V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

XATAMOV NOSIRJON MUYDINOVICH

SANOQLI GRAFLARDA BIOLOGIK VA FIZIK SISTEMALAR UCHUN GIBBS O‘LCHOVLARI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT - 2023

UDK: 517.98+519.21

Doktorlik (DSc) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Contents of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

XATAMOV NOSIRJON MUYDINOVICH

SANOQLI GRAFLARDA BIOLOGIK VA FIZIK SISTEMALAR UCHUN GIBBS O‘LCHOVLARI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT - 2023

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestasiya komissiyasida B2023.3.DSc/FM225 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (https://kengash.mathinst.uz) va “ZiyoNet” ta’lim axborot tarmog‘ida (http://www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**G‘anixo‘jayev Nosir Nabiyevich** fizika-matematika fanlari doktori, laboratoriya mudiri
Rasmiy opponentlar:	**Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Temir Seyit Matematika fanlari doktori, professor
	Botirov G‘olibjon Isroilovich fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
Yetakchi tashkilot:	**O‘zbekiston Milliy universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024-yil 16-yanvar kuni soat 16:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (+998 71) 207 91 40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (173-raqami bilan ro‘yhatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (+998 71) 207 91 40).

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil 22 - dekabr kuni tarqatildi.
(2023-yil 22 - dekabrdagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

U.A. Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

U.U. Jamilov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

KIRISH (doktorlik dissertasiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati. Ma'lumki, Gibbs o'lchovlari nazariyasi statistik mexanika modellari va biologik sistemalarning termodinamik holatlarini tavsiflashga qaratilgan ilmiy-amaliy tadqiqotlarning asosi hisoblanadi. Ayniqsa, o'zaro ta'sir qiluvchi zarrachalardan tashkil topgan sistemalar uchun fazaviy o'tishlar nazariyasini tushuntirishda Gibbs o'lchovlari muhim ahamiyat kasb etadi. Gibbs o'lchovlari nazariyasi statistik fizika va o'lchovlar nazariyasining kesishmasidagi shunday yo'nalishki, uni nazariy va amaliy matematikani bog'lovchi ko'prik sifatida qarash mumkin. Gibbs o'lchovi tushunchasining qo'llanilishi amerikalik olim J.Gibbs bilan bog'lansa-da, bu nazariyaning rivojlanishi va ommalshishida R.L. Dobrushin, O.Ye. Lanford va D. Ryuellarning xizmatlari beqiyosligini ta'kidlash joiz. Dastlab o'zgarmas harorat ostidagi atrof-muhit bilan issiqlik muvozanatida bo'lgan sistemalar uchun taqsimot qonuni sifatida kiritilgan bu tushuncha bugungi kunda biologiya, genetika, iqtisodiyot va fanning boshqa ko'plab tarmoqlarida o'z tatbiqini topib kelmoqda.

Hozirgi kunda jahonda panjarali sistemalardagi statistik mexanikaning chekli va sanoqli spin qiymatlarga ega modellari uchun davriy va translyatsion-invariant Gibbs o'lchovlarini to'plamini tavsiflash muhim ahamiyat kasb etmoqda. Shuningdek, statistik mexanikaning Izing va Potts modellari kabi ba'zi klassik modellarining samaradorligini oshirish maqsadida aralash tipdagi va spin qiymatlar to'plami sanoqli bo'lgan modellarni tadqiq qilishga alohida e'tibor qaratilmoqda. Bunday modellar uchun translaytsion-invariant va davriy Gibbs o'lchovlarini qurish, qurilgan o'lchovlar to'plamining strukturasini tahlil qilish, mavjud Gibbs o'lchovlarining chekka o'lchov bo'lish shartlarini topish, temperaturaning faza almashishini ta'minlovchi kritik qiymatlarini aniqlash hamda Gibbs o'lchovlarining biologik talqinlarini o'rganish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Oxirgi yillarda mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo'lgan dolzarb yo'nalishlariga e'tibor kuchaytirilmoqda. Jumladan, statistik mexanikaning klassik (Izing, Potts, HC, Blyum-Kapel) modellari uchun limit Gibbs o'lchovlarini tadqiq qilish, translyatsion-invariant, davriy, gradiyent Gibbs o'lchovlarini mavjudligini va ularning biologik talqinini aniqlash usullarini topish borasida salmoqli natijalarga erishildi. "Funksional analiz, matematik fizika, ehtimollik nazariyasi va dinamik tizimlar nazariyasi" fanlarining ustivor yo'nalishlarida xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyat yo'nalishlari etib belgilandi[1]. Qarorning ijrosini ta'minlashda ilmiy natijalardan ilm-fanning turdosh sohalarida foydalanish maqsadida aralash tipdagi va spin qiymatlari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lgan modellar uchun Gibbs o'lchovlari to'plamining xossalari tadqiq qilish va ularning biologiyaga tatbiq qilish muhim ahamiyatga ega.

