

**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

MATEMATIKA INSTITUTI

ZUNNUNOV RAXIMJON TEMIRBEKOVICH

**XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN
TO‘G‘RI VA TESKARI MASALALAR**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA – MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA DOKTORLIK (DSc)
DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2024

Doktorlik (DSc) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the of Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

Zunnunov Raximjon Temirbekovich

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari
masalalar 3

Зуннунов Рахимжон Темирбекович

Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в
частных производных 29

Zunnunov Rakhimjon Temirbekovich

Forward and inverse problems for partial differential equations 55

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ
List of published works 59

**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

MATEMATIKA INSTITUTI

ZUNNUNOV RAXIMJON TEMIRBEKOVICH

**XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN
TO‘G‘RI VA TESKARI MASALALAR**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA – MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA DOKTORLIK (DSc)
DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2024

Fan doktori (Doctor of Science) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.4.DSc/FM233 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (<http://kengash.mathinst.uz>) va «Ziyonet» ta'lim axborot tarmog'ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:

Ashurov Ravshan Radjabovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponenlar:

Alimov Shavkat Arifdjanovich
fizika-matematika fanlari doktori, akademik

Pskhu Arsen Vladimirovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Mirsaburov Miraxmat
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot:

**Rossiya Fanlar akademiyasi Uzoq Sharq bo'limining
Kosmofizik tadqiqotlar va radioto'lqinlar tarqalishi
instituti (Rossiya Federatsiyasi)**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil « 2 » iyul soat 16.00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.:(+99871)- 207-91-40, e-mail: uzbmash@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (№ 185 - raqam bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 140104100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.:(+99871) 207-91-40)

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil « 11 » iyun kuni tarqatildi.
(2024 yil «11» iyundagi 2 - raqamli reyestr bayonnomasi).



U.A. Roziqov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash raisi, f.-m.f.d., akademik

J.K. Adashev

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash ilmiy kotibi, f.- m.f.d.,
katta ilmiy xodim

A. A. Azamov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash huzuridagi Ilmiy seminar
raisi, f.-m.f.d., akademik

KIRISH (doktorlik dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Matematikaning turli sohalarida olib boriladigan ko'plab ilmiy va amaliy tadqiqotlar xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalarni o'rganishga olib keladi. Xususan, aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar gaz dinamikasida transsonik oqimlarni matematik modellashirishda, aerodinamikada va boshqa sohalarda o'z tadbiqini topadi. Hozirgi vaqtda dunyodagi ko'plab ilmiy maktablarda nolokal chegaraviy masalalarni o'rganishga bo'lgan qiziqish jadal rivojlanmoqda, shu jumladan butun va kasr tartibli hosilalarga ega aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy shartlarda kasr tartibli integro-differensial operatorlar qatnashgan masalalarni yechish dolzarb masalarga aylanib bormoqda. Nolokal masalalar nazariyasiga bunday alohida e'tibor tasodif emas. Bunday masalalar lokal masalalarni keng sinfini o'z ichiga oladi va amaliy jihatdan tabiatdagi turli jarayonlarni o'rganishda paydo bo'ladi. Masalan, matematik biologiya, tuproq namligini oldindan aniqlash, plazma fizikasi muammolari, shuningdek, neft qatlamlarining holatini va ishlab chiqirishini matematik modellashirishda bu masalalar katta ahamiyatga ega. Bundan tashqari, simlardagi elektr tebranishlari, yer osti suvlarining filtrlanishi, murakkab tuzilishga ega bo'lgan ob'ektlarda issiqlik tarqalishi, g'ovakli muhit bilan o'ralgan kanaldagi suyuqlik oqimi va boshqa jarayonlar tadqiq qilish nolokal masalalarga keltiriladi.

Kasr tartibli hosilaga ega differensial tenglamalar nazariyasini so'nggi bir necha o'n yilliklarda asosan fan va texnikaning ko'plab sohalarida qo'llanilishi tufayli ularni o'rganishga bo'lgan qiziqish sezilarli darajada o'sdi. Ma'lumki, butun va kasr tartibli hususiy hosilali tenglamalar nazariyasida teskari masalalar deb, differensial tenglamaning yechimi bilan birgalikda tenglamaning birorta ko'effitsiyentini (ko'effitsiyentlarini) yoki o'ng tomonini, yoki bir vaqtda ko'effitsienti(ko'effisientlari) va o'ng tomonini aniqlash masalalari tushuniladi. Teskari masalalarni o'rganishga bo'lgan qiziqish ularning mexanika, seysmologiya, tibbiy tomografiya va geofizikaning turli bo'limlarida qo'llanilishi bilan uzviy bog'liqdir. Kasr tartibli tenglamani turli jarayonlarni tahlil qilishda model tenglama sifatida foydalanilganda kasr hosilasining tartibi ko'pincha noma'lum bo'ladi va uni to'g'ridan-to'g'ri aniqlashning imkoni yo'q. Shuning uchun, ushbu noma'lum parametrlarni aniqlash bo'yicha teskari masala nafaqat nazariy jihatdan qiziq, balki amaliy jihatdan ham muhim ahamiyat kasb etadi. Kasr hosilasining tartibi aniqlash ko'plab hayotiy muammolarni modellshtirishda paydo bo'lib, boshlang'ich-chegaraviy masalarni yechishga keladi va yechimning xususiyatlarini o'rganishda ham muhim ahamiyatga ega. Bunday masalalar kasr tartibli tenglamalarni o'rganishda yuzaga keladigan teskari masalalarning nisbatan yangi turidir.

Mamlakatimizda ilmiy va amaliy tatbiqqa ega bo'lgan fundamental fanlarga alohida e'tibor qaratilmoqda. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalarni yechish va ularni yechishning samarali usullarini

topishga alohida e'tibor beriladi. Matematika fanlarining ustuvor yo'nalishlari, ya'ni algebra va matematik analiz, xususiy hosilali differensial tenglamalar va matematik fizika, dinamik tizimlar nazariyasi hamda amaliy matematika va matematik modellashtirish bo'yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar o'tkazish V.I. Romanovskiynomidagi Matematika institutining asosiy vazifalari va faoliyat yo'nalishlari etib belgilangan¹. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar nazariyasini rivojlantirish ushbu qarorni bajarishda muhim ahamiyatga ega.

Mazkur dissertatsiyani tadqiq etish mavzusi va vazifalari O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida" gi PF-4979-son Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi "Matematik ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash, shuningdek, Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiynomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish choratadbirlari to'g'risida"gi PQ-4387-sonli va 2020 yil 7 maydagi "Matematika sohasida ta'lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4708-sonli Qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda tegishli yoki belgilangan vazifalarni amalga oshirishga muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga muvofiqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarildi.

Dissertatsiya mavzusi bo'yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalarni tadqiq qilish dunyodagi ko'plab yirik ilmiy markazlarda va oliy o'quv yurtlarida, olib boriladi. Xususan: Jon Xopkins universitetida (AQSh), Bergakademie Freiberg texnik universitetida (Germaniya), New-Haven universitetida (AQSh), Vilnius universiteti (Litva), Universita degli Studi di Torino (Italiya), Xokkaydo universitetida (Yaponiya), Mathematiques instituti, Bordeaux universiteti (Fransiya), Moskva davlat universiteti (Rossiya), Kabardino-Balkar davlat universiteti (Rossiya), Boshqird davlat universiteti (Rossiya), Novosibirsk davlat universiteti (Rossiya), Shimoliy-Sharqiy federal universiteti (Rossiya), Belorusiya davlat universiteti, Samara davlat iqtisodiyot universiteti (Rossiya), Samara davlat universiteti (Rossiya), Samara arxitektura-qurilish universiteti (Rossiya), Qozon federal universiteti (Rossiya), Rossiya Fanlar akademiyasi Sibir bo'limining S.L. Sobolev nomidagi Matematika instituti (Rossiya), Matematika va matematik modellashtirish institutida (Qozog'iston) va boshqalarni keltirishimiz mumkin.

Dunyoning ko'plab mamlakatlarida xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalarni o'rganish natijasida bir qator natijalar olingan. Xususan: hosilalari butun tartibli bo'lgan aralash tipdagi tenglamalar uchun

¹ O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiynomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi № PQ-4387-son qarori

chegaraviy masalalarni yechish nazariyasi ishlab chiqilgan (Turin universiteti, Italiya); hosilalari butun tartibli bo'lgan elliptik-giperbolik va parabola-giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish usullari ishlab chiqilgan (Rossiya fanlar akademiyasining Sibir bo'limi matematika instituti, Rossiya fanlar akademiyasining Kabardino-Balkar ilmiy markazining amaliy matematika va avtomatlashtirish instituti, Qozog'iston matematika va matematik modellashtirish instituti); hosilalari kasr tartibli bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalarni o'rganishda asosiy va fundamental natijalar olingan (Rossiya fanlar akademiyasining Kabardino-Balkar ilmiy markazining Amaliy matematika va avtomatlashtirish instituti, New-Haven universiteti va hokazo).

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Ma'lumki, aralash tipdagi tenglamalar bo'yicha birinchi fundamental natijalar F. Trikom tomonidan olingan. Keyin F. Trikomining natijalari S. Gellerstedt tomonidan umumiy tenglamaga o'tkazildi va u yangi masalalar taklif etdi. Aralash tipdagi tenglamalar nazariyasini rivojlanishida keyingi qadam F.I. Franklning ishi bo'lib, unda gaz dinamikasida aralash tipdagi tenglamalar uchun masalalarning amaliy qo'llanilishi ko'rsatilgan. Xususan, F.I. Frankl tekis devorli idishdan tovushdan yuqori oqimning chiqish modeli $k(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$ Chapligin tenglamasi uchun Trikom masalasiga to'g'ri kelishini ko'rsatdi. Keyinchalik, M. A. Lavrentyev

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y u_{yy} = 0,$$

oddiy turdagi aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalalarni tadqiq qilishning maqsadga muvofiqligini taklif qildi. Chunki, bu masala aralash turdagi tenglamalar yechimlarining asosiy xususiyatlari va ularni o'rganish metodologiyasini yanada kengroq ochib beradi. Trikom masalasi yuqoridagi tenglama uchun boshqa masalalarni batafsil o'rganish A. V. Bitsadze tomonidan amalga oshirilgan. Shuning uchun yuqoridagi tenglama hozirgi kunda Lavrentyev-Bitsadze tenglamasi deb nomlangan. Bunday tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rganishga qiziqish, ularning sirtlarning cheksiz kichik egrilik nazariyasi va momentsiz o'zgaruvchan ishorali egrilikli sirtlar nazariyasi muammolari bilan bog'liqligi aniqlangandan keyin yanada oshdi.

Aralash tipdagi tenglamalar bo'yicha keyingi tadqiqotlar uch yo'nalishda olib borildi: masalalarning qo'yilishini o'zgartirish, sohaning geometrik shakli va tenglamalar turlarini o'zgartirish. Natijada, nafaqat aralash tipdagi tenglamalar uchun ko'rib chiqilayotgan masalalar doirasi, balki "aralash tipdagi tenglamalar" tushunchasi ham kengaydi. Darhaqiqat, agar boshida ikkinchi darajali aralash elliptik-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar ko'rib chiqilgan bo'lsa, o'tgan asrning 60-yillaridan boshlab ikkinchi tartibli aralash parabola-giperbolik va elliptik-parabolik tipdagi tenglamalar bo'yicha tadqiqotlar olib borilmoqda. Keyinchalik aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasi S.P. Pulkin, V.F. Volkodavov, M.S. Salaxitdinov, T.D. Jurayev, A.M. Naxushev, V.N. Vragov, M.M. Smirnov, T. Sh. Kalmenov, M. Protter, M.M. Meredov, E.I. Moiseyev, A.P. Soldatov, A.I. Kojanov, K.B. Sabitov, O.A. Repin, A.N. Zarubin, A.A. Polosin, A.V. Psxu, M.A. Sadybekov, M. Mirsaburov, A.K.

Urinov, J.O. Tohirov, O.S. Zikirov, B.I. Islomov, A. Hasanov, A.S. Berdishev va boshqalarning ishlarida rivojlantirildi. Elliptik, giperbolik va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasini rivojlantirishda yangi muhim bosqichning boshlanishi "nolokal masalalar", yani nolokal shartli chegaraviy masalalar bo'ldi. Bunday masalalar, birinchi navbatda, A.V. Bitsadze va A. A. Samarskiy tomonidan taklif etilgan Bitsadze-Samarskiy tipdagi masalalarni o'z ichiga oladi. Ushbu masalalarda lokal bo'lmagan shartlar tenglama o'rganilayotgan sohaning chegaraviy va ichki nuqtalarida izlanayotgan yechimning qiymatlarini bog'laydi. Nolokal masalalarga A.M. Naxushev tomonidan taklif etilgan "siljishli masalalar" ham kiradi. Aralash tipdagi tenglamalar uchun siljishli masalalarni o'rganilgan ko'pgina ishlarda model tenglamalar yoki kichik hosilalarda maxsus tanlangan koeffitsiyentlar qatnashgan chiziqli tenglamalar qaralgan. Bundan tashqari, A.M. Naxushev tenglamaning kichik hosilalar oldidagi koeffitsientlari siljishli masalalarni qo'yishda va o'rganishda sezilarli ta'sir ko'rsatishini isbotladi. Ma'lumki, model tenglamalar uchun Rimann-Liuvill ma'nosidagi kasr tartibli differensial operator ishlatiladi. Ushbu tenglamalar uchun lokal va nolokal masalalarning to'liqroq sharhi bilan M.M. Smirnov, Yu.M. Krikunov, A.V. Bitsadze, K.I. Babenko A.M. Naxushev, M.S. Salaxitdinov monografiyalarida tanishish mumkin. Demak, kichik hadlarga ega tenglamalar uchun nolokal masalalarni qo'yishda va o'rganishda yanada murakkab tuzilishli operatorlar paydo bo'lishini kutish mumkin. Shu sababdan, kichik hadlarga ega aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalar kam o'rganilgan. M. Mirsaburov va M.X. Ruziev ishlarida singulyar koeffitsientli tenglamalar uchun lokal va nolokal masalalar chegaralangan va chegaralanmagan sohalarda mos ravishda o'rganilgan. M.S. Salaxitdinov va A.K. Urinovlarning monografiyasida

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, \quad m = \operatorname{const} > 0,$$

tenglama uchun, chegaralangan sohalarda lokal va nolokal chegaraviy masalalar o'rganilgan. Shuningdek, bugungi kungacha yuqoridagi tenglama uchun chegaraviy masalalarni cheksiz sohalarda ko'rib chiqish masalasi dolzarb bo'lib qolmoqda.

So'nggi o'n yilliklarda M.X. Gekkiyeva ishidan keyin kasr tartibli hosilalarni o'z ichiga olgan aralash tipdagi model tenglamalar uchun nolokal masalalarni yechishga bo'lgan qiziqish sezilarli darajada o'sdi. Bu sohada A.A. Kilbas, O.A. Repin va boshqalarning ishlarini ta'kidlash kerak. Shundek, kichik hadlarga ega tenglamalar uchun cheksiz sohalarda chegaraviy masalalarni o'rganish masalasi dolzarb bo'lib qolmoqda. Yuqorida ta'kidlaganimizdek, butun va kasr tartibli hususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida teskari masalalar deb differensial tenglamaning yechimi bilan birgalikda, tenglamaning koeffitsienti yoki o'ng tomoni, yoki bir vaqtda koeffitsienti va o'ng tomonini aniqlash kerak bo'lgan masalalarga aytiladi. Masalan, ushbu yo'nalishda M. M. Lavrentiev, V. G. Romanov, V. G. Vasiliev, S. I. Kabanixin, K. B. Sabitov, D. K. Durdiyev, J. D. Totiyeva va boshqalarning ishlarini sanab o'tish mumkin. Hozirgi vaqtda ko'plab olimlar kasr tartibli hususiy hosilali differensial tenglamalari uchun to'g'ri va teskari masalalarni tadqiq qilish bilan shug'ullanmoqdalar. Shuni ta'kidlash

kerakki, ushbu yo‘nalishda asosiy natijalar Sh.A. Alimov, R.R. Ashurov, S.R. Umarov, A.V. Psxu, M. Yamamoto, A. Cabada, B. Turmetov, A. Kochubei, Yu. Luchko, Z. Li, Y. Liu va boshqalarning ishlarida olingan.

