), \quad 0<x<l,\ dv'(0) + cv(0) = 0, \quad v(l) = 0. \tag{9}$$

Мы доказали, что $u_x(T,x) = v'(x) < 0, 0 < x \leqslant L$ и $v(x) < \dfrac{a}{b}$.

По лемме 4.4 работы[3] задача (9) имеет лишь тривиальное решение, когда $a < \lambda_1$ и оно имеет единственное положительное решение, когда $a > \lambda_1$ где λ_1 является основным собственным значением

$$-\lambda y'' - cy' = \lambda y, \quad -L < x < L,\ y(-L) = y(L) = 0. \tag{10}$$

Мы можем построить λ_1 явно: $\lambda_1 = \frac{c^2}{2d} + d(\frac{\pi}{2L})^2 > 0$. Если $a > \lambda_1$, тогда $L \geqslant \frac{\pi}{2}(a - \frac{c^2}{2d})^{-\frac{1}{2}}\sqrt{d} = L_c$. Далее доказывается, что $s_\infty \leqslant L_c$. Следовательно $s(t) \leqslant L_c$ Предполагая $\lambda_1 = a$, получаем пороговое значение области, называемое критическим размером L_c: $L_c = \frac{\pi d}{\sqrt{2ad - c^2}}$.

Замечание. Когда адвекция достигает критического значения $C_c = \sqrt{2da}$, размер критической области становится бесконечным и вся популяция смывается вниз по течению.

В третьей главе исследуются реакционно-диффузионные модели экологических проблем. Основное предположение модели заключается в том, что окружающая среда активно поглощает и перерабатывает загрязнения до определенного предела.

В первом параграфе главы рассматривается математическая модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой.

Предположим, что загрязнение находится в постоянном взаимодействии с окружающей средой; окружающая среда оказывает очищающее воздействие на загрязнения; система загрязнение-окружающая среда считается закрытой.

Пусть $u(t,P), (v(t,P))$ концентрация загрязнения (плотность биомассы) в момент времени t в точке $P = (x,y,t)$, Ω является ограниченной областью в с гладкой границей $\partial\Omega$ и внешней нормалью ν, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T), T > 0$. Предлагаем модель в виде краевой задачи для двухкомпонентной нелинейной системы

$$\begin{aligned}
u_t &= \nabla(d_1(u)\nabla u) - \nabla(\theta u) + r_1 u(1 - \frac{u}{K_1}) - \frac{a_1 uv}{b_1 + c_1 u} \quad в\ Q_T, \\
v_t &= \nabla(d_2(v)\nabla v) - \nabla(\theta v) + r_2 v(1 - \frac{v}{K_2}) - \frac{a_2 uv}{b_2 + c_2 v} \quad в\ \ Q_T, \\
u(0,x) &= u_0(x) \geqslant 0, v(0,x) = v_0(x) \geqslant 0, x \in \Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{в} \quad S_T.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $d_i(\xi)(i = 1,2)$ – коэффициенты нелинейной диффузии, $\theta = \theta_x i + \theta_y j + \theta_z k$ - вектор скорости частиц воздуха, $r_i v\left(1 - \frac{V}{K_i}\right)$ - логистический темп роста

[3] Pao, C.V., Nonlinaer Parabolic and Elliptic Equations. Plenum Press, New York. 1992.

компонента, $f_i = \dfrac{a_i uv}{b_i + c_i \xi}$ (где $\xi = u$ если $i = 1, \xi = v$ если $i = 2$) – трофические функции (или функции взаимодействия), $f_1 \geqslant 0$ - описывает распад и химическую трансформацию загрязнений (т.е. поглощение и переработку загрязнений), $f_2 \geqslant 0$ - термин, характеризующий разрушительное воздействие загрязнения на окружающую среду, K_1 - предельное значение концентрации загрязнения, K_2 - предельное значение биомассы, r_1 - темп роста концентрации загрязнения, r_2 - темпы роста концентрации загрязнения биомассы.

$\dfrac{b_1}{a_1} = \lambda_1 > 0$ характеризует степень влияния природы на загрязнение: чем больше значение, тем меньше степень поглощения загрязнения живой природой и наоборот. $\dfrac{b_2}{a_2} = \lambda_2 > 0$ - степень влияния загрязнения на природу.