[1] O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi «O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to'g'risida»gi 292-son qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son ‘Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi[2].

Gibbs o‘lchovlari nazariyasi va ularning tatbiqlari bo‘yicha dunyoning yetakchi ilmiy markazlari va oliy ta’lim muassasalari, jumladan, Bari va Roma universiteti (Italiya), Bonn universiteti, Charls univeristeti (Praga), Vena universiteti (Avstriya), amaliy matematika instituti, Boxumning Rur universiteti (Germaniya), INFN ilmiy instituti, Abdus Salam nomidagi xalqaro nazariy fizika markazi, Istiqbolli tadqiqotlar markazi, Akvila universiteti (Italiya), Marsel universiteti, Provans universiteti, CNRS va Parij universiteti (Fransiya), Moskva davlat universiteti, axborotlar uzatish muammolari instituti, Rossiya fanlar akademiyasi Matematika instituti (Rossiya), Aveyru universiteti (Portugaliya), Kyusyu universiteti (Yaponiya), Kembrij universiteti, Matematika maktabi, Lids universiteti, Lafboro universiteti (Buyuk Britaniya), Zirve universiteti, Xarran universiteti (Turkiya), Jeneva universiteti (Shveysariya) va boshqa xorijiy ilmiy muassasalarda keng qamrovli ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda.

Statistik fizikaning turli modellari uchun Gibbs o‘lchovlarini qurish va ularning tadbiqlari bo‘yicha olib borilgan tadqiqotlar natijasida qator dolzarb masalalar yechilgan, xususan, quyidagi ilmiy natijalar olingan: Keli daraxtida ikki holatli Hard Core (HC) modeli uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovining yagonaligi ko‘rsatilgan va shu model parametrlariga ba’zi shartlar qo‘yilganda davri ikkiga teng bo‘lgan Gibbs o‘lchovlarining yagonamasligi isbotlangan (Statistical Laboratory, DPMMS, University of Cambridge, Angliya); uch va to‘rt holatli qattiq disklar modellari uchun unumdor HC modeli tushunchasi kiritilgan va bunday modellar uchun Gibbs o‘lchovi yagona va yagona bo‘lmaydigan shartlar topilgan (Department of Mathematics, London School of Economics (Angliya),

[2] Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi: Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika, Matematicheskiye zametki, Ukrainskiy matematicheskiy jurnal, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry http://www.springer.com/mathematics; Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, Lobachevskii journal of Mathematics, Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mexanika. Kompyuterniye nauki: Conference Series https://www.researchgate.net va boshqa manbalar asosida ishlab chiqilgan.

Bell Laboratories, Lucent Technologies, Mountain Avenue Murray Hill, New Jersey (AQSH)); $k \geq 2$ tartibli Keli daraxtida ferromagnit Potts modeli uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari to‘liq tasniflangan, ikkinchi tartibli Keli daraxtida esa bu o‘lchovlarning chekka o‘lchov bo‘lish shartlari topilgan (Fakultät für Mathematik-Ruhr-Universität Bochum (Germaniya)); Keli daraxtida to‘rt holatli qattiq disklar modellari hamda SOS modeli uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi va yagonamasligi ko‘rsatilgan (Centre de Physique Théorique, Universités Aix-Marseille et Sud Toulon-Var (Fransiya)). Keli daraxtida Izing modeli uchun translyasion-invariant Gibbs o‘lchovlarining biologiyaga tatbiqi o‘rganilgan (University of Santiago de Compostela (Spain)).