Vaqt bo‘yicha kasr tartibli tenglamalarning asosiylaridan biri bu anomal yoki sekin sodir bo‘luvchi diffuziya jarayonlarini modellashtiradigan subdiffuziya tenglamalaridir. Ushbu hususiy hosilali integro-differensial tenglama, klassik issiqlik tarqalish tenglamasida vaqt bo‘yicha birinchi tartibli hosilani $\rho \in (0,1)$ kasr tartibli hosilaga almashtirish orqali hosil qilingan. Anomal diffuziya jarayonlarini tahlil qilishda subdiffuziya tenglamasini model tenglama sifatida olinganda kasr hosilasining tartibi noma‘lum bo‘lsa uni to‘g‘ridan-to‘g‘ri topish ancha qiyin. Ushbu parametrlarni aniqlash uchun yechim to‘g‘risida bevosita kuzatilgan ba‘zi fizik ma‘lumotlarga ega bo‘lish kerak bo‘ladi. Buning uchun ushbu miqdorni aniqlashning teskari masalasini o‘rganish kerak. Subdiffuziya tenglamalari uchun bunday teskari masalalar bir qator mualliflar tomonidan o‘rganilgan, ushbu yo‘nalishdagi ko‘plab ishlarning sharhi 2019 yilda Li Z., Liu Y., Yamamoto M. maqolasida chop etilgan. Bundan tashqari, shuni ta’kidlash kerakki, yuqorida aytilgan ishlarda qo‘shimcha shart sifatida quyidagi shartdan foydalanilgan:

$$u(x_0, t) = h(t), \quad 0 < t < T, \quad x_0 \in \overline{\Omega}.$$

Ammo bu shart faqat teskari masala yechimining yagonaligini ta’minlashi mumkin. Shu sababli o‘rganilgan barcha ishlarda faqat yechimning yagonaligi ko‘rsatilgan. Lekin J. Jannoning ishida esa, yechimning mavjudligi ham ko‘rsatilgan, biroq u qo‘shimcha shart sifatida boshqa shartdan foydalangan. R. R. Ashurov va S. R. Umarovlar maqolasida yechimning mavjud va yagonaligini ta’minlovchi yangi shartni topishdi. Ular ushbu ishda birinchi xos funksiyasiga proyeksiyasi qarashgan. Shuni eslatib o‘tamizki, ushbu shartdan faqat birinchi xos son nolga teng bo‘lsagina foydalanish mumkin. Subdiffuziya tenglamasida kasr hosilasining noma‘lum tartibining yagonaligi va mavjudligi Sh.A. Alimov va R.R. Ashurovlarning ishlarida birinchi xos son nolga teng bo‘lmagan hol uchun ham isbotlangan. Ushbu ishda olingan qo‘shimcha shart diskret spektrga ega bo‘lgan ixtiyoriy musbat o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorli, vaqt bo‘yicha Riemann-Liouville ma’nosida kasr hosilali subdiffuziya tenglamalari uchun tadbiiq qilingan. Ammo spektr uzluksiz bo‘lgan holda hosilaning tartibini topish masalasi dolzarb bo‘lib qolmoqda. Hosilalarining tartibi butun bo‘lgan aralash tipidagi tenglamalar uchun koeffitsiyentlarni yoki o‘ng tomonni aniqlash bo‘yicha teskari masalalar R.R. Ashurov, S.Z. Jamalov, K.B. Sabitov, E.T. Karimov, T.K. Yuldashev va boshqalarning ishlarida o‘rganilgan. Ushbu dissertatsiya ishida kasr tartibli hosilali aralash tipidagi tenglamalar uchun hosilaning tartibini aniqlash bo‘yicha teskari masalalar birinchi marta o‘rganilmoqda. Sodir bo‘layotgan jarayonlarni o‘rganish va boshqarishda tenglamaning kasr tartibli hosilaning tartibini to‘g‘ri aniqlash muhim rol o‘ynaydi va ushbu dissertatsiyada bunga misol ko‘rsatilgan.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari bilan bog‘liqligi.

Dissertatsiya tadqiqoti O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining Matematika institutining F-FA-2021-424 «Butun va kasr tartibli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish» mavzusidagi ilmiy tadqiqot loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi chegaralanmagan va chegaralangan sohalarda butun va kasr tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalarni hamda subdiffuziya va aralash tipdagi tenglamalarda kasr hosilasini tartibini aniqlash uchun to'g'ri va teskari masalalarni yechishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari: Tadqiqot vazifalari:

aralash sohaning elliptik qismi gorizontal chegaralanmagan yo'lakdan iborat bo'lganda aralash tipdagi model tenglamasi uchun siljishli masalalarni tadqiq etish;

chegaralanmagan sohalarda spektral parametrlil aralash tipdagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy tipidagi masalalarni va siljishli masalalarni tadqiq etish;

chegaralanmagan va chegaralangan sohalarda kasr tartibli hosilali aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalarni tadqiq etish;

subdiffuziya tenglamalarida kasr hosilasining tartibini va operatorning darajasini aniqlash uchun to'g'ri va teskari masalalarni tadqiq etish;

aralash tipdagi tenglamalarda kasr hosilalarning tartibini aniqlash uchun to'g'ri va teskari masalalarni tadqiq etish;

aralash tipdagi tenglamalarda yechimning chegaraviy qiymatini aniqlash uchun to'g'ri va teskari masalalarni tadqiq etish.

Tadqiqotning obykti Gerasimov-Kaputo va Riman-Liuvil ma'nosidagi integral-differensial operatorlari, Mittag-Leffler funksiyalari, Grin funksiyalari, butun va kasr tartibli hususiy hosilali tenglamalar hisoblanadi.

Tadqiqotning predmeti. Chegaralanmagan va chegaralangan sohalarda butun va kasr tartibli hususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiyada qo'yilgan masalalarni tadqiq etishda energiya integrallari usuli, Grin funksiyalari usuli, Furrye usuli, integral tenglamalar usuli, matematik analiz usullari, funksional analiz umumlashgan funksiyalar nazariyasi usullari, differensial operatorlar nazariyasi, differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalarini yechish usullaridan foydalanilgan .

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

aralash sohaning elliptik qismi gorizontal chegaralanmagan yo'lakdan iborat bo'lganda aralash tipdagi model tenglamasi uchun siljishli masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

chegaralanmagan sohalarda spektral parametrlil aralash tipdagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy tipidagi va siljishli masalalarning bir qiymatli yechilishligi isbotlangan;

chegaralanmagan va chegaralangan sohalarda kasr tartibli hosilali aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

subdiffuziya tenglamalarida kasr hosilasining tartibini va operatorning darajasini tartibini aniqlashda to'g'ri va teskari masalalarning yechimlarining yagonalik va mavjudlik teoremlari isbotlangan;

aralash tipdagi tenglamalarda kasr hosilalarning tartibini va yechimning chegaraviy qiymatini aniqlash bo'yicha to'g'ri va teskari masalalarning yechimlarini mavjud va yagonaligi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Dissertatsiya ishida butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalarni analitik tadqiq etishga imkon beradigan fundamental nazariy natijalar olindi. Bu natijalar katta nazariy qiziqishdan tashqari, ular katta amaliy ahamiyatga ega, masalan, ular fraktal tuzilishga ega muhitdagi turli jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellar sifatida ishlatilishi mumkin hamda aniq hisoblash algoritmlarini shakllantirish va tadbirlar bilan bog'liq dolzarb amaliy masalalarni yechish uchun asosdir.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalarni yechishning ishonchliligi va asosliligi, Grin funksiyasining xususiyatlarini va Mittag-Leffler funktsiyalarini o'rganish va ularni chegaraviy masalalarni yechishda qo'llash masalalarning korrekt qo'yilganligi va matematik analiz, differensial tenglamalar, matematik fizika, teskari masalalar nazariyasi, maxsus funksiyalar nazariyasi, chiziqli operatorlar spektral nazariyalari, integral tenglamalar usullari bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Dissertatsiyada olingan natijalarning ilmiy ahamiyati hosilalari butun va kasr tartibli bo'lgan aralash tipdagi tenglamalar nazariyasini yanada rivojlantirish, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining to'g'ri va teskari masalalarini keyingi o'rganishda, shuningdek matematikaning boshqa sohalarida qo'llash mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ularning fizik va biologik jarayonlarni, yuklangan jismlarning tebranishlarini, gazo-dinamik jarayonlarni, kapillyar g'ovak muhitda issiqlik almashinuvi va massa almashinuvi nazariyasida turli xil fizik hodisalarni matematik modellashtirishda keng qo'llash mumkinligi bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar bo'yicha olingan natijalar asosida:

aralash tipdagi tenglamalarda kasr hosilalarning tartibini va yechimning chegaraviy qiymatini bo'yicha to'g'ri va teskari masalalarning yechilish usullaridan NIOKTR 122041800013-4 raqamli "Umumlashtirilgan kasr differentsiatsiyasi operatorlari bilan tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni tadqiq etish, ularni fizik va ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlarni matematik modellashtirishga qo'llash" mavzusidagi xorijiy loyihada kasr hosilalarini o'z ichiga olgan aralash parabola-giperbolik va elliptiko-giprebolik tenglamalar uchun to'g'ri va teskari chegaraviy masalalarni yechishda foydalanilgan (Rossiya Fanlar Akademiyasi Qabardino-Balkar ilmiy markazining amaliy matematika va

avtomatlashtirish institutining 2023 yil 13-oktabrdagi №01-13/69-sonli ma'lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalarni qo'llanishi vaqt hosilasi bo'yicha kasr hosilalarini o'z ichiga olgan aralash parabola-giperbolik va elliptiko-giprebolik tenglamalarning analoglari uchun to'g'ri va teskari chegaraviy masalalarni yechishni imkonini bergan;

xususiyl hosilali differensial tenglamalar uchun shekli va sheksiz sohalarda kasr hosilalarning tartibini aniqlash bo'yicha to'g'ri va teskari masalalarni yechishni analitik usullaridan № AAAA-A17-117031050058-9 raqamli "Tebranish tizimlari nazariyasida kasr hisobini qo'llash" mavzusidagi xorijiy loyihada kasr hosilalarining tartibini aniqlashga oid teskari masalalarni yechishda foydalanilgan (Kamchatka davlat universitetining 2023 yil 15 sentabrdagi №49-12-sonli ma'lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalarni qo'llanishi kasr tartibli hosilalarining tartibini aniqlash uchun teskari masalalarni sonli yechishning algoritmlarini ishlab chiqish imkonini berdi;

elliptik qismining aniqlanish sohasi gorizontaal chegaralanmagan yo'lakdan iborat bo'lgan aralash tipdagi model tenglama uchun siljishli masalalarning yechimlaridan "Turli xil mustahkamlash usullari bilan yangi qurilish materiallarining mustahkamlik xususiyatlarini aniqlash usullarini ishlab chiqish" mavzusidagi amaliy loyihada elliptik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar qo'yishda foydalanilgan (Mexanika va inshootlarning zilzilaga chidamliligi institutining 2023 yil 30-noyabrdagi №869-3-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo'llanishi uzilish sijnishlari va yuklamalar usullariga asoslangan tenglamalarning doimiy muhitdagi singulyarliklari, ya'ni elastiklik va plastiklik xossalarni aniqlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 12 ta ilmiy-amaliy konferensiyalarda, shu jumladan 8 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy konferensiyalarida muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusida bo'yicha jami 24 ta ilmiy ish chop etilgan, shu jumladan 12 tasi O'zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasi tomonidan doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda, shu jumladan 6 tasi scopus bazalarida indekslangan xorijiy jurnallarda va 6 tasi respublika jurnallarida chop etilgan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, to'rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiya hajmi 177 sahifani tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan bo'lib, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalarini rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, dissertatsiya mavzusi va muammolarni o'rganish darajasi bo'yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlarni sharhi keltirilgan, maqsad va masalalar shakllantirilgan, tadqiqot ob'ekti va predmeti aniqlangan, tadqiqotning

ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarini joriy etish, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi to'g'risida ma'lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **birinchi bobi "Chegaralanmagan sohalarda aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalar"** deb nomlangan. Ushbu bobning birinchi paragrafida maxsus funksiyalar, integral, differensial va integro-differensial operatorlarning haqidagi zarur ma'lumotlar keltirilgan.

Ikkinchi paragrafda elliptik qismi gorizontallik yo'lak bo'lgan chegaralanmagan sohada aralash tipdagi model tenglamasi uchun ikkita siljishli masalaning bir qiymatli yechiluvchanligi masalasi tadqiq qilingan. Ushbu paragrafning birinchi punktida birinchi siljishli masala tadqiq qilingan.

Quyidagi

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \operatorname{const} > 0 \quad (1)$$

tenglamani $\Omega = \Omega_1 \cup l_0 \cup \Omega_2$ chegaralanmagan aralash sohada qaraymiz, bu yerda $\Omega_1 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$, $l_0 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$, $\Omega_2 - y < 0$ yarim tekislikda $y = 0$ to'g'ri chiziqning AB kesmasi va (1) tenglamani $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ nuqtalardan chiquvchi

$$AC : x - [2 / (m + 2)](-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC : x + [2 / (m + 2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$$

xarakteristikallari bilan chegaralangan sohasi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$\beta = m / (2m + 4), \quad l_1 = \{(x, y) : -\infty < x < 0, y = 0\}, \quad l_2 = \{(x, y) : 1 < x < +\infty, y = 0\}, \\ l_3 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y = 1\},$$

$$\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, - \left[\frac{m+2}{2} \cdot \frac{x}{2} \right]^{\frac{2}{m+2}} \right), \quad \theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}, - \left[\frac{m+2}{2} \cdot \frac{1-x}{2} \right]^{\frac{2}{m+2}} \right).$$

Bu yerda $\theta_0(x)$ va $\theta_1(x)$ nuqtalar (1) tenglamaning $(x, 0) \in l_0$ nuqtadan chiqadigan xarakteristikallari va AC , BC xarakteristikallari bilan mos ravishda kesishish nuqtalari.

S_1^∞ **masala.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x, y) \in C(\Omega \cup \bar{l}_1 \cup \bar{l}_2 \cup AC \cup BC) \cap C^1(\Omega \cup l_1 \cup l_2) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, bundan tashqari $u_y(x, 0)$ hosila $x = 0$ va $x = 1$ nuqtalarda tartibi $1 - 2\beta$ dan kichik tartibda cheksizligiga aylanishi mumkin;

2) Ω_1 va Ω_2 sohalarda (1) tenglamani qanoatlantiradi;

3) quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$u_y(x, 0) = \psi_i(x), \quad \forall x \in l_i, i = 1, 2;$$

$$u(x,1) = \psi_3(x) \quad \forall x \in l_3,$$

$y \in [0,1]$ bo'yicha tekis ravishda $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x,y) = 0$ bo'ladi,

$a(x)D_{0x}^{1-\beta}[u(\theta_0(x))] + b(x)D_{x1}^{1-\beta}[u(\theta_1(x))] + c(x)u_y(x,0) + g(x)u(x,0) = d(x), \quad \forall x \in l_0$,
bu yerda $\psi_i(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $g(x)$, $d(x)$ - berilgan funksiyalar,
 $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) + g^2(x) \neq 0, \forall x \in \bar{l}_0$; $\psi_i(x)$ funksiyalar $x=0$ va $x=1$
nuqtalarda darajasi $1-2\beta$ kichik tartibda cheksizlikka aylanishi mumkin va
 $\psi_1(x) \in C(-\infty, 0)$, $\psi_2(x) \in C(1, +\infty)$, $\psi_3(x) \in C(-\infty, +\infty)$, yetarlicha katta $|x|$ lar
uchun

$$|\psi_i(x)| \leq M_1 |x|^{-1-\varepsilon_1}, (i=1,2), M_1, \varepsilon_1 = \text{const} > 0; |\psi_3(x)| \leq M_2 |x|^{-\varepsilon_2}, \varepsilon_2 = \text{const} > 0.$$

tengsizliklar qanoatlantiradi, bunda $D_{0x}^{1-\beta}[f(x)]$ va $D_{x1}^{1-\beta}[f(x)]$ - Riman-Liuvill
ma'nosidagi kasr tartibli differensial operatorlar.

Ushbu paragrafning birinchi punktining asosiy natijalarini keltiramiz.
Energiya integrallari usuli yordamida quyidagicha teorema isbotlanadi.

1-teopema. Aytaylik, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $g(x)$ funksiyalar

$$a(x) = x^{\beta+\varepsilon} a_0(x), \quad b(x) = (1-x)^{\beta+\varepsilon} b_0(x), \quad c(x) = [x(1-x)]^\varepsilon c_0(x);$$

$$a_0(x), b_0(x), c_0(x), g(x) \in C^1(\bar{l}_0); \quad \varepsilon = \text{const} > 0$$

$$q_0(x) = x^\varepsilon a_0(x) + (1-x)^\varepsilon b_0(x) - \frac{1}{\gamma_1} [x(1-x)]^\varepsilon c_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{l}_0;$$

$$\frac{g(x)}{q_0(x)} \geq 0, \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{x^\varepsilon a_0(x)}{q_0(x)} \right] \leq 0, \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{(1-x)^\varepsilon b_0(x)}{q_0(x)} \right] \geq 0, \quad \forall x \in l_0$$

shartlarni qanoatlantirsin. U holda S_1^∞ masala bittadan ortiq yechimga ega emas.

Quyidagi teorema esa integral tenglamalar va Grin funksiyalari usuli
yordamida isbotlangan.

2-teopema. Aytaylik, 1-Teorema shartlari bajarilgan bo'lib, $a_0(x)$, $b_0(x)$,
 $c_0(x)$, $g(x) \in C^2[0,1]$, $d(x) \in C^2(0,1)$ bo'lsin, hamda $(0,1)$ intervalning oxirlarida
 $d(x)$ funksiya tartibi $1-2\beta$ dan kichik tartibda cheksizlikka aylanishi mumkin
bo'lsin. U holda S_1^∞ masalaning yechimi mavjud.

Ushbu paragrafning ikkinchi punktida (1) tenglama uchun huddi shunday Ω
chegaralanmagan aralash sohada ikkinchi siljishli masala tadqiq qilingan va
mavjudlik va yagonalik teoremlari isbotlangan.

Uchinchi paragrafida elliptiklik sohasi tekislikning birinchi chorakidan iborat
bo'lgan chegaralanmagan sohada aralash tipdagi spektral parametrli Triкоми

umumiy tenglamasi uchun Bitsadze-Samarskiy tipidagi ikkita masala tadqiq qilingan.

Ushbu paragrafning birinchi punktida

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, \quad m = \operatorname{const} > 0 \quad (2)$$

tenglama $\Omega = \Omega_1 \cup l_1 \cup \Omega_2$ chegaralanmagan aralash sohada qaralgan, bu yerda $\Omega_1 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, Ω_2 soha $y < 0$ yarim tekislikdagi $y = 0$ to'g'ri chiziqning AB kesmasi va (2) tenglamani $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ nuqtalardan chiquvchi xarakteristikalar bilan chegaralangan. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$l_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}, \quad l_2 = \{(x, y) : x > 1, y = 0\}, \quad l_3 = \{(x, y) : y > 0, x = 0\}.$$

Faraz qilaylik, $\lambda \in \mathbb{R}$, bunda agar $y > 0$ bo'lsa $\lambda = \lambda_1$ va $y < 0$ bo'lganda esa $\lambda = \lambda_2$ bo'ladi.