Мы предполагаем, что:

I. $d_i(u) \geqslant d_0 > 0, d_i(u) \in C^1([0,\infty))(i = 1,2)$ ограничены для любого $u \geqslant 0$;

II. $a_i, b_i, c_i (i = 1,2)$ предполагаются положительными константами;

III. $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}, u_0(x), v_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), 0 < \alpha < 1; \dfrac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v_0(x)}{\partial \nu} = 0$ на $\partial\Omega$.

Задача исследована по следующей схеме. Сначала доказана локальное существование и единственность решений. Далее устанавлены некоторые априорные оценки типа Шаудера и на их основе доказана глобальное существование и единственность решений.

Теорема 7. Предположим, что выполнены условия I.-III

Тогда существует единственное решение $U(x,t) = (u,v) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T)$ задачи (11) при малых $T > 0$, которое зависит от

$$\| U_0(x) \|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} = \| u_0(x) \|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} + \| v_0(x) \|_{C^{2+\alpha}(\Omega)}.$$

Кроме того, $u(x,t) \geqslant 0, v(x,t) \geqslant 0$.

Глобальное существование решения.Сначала установим некоторые априорные оценки для решения задачи(11).

Теорема 8. Предположим, что $U = (u,v) \in C^{2,1}(Q_T)$ является решением задачи (11) .Тогда справедливы неравенства

$$0 \leqslant u \leqslant K_1, \quad 0 \leqslant v \leqslant K_2.$$

Из первого уравнения задачи (10) имеем

$$u_t - d_1(u)\Delta u - d_1'(u)|\nabla u|^2 + \nabla \cdot (\theta u) - r_1 u\left(1 - \frac{u}{K_1}\right) + \frac{a_1 uv}{b_1 + c_1 u} = 0 \leqslant \frac{m_1 K_1 v}{b_1 + c_1 K_1} \text{ в } Q_T, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S_T, u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, x \in \Omega,$$

видно, что K_1 является верхним решением и $u \equiv 0$ является нижним решением задачи (12). Следовательно, по принципу максимума имеем $0 \leqslant u(x,t) \leqslant K_1$.

С другой стороны, из второго уравнения(12) следует, что

$$v_t - a_2(v)\Delta v - d_2'(v)|\nabla v|^2 + \nabla \cdot (\theta v) - r_2\left(1 - \frac{v}{K_2}\right) + + \frac{a_2 u v}{b_2 + c_2 v} = 0 \leqslant \frac{a_2 K_2 u}{b_2 + c_2 K_2} \quad в \quad Q_T,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad на \quad S_T, v(x,0) = v_0(x), x \in \Omega.$$

Аналогично имеем $0 \leqslant v(x,t) \leqslant K_2$.

Лемма 3. Предположим, что $U = (u,v) \in C^{2,1}(Q_T)$ является решением задачи (11). Тогда $\| u \|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)} \leqslant N, \| v \|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)} \leqslant N$.

Теорема 9. При предположениях I.-III. существует единственное решение $U = (u,v) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ задачи (11) для любого заданного $T > 0$. Более того, $0 \leqslant u(x,t) \leqslant K_1, \quad 0 \leqslant v(x,t) \leqslant K_2, \quad x \in \Omega, t > 0.$

Во втором параграфе исследована логистическая модель распространения загрязняющих веществ в атмосфере**.**

Пусть Ω ограниченная область в R^3 с гладкой границей $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0,T), \quad S_T = \partial\Omega \times (0,T), T > 0$.

В данной работе исследуется реакционно-диффузионный перенос примесей в пограничном слое атмосферы, который описывается краевой задачей для трехмерного параболо-логистического уравнения

$$\partial u(P,t)/\partial t - \left[\partial(d_2(P,t)u_x(P,t))/\partial x + \partial(d_3(P,t)u_y(P,t))/\partial y + \partial(d_1 P,t)u_z(P,t))/\partial z\right] -$$

$$\partial\left(c_2(P,t)u\right)/\partial x - \partial\left(c_3(P,t)u\right)/\partial y - \partial\left(c_1(P,t)u\right)/\partial z = u(a - bu) \qquad Q_T. \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} Lu \equiv L_0 u - u_t \equiv \left(d_2 u_{xx} + d_3 u_{yy} + d_1 u_{zz}\right) + a_2 u_x + \\ + a_3 u_y + d_1 u_z + cu - u_t = bu^2 \ в \ Q_T, \end{aligned} \qquad (14)$$

с начально-граничными условиями

$$u(P,0) = \varphi(P), \quad P \in \Omega, \ u(P,t) = \psi(P,t) \qquad на \quad S_T, \qquad (15)$$