BS_1^∞ **masala.** Quyidagi xossalarga ega bo'lgan $u(x, y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x, y) \in C(\Omega \cup \bar{l}_2 \cup \bar{l}_3 \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, bundan tashqari $u_y(x, 0)$ hosila $x = 0$ yoki $x = 1$ nuqtalarda darajasi $1 - 2\beta$ kichik tartibda cheksizlikka aylanishi mumkin;

2) Ω_1 va Ω_2 sohalarda (1) tenglamani qanoatlantiradi;

3) quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad 0 \leq y < +\infty$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \quad y \geq 0, x \geq 0$$

$$u_y(x, 0) = \psi(x), \quad 1 < x < +\infty$$

$$A_{0x}^{1, \lambda_2} \{D_{0x}^{1-\beta} [u(\theta_0(x))]\} + c(x)u_y(x, 0) = d(x), (x, 0) \in l_1$$

bu yerda $\varphi(y)$, $\psi(x)$, $c(x)$, $d(x)$ - berilgan funksiyalar, $\varphi(y) \in C[0, +\infty)$ va yetarlicha katta y uchun $|\varphi(y)| \leq M_1 y^{-1-m/2-\varepsilon_3}$ tengsizlik o'rinli; $\psi(x) \in C(1, +\infty)$ va yetarlicha katta x lar uchun $|\psi(x)| \leq M_2 x^{2\beta-1-\varepsilon_4}$ tengsizlik o'rinli va $x \rightarrow 1$ da darajasi $1 - 2\beta$ dan kichik tartibda cheksizlikka aylanishi mumkin; $c(x) \in C^1[0, 1]$, $d(x) \in C^2(0, 1)$ va $d(x)$, $x \rightarrow 0$ yoki $x \rightarrow 1$ darajasi $1 - 2\beta$ dan kichik tartibda cheksizlikka aylanishi mumkin. Bundan tashqari, $R^2 = x^2 + [2/(m+2)]^2 y^{m+2}$, $M_1, M_2 = \operatorname{const} > 0$, $\varepsilon_3, \varepsilon_4 = \operatorname{const} > 0$.

Bu paragrafning birinchi punktining asosiy natijalari quyidagicha:

3-teorema. Aytaylik

$$q(x) = 1 - \gamma \Gamma(\beta) x^\beta c(x) > 0, x \in [0, 1]; \quad \frac{d}{dx} [q(x)] \geq 0, x \in (0, 1)$$

$$\gamma = \frac{2 \sin(2\pi\beta) \Gamma(1-\beta) \Gamma(2\beta)}{\pi(2-4\beta)^{2\beta}}$$

shartlar bajarilsin. U holda BS_1^∞ masala bittadan ortiq yechimga ega emas.

Ushbu masala yechimining yagonaligi energiya integrallari usuli yordamida isbotlangan.

4-teorema. Aytaylik, $c(x) = (1-x)^\delta c_0(x)$, $\delta > 0$, $c_0(x) \in C^2[0, 1]$ bo'lsin va 3-teorema shartlari bajarilsin. U holda BS_1^∞ masalaning yechimi mavjud.

BS_1^∞ masala yechimining mavjudligi Grin funksiyasi usuli va integral tenglamalar usuli bilan isbotlangan.

Bu paragrafning ikkinchi punktida (2) tenglama uchun yuqoridagi Ω chegaralanmagan aralash sohada Bitsadze-Samarskiy tipidagi ikkinchi masala tadqiq qilingan, mavjudlik va yagonalik teoremlari isbotlangan.

Birinchi bobning to'rtinchi paragrafida aralash sohaning elliptik qismi yarim tekislikdan iborat (2) tenglama uchun siljishli masala tadqiq qilingan. Tadqiq qilinayotgan masala yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlar isbotlangan.

Dissertatsiyaning **ikkinchi bobi "Kasr hosilali aralash tipidagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalar"** deb nomlangan. Ushbu bobning birinchi paragrafida kasr tartibli Riman-Liuvil xususiy hosilali tenglamasi uchun siljishli masala o'rganiladi, bunda xarakteristikaning bir qismi kasr tartibli integro-differensial operatorlari bilan nolokal chegaraviy shartlardan ozod qilingan.

Aytaylik, D soha $y > 0$ yarim tekislikda yotadigan $x = 0$, $x = 1$ va $y = 1$ chiziqlarning AA_0 , BB_0 va A_0B_0 kesmalari bilan va quyidagi

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0,y}^\gamma u = 0, \gamma \in (0, 1), y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{(-y)^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y, y < 0, \end{cases} \quad (3)$$

tenglamaning $y < 0$ yarim tekislikdagi

$AC: x - [2 / (m + 2)](-y)^{(m+2)/2} = 0$, $BC: x + [2 / (m + 2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$ xarakteristikalarini bilan chegaralangan chekli soha bo'lsin. Ushbu (3) tenglamada $m > 0$, $|\alpha_0| < (m + 2) / 2$, $1 < \beta_0 < (m + 4) / 2$, va $D_{0,y}^\gamma$ Riemann-Liuvilning kasr tartibli hosilasi quyidagicha aniqlanadi:

$$(D_{0,y}^\gamma u)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^y \frac{u(x, t) dt}{(y-t)^\gamma}, \quad (0 < \gamma < 1, y > 0).$$

Aytaylik, $D^+ = D \cap (y > 0)$, $D^- = D \cap (y < 0)$ bo'lsin.

TS masala. Quydagi xossalarga ega bo'lgan $u(x, y)$ funksiya topilsin:

$$1) y^{1-\gamma} u \in C(\bar{D}^+), u(x, y) \in C(\bar{D}^- \setminus \overline{OB}), u_{xx} \in C(D^+ \cup D^-), u_{yy} \in C(D^-)$$

$$y^{1-\gamma} (y^{1-\gamma} u)_y \in C(D^+ \cup \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\}),$$

2) D^+ va D^- sohalarda (3) tenglamani qanoatlantiradi;

3) quyidagi chegaraviy shartlarni

$$u(0, y) = \varphi_1(y), u(1, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq 1,$$

$$x^{\bar{\alpha}} D_{0,x}^{1-\beta} x^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}} u[\theta_0(x)] + (1-x)^{\bar{\beta}} \rho(x) D_{x,1}^{1-\bar{\alpha}} (1-x)^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}} u[\theta_k(x)] =$$

$$= \mu_1 D_{0,x}^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}} \tau(x) - \mu_2 D_{x,1}^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}} \tau(x) + f(x), x \in [0, 1]$$

va ulanish shartlarni

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\gamma} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0-1} u(x, y), x \in [0, 1]$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\gamma} (y^{1-\gamma} u(x, y))_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2-\beta_0} ((-y)^{\beta_0-1} u(x, y))_y, x \in I = (0, 1)$$

qanoatlantiradi.

Bu yerda $\bar{\alpha} = \frac{m+2(2-\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}$, $\bar{\beta} = \frac{m+2(2-\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$ va $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$
 $\rho(x), f(x), \tau(x) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0-1} u(x, y)$ - berilgan funksiyalar; bu yerda $f(0) = 0$,
 $\rho(x), f(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$, $y^{1-\gamma} \varphi_1(y), y^{1-\gamma} \varphi_2(y) \in C([0, 1])$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$;
 $\mu_1 = \frac{\Gamma(\bar{\alpha} + \bar{\beta})}{\Gamma(\bar{\beta})} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1}$ va $\mu_2 = \left(\frac{4}{m+2}\right)^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}} \frac{(\Gamma(\bar{\alpha} + \bar{\beta})\Gamma(1-\bar{\beta}))}{(\Gamma(\bar{\alpha})\Gamma(1-\bar{\alpha}))}$ o'zgar-
 maslar; AC xarakteristikaning $(x_0, 0) (x_0 \in I)$ nuqtasidan chiqadigan (3)
 tenglamaning xarakteristikasi bilan kesishish nuqtasi esa $\theta_0(x_0)$ dan iborat; (3)
 tenglamaning BC xarakteristikasi bilan $x - \frac{2k}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_0, k = \text{const} > 1$, egri

$$\text{chiziqning kesishish nuqtasi } \theta_k(x_0) = \left(\frac{x_0 + k}{1+k}, -\left(\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(1+k)} \right)^{\frac{2}{m+2}} \right).$$

Ushbu paragrafning asosiy natijasi:

5-teopema. Aytaylik, $|\omega(x)| < 1$ bo'lsin, bu yerda $\omega(x) = \frac{\Gamma(1-\bar{\alpha})}{\Gamma(1-\bar{\beta})} \rho(x)$,
 $x \in [0, 1]$, u holda TS masalaning yechimi mavjud va yagona.

Ushbu bobning ikkinchi paragrafida kasr tartibli Riman-Liuvill xususiy hosilali va kichik hadli aralash tipdagi tenglama uchun chegaralanmagan sohada nolokal masala tadqiq qilingan.

«Subdiffuziya tenglamalari uchun to‘g‘ri va teskari masalalar» deb nomlangan dissertatsiyaning **uchinchi bobida** Gerasimov – Kaputo va Riman-Liuvill kasr tartibli hosilali tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalar tadqiq etilgan. Subdiffuziya tenglamasidan model tenglama sifatida foydalanib, anomal diffuzion jarayonlarni tahlil qilishda kasr hosilaning tartibi ko‘pincha noma‘lum va uni bevosita topish qiyin. Ushbu parametrlarni aniqlash uchun yechim to‘g‘risida bilvosita kuzatilgan ba‘zi fizik ma‘lumotlarga asoslanib, ushbu miqdorni aniqlashning teskari masalalarini o‘rganish kerak. Jarayonning xususiyatiga qarab, masalan, agar jarayonning dastlabki bosqichi ko‘rib chiqilsa, Gerasimov-Kaputoning kasr hosilalari ishlatiladi, agar jarayon barqarorlashgan bo‘lsa, u holda Riemann-Liuvilning kasr hosilalari ishlatiladi. Yuqorida ta’kidlab o‘tilganidek, diskret spektrga ega bo‘lgan ixtiyoriy musbat o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bilan subdiffuziya tenglamasida vaqt bo‘yicha Riemann-Liuville ma‘nosida kasr hosilasining tartibini aniqlash bo‘yicha teskari masala yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

Ushbu dissertatsiya ishida uzluksiz spektrga ega bo‘lgan ixtiyoriy musbat o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorli va vaqt bo‘yicha Gerasimov-Kaputo yoki Riman-Liuvil ma‘nosida kasr hosilali subdiffuziya tenglamasida kasr hosilaning tartibini aniqlash bo‘yicha teskari masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan. Ushbu bobda bir parametrlilik masalalardan tashqari, mos ravishda ikki parametrlilik masalalar ham o‘rganilgan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida $A(D)$ elliptik operatorli subdiffuziya tenglamasi uchun $\mathbb{R}^N$ boshlang‘ich-chegaraviy masala tadqiq qilingan.

Aytaylik, $A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ – o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli $m = 2l$ juft tartibli simmetrik elliptik differensial operator, ya’ni barcha $\xi \neq 0$ uchun $A(\xi) > 0$ bo‘lsin. Bunda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ mul’tiindeks va $D = (D_1, D_2, \dots, D_N)$, $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $i = \sqrt{-1}$.

Ushbu $[0, \infty)$ oraliqda aniqlangan h funksiyaning Riman-Liuvil ma'nosidagi $\rho < 0$ kasr tartibli integrali quyidagi

$$I_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(-\rho)} \int_0^t \frac{h(\xi)}{(t-\xi)^{\rho+1}} d\xi, \quad t > 0,$$

ko‘rinishga ega. Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi integral yaqinlashuvchiligi talab qilinadi. Bu yerda $\Gamma(\rho)$ – Eylerning gamma funksiyasi. Ushbu ta’rifdan foydalanib, ρ , $0 < \rho < 1$ tartibli Gerasimov-Kaputo kasr tartibli hosilani

$$\partial_t^\rho h(t) = I_t^{\rho-1} \frac{d}{dt} h(t)$$

shaklda aniqlash mumkin.

Birinchi to'g'ri masala. $\rho \in (0, 1]$ berilgan son va $L_2^\tau(\mathbb{R}^N)$ – Sobolev funksiyalar sinfi bo'lsin. Quyidagi boshlag'ich-chegaraviy masalani qaraymiz:

$$\partial_{0t}^\rho u(x, t) + A(D)u(x, t) = 0, x \in \mathbb{R}^N, 0 < t < T, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^N \quad (6)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, t) \in L_2^m(\mathbb{R}^N)$ funksiya topilsin. Bu yerda $\varphi(x)$ -berilgan uzluksiz funksiya.

1-ta'rif. $\partial_{0t}^\rho u(x, t), A(D)u(x, t) \in C(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ xossalarga ega va (5)-(6) shartlarni qanoatlantiradigan $t \in [0, T)$ bo'yicha har qanday $x \in \mathbb{R}^N$ uchun absolyut uzluksiz $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^N \times [0, T))$ funksiya to'g'ri masalaning klassik yechimi deb ataladi.

$E_\rho(t)$ orqali quyidagicha aniqlangan

$$E_\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\rho k + 1)},$$

Mittag-Leffler funksiyasini belgilaymiz.

Ushbu $\hat{f}(\xi)$ orqali $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^N)$ funksiyaning Furje almashtirishini belgilaymiz:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

To'g'ri masalani yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani keltiramiz:

6-teopema. Aytaylik, $\tau > \frac{N}{2}$ va $\varphi \in L_2^\tau(\mathbb{R}^N)$. U holda (5)-(6) to'g'ri masala yagona yechimga ega va bu yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} E_\rho(-A(\xi)t^\rho) \hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (7)$$

Bunda har qanday $t \in [0, T)$ uchun integral $x \in \mathbb{R}^N$ da tekis va absolyut yaqinlashadi. Bundan tashqari, (7) yechim quyidagi xususiyatga ega

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} D^\alpha u(x, t) = 0, |\alpha| \leq m, 0 < t < T.$$

Birinchi teskari masala. Ushbu (5) tenglamadagi kasr hosilasining ρ tartibini noma'lum parametr sifatida qaraymiz. Teskari masalani qo'yishda biz $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N)$ deb olamiz. Bundan kelib chiqadiki, $\hat{\varphi}(\xi)$ va

$\hat{u}(\xi, t) = E_\rho(-A(\xi)t^\rho)\hat{\varphi}(\xi)$, $t \in [0, t]$ funksiyalar $\xi \in \mathbb{R}^N$ o'zgaruvchi bo'yicha uzluksiz. Biz $\xi_0 \neq 0$ vektorni shunday fiksirlaymizki, $\hat{\varphi}(\xi_0) \neq 0$ bo'lsin va $\lambda_0 = A(\xi_0) > 0$ deb belgilaymiz.

Ushbu ρ tartibni aniqlash uchun quyidagi qo'shimcha ma'lumotlardan foydalanamiz:

$$U(t_0, \rho) \equiv \left| \hat{u}(\xi_0, t_0) \right| = d_0, \quad (8)$$

bunda $t_0, 0 < t_0 < T$, - tayinlangan vaqt.

Ushbu (5) - (6) masala (8) qo'shimcha shart bilan birgalikda teskari masala deb ataladi.

Teskari masalani yechish uchun biz $\rho_0 \in (0, 1)$ sonni fiksirlaymiz va masalani $\rho \in [\rho_0, 1]$ uchun ko'rib chiqamiz.

2- ta'rif. To'g'ri masalaning $u(x, t)$ yechimi va $\rho \in [\rho_0, 1]$ parametrdan iborat $\{u(x, t), \rho\}$ juftlik (5)-(6), (8) teskari masalaning klassik yechimi deb ataladi.

Ushbu punktning asosiy natijasi quyidagicha:

7-teorema. . Shunday $T_0 = T_0(\lambda_0, \rho_0) > 0$ o'zgarimas mavjudki, $T_0 \leq t_0 < T$ bo'lganda (5)-(6), (8) teskari masala yagona $\{u(x, t), \rho\}$ yechimga ega bo'lishi uchun quyidagi shart bajarilishi zarur va yetarli:

$$e^{-\lambda_0 t_0} \leq \frac{d_0}{\left| \hat{\varphi}(\xi_0) \right|} \leq E_{\rho_0}(-\lambda_0 t_0^{\rho_0}). \quad (9)$$

Ushbu paragrafning ikkinchi punktida subdiffuziya tenglamalarida vaqt bo'yicha kasr hosilaning tartibi bilan bir qatorda fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha hosila tartibini ham aniqlashning teskari masalasi o'rganilgan.

Ikkinchi to'g'ri masala. $\rho \in (0, 1]$ va $\sigma \in (0, 1]$ berilgan sonlar bo'lsin. Quyidagi boshlang'ich-chegaraviy masalani qaraymiz:

$$\partial_{0t}^\rho v(x, t) + \hat{A}^\sigma v(x, t) = 0, x \in \mathbb{R}^N, 0 < t < T, \quad (10)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^N. \quad (11)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $v(x, t) \in D(\hat{A}^\sigma)$ yechimini topish masalasini qaraymiz. Bu yerda $\varphi(x)$ - berilgan funksiya va biror $\tau > \frac{N}{2}$ uchun $\varphi \in L_2^\tau(\mathbb{R}^N)$.

Bu erda (10)-(11) masalaning yechimi (5)-(6) masalaga o'xshash tarzda topiladi. Xuddi shu tarzda, 6-teoremada bo'lgani kabi, ikkinchi to'g'ri masalaning yagona yechimi

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} E_\rho(-A^\sigma(\xi)t^\rho)\hat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

shaklga ega ekanligi isbotlangan, bu yerda integral barcha $t \in [0, T)$ uchun $x \in \mathbb{R}^N$ da tekis va absolyut yaqinlashadi.

Ikkinchi teskari masala. $\rho_0 > 0$ va $\sigma_0 > 0$ fiksirlangan sonlar bo'lsin, ikkinchi to'g'ri masalada $\rho \in [\rho_0, 1]$ va $\sigma \in [\sigma_0, 1]$ parametrlar noma'lum sonlar deb qaraymiz. Noma'lum sonlar ikkita bo'lganligi sababli, bizga ikkita qo'shimcha shart kerak. Ushbu shartlarni aniqlash uchun yana $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N)$ bo'lsin deb qaraymiz. U holda, $\hat{\varphi}(\xi)$ va $\hat{\nu}(\xi, t)$ funksiyalar ξ bo'yicha uzluksiz. Qo'shimcha shartlar sifatida biz quyidagilarni olamiz:

$$V(\xi_0, t_0, \rho, \sigma) = |\hat{\nu}(\xi_0, t_0)| = d_0, t_0 \geq T_0(1, \rho_0), \quad (12)$$

$$V(\xi_1, t_1, \rho, \sigma) = |\hat{\nu}(\xi_1, t_1)| = d_1, \quad A(\xi_1) = \lambda_1 (\neq 1) \geq \Lambda_1, t_1 \geq 1,$$

bu yerda ξ_1 shundayki, $\hat{\varphi}(\xi_1) \neq 0$, $\Lambda_1 = e^n$, $n \geq \frac{\ln(C_1 \Gamma(1 - \rho^*))}{\sigma_0}$

Ushbu punktning asosiy natijasi quyidagidan iborat:

8-teopema. $\lambda_0 = 1$ bo'lganda d_0 son (9) tengsizlikni qanoatlantirsa va faqat shu holdagina (12) ni qanoatlantiradigan yagona $\rho^* \in [\rho_0, 1]$ mavjud bo'ladi. Bunda $\sigma^* \in [\sigma_0, 1]$ mavjud bo'lishi uchun d_1 son

$$E_{\rho^*}(-\lambda_1 t_1^{\rho^*}) \leq \frac{d_1}{|\hat{\varphi}(\xi_1)|} \leq E_{\rho^*}(-\lambda_1^{\sigma_0} t_1^{\rho^*})$$

tengsizlikni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

Ushbu bobning ikkinchi paragrafida Riman-Liuvilning kasr hosilasining vaqt bo'yicha tartibini noma'lum parametr sifatida qarab, ushbu tartibni aniqlashga oid to'g'ri va teskari masala tadqiq qilingan. To'g'ri va teskari masalalarning yechimlari mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlar isbotlangan.

Ma'lumki, ilgari ko'rib chiqilgan ikki parametrli teskari masalalarda faqat yechimning yagonaligi isbotlangan. Bizning tadqiqotlarimizda birinchi marta ikki parametrli teskari masala yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlandi.

Ushbu bobning ikkinchi paragrafida vaqt bo'yicha Riman-Liuvilning kasr hosilali subdiffuziya tenglamasi ko'riladi, ushbu tartibni aniqlashga oid to'g'ri va teskari bir va ikki parametrli masalalari o'rganiladi. Ushbu masalalarning yechimlarining mavjudligi va yagonaligi teoremlari isbotlangan.

Dissertatsiyaning to'rtinchi bobi "**Kasr hosilali aralash tipdagi tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar**" deb nomlangan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida birinchi marta aralash tipdagi tenglamalarda Gerasimov-Kaputo ma'nosida kasr hosilalarining tartibini aniqlashga oid to'g'ri va teskari masala tadqiq qilingan.

Aytaylik, Ω yetarlicha silliq $\partial\Omega$ chegaraga ega bo'lgan N o'lchovli soha bo'lsin. Aytaylik,

$$A(x, D)u = \sum_{i,j=1}^N D_i \left[a_{i,j}(x) D_j u \right] - c(x)u$$

ikkinchi tartibli differensial operator Ω sohada simmetrik va elliptik operator bo'lsin, ya'ni, barcha $x \in \Omega$ va ξ_i uchun,

$$a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x) \quad \text{va} \quad \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq a \sum_{i,j=1}^N \xi_i^2,$$

bunda $a = \text{const} > 0$ va $D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}, j = 1, \dots, N$.

Quyidagi Dirixle shartli spektral masalani qaraymiz

$$-A(x, D)v(x) = \lambda v(x), \quad x \in \Omega; \quad (13)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (14)$$

Ma'lumki, agar $A(x, D)$ operator koeffitsiyentlari va Ω sohasi chegarasi yetarlicha silliq va $c(x) > 0$ bo'lsa, u holda (13)-(14) spektral masala $L_2(\Omega)$ da to'la $\{v_k(x)\}$, $k \geq 1$, ortonormal xos funksiyalari sistemasiga va sanoqli $\{\lambda_k\}$ musbat xos qiymatlarga ega bo'ladi.

Aytaylik, $0 < \alpha < 1$ va $1 < \beta < 2$ bo'lsin.

$$\begin{cases} \partial_{0t}^\alpha u(x, t) - A(x, D)u(x, t) = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0; \\ \partial_{t0}^\beta u(x, t) - A(x, D)u(x, t) = 0, & x \in \Omega, \quad -T < t < 0. \end{cases} \quad (15)$$

aralash tipdagi tenglamani $\Omega \times (-T, +\infty)$, $T > 0$, sohada qaraymiz. Chegaraviy shart sifatida Dirixe shartini olamiz, ya'ni

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq -T. \quad (16)$$

Aytaylik, boshlang'ich shart

$$u(x, -T) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (17)$$

ko'rinishda bo'lsin.

Ulanish shartlarini quyidagi ko'rinishda olamiz

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad \lim_{t \rightarrow +0} \partial_{0t}^\alpha u(x, t) = u_t(x, -0), \quad x \in \Omega. \quad (18)$$

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa yuqoridagi shartlar tenglamaning $t = 0$ tipi o'zgarish chizig'idagi yechim va uning t bo'yicha hosilasining uzluksizligini anglatadi.

$G^+ = \overline{\Omega} \times (0, +\infty)$ va $G^- = \overline{\Omega} \times (-T, 0)$ belgilashlarni kiritamiz.

3-ta'rif. Yuqoridagi (15)-(18) shartlarni qanoatlatiradigan, $A(x, D)u(x, t) \in C(G^+ \cup G^-)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(G^+)$, $\partial_{t0}^\beta u(x, t) \in C(G^-)$ xossalarga ega bo'lgan $t \in [-T, 0) \cup (0, +\infty)$ bo'yicha har qanday x uchun absolyut uzluksiz $u(x, t) \in C(\overline{\Omega} \times [-T, 0) \cup (0, +\infty))$ funksiyani to'g'ri masalaning klassik yechimi deb ataymiz.

Ikkita parametrli Mittag-Leffler funksiyasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$E_{\rho,\mu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\rho n + \mu)}.$$

Ushbu Δ_k , $k \geq 1$, orqali quyidagi

$$\Delta_k \equiv \Delta_k(T, \beta) = \lambda_k T E_{\beta,2}(-\lambda_k T^\beta) - E_{\beta,1}(-\lambda_k T^\beta).$$

funksiyani belgilaymiz.

1-lemma. Shunday $T_0 = T_0(\lambda_1, \beta)$ o'zgarmas mavjudki, $T \geq T_0$ da quyidagi

$$\Delta_k > \delta_0 > 0, \quad k \geq 1,$$

baho o'rinli bo'ladi, bu yerda $\delta_0 = \delta_0(T)$ o'zgarmas λ_k ga bog'liq emas.

Sobolevning klassik fazosini $W_2^m(\Omega)$ bilan belgilaymiz va b sonning butun qismini $[b]$ kabi belgilaymiz. $G^\pm$ sohalaridagi to'g'ri masalaning yechimini mos ravishda $u^\pm(x, t)$ kabi belgilaymiz va (13)-(14) spektral masalaning $\{\nu_k(x)\}$ xos funksiyalari sistemasiga nisbatan $\varphi(x)$ funksiyaning Furrye koeffitsientlarini φ_k orqali belgilaymiz.

9-teorema. Aytaylik, 1-Lemma shartlari bajarilsin va φ quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\varphi(x) \in W_2^{\left[\frac{N}{2}\right]+2}(\Omega),$$

$$\varphi(x) = A(x, D)\varphi(x) = \dots = A^{\left[\frac{N}{4}\right]}(x, D)\varphi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

U holda to'g'ri masalaning yagona yechimi mavjud va u quyidagi, $x \in \overline{\Omega}$ va t bo'yicha absolut va tekis yaqinlashuvchi qatorlar shaklida ifodalanadi:

$$u^+(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) \varphi_k \nu_k(x)}{\Delta_k}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (19)$$

$$u^-(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[|t| \lambda_k E_{\beta,2}(-\lambda_k |t|^\beta) - E_{\beta,1}(-\lambda_k |t|^\beta) \right] \varphi_k \nu_k(x)}{\Delta_k}, \quad -T \leq t \leq 0. \quad (20)$$

Teskari masala. Endi kasr hosilalarining α va β tartiblarini noma'lum deb hisoblaymiz va ushbu parametrlarni aniqlash uchun teskari masalani ko'rib chiqamiz. Ikkita noma'lum bo'lganligi sababli, biz quyidagi ikkita qo'shimcha shartni kiritamiz:

$$\int_{\Omega} |u(x, t_1)|^2 dx = d_1 \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} u(x, -t_2) \nu_{k_0}(x) dx = d_2 \quad (22)$$

bu yerda d_1, d_2 ixtiyoriy berilgan sonlar, t_1, t_2 quyida keltirilgan 10-teoremada aniqlangan musbat sonlar va $k_0 \geq 1$ ixtiyoriy butun son agar $\varphi_{k_0} \neq 0$ bo'lsin.

Teskari masalani yechishda biz quyidagilarni faraz qilamiz

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha < 1, \quad 1 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 < 2,$$

bu yerda α_1, β_1 va β_2 – tegishli intervallarga tegishli ixtiyoriy berilgan sonlar.

Quyidagi belgilarni kiritamiz

$$W(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} |u(x, t_1)|^2 dx, \quad P(\beta) = \frac{\Delta_{k_0}(t_2, \beta)}{\Delta_{k_0}(T, \beta)}.$$

Aniq yechimning (20) ko‘rinishidan va $v_k(x)$ funksiyalar sistemasining ortonormalligidan foydalanib, (22) shartni quyidagicha ko‘rinishda yozish mumkin

$$P(\beta) \varphi_{k_0} = d_2. \quad (23)$$

Teskari masalaning yechimi mavjud bo‘lishi uchun d_1 va d_2 sonlar ixtiyoriy berilishi mumkin emasligi aniq. (23) tenglamani yechishning zaruriy sharti quyidagi tengsizlikning bajarilishidan iboratdir

$$P(\beta_1) \leq \frac{d_2}{\varphi_{k_0}} \leq P(\beta_2).$$

Boshqacha qilib aytganda, agar bu tengsizlik bajarilmasa, u holda hech qanday $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ uchun (22) shartni qanoatlantiradigan to‘g‘ri masalaning yechimi mavjud emas. Bundan keyingi mulohazalarda biz bu shart bajarilgan deb faraz qilamiz. Ushbu (19) va (21) asosan, teskari masalaning yechimi bo‘ladigan d_1 songa nisbatan shart quyidagi teoremda keltirilgan.

10-teorema. Aytaylik, 9-teoremaning shartlari bajarilsin. Shunday $T_{1,2} = T_{1,2}(\lambda_1, \beta_1, \beta_2)$ son mavjudki, $T_{1,2} \leq t_2 < T$ bo‘lganda (22) shartni qanoatlantiradigan yagona β^* mavjud. Bundan tashqari, $T_3 = T_3(\lambda_1, \alpha_1)$ musbat son mavjud bo‘lib, $t_1 \geq T_3$ bo‘lganda teskari masalaning yagona $\{u(x, t), \alpha, \beta^*\}$ yechimi mavjudligining zaruriy va yetarli shart quyidagicha bo‘ladi:

$$W(1, \beta^*) < d_1 \leq W(\alpha_1, \beta^*).$$

Ushbu paragrafda birinchi marta aralash tipdagi tenglama ushuni Gerasimov-Kaputo ma'nosida kasr hosilalarining α va β tartiblarini aniqlashning teskari va to‘g‘ri masalalarining yechimlarini mavjudligi va yagonalidi teoremlari isbotlangan.

Ushbu bobning ikkinchi paragrafida Riman-Liuvil ma'nosida kasr hosilalarining tartibini aniqlash uchun to‘g‘ri va teskari masalalar va aralash tipdagi tenglamalarda chegaraviy qiymatini aniqlash bo‘yicha teskari masala o‘rganilgan.

Ushbu paragrafning birinchi punktida birinchi to‘g‘ri va teskari masala ko‘rib chiqiladi. $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ sohada quyidagi aralash tipdagi tenglamani qaraymiz:

$$f(x, t) = \begin{cases} D_{0t}^\alpha u - u_{xx}, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx}, & t < 0, \end{cases} \quad (24)$$

bu yerda $\Omega^+ = \{(x,t): 0 < x < 1, t > 0\}$ va Ω^- - pastki ($t < 0$) yarim tekislikda joylashgan $AC: x+t=0$ va $BC: x-t=1$ xarakteristikalar, hamda $t=0$ chiziqligining $[0,1]$ kesmasi bilan chegaralangan soha.

Ushbu (24) tenglama uchun Ω sohada Triкоми masalasining analogi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

3-masala. (24) tenglamaning Ω sohada quyidagi

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \quad t \geq 0 \quad (25)$$

$$u(x/2, -x/2) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (26)$$

chegaraviy shartlarni, bundan tashqari, $t=0$ chiziqda quyidagi

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{1-\alpha} u(x,t) = \lim_{t \rightarrow -0} u(x,t), \quad (27)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{1-\alpha} \left(t^{1-\alpha} u(x,t) \right)_t = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(x,t), \quad (28)$$

ulash shartlari qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimi topilsin, bu yerda $0 < x < 1$.

4-ta'rif. 3 masala yechimi deb, (24)-(28) masala shartlarni qanoatlantiradigan va quyidagi silliqlikka ega bo'lgan $u(x,t)$ funksiyani aytamiz:

1. $t^{1-\alpha} u(x,t) \in C(\overline{\Omega^+})$, $D_{0t}^\alpha u(x,t) \in C(\Omega^+)$,
2. $t^{1-\alpha} \left(t^{1-\alpha} u(x,t) \right)_t \in C(\Omega^+ \cup \{(x,t): 0 < x < 1, t=0\})$,
3. $u_{xx}(x,t) \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, $u_{tt}(x,t) \in C(\Omega^-)$, $u(x,t) \in \overline{\Omega^-}$.

11-teorema. Aytaylik, $\psi(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ va har bir t uchun $f(x,t) \in C(\Omega)$, $f_\eta(x,\eta)$, $f(x,\eta) \in C_t^\alpha[0,1]$, $\alpha > 1/2$, hamda $f(0,t) = f(1,t) = f_t(0,t) = f_t(1,t) = 0$ bo'lsin. U holda 3 masala yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

Birinchi teskari masala. Endi (24) tenglamadagi kasr hosilasining α tartibini noma'lum deb faraz qilamiz va ushbu parametrni aniqlash uchun teskari masalani ko'rib chiqamiz. Noma'lum α parametrni aniqlash uchun biz qo'shimcha shart sifatida quyidagicha shartdan foydalanamiz:

$$\int_0^1 u(x, t_0) \sin(k_0 \pi x) dx = d_0, \quad (29)$$

bu yerda d_0 - ixtiyoriy berilgan son, t_0 quyida keltirilgan lemma 2 da aniqlanadigan musbat son va $k_0 \geq 1$ son $f_{k_0}^2 + \tau_{k_0}^2 \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi butun son.

Boshlang'ich-chegaraviy 3 masalani (29) qo'shimcha shart bilan birga α parametrni aniqlash uchun teskari masala deb ataymiz.

Agar 3 masalaning $u(x,t)$ yechimi va α parametr (29) shartni qanoatlantirsa, unda biz $\{u(x,t), \alpha\}$ juftlikni birinchi teskari masalaning yechimi deb ataymiz.

To'g'ri masala yechimi ko'rinishidan foydalanib, biz quyidagilarga ega bo'lamiz

$$E(\alpha) \equiv \int_0^1 u(x, t_0) \sin(k_0 \pi x) dx = 2 \left(\Gamma(\alpha) t_0^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_{k_0} t_0^\alpha) \tau_{k_0} + t_0^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_{k_0} t_0^\alpha) f_{k_0} \right).$$

Aytaylik, $\alpha \in [\alpha_0, 1]$, $0 < \alpha_0 < 1$ bo'lsin. U holda $E(\alpha)$ funksiya $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ segmentda uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Qo'shimcha (29) shartni α ga nisbatan quyidagi tenglama ko'rinishida qayta yozamiz:

$$E(\alpha) = d_0 \quad (30)$$

Ushbu tenglamaning yechimi mavjud bo'lishi uchun d_0 sonning ixtiyoriy berilishi mumkin emasligi aniq. (30) tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun zaruriy shart quyidagicha

$$d_0 \in \left[\min_{[\alpha_0, 1]} E(\alpha), \max_{[\alpha_0, 1]} E(\alpha) \right] \quad (31)$$

ya'ni, d_0 son $E(\alpha)$ funksiya qiymatlari sohasida tegishli bo'lishi kerak. Boshqacha qilib aytganda, agar (31) shart bajarilmasa, unda $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ bo'lganda (29) shartni qanoalantiradigan to'g'ri masalaning $u(x, t)$ yechimi mavjud emas.

2-lemma. Aytaylik, 11-teorema shartlari bajarilsin. U holda shunday $T_0 = T_0(k_0, \alpha_0)$ son mavjudki, $t_0 \geq T_0$ da $E(\alpha)$ funksiya $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ kesmada qat'iy monoton bo'ladi.