где

$$P = P(x,y,z), P \in \Omega \subset R^3, t \in [0,T], a_2(P,t) = d_{2x}(P,t) + c_2(P,t),$$
$$a_3(P,t) = d_3 y(P,t) + c_3(P,t), a_1(P,t) = d_1 z(P,t) - c_1(P,t),$$
$$c(P,t) = c_2 x + c_3 y + c_1 z + a.$$

Здесь $u(P,t)$ концентрация примесей, находящихся в точке P в момент времени t, a,b являются положительными константами, а a - степень удаления или введения примесей в данный объем за счет химических процессов, b-это скорость изменения концентрации, $d_i (i = \overline{1,3})$ - коэффициенты турбулентной диффузии, $c_i (i = \overline{1,3})$ - составляющая вектора скорости ветра.

В четвертой главе под названием «О периодических решениях параболических систем» построены периодические по пространственной переменной решений связанных систем параболических уравнений с линейными периодическими граничными условиями.

В первом параграфе главы исследована двухфазная задача для параболической системы с периодическими граничными условиями.

Пусть $D_1 = \{(x,t): -l \le x \le 0, 0 \le t \le T\}$ обозначают нижнюю часть реки, а $D_2 = \{(x,t): 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ обозначают верхнюю часть реки. Тогда эволюция разновидностей описывается следующей задачей:

$$u_t - u_{xx} - c_1 u_x = u(1-u), \quad (t,x) \in D_1, \; v_t - v_{xx} - c_2 v_x = v(1-v), \quad (t,x) \in D_2,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad -l \le x \le 0, \; v(x,0) = v_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{16}$$
$$u(t,-l) = v(t,l), u_x(t,-l) = v_x(t,l), \quad 0 \le t \le T, \; u(t,0) = v(t,0), u_x(t,0) = v_x(t,0) \quad 0 \le t \le T.$$

Априорные оценки и глобальная разрешимость.

Лемма 4. Пусть функции $u(t,x)$ и $v(t,x)$ являются решением задачи (16). Тогда

$$0 \le u(t,x) \le M_1 = 1, \quad (t,x) \in D_1, \; 0 \le v(t,x) \le M_2 = 1, \quad (t,x) \in D_2.$$

Теорема 10. Пусть функции $u(t,x), v(t,x)$ непрерывны в D_1 и D_2 вместе с производными u_x, v_x и удовлетворяют условиям задачи (16). Тогда

$$|u_x(t,x)| \le C_1(M_1), \quad (t,x) \in D_1, \quad |v_x(t,x)| \le C_2(M_2), \quad (t,x) \in D_2.$$

А если также известно, что функции $u(t,x), v(t,x)$ обладать в D_1 и D_2 суммируемые с квадратом обобщенными производными $u_{xx}(v_{xx})$ и $u_{tx}(v_{tx})$, тогда

$$|u|^{D_1}_{1+\alpha_1} \le C_3(M_1, C_1), \quad |v|^{D_2}_{1+\alpha_2} \le C_4(M_2, C_2).$$

Пусть функции $u(t,x)$ и $v(t,x)$ непрерывны вместе со вторыми производными по x и $|u|^{D_1}_{2+\alpha_1} < \infty, \quad |v|^{D_2}_{2+\alpha_2} < \infty$.

Тогда $|u|^{D_1}_{2+\alpha_1} \le C_5(M_1, C_1, C_3), \quad |v|^{D_2}_{2+\alpha_2} \le C_6(M_2, C_2, C_4).$

Введем функцию

$$w(t,x) = \begin{cases} u(t,x), & (t,x) \in D_1 \\ v(t,x), & (t,x) \in D_2 \end{cases}$$

Тогда задачу (16) можно переписать в виде

$$w_t - w_{xx} - c_1 w_x - b_1(t,x) w = 0, \quad (t,x) \in Q = D_1 \cup D_2$$
$$w(0,x) = w_0(x), \quad -l \le x \le l, \tag{17}$$
$$w(t,-l) = w(t,l), w_x(t,-l) = w_x(t,l).$$

В указанной[2] (теорема 3) теореме в силу наличия граничных условий $w_{|x=\pm l} = 0$, автор предлагает способ продолжения решения через боковые стороны нечетным образом. В нашем случае мы предлагаем продолжить функцию $w(t,x)$ через боковые границы Q по правилу

$$w(t,x) = w(t,2l + x), \quad для \quad -3l \le x \le -l,$$
$$w(t,x) = w(t,x - 2l), \quad для \quad l \le x \le 3l.$$

Новая функция (сохраним обозначение $w(t,x)$) во всех точках прямоугольников $\{(t,x): 0 \le t \le T, |x + \frac{3}{2}l| \le \frac{3}{2}l\}$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет «расширенному» уравнению вида (17) с теми же свойствами, что и в условиях теоремы 10.