Ushbu lemmadan quyidagi asosiy natija kelib chiqadi:

12-teorema. Aytaylik, 11-teorema shartlari bajarilsin va $t_0 \geq T_0$ bo'lsin. U holda, (24)-(29) teskari masalaning yechimi mavjud va yagona.

Ushbu paragrafning ikkinchi punktida ikkinchi to'g'ri va teskari masala (24) tenglama uchun quyidagi cheksiz $G_\infty = G^+ \cup G^-$ sohada qaraladi, bu yerda $G^+ = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$ va G^- - pastki ($t < 0$) yarim tekislikda joylashgan (35) tenglamani harakteristikalari bilan chegaralangan soha. To'g'ri va teskari masalalarning mavjudligi va yagonaligi teoremlari isbotlangan.

Ushbu paragrafning uchinchi punktida uchinchi teskari masala ko'rib chiqiladi.

Bir jinsli (24) tenglama uchun Triкоми $\Im$ masalasini qaraymiz, ya'ni $f(x, t) \equiv 0$ deb faraz qilaylik. U holda ushbu masalada faqat (26) shartdagi ψ funksiyasi berilgan. Endi biz ushbu funksiya noma'lum deb hisoblaymiz va ushbu funksiyaning aniqlash uchun teskari masalani ko'rib chiqamiz.

Uchinchi teskari masala. Shunday $\{u(x, t), \psi(x)\}$ funksiyalar jufti topilsinki, bunda $u(x, t)$ funksiya

$$0 = \begin{cases} D_{0t}^\alpha u - u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T \\ u_{tt} - u_{xx}, & (x, t) \in \Omega^- \end{cases}$$

bir jinsli tenglamaning yechimi bo'lsin va u (25) chegaraviy shartlarni, (27) va (28) ulash shartlarini qanoatlantirsin, hamda xarakteristikadagi

$$u(x/2, -x/2) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1$$

shart va quyidagi qo'shimcha shart

$$u(x, T) = \Psi(x),$$

o'rinli bo'lsin.

Ushbu punktning asosiy natijasi:

13-teorema. Aytaylik, $\Psi^{(VII)}(x)$ hosila $[0,1]$ kesmada uzluksiz, $\Psi^{(j)}(0) = \Psi^{(j)}(1) = 0$, $j = 0, 2, 4, 6$ va $\Psi^{(VII)}(x) \in C^a[0,1]$, $a > 1/2$, bo'lsin. U holda $\{u(x, t), \psi(x)\}$ uchinchi teskari masalaning yechimi mavjud va yagona.

Ushbu punktda, yechimning $\psi(x)$ chegaraviy qiymatini noma'lum deb faraz qilib, birinchi marta yechimning noma'lum chegaraviy qiymatini mavjudligini va yagonaligini kafolatlaydigan qo'shimcha shart aniqlandi.

Ushbu bobning uchinchi paragrafida, misol tariqasida, tenglama kasr tartibining tashqi davriy kuch sharoitida chiziqli ossilyatorning sifat omili bilan bog'liqligi ko'rsatilgan.

XULOSA

Dissertatsiya ishida olib borilgan tadqiqotlar jarayonida quyidagi natijalarga erishildi:

1. Grin funksiyalari va integral tenglamalar usullari yordamida elliptik qismi gorizonttal yo‘lakdan iborat chegaralanmagan sohada aralash tipdagi model tenglama uchun shartlari turli oilalarning xarakteristikalarida va buzilish chizig‘ida berilgan siljishli masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;
2. Grin funksiyasi va integral tenglamalar usullari bilan elliptiklik qismi tekislikning chorak qismi bo‘lgan chegaralanmagan sohada spektral parametrli aralash tipdagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy tipidagi masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;
3. Grin funksiyalari va integral tenglamalar usullari bilan elliptik qismi yarim tekislik bo‘lgan chegaralanmagan sohada spektral parametrli aralash tipdagi tenglama uchun siljishli masalalarni bir qiymatli yechilishi isbotlangan;
4. chegaralangan va chegaralanmagan sohalarda kasr tartibli hosilali va kichik hadlarga ega aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;
5. subdiffuziya tenglamasining kasr hosilasining tartibini va operatorning darajasini tartibini aniqlashga oid to‘g‘ri va teskari masalalarning yechimlarining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremlar isbotlangan;
6. aralash tipdagi tenglamalarda kasr hosilalarning tartibini aniqlash uchun to‘g‘ri va teskari masalalar yechimlarining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan;
7. aralash tipidagi tenglamalarda yechimning chegaraviy qiymatini aniqlash uchun to‘g‘ri va teskari masalalar yechimlarining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ
В.И.РОМАНОВСКОГО**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЗУННУНОВ РАХИМЖОН ТЕМИРБЕКОВИЧ

**ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ
ДОКТОРСКОЙ (DSc) ДИССЕРТАЦИИ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ
НАУКАМ**

ТАШКЕНТ–2024

Тема докторской (Doctor of Science) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за B2023.4.DSc/FM233.

Диссертация выполнена в Институте математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://kengash.mathinst.uz>) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	Ашуров Равшан Раджабович доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Алимов Шавкат Арифджанович доктор физико-математических наук, академик Пеху Арсен Владимирович доктор физико-математических наук, профессор Мирсабуров Мирахмат доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук (Российская Федерация)

Защита диссертации состоится « 2 » июля 2024 года в 16.00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathins.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 185). (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел. (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 11 » июня 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от « 11 » июня 2024 года).



У.А. Розиков

Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К. Адашев

Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.А. Азамов

Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые в различных областях математики сводятся к исследованию прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В частности, краевые задачи для уравнений смешанного типа находят приложение в газовой динамике при математическом моделировании транс-звуковых течений, аэродинамике и т.д. В настоящее время во многих научных школах мира, бурно развивается направление нелокальных краевых задач, в том числе задачи с операторами дробного интегродифференцирования в граничных условиях для уравнений смешанного типа с производными целого и дробного порядка. Такое особое внимание к теории нелокальных краевых задач не случайно. Такие задачи содержат широкий класс локальных краевых задач и возникают при изучении различных вопросов прикладного характера. Например в математической биологии, прогнозирования почвенной влаги, проблем физики плазмы, а также имеют большое значение при математическом моделировании состояния и разработки нефтяных пластов, электрических колебаний в проводах, фильтрации грунтовых вод, переноса тепла и массы в объекте который имеет сложное строение, движения жидкости в канале, которая окружена пористой средой и т.д.

Теория дифференциальных уравнений с дробными производными приобрела значительную популярность и важность в последние несколько десятилетий в основном благодаря ее приложениям в многочисленных областях науки и техники. Известно, что обратными задачами в теории уравнений с частными производными целого и дробного порядка принято называть такие задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения требуется определить также тот или иной коэффициент(ы) самого уравнения, либо правую часть, либо и коэффициент(ы), и правую часть. Интерес к исследованию обратных задач обусловлен важностью их приложений в различных разделах механики, сейсмологии, медицинской томографии и геофизики. При рассмотрении уравнения дробного порядка в качестве модельного уравнения для анализа различных процессов порядок дробной производной часто неизвестен и его трудно измерить напрямую. Обратные задачи по определению этого неизвестного параметра интересны не только теоретически, но и необходимы для решения начально-краевых задач и изучения свойств решений. Это сравнительно новый тип обратных задач, который возникает только при рассмотрении уравнений дробного порядка.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим научное и практическое применение. При решении стоящих проблем особое внимание уделяется исследованию прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными и нахождению эффективных методов их решения. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным

направлениям математических наук, а именно, по алгебре и математическому анализу, в области дифференциальных уравнений в частных производных и математической физики, теории динамических систем а также по прикладной математике и математическому моделированию является основным направлением и задачей в деятельности Института математики имени В.И. Романовского¹. Развитие теории прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными имеет важное значение при исполнении этого Постановления.

Тема и задачи исследования настоящей диссертации находятся в русле задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП 4979 от 7 февраля 2017 года “О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан” и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”, и в других нормативно-правовых актах, относящихся или касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии в республике. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации.

Научные исследования прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: в университете Jon Hopkins (США), в Technical University Bergakademie Freiberg (Германия), в университете New Haven (США), Vilnius University (Литва), в Universita degli Studi di Torino (Италия), в университете Hokkaido (Япония), Institut de Mathematiques, Universite de Bordeaux (Франция), Московском государственном университете (Россия), Кабардино-Балкарском государственном университете (Россия), Башкирском государственном университете (Россия), Новосибирском государственном университете (Россия), Северо-Восточном федеральном университете (Россия), Белорусском государственном университете, Самарском государственном экономическом университете (Россия), Самарском государственном университете (Россия), Самарском архитектурно-строительном университете (Россия), Казанском федеральном университете (Россия), Институте прикладной математики и автоматизации

¹ Указ Президента Республики Узбекистан № ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан”

Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Институте математики и математического моделирования (Казахстан).

В результате исследований прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных во многих странах мира получены ряд результатов в частности: разработана теория решения краевых задач для уравнений смешанного типа с производными целого порядка (Туринский университет, Италия); найдены методы исследования краевых задач для эллипτικο-гиперболических и параболо-гиперболических уравнений с производными целого порядка (Математический институт Сибирского отделения Российской академии наук, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Институт математики и математического моделирования Казахстана); в мире получены основополагающие и фундаментальные результаты при исследовании прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка (Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, университет New Haven (США) и т.д.).

Степень изученности проблемы. Известно, что первые фундаментальные результаты по уравнениям смешанного типа были получены Ф. Трикоми. Затем, результаты Ф. Трикоми перенесены С. Геллерстедтом на более общее уравнение и им же предложены новые задачи. Следующим шагом в развитии теории уравнений смешанного типа стала работы Ф. И. Франкля, в которых показаны практические применения задач для уравнений смешанного типа в газовой динамике. В частности, Ф.И. Франкль показал, что задача истечения сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками сводится к задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина $k(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$. Позже, М.А. Лаврентьев предложил целесообразность исследования краевых задач для уравнения смешанного типа простого вида

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y u_{yy} = 0,$$

рассмотрение которого более широко раскрывает основные свойства решений уравнений смешанного типа и методику их исследования. Подробное исследование задачи Трикоми и других задач для этого уравнения провел А.В. Бицадзе. Поэтому это уравнение в настоящее время получило название уравнение Лаврентьева-Бицадзе. Интерес к изучению краевых задач для таких уравнений еще более возрос после того, как обнаружилась их связь с задачами теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

Дальнейшие исследования по уравнениям смешанного типа велись в трех направлениях: менялись постановки задач, геометрическая форма области рассмотрения и виды уравнений. В результате, расширился не только круг рассматриваемых задач для уравнений смешанного типа, но и само понятие «уравнения смешанного типа». В самом деле, если в начале рассматривались краевые задачи для уравнений смешанного эллипτικο-

гиперболического типа второго порядка, то начиная с 60-х годов прошлого столетия ведутся исследования по уравнениям смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов второго порядка. В дальнейшем теория краевых задач для уравнений смешанного типа развивалась в работах С.П.Пулькина, В.Ф.Волкодавова, М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, А.М. Нахушева, В.Н.Врагова, Т.Ш.Кальменова, О.А.Репина, М.М. Смирнова, М.Проттера, М.Мередова, Е.И.Моисеева, А.П. Солдатова, А.И. Кожанова, К.Б.Сабитова, А.Н.Зарубина, А.А.Полосина, А.В.Псху, М.А. Садыбекова, М.Мирсабурова, А.К.Уринова, Ж.О.Тахирова, О.С. Зикирова, Б.И.Исломова, А.Хасанова, А.С.Бердышева и др. Началом нового важного этапа в развитии теории краевых задач для уравнений эллиптического, гиперболического и смешанного типов стали «нелокальные задачи», т.е. задачи с нелокальными краевыми условиями. К таким задачам, прежде всего, относятся задачи типа Бицадзе-Самарского, впервые предложенные А.В. Бицадзе и А.А. Самарским. В этих задачах нелокальные условия связывают значения искомого решения в граничных и внутренних точках области рассмотрения уравнения. К нелокальным задачам относятся также «задачи со смещением», предложенные А.М. Нахушевым. В большинстве работ, где изучены задачи со смещением для уравнений смешанного типа, рассмотрены модельные уравнения или линейные уравнения со специально подобранными коэффициентами при младших производных. Более того, А.М. Нахушевым доказано, что коэффициенты уравнения при младших членах существенно влияют на постановку и исследование краевых задач со смещением. В самом деле, для модельных уравнений смешанного типа используются операторы дробного интегродифференцирования в смысле Римана – Лиувилля. Наиболее полный обзор локальных и нелокальных задач для этих уравнений наиболее полно исследованы в монографиях М.М. Смирнова, Ю.М. Крикунова, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, А.М. Нахушева, М.С. Салахитдинова. Следовательно, можно ожидать, что при постановке и исследовании нелокальных задач для уравнений с младшими членами возникают операторы более сложной структуры. Видимо, поэтому малоизученными остались нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с младшими членами. В работах М. Мирсабурова и М.Х. Рузиева, рассмотрены локальные и нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами в ограниченных и неограниченных областях соответственно. В монографии М.С. Салахитдинова и А.К. Уринова для уравнения

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, \quad m = \operatorname{const} > 0,$$

в ограниченных областях рассмотрены как локальные так и нелокальные краевые задачи, поэтому актуальным остается вопрос рассмотрения краевых задач в неограниченных областях для этого уравнения.

В последние десятилетия после работы М.Х. Геккиевой, активно развивается другое направление в модельных уравнениях смешанного типа которые содержат производные дробного порядка, среди которых надо

отметить работы А.А. Килбаса, О.А.Репина и др., поэтому актуальным остается вопрос рассмотрения краевых задач в неограниченных областях для таких уравнений с младшими членами. Как было отмечено выше, обратными задачами в теории уравнений с частными производными целого и дробного порядка принято называть такие задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения требуется определить также тот или иной коэффициент самого уравнения, либо правую часть, либо коэффициент и правую часть. Интерес к исследованию обратных задач обусловлен важностью их приложений в различных разделах механики, сейсмологии, медицинской томографии и геофизики, например в этом направлении можно перечислить монографии М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, В.Г. Васильева, С.И. Кабанихина, К.Б. Сабитова, Д.К. Дурдиева и Ж.Д. Тотиевой и др. В настоящее время решением прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений частных производных дробного порядка занимается огромное количество математиков. Следует отметить, что в недавних работах Ш.А. Алимова, Р.Р. Ашурова, С.Р. Умарова, А.В. Псху, М. Yamamoto, A. Cabada, B. Turmetov, A. Kochubei, Yu. Luchko, Z. Li, Y. Liu и др. получены основополагающие результаты в этом направлении.

Одним из наиболее важных дробных по времени уравнений является уравнение субдиффузии, которое моделирует аномальные или медленные процессы диффузии. Это уравнение представляет собой интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, полученное из классического уравнения теплопроводности путем замены производной первого порядка дробной по времени производной порядка $\rho \in (0,1)$. При рассмотрении уравнения субдиффузии как модельного уравнения при анализе аномальных диффузионных процессов, порядок дробной производной часто неизвестен и его трудно измерить напрямую. Чтобы определить этот параметр, необходимо исследовать обратные задачи идентификации этих физических величин на основе некоторой косвенно наблюдаемой информации о решениях. Такие обратные задачи для уравнений субдиффузии рассматривались рядом авторов, обзор многих работ в этом направлении был опубликован в 2019 году в статье Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto. Кроме того, следует отметить, что в этих публикациях в качестве дополнительного условия принималось следующее соотношение:

$$u(x_0, t) = h(t), \quad 0 < t < T,$$

в фиксированной точке $x_0 \in \overline{\Omega}$. Но это условие, как правило (исключением является работа J. Janno, в которой доказаны как единственность, так и существование), может обеспечить только единственность решения обратной задачи. В качестве дополнительной информации авторы статьи Р.Р. Ашуров и С.Р. Умаров разработали новое условие обеспечения существования и единственности решения, то есть рассматривали величину проекции решения на первую собственную функцию эллиптической части уравнения субдиффузии. Отметим, что результаты этой работы применимы только в

случае, когда первое собственное значение равно нулю. В случае если первое собственное значение не равно нулю были доказаны в недавней работе Ш.А. Алимова и Р.Р. Ашурова. В этой работе с помощью дополнительного условия рассматривается обратная задача определения порядка дробной производной Римана-Лиувилля по времени в уравнении субдиффузии с произвольным положительным самосопряженным оператором, имеющим дискретный спектр. Поэтому актуальным остается вопрос рассмотрения таких задач в случае непрерывного спектра. Обратные задачи по определению коэффициентов или правой части для уравнений смешанного типа с производными целого порядка изучены например в работах Р.Р. Ашурова, С.З. Джамалова, К.Б. Сабитова, Э.Т. Каримова, Т.К. Юлдашева. Обратные задачи по определению порядков дробных производных в уравнениях смешанного типа с производными дробного порядка в данной диссертационной работе изучаются впервые. Определение правильного порядка уравнения в прикладном дробном моделировании играет важную роль, что на примере показано в данной диссертационной работе.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами института, в котором выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф-ФА-2021-424 «Решение краевых задач для дифференциальных уравнений с целыми и дробными порядками» Института Математики Академии Наук Республики Узбекистан.

Целью исследования является решение нелокальных задач для уравнений смешанного типа с производными целого и дробного порядка в неограниченных и ограниченных областях, а также прямых и обратных задач по определению порядка дробной производной в уравнениях субдиффузии и в уравнениях смешанного типа.

Задачи исследования:

исследование задач со смещением для модельного уравнения смешанного типа в смешанной области, эллиптическая часть которой является горизонтальной полосой;

исследование задач типа задачи Бицадзе-Самарского и задач со смещением для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в неограниченных областях;

исследование нелокальных задач для уравнений смешанного типа с дробными производными в ограниченной и неограниченной областях;

исследование прямых и обратных задач по определению порядка дробной производной и степени оператора в уравнениях субдиффузии;

исследование прямых и обратных задач по определению порядков дробных производных в уравнениях смешанного типа;

исследование прямых и обратных задач по определению граничного значения решения в уравнениях смешанного типа;

Объектом исследования являются операторы интегро-дифференцирования смысле Герасимова-Капуто, Римана – Лиувилля, функции Миттаг-

Лефлера, функции Грина, уравнения в частных производных целого и дробного порядка.

Предмет исследования. Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными целого и дробного порядка в ограниченных и неограниченных областях.

Методы исследования. При исследовании поставленных задач в диссертации использованы метод интегралов энергии, метод функции Грина, метод Фурье, метод интегральных уравнений, методы математического анализа, методы функционального анализа и теории обобщенных функций, теория дифференциальных операторов, методы решений дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказана однозначная разрешимость задач со смещением для модельного уравнения смешанного типа в смешанной области, эллиптическая часть которой является горизонтальной полосой;

доказана однозначная разрешимость задач типа задачи Бицадзе-Самарского и задачи со смещением для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в неограниченных областях;

доказана однозначная разрешимость нелокальных задач для уравнений смешанного типа с дробными производными в ограниченной и неограниченной областях;

доказаны теоремы существования и единственности прямых и обратных задач по определению порядка дробной производной и степени оператора в уравнениях субдиффузии;

доказаны существование и единственность решений прямых и обратных задач по определению порядков дробных производных и граничного значения решения в уравнениях смешанного типа;

Практические результаты исследования состоят в следующем:

В диссертационной работе получены фундаментальные теоретические результаты, позволяющие аналитически исследовать прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных целого и дробного порядка. Эти результаты кроме огромного теоретического интереса имеют большое практическое значение, например они могут выступать в качестве математических моделей описывающих различные процессы в средах с фрактальной структурой а также являются основой для формулировки конкретных вычислительных алгоритмов и решения актуальных практических задач связанных с приложениями.

Достоверность результатов исследования: Достоверность и обоснованность решения прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными целого и дробного порядка, изучение свойств функций Грина и специальных функций в том числе функций Миттаг-Лефлера и их применения к решениям краевых задач обеспечиваются корректной постановкой задач и обоснованы методами теории обратных задач, математического анализа, дифференциальных уравнений, матема-

тической физики, теории специальных функций, спектральной теории линейных операторов, интегральных уравнений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов полученных в диссертационной работе заключается в том, что они могут быть использованы при дальнейшем развитии теории уравнений смешанного типа с производными целого и дробного порядка, в дальнейших исследованиях прямых и обратных задач теории дифференциальных уравнений в частных производных а также в других областях математики.

Практическое значение результатов определяется возможностью широкого применения этих результатов при математическом моделировании физических и биологических процессов, колебаний нагруженных тел, газодинамических процессов, различных физических явлений в теории теплообмена и массообмена в капиллярнопористых средах.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертационной работе результаты по прямым и обратным задачам для дифференциальных уравнений с частными производными целого и дробного порядка были внедрены на практике в следующих научно-исследовательских проектах:

методы решения прямых и обратных задач по определению порядка дробной производной и граничного значения функции в уравнениях смешанного типа были использованы в зарубежном проекте № НИОКТР 122041800013-4 по теме «Исследование краевых задач для уравнений с операторами обобщенного дробного дифференцирования, их применение к математическому моделированию физических и социально-экономических процессов» при решении прямых и обратных краевых задач для аналогов смешанных парабола-гиперболических и эллипτικο-гиперболических уравнений, содержащих дробные производные по временной переменной (Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, справка № 01-13/69 от 13 октября 2023 года, Российская Федерация). Применение научных результатов дало возможность решить прямые и обратные краевые задачи для аналогов смешанных парабола-гиперболических и эллипτικο-гиперболических уравнений, содержащих дробные производные по временной переменной.

аналитические методы решения прямых и обратных задач по определению порядка дробной производной для уравнений с частными производными дробного порядка в ограниченных и неограниченных областях были использованы в рамках зарубежного проекта № АААА-А17-117031050058-9 «Применение дробного исчисления в теории колебательных систем» при решении обратных задач по определению порядка дробной производной (Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, справка № 49-12, от 15 сентября 2023 года, Российская Федерация). Использование полученных научных результатов позволило получить алгоритмы для численного решения обратных задач по определению порядка

дробной производной;

решения задач со смещением для модельного уравнения смешанного типа в смешанной области, эллиптическая часть которой является горизонтальной полосой при выполнении научно-исследовательских работ по проекту «Разработка методов определения прочностных свойств новых строительных материалов при различных способах армирования» были использованы при постановке краевых задач для эллиптических уравнений (Институт механики и сейсмостойкости сооружений Академии Наук Республики Узбекистан, справка № 869-3, от 30 ноября 2023 года). Применение научных результатов дало возможность на основе методов разрывных смещений и фиктивных нагрузок найти свое применение при исследовании сингулярностей в сплошных средах, в частности в задачах теории упругости и пластичности.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 12 научно-практических конференциях, в том числе на 8 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 24 научных работ, в том числе 12 входящих в перечень научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций, из них 6 опубликованы в зарубежных журналах индексируемых в базах SCOPUS, и 6 в республиканских журналах.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 177 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется «Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в неограниченных областях».

В первом параграфе этой главы, приведены необходимые сведения о специальных функциях, свойствах интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов.

Во втором параграфе этой главы исследуется вопрос однозначной разрешимости двух задач со смещением для модельного уравнения смешан-

ного типа в неограниченной области, эллиптическая часть которой – горизонтальная полоса. В первом пункте этого параграфа исследуется первая задача со смещением.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \operatorname{const} > 0, \quad (1)$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_0 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$, $l_0 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB прямой $y = 0$ и характеристиками

$$AC : x - [2 / (m + 2)](-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC : x + [2 / (m + 2)](-y)^{(m+2)/2} = 1,$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$, $B(1,0)$. Введем обозначения

$$\beta = m / (2m + 4), \quad l_1 = \{(x, y) : -\infty < x < 0, y = 0\}, \quad l_2 = \{(x, y) : 1 < x < +\infty, y = 0\}, \\ l_3 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y = 1\},$$

$$\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\left[\frac{m+2}{2} \cdot \frac{x}{2} \right]^{\frac{2}{m+2}} \right), \quad \theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}, -\left[\frac{m+2}{2} \cdot \frac{1-x}{2} \right]^{\frac{2}{m+2}} \right).$$

Здесь $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ есть точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in l_0$, с характеристиками AC и BC соответственно.

Задача S_1^∞ . Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\Omega \cup \bar{l}_1 \cup \bar{l}_2 \cup AC \cup BC) \cap C^1(\Omega \cup l_1 \cup l_2) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, причем производная $u_y(x, 0)$ при $x = 0$ и $x = 1$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1 - 2\beta$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2 ;

3) удовлетворяет условиям

$$u_y(x, 0) = \psi_i(x), \quad \forall x \in l_i, i = 1, 2;$$

$$u(x, 1) = \psi_3(x) \quad \forall x \in l_3,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \text{ равномерно по } y \in [0, 1],$$

$a(x)D_{0x}^{1-\beta}[u(\theta_0(x))] + b(x)D_{x1}^{1-\beta}[u(\theta_1(x))] + c(x)u_y(x,0) + g(x)u(x,0) = d(x), \quad \forall x \in l_0,$
 где $\psi_i(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $g(x)$, $d(x)$ - заданные функции, причем $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) + g^2(x) \neq 0, \forall x \in \bar{l}_0$; функции $\psi_i(x)$ при $x=0$ и $x=1$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$, а также $\psi_1(x) \in C(-\infty, 0)$, $\psi_2(x) \in C(1, +\infty)$, $\psi_3(x) \in C(-\infty, +\infty)$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенствам

$$|\psi_i(x)| \leq M_1 |x|^{-1-\varepsilon_1}, (i=1,2), M_1, \varepsilon_1 = \text{const} > 0; |\psi_3(x)| \leq M_2 |x|^{-\varepsilon_2}, \varepsilon_2 = \text{const} > 0,$$

здесь $D_{0x}^{1-\beta}[f(x)]$ и $D_{x1}^{1-\beta}[f(x)]$ - операторы дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля.

Основными результатами первого пункта этого параграфа являются:

Теорема 1. Пусть функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям

$$a(x) = x^{\beta+\varepsilon} a_0(x), \quad b(x) = (1-x)^{\beta+\varepsilon} b_0(x), \quad c(x) = [x(1-x)]^\varepsilon c_0(x);$$

$$a_0(x), b_0(x), c_0(x), g(x) \in C^1(\bar{l}_0); \varepsilon = \text{const} > 0$$

$$q_0(x) = x^\varepsilon a_0(x) + (1-x)^\varepsilon b_0(x) - \frac{1}{\gamma_1} [x(1-x)]^\varepsilon c_0(x) \neq 0, \forall x \in \bar{l}_0;$$

$$\frac{g(x)}{q_0(x)} \geq 0, \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{x^\varepsilon a_0(x)}{q_0(x)} \right] \leq 0, \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{(1-x)^\varepsilon b_0(x)}{q_0(x)} \right] \geq 0, \quad \forall x \in l_0.$$

Тогда задача S_1^∞ не может иметь более одного решения.

Эта теорема доказывается методом интегралов энергии.

Следующая теорема доказана методом функций Грина и теории интегральных уравнений.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$, $g(x) \in C^2[0,1]$, $d(x) \in C^2(0,1)$ и $d(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ на концах интервала $(0,1)$. Тогда решение задачи S_1^∞ существует.

Во втором пункте этого параграфа для уравнения (1) в такой же неограниченной смешанной области Ω исследуется вторая задача со смещением для которой также доказаны теоремы существования и единственности.

В третьем параграфе для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области, эллиптическая часть которой является первой четвертью плоскости, исследуются две задачи типа задачи Бицадзе-Самарского.

В первом пункте этого параграфа рассмотрено уравнение

$$\text{sign } y |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, \quad m = \text{const} > 0, \quad (2)$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_1 \cup \Omega_2$, где область $\Omega_1 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB прямой $y = 0$ и характеристиками AC , BC уравнения (2), выходящими из точек $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ соответственно. Введем обозначения:

$$l_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}, l_2 = \{(x, y) : x > 1, y = 0\}, l_3 = \{(x, y) : y > 0, x = 0\}.$$

Предположим, что $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda = \lambda_1$ при $y > 0$, $\lambda = \lambda_2$ при $y < 0$.

Задача BS_1^∞ . Найти функцию $u(x, y)$ со следующим и свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\Omega \cup \bar{l}_2 \cup \bar{l}_3 \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, причем $u_y(x, 0)$ при $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow 1$ может иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$;

2) удовлетворяет уравнению (2) в областях Ω_1 и Ω_2 ;

3) удовлетворяет следующим краевым условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \varphi(y), \quad 0 \leq y < +\infty, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} u(x, y) &= 0, \quad y \geq 0, x \geq 0, \\ u_y(x, 0) &= \psi(x), \quad 1 < x < +\infty, \end{aligned}$$

$$A_{0x}^{1, \lambda_2} \{D_{0x}^{1-\beta} [u(\theta_0(x))]\} + c(x)u_y(x, 0) = d(x), (x, 0) \in l_1,$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$, $c(x)$, $d(x)$ - заданные функции, причем $\varphi(y) \in C[0, +\infty)$ а при достаточно больших y удовлетворяет неравенству $|\varphi(y)| \leq M_1 y^{-1-m/2-\varepsilon_3}$; $\psi(x) \in C(1, +\infty)$ при достаточно больших x удовлетворяет неравенству $|\psi(x)| \leq M_2 x^{2\beta-1-\varepsilon_4}$ а при $x \rightarrow 1$ может иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$; $c(x) \in C^1[0, 1]$; $d(x) \in C^2(0, 1)$ и $d(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1 - 2\beta$ при $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow 1$. Здесь $M_1, M_2 = \text{const} > 0$ $R^2 = x^2 + [2 / (m + 2)]^2 y^{m+2}$, $\varepsilon_3, \varepsilon_4 = \text{const} > 0$.

Основными результатами первого пункта этого параграфа являются:

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия

$$\begin{aligned} q(x) &= 1 - \gamma x^\beta c(x) > 0, x \in [0, 1]; \quad \frac{d}{dx} [q(x)] \geq 0, x \in (0, 1) \\ \gamma &= \frac{2 \sin(2\pi\beta) \Gamma(1-\beta) \Gamma(2\beta)}{\pi (2-4\beta)^{2\beta}}, \end{aligned}$$

тогда задача BS_1^∞ не может иметь более одного решения.

Единственность решения этой задачи доказывается с помощью метода интегралов энергии.

Теорема 4. Пусть $c(x) = (1-x)^\delta c_0(x)$, $\delta > 0$, $c_0(x) \in C^2[0, 1]$, и выполнены условия теоремы 3, тогда решение задачи BS_1^∞ существует.

Существование решения задачи BS_1^∞ доказывается методом функций Грина и методом интегральных уравнений.

Во втором пункте этого параграфа исследуется вторая задача Бицадзе-Самарского для уравнение (2) в неограниченной смешанной области Ω , где доказаны теоремы существования и единственности.

В четвертом параграфе этой главы для уравнения (2) в неограниченной области эллиптическая часть которой является полуплоскостью, исследуется задача со смещением. Доказаны теоремы существования и единственности исследуемой задачи.

Вторая глава диссертации называется «**Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа с дробной производной**». В первом параграфе этой главы исследуется задача со сдвигом для уравнения с частной дробной Римана-Лиувилля с сингулярными коэффициентами, в которой часть характеристики освобождена от нелокальных краевых условий с операторами дробного интегро-дифференцирования при краевом условии.

Пусть D – конечная область, ограниченная отрезками AA_0, BB_0 и A_0B_0 прямых $x=0, x=1$ и $y=1$ соответственно, лежащими в полуплоскости $y>0$, и на полуплоскости, $y<0$ характеристиками

$AC : x - [2 / (m + 2)](-y)^{(m+2)/2} = 0$, $BC : x + [2 / (m + 2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$, следующего уравнения :

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0,y}^\gamma u = 0, \gamma \in (0,1), y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{(-y)^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y, y < 0. \end{cases} \quad (3)$$

В уравнении (3) $m > 0, |\alpha_0| < (m+2)/2, 1 < \beta_0 < (m+4)/2$, а $D_{0,y}^\gamma$ частная дробная производная Римана-Лиувилля

$$(D_{0,y}^\gamma u)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^y \frac{u(x, t) dt}{(y-t)^\gamma}, (0 < \gamma < 1, y > 0).$$

Пусть $D^+ = D \cap (y > 0), D^- = D \cap (y < 0)$.

Задача TS. Найти функцию $u(x, y)$ со следующим и свойствами: 1)

$$\begin{aligned} y^{1-\gamma} u &\in C(\bar{D}^+), u(x, y) \in C(\bar{D}^- \setminus \overline{OB}), u_{xx} \in C(D^+ \cup D^-), u_{yy} \in C(D^-), \\ y^{1-\gamma} (y^{1-\gamma} u)_y &\in C(D^+ \cup \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}), \end{aligned}$$

2) удовлетворяет уравнению (3) в областях D^+ и D^- ;

3) удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \varphi_1(y), u(1, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq 1, \\ x^{\bar{\alpha}} D_{0,x}^{1-\beta} x^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}} u[\theta_0(x)] &+ (1-x)^{\bar{\beta}} \rho(x) D_{x,1}^{1-\bar{\alpha}} (1-x)^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}} u[\theta_k(x)] = \\ &= \mu_1 D_{0,x}^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}} \tau(x) - \mu_2 D_{x,1}^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}} \tau(x) + f(x), x \in [0, 1], \end{aligned}$$

и следующим условиям сопряжения:

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\gamma} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0-1} u(x, y), x \in [0, 1],$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\gamma} \left(y^{1-\gamma} u(x, y) \right)_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2-\beta_0} \left((-y)^{\beta_0-1} u(x, y) \right)_y, x \in I = (0, 1).$$

Здесь $\bar{\alpha} = \frac{m+2(2-\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}, \bar{\beta} = \frac{m+2(2-\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$ а $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$

$\rho(x), f(x) \tau(x) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0-1} u(x, y)$ - заданные функции; здесь $f(0) = 0$,

$\rho(x), f(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I), y^{1-\gamma} \varphi_1(y), y^{1-\gamma} \varphi_2(y) \in C([0, 1]), \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$,

$$\mu_1 = \frac{\Gamma(\bar{\alpha} + \bar{\beta})}{\Gamma(\bar{\beta})} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\bar{\alpha} + \bar{\beta} - 1} \text{ и } \mu_2 = \left(\frac{4}{m+2} \right)^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}} \frac{(\Gamma(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \Gamma(1-\bar{\beta}))}{(\Gamma(\bar{\alpha}) \Gamma(1-\bar{\alpha}))} - \text{постоян-}$$

ные; $\theta_0(x)$ является точкой пересечения характеристики уравнения (3) исходящей из точки $(x_0, 0) (x_0 \in I)$ с характеристикой AC уравнения (3), а точку

пересечения кривой $x - \frac{2k}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_0, k = \text{const} > 1$, с характеристикой

$$BC \text{ уравнения (3) обозначим через } \theta_k(x_0) = \left(\frac{x_0 + k}{1+k}, - \left(\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(1+k)} \right)^{\frac{2}{m+2}} \right).$$

Основным результатом этого параграфа является:

Теорема 5. Пусть $|\omega(x)| < 1$, где $\omega(x) = \frac{\Gamma(1-\bar{\alpha})}{\Gamma(1-\bar{\beta})} \rho(x), x \in [0, 1]$ тогда

решение задачи TS существует и единственно.