В этом случае внутренние оценки получаются в силу приведенной выше теоремы, а оценки до границ устанавливаются методом продолжения по выше указанному правилу .

Применяя метод получения $|u|^{D_1}_{1+\alpha_1} \le C_3(M_1, C_1), \quad |v|^{D_2}_{1+\alpha_2} \le C_4(M_2, C_2)$ к задаче для U и V найдем $|u_x(t,x)|^{D_1}_{1+\gamma_1} \le C_1, |v_x(t,x)|^{D_2}_{1+\gamma_2} \le C_2.$

Оценки для $u_t(t,x)$ и $v_t(t,x)$ получается из уравнений задачи (16).

Единственность решения задачи устанавливается с помощью принципа максимума. Используя установленные априорные оценки, доказываем теорему о разрешимости задачи

Теорема 11. Пусть выполнены условия теоремы 10. Тогда решение задачи (16) существует и $u(t,x) \in C^{2+\alpha_1}(D_1), v(t,x) \in C_{2+\alpha_2}(D_2)$.

Во втором параграфе исследована периодические решения модели Келлера-Сегеля с логистическим источником. Мы изучаем задачу с периодическими граничными условиями для квазилинейной системы, которая моделирует динамику популяций двух конкурирующих видов в области $\Omega = \{(x,t)\ ;\ 0 < x < L, t > 0\}$, оба из которых хемотаксически притягиваются одним и тем же сигнальным веществом

$$\begin{gathered} u_t = (d_1 u_x - \chi u w_x)_x + \mu_1 (1 - u - a_1 v) u, \\ v_t = (d_2 v_x - \xi v w_x)_x + \mu_2 (1 - a_2 u - v) v, \qquad (x,t) \in \Omega, \\ w_t = w_{xx} - \lambda w + u + v, \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ w(x,0) = w_0(x), \quad x \in (0, L), \\ U(0,t) = U(L,t),\ U_x(0,t) = U_x(L,t), \qquad t > 0, \end{gathered} \tag{18}$$

где $U(x,t) = (u, v, w)$, $u(x,t)$ и $v(x,t)$ плотность двух конкурирующих видов в пространстве-времени (x,t) и $w(x,t)$ – концентрация притягивающего вещества, d_i, μ_i, a_i, $i = 1, 2$, λ являются положительными константами, χ и ξ предполагаются неотрицательными константами.

Существование решений. Сначала мы применим известные результаты[4] для получения локального существования, затем мы получим глобальное существование, установив L_1-оценки для (u, v, w).

Априорные оценки и глобальное существование. Теперь обратимся к установлению L_p - оценки (u, v, w) при вышеуказанных условиях. Глобальное существование (16) является следствием нескольких лемм.

Отсутствие отрицательности следует из параболического принципа максимума.

Лемма 5. Пусть $\mu_1, \mu_2 > 0$ и (u, v, w) – единственное неотрицательное решение системы (16) при $(0, T_{max})$. Тогда существует константа $C > 0$ зависящая от $\|u_0, v_0, w_0\|_{L^1}$ и L такой, что

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(0,L)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^1(0,L)} + \|w(\cdot, t)\|_{L^1(0,L)} \le C, \text{ для всех } t \in (0, T_{max}).$$

Лемма 6. Предположим те же условия для (u_0, v_0, w_0) как в лемме 5. Тогда для любого $q \in (1, \infty)$, существует положительная $C(q)$ такая, что

$$\|w(\cdot, t)\|_{w^{1,q}(0,L)} \le C(q), \forall t \in (0, T_{max}).$$

Теорема 12. Пусть $a_i, \mu_i, i = 1, 2,$ и λ положительные константы. Тогда при положительных данных $(u_0, v_0, w_0) \in H^1(0, L) \times H^1(0, L) \times H^1(0, L)$ и константы $\chi, \xi \in R$, задача (17) имеет единственное ограниченное положительное решение $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$ на $[0, L] \times [0, \infty)$ такой, что $(u(\cdot,t), v(\cdot,t), w(\cdot,t)) \in C([0,\infty), H^1(0, L) \times H^1(0, L) \times H^1(0,L))$ и $(u, v) \in C^{2+\alpha,2+\alpha,1+\alpha}_{loc}([0, L] \times [0, \infty))$ для некоторых $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

[4] Amman H., Dynamic theory of quasilinear parabolic systems II. Reaction–diffusion systems, Differential Integral Equations 3(1990) 13–75.