Во втором параграфе этой главы для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана-Лиувилля и с младшим членом исследована нелокальная задача в неограниченной области, эллиптическая часть которой, является полуплоскостью.

В третьей главе диссертации, названной «**Прямые и обратные задачи для уравнений субдиффузии**», исследуются прямые и обратные задачи для уравнений субдиффузии с дробной производной Герасимова-Капуто и Римана-Лиувилля.

При рассмотрении уравнения субдиффузии в качестве модельного уравнения при анализе аномальных диффузионных процессов порядок дробной производной часто неизвестен и его трудно измерить непосредственно. Для определения этого параметра необходимо исследовать обратные задачи идентификации этих физических величин на основе некоторой косвенно наблюдаемой информации о решениях. В зависимости от характера процесса, например, если рассматривается начальная фаза процесса, используются дробные производные Герасимова-Капуто, если же

процесс стабилизировавшийся – то дробные производные Римана-Лиувилля.

Как отмечено выше, ранее были доказаны единственность и существование решения обратной задачи по определению порядка дробной производной Римана-Лиувилля по времени в уравнении субдиффузии с произвольным положительным самосопряженным оператором, имеющим дискретный спектр. В данной диссертационной работе впервые доказаны единственность и существование решения обратной задачи по определению порядка дробной производной Герасимова-Капуто и Римана-Лиувилля по времени в уравнении субдиффузии с произвольным положительным самосопряженным оператором, имеющим непрерывный спектр. Кроме однопараметрических задач в этой главе, также исследованы соответствующие двухпараметрические задачи.

В первом параграфе этой главы рассмотрена начально-краевая задача для уравнения субдиффузии с эллиптическим оператором $A(D)$ в $\mathbb{R}^N$.

Пусть $A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ – однородный симметричный эллиптический дифференциальный оператор четного порядка $m = 2l$, с постоянными коэффициентами, т.е. $A(\xi) > 0$, для всех $\xi \neq 0$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ – мульти-индекс и $D = (D_1, D_2, \dots, D_N)$, $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $i = \sqrt{-1}$.

Дробный интеграл в смысле Римана-Лиувилля порядка $\rho < 0$ от функции h , определенной на $[0, \infty)$, имеет вид

$$I_{0+}^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(-\rho)} \int_0^t \frac{h(\xi)}{(t-\xi)^{\rho+1}} d\xi, t > 0,$$

при условии, что правая часть существует. Здесь $\Gamma(\rho)$ – гамма-функция Эйлера. Используя это определение, можно определить дробную производную Герасимова-Капуто порядка ρ , $0 < \rho < 1$, в виде

$$\partial_{0+}^\rho h(t) = I_{0+}^{\rho-1} \frac{d}{dt} h(t).$$

Первая прямая задача. Пусть $\rho \in (0, 1]$ – заданное число, а $L_2^r(\mathbb{R}^N)$ – классы Соболева. Рассмотрим начально-краевую задачу: найти функцию $u(x, t) \in L_2^m(\mathbb{R}^N)$, $t \in [0, T)$ такую, что

$$\partial_{0+}^\rho u(x, t) + A(D)u(x, t) = 0, x \in \mathbb{R}^N, 0 < t < T, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^N, \quad (6)$$

где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция.

Определение 1. Функция $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^N \times [0, T))$ абсолютно непрерывная по $t \in [0, T)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^N$, обладающая свойствами $\partial_{0+}^\rho u(x, t)$,

$A(D)u(x, t) \in C(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ и удовлетворяющая условиям (5)-(6), называется классическим решением прямой задачи.

Обозначим через $E_\rho(t)$ функцию Миттаг-Леффлера вида

$$E_\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\rho k + 1)},$$

и обозначим через $\hat{f}(\xi)$ преобразование Фурье функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^N)$

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Теорема существования и единственности решения прямой задачи формулируется следующим образом:

Теорема 6. Пусть $\tau > \frac{N}{2}$ и $\varphi \in L_2^\tau(\mathbb{R}^N)$. Тогда прямая задача имеет единственное решение и это решение имеет вид

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} E_\rho(-A(\xi)t^\rho) \hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (7)$$

Интеграл равномерно и абсолютно сходится по $x \in \mathbb{R}^N$, и при каждом $t \in [0, T)$. Кроме того, решение (7) обладает следующим свойством

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} D^\alpha u(x, t) = 0, \quad |\alpha| \leq m, \quad 0 < t < T.$$

Первая обратная задача. Рассмотрим порядок дробной производной ρ в уравнении (5) как неизвестный параметр. Для формулировки обратной задачи будем дополнительно считать, что $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N)$. Отсюда следует, что обе функции $\hat{\varphi}(\xi)$ и $\hat{u}(\xi, t) = E_\rho(-A(\xi)t^\rho) \hat{\varphi}(\xi)$, $t \in [0, t)$, непрерывны по переменной $\xi \in \mathbb{R}^N$. Зафиксируем вектор $\xi_0 \neq 0$, такой, что $\hat{\varphi}(\xi_0) \neq 0$, и положим, что $\lambda_0 = A(\xi_0) > 0$. Для определения порядка ρ воспользуемся следующими дополнительными данными:

$$U(t_0, \rho) \equiv |\hat{u}(\xi_0, t_0)| = d_0, \quad (8)$$

t_0 , $0 < t_0 < T$ – фиксированный момент времени.

Задача (5)-(6) вместе с дополнительным условием (8) называется обратной задачей.

Для решения обратной задачи зафиксируем число $\rho_0 \in (0, 1)$ и рассмотрим задачу для $\rho \in [\rho_0, 1]$.

Определение 2. Пара $\{u(x, t), \rho\}$ решения $u(x, t)$ прямой задачи и параметра $\rho \in [\rho_0, 1]$ называется классическим решением обратной задачи.

Основным результатом этого пункта является следующая:

Теорема 7. Существует число $T_0 = T_0(\lambda_0, \rho_0) > 0$ такое что, при $T_0 \leq t_0 < T$ обратная задача имеет единственное решение $\{u(x, t), \rho\}$ тогда и только тогда, когда

$$e^{-\lambda_0 t_0} \leq \frac{d_0}{|\hat{\varphi}(\xi_0)|} \leq E_{\rho_0}(-\lambda_0 t_0^{\rho_0}). \quad (9)$$

Во втором пункте этого параграфа изучена обратная задача определения как порядков дробных производных по времени, так и пространственных производных в уравнениях субдиффузии.

Вторая прямая задача. Предположим, что $\rho \in (0, 1]$ и $\sigma \in (0, 1]$ – заданные числа. Рассмотрим начально-краевую задачу: найти функцию $v(x, t) \in D(\hat{A}^\sigma)$ такую, что

$$\partial_{0t}^\rho v(x, t) + \hat{A}^\sigma v(x, t) = 0, x \in \mathbb{R}^N, 0 < t < T, \quad (10)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^N, \quad (11)$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция, и, как было сказано выше, допустим, что $\varphi \in L_2^\tau(\mathbb{R}^N)$ для некоторого $\tau > \frac{N}{2}$.

Здесь решение задачи (10)–(11) определяется аналогично решению задачи (5)–(6). Точно также, как и в теореме 6, доказывается, что единственное решение второй прямой задачи имеет вид

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} E_\rho(-A^\sigma(\xi)t^\rho) \hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

где интеграл равномерно и абсолютно сходится по $x \in \mathbb{R}^N$ и для каждого $t \in [0, T)$.

Вторая обратная задача. Пусть теперь $\rho_0 > 0$ и $\sigma_0 > 0$ – фиксированные числа, и предположим, что во второй прямой задаче параметры $\rho \in [\rho_0, 1]$ и $\sigma \in [\sigma_0, 1]$ неизвестны. Поскольку неизвестных чисел два, то, очевидно, нужны два дополнительных условия. Чтобы сформулировать эти условия, снова предположим, что $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N)$. Тогда обе функции $\hat{\varphi}(\xi)$ и $\hat{v}(\xi, t)$ непрерывны по ξ . В качестве дополнительных условий мы рассматриваем следующую информацию:

$$V(\xi_0, t_0, \rho, \sigma) = |\hat{v}(\xi_0, t_0)| = d_0, t_0 \geq T_0(1, \rho_0), \quad (12)$$

$$V(\xi_1, t_1, \rho, \sigma) = |\hat{v}(\xi_1, t_1)| = d_1, \quad A(\xi_1) = \lambda_1 (\neq 1) \geq \Lambda_1, t_1 \geq 1,$$

где ξ_1 такой, что $\hat{\varphi}(\xi_1) \neq 0$, $\Lambda_1 = e^n$, $n \geq \frac{\ln(C_1 \Gamma(1 - \rho^*))}{\sigma_0}$.

Основным результатом этого пункта является:

Теорема 8. Существует единственное $\rho^* \in [\rho_0, 1]$, удовлетворяющее (12), тогда и только тогда, когда d_0 удовлетворяет неравенству (9) с $\lambda_0 = 1$. Для существования $\sigma^* \in [\sigma_0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы d_1 удовлетворяло неравенству

$$E_{\rho^*}(-\lambda_1 t_1^{\rho^*}) \leq \frac{d_1}{|\hat{\phi}(\xi_1)|} \leq E_{\rho^*}(-\lambda_1^{\sigma_0} t_1^{\rho^*}).$$

Как известно, в ранее рассмотренных двухпараметрических обратных задачах доказана только единственность решения. В наших исследованиях впервые доказано единственность и существование решения двухпараметрической обратной задачи.

Во втором параграфе этой главы рассматривается уравнение субдиффузии с дробной производной Римана-Лиувилля по времени, изучается соответствующая прямая и обратная однопараметрическая задача определения этого порядка, а также прямая и обратная двухпараметрическая задача. Доказаны теоремы существования и единственности решений этих задач.

Четвертая глава диссертации называется «**Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа с дробной производной**».

В первом параграфе этой главы впервые исследуются прямые и обратные задачи по определению порядков дробных производных в смысле Герасимова-Капуто в уравнениях смешанного типа.

Пусть Ω - произвольная N - мерная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть далее дифференциальный оператор второго порядка

$$A(x, D)u = \sum_{i,j=1}^N D_i [a_{i,j}(x) D_j u] - c(x)u,$$

является симметричным эллиптическим оператором в Ω , т.е.

$$a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x) \quad \text{и} \quad \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq a \sum_{i,j=1}^N \xi_i^2,$$

для всех $x \in \Omega$ и ξ_i , где $a = \text{const} > 0$ и $D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, N$.

Рассмотрим спектральную задачу с условием Дирихле

$$-A(x, D)v(x) = \lambda v(x), \quad x \in \Omega; \tag{13}$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{14}$$

Известно, что, если коэффициенты оператора $A(x, D)$ и граница области Ω являются достаточно гладкими и $c(x) > 0$, то спектральная задача (13)-(14) имеет полное в $L_2(\Omega)$ множество ортонормированных собственных функций $\{v_k(x)\}$, $k \geq 1$ и счетное множество положительных собственных значений $\{\lambda_k\}$.

Пусть $0 < \alpha < 1$ и $1 < \beta < 2$. В области $\Omega \times (-T, +\infty)$, $T > 0$, рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\begin{cases} \partial_{0t}^\alpha u(x, t) - A(x, D)u(x, t) = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0; \\ \partial_{t0}^\beta u(x, t) - A(x, D)u(x, t) = 0, & x \in \Omega, \quad -T < t < 0. \end{cases} \quad (15)$$

В качестве граничного условия возьмем условие Дирихле, т.е.

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq -T. \quad (16)$$

Пусть начальное условие имеет вид

$$u(x, -T) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (17)$$

Условия склеивания возьмем в виде

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad \lim_{t \rightarrow +0} \partial_{0t}^\alpha u(x, t) = u_t(x, -0), \quad x \in \Omega. \quad (18)$$

Если $\alpha = 1$, эти последние условия означают непрерывность решения $u(x, t)$ и его производной по t на линии изменения типа уравнения $t = 0$.

Введем обозначения: $G^+ = \bar{\Omega} \times (0, +\infty)$ и $G^- = \bar{\Omega} \times (-T, 0)$.

Определение 3. Функцию $u(x, t) \in C(\bar{\Omega} \times [-T, 0) \cup (0, +\infty))$ абсолютно непрерывную по $t \in [-T, 0) \cup (0, +\infty)$ при каждом x , со свойствами $A(x, D)u(x, t) \in C(G^+ \cup G^-)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(G^+)$, $\partial_{t0}^\beta u(x, t) \in C(G^-)$ и удовлетворяющую условиям (15)-(18), будем называть классическим решением прямой задачи.

Пусть $E_{\rho, \mu}(t)$ - двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера:

$$E_{\rho, \mu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\rho n + \mu)}.$$

Обозначим через Δ_k , $k \geq 1$, функцию

$$\Delta_k \equiv \Delta_k(T, \beta) = \lambda_k T E_{\beta, 2}(-\lambda_k T^\beta) - E_{\beta, 1}(-\lambda_k T^\beta).$$

Лемма 1. Существует постоянная $T_0 = T_0(\lambda_1, \beta)$ такая, что при $T \geq T_0$ справедлива оценка

$$\Delta_k > \delta_0 > 0, \quad k \geq 1,$$

где константа $\delta_0 = \delta_0(T)$ не зависит от λ_k .

Обозначим символом $W_2^m(\Omega)$ классическое пространство Соболева и символом $[b]$ целую часть числа b . Решение прямой задачи в областях $G^\pm$ обозначим соответственно $u^\pm(x, t)$, а через φ_k - коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по системе собственных функций $\{\nu_k(x)\}$ спектральной задачи (13)-(14).

Теорема 9. Пусть выполнено условие леммы 1 и пусть φ удовлетворяет условиям

$$\varphi(x) \in W_2^{\left[\frac{N}{2}\right]+2}(\Omega),$$

$$\varphi(x) = A(x, D)\varphi(x) = \dots = A^{\left[\frac{N}{4}\right]}(x, D)\varphi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Тогда существует единственное решение прямой задачи и оно представимо в виде следующих рядов

$$u^+(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) \varphi_k \psi_k(x)}{\Delta_k}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (19)$$

$$u^-(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[|t| \lambda_k E_{\beta,2}(-\lambda_k |t|^\beta) - E_{\beta,1}(-\lambda_k |t|^\beta) \right] \varphi_k \psi_k(x)}{\Delta_k}, \quad -T \leq t \leq 0 \quad (20)$$

которые сходятся абсолютно и равномерно по $x \in \overline{\Omega}$ и по t в указанных выше областях.

Обратная задача. Теперь предположим, что порядки дробных производных α и β являются неизвестными и рассмотрим обратную задачу по определению этих параметров. Поскольку неизвестных два, то зададим следующие два дополнительных условия:

$$\int_{\Omega} |u(x, t_1)|^2 dx = d_1, \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} u(x, -t_2) \psi_{k_0}(x) dx = d_2, \quad (22)$$

где d_1, d_2 - произвольные заданные числа, t_1, t_2 - положительные числа, которые определены в теореме 10, приведенной ниже и $k_0 \geq 1$ - произвольное целое такое, что $\varphi_{k_0} \neq 0$.

При решении обратной задачи будем предполагать, что

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha < 1, \quad 1 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 < 2,$$

где α_1, β_1 и β_2 - произвольные заданные числа из соответствующих интервалов. Введем следующие обозначения

$$W(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} |u(x, t_1)|^2 dx, \quad P(\beta) = \frac{\Delta_{k_0}(t_2, \beta)}{\Delta_{k_0}(T, \beta)}.$$

Используя явный вид решения (20) и ортонормированность функций $\psi_k(x)$, условие (22) можно переписать в виде

$$P(\beta) \varphi_{k_0} = d_2. \quad (23)$$

Для того, чтобы обратная задача имела решение, очевидно, что числа d_1 и d_2 не могут задаваться произвольным образом. Необходимым условием разрешимости уравнения (23) является выполнение следующего неравенства

$$P(\beta_1) \leq \frac{d_2}{\varphi_{k_0}} \leq P(\beta_2).$$

Другими словами, если выполняется обратное неравенство, то ни при каких $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ не существует решение $u(x, t)$ прямой задачи, которое удовлетворяет условию (22). Всюду далее будем предполагать, что это условие выполнено. В силу (19) и (21), условие относительно числа d_1 , при выполнении которого обратная задача имеет решение, приведено в следующей теореме.

Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 9. Найдется число $T_{1,2} = T_{1,2}(\lambda_1, \beta_1, \beta_2)$ такое, что при $T_{1,2} \leq t_2 < T$ существует единственное число β^* , удовлетворяющее условию (22). Далее, существует положительное число $T_3 = T_3(\lambda_1, \alpha_1)$ такое, что при $t_1 \geq T_3$ необходимое и достаточное условие существования единственного решения $\{u(x, t), \alpha, \beta^*\}$ обратной задачи имеет вид

$$W(1, \beta^*) < d_1 \leq W(\alpha_1, \beta^*).$$

В этом параграфе впервые доказаны теоремы существования и единственности решений прямых и обратных задач по определению порядков α и β дробных производных в смысле Герасимова-Капуто для уравнения смешанного типа.

Во втором параграфе этой главы исследованы аналоги задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной. В одной части области рассмотренное уравнение является уравнением субдиффузии с дробной производной порядка $\alpha \in (0, 1)$ в смысле Римана-Лиувилля, а в другой – волновое уравнение. В первом и во втором пунктах рассмотрены две прямые и обратные задачи. Считая параметр α неизвестным, изучены соответствующие обратные задачи и найдено дополнительное условие, которое обеспечивает однозначное определение искомого параметра.