Заключение

Диссертация посвящена построению и исследованию нелинейных реакционно-диффузионных моделей (в т.ч. со свободными границами) в биологических и экологических процессах и были получены следующие результаты:

1. предложена процессно-ориентированная пространственно-временная модель с неизвестными границами, описывающая взаимодействие популяции и токсиканта в загрязненной реке или ручье. Здесь неизвестная граница определяет фронт распространения токсиканта в водной среде.
2. Для исследования «феномена парадокса дрейфа» была построена математическая модель со свободной границей. Предложенная модель выдвигает несколько проверяемых гипотез. Когда адвекция достигает критического значения, размер критической области становится бесконечным и вся популяция смывается вниз по течению, т.е. спасение невозможно.
3. Построена математическая модель взаимодействия загрязнений с окружающей средой с учетом конвективных и диффузионных процессов распространения загрязнений.Разработана метод исследования и доказана глобальная однозначная разрешимость задачи. Общая идея моделей взаимодействующих популяций может быть применена и к системе «загрязнение-природа».
4. Построена математическая модель переноса и диффузии вредных примесей в пограничных слоях атмосферы в виде уравнения реакции-диффузии. Получены априорные оценки для этого уравнения и решены вопросы устойчивости, единственности и существования решения.
5. Построены периодические по пространственной переменной решений связанных систем параболических уравнений с линейными периодическими граничными условиями.
6. Исследуется система трех параболических уравнений, представляющая собой модель пространственно-временного состояния двух конкурирующих популяций видов, хемотаксически притягиваемых одним и тем же сигнальным веществом. Особи перемещаются в соответствии со случайной диффузией и хемотаксисом, и обе популяции воспроизводятся и взаимно конкурируют друг с другом согласно классической кинетике Лотка-Вольтерра.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

BOBORAKHIMOVA MAKHUBA IKHTIYOROVNA

SPATIO-TEMPORAL ECOLOGICAL MODELS OF PROCESSES IN THE ATMOSPHERE, WATER ENVIRONMENT AND IN THE COMPETITIVE SYSTEM

01.01.02 – "Differential equations and Mathematical physics"

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOFHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number №B2023.4.PhD/FM945.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (http://kengash.mathinst.uz/) and in the webside of "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Takhirov Jozil Ostanovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Urozboyev Gayrat Urozaliyevich Doctor of physical and mathematical sciences, docent
Leading organization:	**Samarkand state university**

Defense will take place « 16 » April 2024 at 17:00 o'clock at the meeting of Scientific Council number Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanosky (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail:uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at at Institute of Mathematics named after V.I.Romanosky (is registered №162). Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40.

Abstract of dissertation sent out on « 03 » April 2024 year.
(Mailing report №2 on « 03 » April 2024 year).

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

J.K. Adashev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., senior researcher

A.A. Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is to construct and develop the theory of logistic problems for parabolic equations and systems of the reaction-diffusion-advection type, mathematical models of ecology and competing species in spatially inhomogeneous environments.

The objects of the research work are spatiotemporal ecological models of processes in the atmosphere, aquatic environment and in the competitive system.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

a process-oriented nonlinear model with a free (unknown) boundary of the process of the influence of environmental toxicants on population dynamics in polluted aquatic ecosystems has been developed;

a nonlinear model of population dynamics of river ecosystems was developed in the form of a logistic problem with a free boundary, described by the reaction-diffusion-advection equation;

a mathematical model of the interaction of pollution with the environment was constructed, taking into account convective and diffusion processes of impurity propagation, and a method was developed for obtaining a priori estimates in the norms of Hölder spaces for solving the boundary value problem for a two-component nonlinear parabolic system, and on their basis the unique solvability of the problem was proven;

a mathematical model of the transfer and diffusion of harmful impurities in the boundary layers of the atmosphere in the form of a reaction-diffusion equation was constructed and a priori estimates were established, issues of stability, uniqueness and existence of a solution were resolved;

A system of parabolic equations is proposed that models the spatiotemporal behavior of two competing populations of species, both of which are chemotactically attracted by the same signaling agent.

Implementation of the research results. The results obtained from the study of some mathematical models of ecology and competing species in spatially heterogeneous environments were put into practice in the following areas:

the proposed mathematical models of the environment, taking into account convective and diffusion processes, were used in constructing topological models of gas supply systems within the framework of the innovative project IL-5321091543 “Construction of topological models of gas supply systems and development of their simulation” (Certificate of the Tashkent University of Information Technologies No. 4406/05-2 dated December 12, 2023 year). The application of scientific results made it possible to construct topological models of gas supply systems and develop their simulations;

the proposed environmental mathematical models of the transfer and diffusion of harmful impurities in the boundary layers of the atmosphere were used within the framework of the applied project A-OT-2021-108 “Development of an information and analytical software product for monitoring and forecasting the ecological state of the Aral Sea region” (Reference of the Research Institute of Digital Technologies and AI Development No. 03 -8/028 dated January 19, 2024). The application of

scientific results made it possible to construct adequate models of the transfer and transformation of pollutants in gas and aerosol states.

Approbation of the research results. The main results of the dissertation were discussed at 4 international and 2 republican scientific and practical conferences.

Publications of the research results. Publication of research results. 12 scientific papers were published on the topic of the dissertation, of which 6 articles were published in journals included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of dissertations for the degree of Doctor of Philosophy (PhD), including 1 article published in a foreign publication .

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of the introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 90 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I bo‘lim (Часть I, Part I)

1. Takhirov J.O., Boborakhimova M.I. On the mathematical model of the concentration of pollutants and their impact on the population of the river. // Results in applied mathematics 21 (2024) 100414. 5 p. (3. Scopus. IF=0,427).
2. Takhirov J.O., Boborakhimova M.I. Mathematical model of the interaction of pollution with the environment. // Uzbek Mathematical Journal 2022, Vol.66 Issue 1. pp.131-139. (01.00.00, №8).
3. Boborakhimova M.I., Asraqulova D.S. On logistic model of spread of pollutants in the atmosphere. // Uzbek Mathematical Journal, 2023, Vol.67 Issue 2, pp.25-30. (01.00.00, №8).
4. Boborakhimova M. I. Population Dynamics in River Ecosystems. // Uzbek Mathematical Journal 2023, Vol.67 Issue 4, pp.1-8. (01.00.00, №8).
5. Asraqulova D.S., Boboraximova M. On periodic solutions of mathematical models of two river branches**.** // Uzbek Mathematical Journal, 2020, No 3. pp.25-30. (01.00.00, №8).

II bo‘lim (Часть II, Part II)

6. Takhirov J.O., Boborakhimova M.I. On the periodic solution of the Keller-Segel model of chemotaxis with a logistic source. // Journal of Osh State University. Mathematics. Physics. Technical Sciences, 2023, №1. pp. 286-291
7. Boboraximova M.I. The population dynamics of ecological processes in river networks. // Republican scientific conference “Sarymsakov readings”, Tashkent. September 16-18, 2021. pp.190-191.
8. Boboraximova M.I. Reaction-diffusion-advectoin model for two competing species. // International Scientific Conference “Modern problems of applied mathematics andinformation technologies Al-Khwarizmi 2021”. Fergana November 15-17, 2021,. pp. 38.
9. Тахиров Ж.О., Боборахимова М.И. О популяционной динамике в речной экологи. // Международной научной конфереции «Теория управления и математическое моделирование (СТММ 2022)», Ижевск, 13-17 июня, 2022. с. 376-378.
10. Takhirov J.O., Boborakhimova M.I. Population dynamics in river ecosystems. // International Scientific Conference “Modern problems of applied mathematics and information technologies” Bukhara, May 11-12, 2022, p.268-269.
11. Boborakhimova M.I. Population dynamics in river ecosystems. // International Scientific Conference “Math. Modeling In Education, Science and Production”. Tiraspol. October 6-7, 2023. 6 p.
12. Boborakhimova M.I. On the mathematical model of the concentration of pollutants and their impact on the population of the river. // International Scientific Conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies– Al-Khwarizmi 2023”, Samarkand. September 25-26, 2023. pp. 37.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida
o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi nusxalari 2024-yil 18-martda tahrirdan o‘tkazilib,
o‘zbek, rus va ingliz tillardagi matnlari o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. “Times New Roman” garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 68/22.

Guvohnoma № 851684.
“Tipograff” MChJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.