В первом пункте этого параграфа рассмотрена первая прямая и обратная задача. Рассмотрим уравнение, имеющее смешанный тип,

$$f(x, t) = \begin{cases} D_{0t}^\alpha u - u_{xx}, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx}, & t < 0, \end{cases} \quad (24)$$

в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, где $\Omega^+ = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}$ а Ω^- – область, находящаяся в нижней полуплоскости ($t < 0$) и ограниченная характеристиками $AC : x + t = 0$ и $BC : x - t = 1$ и отрезком $[0, 1]$ прямой $t = 0$.

Аналог задачи Трикоми для уравнения (24) в области Ω имеет вид:

Задача 3. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (24) в области Ω , удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (25)$$

$$u(x/2, -x/2) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (26)$$

На линии $t = 0$ выполняются условия склеивания

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{1-\alpha} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow -0} u(x, t), \quad (27)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{1-\alpha} \left(t^{1-\alpha} u(x, t) \right)_t = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(x, t), \quad (28)$$

где $0 < x < 1$.

Определение 4. Решением задачи $\mathfrak{Z}$ будем называть функцию $u(x, t)$ удовлетворяющую условиям задачи и имеющую следующую гладкость

1. $t^{1-\alpha} u(x, t) \in C(\overline{\Omega^+})$, $D_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\Omega^+)$,
2. $t^{1-\alpha} \left(t^{1-\alpha} u(x, t) \right)_t \in C(\Omega^+ \cup \{(x, t) : 0 < x < 1, t = 0\})$,
3. $u_{xx}(x, t) \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, $u_{tt}(x, t) \in C(\Omega^-)$, $u(x, t) \in \overline{\Omega^-}$.

Теорема 11. Пусть $\psi(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, а функция $f(x, t) \in C(\Omega)$ и $f_\eta(x, \eta), f(x, \eta) \in C_t^\alpha[0, 1], \alpha > 1/2$, при каждом t , и пусть $f(0, t) = f(1, t) = f_t(0, t) = f_t(1, t) = 0$. Тогда решение задачи $\mathfrak{Z}$ существует и оно единственно.

Первая обратная задача. Теперь предположим, что порядок дробной производной α в уравнении (24) является неизвестным и рассмотрим обратную задачу по определению этого параметра. Для определения неизвестного параметра α зададим дополнительное условие на решения в виде:

$$\int_0^1 u(x, t_0) \sin(k_0 \pi x) dx = d_0, \quad (29)$$

где d_0 - произвольное заданное число, t_0 - положительное число, которое определено в лемме 2, приведенной ниже и $k_0 \geq 1$ - произвольное целое такое, что $f_{k_0}^2 + \tau_{k_0}^2 \neq 0$.

Начально-краевую задачу $\mathfrak{Z}$ вместе с дополнительным условием (29) назовем первой обратной задачей по определению параметра α . Если $u(x, t)$ решение задачи $\mathfrak{Z}$ и параметр α удовлетворяет условию (29), то пару $\{u(x, t), \alpha\}$ назовем решением первой обратной задачи.

Пользуясь представлением решения прямой задачи $\mathfrak{Z}$ будем иметь

$$E(\alpha) \equiv \int_0^1 u(x, t_0) \sin(k_0 \pi x) dx = 2 \left(\Gamma(\alpha) t_0^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_{k_0} t_0^\alpha) \tau_{k_0} + t_0^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_{k_0} t_0^\alpha) f_{k_0} \right).$$

Предположим, что $\alpha \in [\alpha_0, 1], 0 < \alpha_0 < 1$. Тогда функция $E(\alpha)$ является непрерывно дифференцируемой на сегменте $\alpha \in [\alpha_0, 1]$.

Перепишем дополнительное условие (29) в виде следующего уравнения относительно α :

$$E(\alpha) = d_0. \quad (30)$$

Для того, чтобы это уравнение имело решение, очевидно, что число d_0 не может задаваться произвольным образом, необходимое условие разрешимости уравнения (30) является выполнение следующего включения

$$d_0 \in \left[\min_{[\alpha_0, 1]} E(\alpha), \max_{[\alpha_0, 1]} E(\alpha) \right], \quad (31)$$

т.е. число d_0 должно находиться в области значений функции $E(\alpha)$.

Другими словами, если условие (31) не выполнено, то ни при каких $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ не существует решение $u(x, t)$ прямой задачи, которое удовлетворяет условию (29).

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 11. Найдется число $T_0 = T_0(k_0, \alpha_0)$ такое, что при $t_0 \geq T_0$ функция $E(\alpha)$ является строгой монотонной по $\alpha \in [\alpha_0, 1]$.

Из этой леммы очевидным образом вытекает следующий основной результат:

Теорема 12. Пусть выполнены условия теоремы 11 и $t_0 \geq T_0$. Тогда решение обратной задачи (24)-(29) существует и оно единственно.

Во втором пункте этого параграфа рассмотрена вторая прямая и обратная задача для уравнения (23) в неограниченной области $G_\infty = G^+ \cup G^-$, где $G^+ = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$ а G^- – область, находящаяся в нижней полуплоскости ($t < 0$) и ограниченная характеристиками уравнения (24). Доказаны теоремы существования и единственности прямой и обратной задачи.

В третьем пункте этого параграфа рассмотрена третья обратная задача.

Рассмотрим задачу Трикоми $\mathfrak{Z}$ для однородного уравнения (24), т.е. предположим, что $f(x, t) \equiv 0$. Тогда в этой задаче заданной является только функция ψ из условия (26). Теперь будем считать, что эта функция неизвестна и рассмотрим обратную задачу по определению этой функции.

Третья обратная задача. Найти пару функций $\{u(x, t), \psi(x)\}$, если $u(x, t)$ является решением задачи $\mathfrak{Z}$ для однородного уравнения

$$0 = \begin{cases} D_{0t}^\alpha u - u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{tt} - u_{xx}, & (x, t) \in \Omega^-, \end{cases}.$$

т.е. она удовлетворяет граничным условиям (24), при $t = 0$ удовлетворяет условиям склеивания (27) и (28), с функцией $\psi(x)$ удовлетворяет условию на характеристике

$$u(x/2, -x/2) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

и следующему дополнительному условию

$$u(x, T) = \Psi(x).$$

Основным результатом этого пункта является

Теорема 13. Пусть производная $\Psi^{(VII)}(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, $\Psi^{(j)}(0) = \Psi^{(j)}(1) = 0$, $j = 0, 2, 4, 6$ и $\Psi^{(VII)}(x) \in C^a[0,1]$, $a > 1/2$. Тогда решение третьей обратной задачи $\{u(x,t), \psi(x)\}$ существует и оно единственно.

В этом пункте, предположив неизвестным граничное значение $\psi(x)$ решения, впервые определено дополнительное условие, гарантирующее существование и единственность неизвестного граничного значения решения.

В третьем параграфе этой главы на примере показано связь дробного порядка с добротностью линейного осциллятора в условиях внешней периодической силы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе исследований, проведенных в диссертационной работе, были получены следующие результаты:

1. методами функций Грина и интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость краевых задач со смещениями заданных на характеристиках разных семейств и на линии вырождения, для модельного уравнения смешанного типа в неограниченной области эллиптическая часть которой является горизонтальной полосой;
2. методами функций Грина и интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость задач типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в неограниченной области - эллиптическая часть которой является четвертью плоскости;
3. методами функций Грина и интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость задачи со смещением для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в неограниченной области - эллиптическая часть которой является полуплоскостью;
4. для уравнений смешанного типа с дробными производными и с младшими членами доказана однозначная разрешимость нелокальных задач в ограниченной и неограниченной областях;
5. доказаны теоремы существования и единственности прямых и обратных задач по определению порядка дробной производной и степени оператора в уравнениях субдиффузии;
6. доказаны существование и единственность решений прямых и обратных задач по определению порядков дробных производных в уравнениях смешанного типа;
7. доказаны существование и единственность решений прямых и обратных задач по определению граничного значения решения в уравнениях смешанного типа.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF
MATHEMATICS**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ZUNNUNOV RAKHIMJON TEMIRBEKOVICH

**FORWARD AND INVERSE PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS**

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

**DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL
AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2024

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2023.4.DSc/FM232.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website <http://kengash.mathinst.uz> and the «ZiyoNet» Information and educational portal <http://www.ziynet.uz/>.

Scientific supervisor:

Ashurov Ravshan Radjabovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents:

Alimov Shavkat Arifdzhonovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
academician

Pskhu Arsen Vladimirovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Mirsaburov Mirakhmat

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Leading organization:

**Institute of Cosmophysical Researches and Radio
Wave Propagation, FEB RAS.**

Defense will take place " 2 " July 2024 at 16.00 the meeting of Scientific council number DSc.02130.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) - 207-9140). E-mail: uzbmash@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered №185). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) - 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on " 11 " June 2024 year
(mailing report № 2 on " 11 " June 2024 year).



U.A.Rozikov

Chairman of Scientific Council on award
of scientific degrees, D.F.M.S., academician

J.K.Adashev

Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.M.S.

A.A.Azamov

Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.F.M.S., academician

INTRODUCTION (abstract of DSc dissertation)

The aim of the research work is to solve nonlocal problems for mixed-type equations with integer and fractional order derivatives in unbounded and bounded domains and forward and inverse problems for determining the order of the fractional derivative in subdiffusion equations and equations of mixed type.

The subject of the research. Forward and inverse problems for partial differential equations of integer and fractional order in bounded and unbounded domains.

The scientific novelty of the study is:

the unique solvability of problems with bias for a mixed-type model equation in a mixed domain, the elliptic part of which is a horizontal strip, was proven;

the unique solvability of problems such as the Bitsadze-Samarskii problem and the problems with bias for a mixed-type equation with a spectral parameter in unbounded domains was proven;

the unique solvability of nonlocal problems for mixed-type equations with fractional derivatives in bounded and unbounded domains was proven;

existence and uniqueness theorems were proven for forward and inverse problems to determine the order of the fractional derivative and the power of the operator in the subdiffusion equations;

the existence and uniqueness of solutions to forward and inverse problems of determining the orders of fractional derivatives and the boundary value of the solution in mixed-type equations were proven.

Implementation of research results. The results obtained in the dissertation on forward and inverse problems for partial differential equations of integer- and fractional-order were implemented in the following research projects:

methods for solving forward and inverse problems to determine the order of the fractional derivative and the boundary value of a function in mixed-type equations were used in the overseas project No. NIOKTR 122041800013-4 on the topic "Study of boundary value problems for equations with generalized fractional differentiation operators, their application to mathematical modeling of physical and socio-economic processes" when solving forward and inverse boundary value problems for analogs of mixed parabolic-hyperbolic and elliptic-hyperbolic equations containing fractional derivatives to the time derivative (Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Certificate No. 01-13/69 dated October 13, 2023, Russian Federation). The application of scientific results made it possible to solve forward and inverse boundary value problems for analogs of mixed parabolic-hyperbolic and elliptic-hyperbolic equations containing fractional derivatives to the time derivative;

analytical methods for solving forward and inverse problems to determine the order of the fractional derivative for partial differential equations of fractional order in bounded and unbounded domains were used within the framework of the overseas project No. AAAA-A17-117031050058-9 "Application of fractional calculus in the theory of oscillatory systems" when solving inverse problems to

determine the order of the fractional derivative (Kamchatka State University named after Vitus Bering, Certificate No. 49-12, dated September 15, 2023, Russian Federation). The use of the scientific results obtained made it possible to create algorithms for the numerical solution of inverse problems to determine the order of the fractional derivative;

solving problems with bias for a model mixed-type equation in a mixed domain, the elliptical part of which is a horizontal strip, when researching the project “Development of methods for determining the strength properties of new building materials with various methods of reinforcement” were used in stating boundary value problems for elliptic equations (Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures of the Uzbekistan Academy of Sciences, Certificate No. 869-3, dated November 30, 2023). The application of scientific results made it possible, based on the methods of discontinuous displacements and fictitious loads, to find their application in the study of singularities in continuous media, in particular, in problems of the theory of elasticity and plasticity.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion, and a list of references. The volume of the dissertation is 177 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (part I; I часть)

1. Ashurov R.R., Zunnunov R.T. Initial-boundary value and inverse problems for subdiffusion equation in $\mathbb{R}^n$ // Fractional Differential Calculus, 2020, Volume 10, No. 2, P.291–306 (3. Scopus IF=0.304).
2. Ashurov R.R., Zunnunov R.T. Inverse Problem for Determining the Order of the Fractional Derivative in Mixed-Type Equations // Lobachevskii journal of mathematics, Vol. 42 No. 12, 2021.P.2714-2729. (3. Scopus IF=0.424).
3. Ruziev M.H., Zunnunov R.T. On a Nonlocal Problem for Mixed-Type Equation with Partial Riemann-Liouville Fractional Derivative // Fractal and fractional, 2022, Volume 6(2), No. 110, P.1-8 (3. Scopus IF=0,61).
4. Ashurov R.R., Zunnunov R.T. An Analog of the Tricomi Problem for a Mixed-Type Equation with Fractional Derivative. Inverse Problems // Lobachevskii journal of mathematics, Vol. 44 No. 8, 2023. P.3225-3240. (3. Scopus IF=0.424).
5. Zunnunov R.T. A Problem with Shift for Mixed-Type Equation in Domain, the Elliptical Part of Which Is a Horizontal Strip. // Lobachevskii journal of mathematics, Vol. 44 No. 10, 2023.P.4410-4417. (3. Scopus IF=0.424).
6. Zunnunov R.T. Bitsadze-Samarskii type a Problem for a Mixed-Type Equation that Elliptic in the first quadrant of the plane. // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274 No. 2, 2023.P.301-306. (3. Scopus IF=0.424).
7. Zunnunov R.T. Inverse problems of determining an order of fractional Riemann-Liouville time-fractional derivative for the subdiffusion equation in $\mathbb{R}^n$ // UzMathJournal, Volume 65, Issue 3, 2021. Tashkent,-P.166-174. (01.00.00; № 6).
8. Zunnunov R.T. Analog of Bitsadze-Samarskii Problem for a mixed-type equation with a fractional derivative unbounded domain. // UzMathJournal, Volume 67, Issue 3, 2023. Tashkent,-P.189-195. (01.00.00; № 6).
9. Зуннунов Р.Т. Об одной краевой задаче со смещением для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области // Бюллетень Института математики 2023, №5, с.80-88. (01.00.00, № 17).
10. Зуннунов Р.Т. Об одной задаче со смещением для модельного уравнения смешанного типа в неограниченной области // Научный вестник БухГУ, №10, 2023г. С.197-204. (01.00.00, № 14).
11. Зуннунов Р.Т. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой – четверть плоскости. // Научный вестник НамГУ, №11, 2023г. С.90-96. (01.00.00, № 15).
12. Паровик Р.И., Зуннунов Р.Т. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора. // Проблемы механики, №4, 2019г. С.20-23. (01.00.00, № 4).

II bo'lim (part II; II часть)

13. Parovik R.I, Rakhmonov Z., Zunnunov R.T. Study of Chaotic and Regular Modes of the Fractional dynamic System of Selkov. // EPJ Web of Conferenses 254, 02014 (2021) STRPER 2021.

14. Зуннунов Р.Т. Задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа в области эллиптическая часть которой – четверть плоскости. // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, Тезисы докладов, Алматы, 5-8 апреля 2021 г. С. 31-32.

15. Зуннунов Р.Т.. Нелокальная задача для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области. // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» посвященная 20-летию Казахстанского фил. МГУ имени М.В.Ломоносова. г. Нур-Султан. 4 июня 2021г. С.113-115.

16. Ашуров Р.Р., Зуннунов Р.Т. Обратная задача по определению порядка дробной производной в уравнениях смешанного типа. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики». г. Стерлитамак. 12-15 сентября 2021 г. С. 261-267.

17. Зуннунов Р.Т. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа в области эллиптическая часть которой – четверть плоскости. // Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». РСО-Алания. Г. Владикавказ, 20-24 сентября, 2021 г. С.97-98.

18. Ашуров Р. Р., Зуннунов Р. Т. Обратная задача определения порядка дробной производной Капуто по времени для уравнения субдиффузии в $\mathbb{R}^n$. // Материалы научной конференции «Актуальные проблемы стохастического анализа».Ташкент. 20-21 февраля 2021 г. С. 270-272.

19. Ашуров Р.Р., Зуннунов Р.Т. Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной. Обратная задача. // Тезисы республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математики и прикладной математики в эпоху глобализации» г. Ташкент. 14-15 мая 2021г., С. 234-240.

20. Зуннунов Р.Т. Обратная задача определения порядка дробной производной Римана-Лиувилля по времени для уравнения субдиффузии в $\mathbb{R}^n$. // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Сарымсаковские чтения». 16-18 сентября 2021 г. Ташкент. С. 62-64.

21. Zunnunov R. T., Ergashev A. A. A problem of the Bitsadze-Samarskii problem type for a mixed type equation of the second kind in a domain the elliptical part of which is a horizontal strip. // Abstracts of VII International

Scientific Conference «Modern problems of applied mathematics and information technologies Al- Khwarizmi». November 15-17, 2021. pp.162.

22. Зуннунов Р.Т. Об одной краевой задаче со смещением для обобщенного го уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области. // Тезисы докладов научной конференции «Операторные алгебры, неассоциативные структуры и смежные проблемы». Ташкент. 14–15 сентября 2022 г. С. 225-227.

23. Ашуров Р.Р., Зуннунов Р.Т. Аналог задачи Бицадзе –Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной в неограниченной области. // Тезисы докладов международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». Ташкент. 6-8 октября 2022 г. С. 75.

24. Зуннунов Р.Т., Jung D.S. Задача со смещением для модельного уравнения смешанного типа в области эллиптическая часть которой горизонтальная полоса. // Тезисы докладов традиционной международной апрельской математической конференции, Алматы, 5-7 апреля 2023 г. С. 81-83.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida 2024 yil 27 mayda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:



9338

Bichimi: 84x60 $\frac{1}{16}$. «Times New Roman» garniturası.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3,75. Adadi 100 dona. Buyurtma № 51/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.