Dunyoda bugungi kunda, turli modellar uchun Gibbs o‘lchovlarini aniqlash va ularni biologiyaga tatbiq etish bo‘yicha bir qator izlanishlar, jumladan: umumlashgan Izing, Potts, HC, Blyum-Kapel, SOS modellari uchun translyatsion-invariant, davriy va boshqa Gibbs o‘lchovlarining mavjudligini ko‘rsatish va gradiyent Gibbs o‘lchovlarini tasniflash; HC-Blyum-Kapel modellari uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish shartlarini topish; HC-Blyum-Kapel modellari va SOS modellari uchun parametrlarning translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari yagona bo‘lmaydigan aniq qiymatlarini topish hamda chekka o‘lchov bo‘lish shartlarini aniqlash; spin qiymatlari soni chekli yoki sanoqli bo‘lgan modellar uchun translyatsion-invariant, davriy va gradiyent Gibbs o‘lchov-larining mavjudlik shartlarini topish; Izing va Blyum-Kapel modellari uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarini biologik talqinini tahlil qilish kabi ustuvor yo‘nalishlarda ilmiy tadqiqot ishlari olib borilmoqda.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ko‘p sondagi o‘zaro ta’sir qiluvchi komponentlardan tashkil topgan sistemalar modellarning asosiy sinfi hisoblanib, ular yordamida yetarlicha katta (cheksiz) fizik yoki axborot sistemalarining holatlarini o'rganish mumkin. Bunday ko'p komponentli modellarni fizik tilda tavsiflashning umumiy strukturasi XIX-XX asrlarda Boltsmann va Gibbs tomonidan ishlab chiqilgan. Ularning ishlari yangi fan – statistik mexanikaga asos solinishiga sabab bo‘ldi. Dastlab, statistik mexanika sof fizik muammolarni hal qilishga mo‘ljallangan edi, ammo ishlab chiqilgan yangi metodlar va yondashuvlar shunchalik universal bo‘lib chiqdiki, ular fizik masalalar doirasidan tashqariga chiqadigan turli muammolarda qo‘llanila boshladi. Matematik statistik mexanikaning asoslari XX asrning 40-50-yillarida L. Van Xov, J.I. Onsager, N.N. Bogolyubov va B.I. Xatset, M. Kats, T. Li va K. Yang, keyinchalik, 60-70-yillarda R.L. Dobrushin, R.A. Minlos, Ya.G. Sinay, F.A. Berezin, O. Lanford, D. Ruelle, J. Gallavotti, R. Griffits, J. Ginibra, D. Robinson, F. Spitzer, J. Lebowitz, S. Miracle-Sol ishlarida rivojlantirilgan, bunda, xususan, qat’iy matematik talqinda termodinamik limitga o‘tish, Gibbs tasodifiy maydoni tushunchalari kiritildi, limit Gibbs o‘lchovlari qurildi, uzluksiz va panjarali sistemalarning korrelyatsiya funksiyalari o‘rganildi, fazaviy o‘tishlar nazariyasi asoslari qurildi, nomutanosiblik (muvozanatsizlik) modellari kiritildi va ularning Gibbs holatlari bilan bog‘liqligi o‘rganildi. R.L.Dobrushin tomonidan limit Gibbs o‘lchovining mavjudligi haqidagi teorema isbotlangan. K.X.Xinin bu teoremani kvant maydonlar nazariyasining panjarali modellari uchun qo‘llagan. Faza almashishlarning asosiy nazariyasi S.A.Pirogov, Ya.G.Sinay, R.A.Minlos, N.Datta, R.Fernandez, J.Fröhlich, A.C.D.Enter va M.Zahradnik ishlarida o‘z aksini topgan. Konfiguratsiyasida spin cheklanmagan sondagi qiymatlar qabul qiladigan modellar uchun Gibbs o‘lchovi-ning mavjudligi haqida teorema J.Lebowith va E.Presutti tomonidan isbotlangan. Panjarali modellarning turli sinflari uchun Payerlsning kontur usuliga asoslanib limit Gibbs o‘lchovlarini analiz qilish F.A.Berezin, S.A.Pirogov, Ya.G.Sinay, J.Ginibre, A.Grossman, D.Ryuel, R.L.Dobrushin, V.Gersik, O.J.Heilmann, E.M.Lieb, M.Cassandro, M.Da Fano, G.Olivereri, U.A.Rozikov, G.I.Botirov va boshqa olimlarning ishlarida namoyon bo‘lgan.

D.Gandolfo, J.Ruiz, K.Kulske, P.M.Blexer, Dj.Libovis, Ye.Prezutti, Yu.M.Suxov, N.N.Ganixodjayev, U.A.Rozikov, F.M.Muxammedov, R.M.Xakimov, M.M.Raxmatullayev, N.M.Xatamov, Sh.A.Shoyusupov, A.M.Raxmatullayev, O.Xakimov, F.Xaydarov, M.Rasulova, M.Maxamadaliyev va boshqalarning ilmiy ishlarida Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usullaridan foydalanib Gibbs o‘lchovlari o‘rganilgan. U.A.Rozikov, K.Kulske va R.M.Xakimovlarning ishlarida Potts modeli uchun translyasion-invariant Gibbs o‘lchovlari tasniflangan. U.A.Rozikov, K.Kulske ishlarida esa Potts modeli uchun translyasion-invariant Gibbs o‘lchovlari chetki bo‘lishligi o‘rganilgan. U.A.Rozikov, F.M.Muxammedov, G.I.Botirov, N.M.Xatamovlarning ilmiy ishlarida Keli daraxtida Payersning konturlar usuli (Pirogov-Sinay nazariyasi) rivojlantirilgan. Bu usul bilan Keli daraxtida yetarlicha keng sinfdagi gamiltonianlar uchun bir xil bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlari mavjudligi ko‘rsatilgan. U.A.Rozikov, X.Akin, S.A.Temurlarning ilmiy ishlarida Keli daraxtidagi Izing modeli uchun avvaldan ma’lum bo‘lgan o‘lchovlardan farqli limit Gibbs o‘lchovlari to‘plami qurilgan. U.A.Rozikov ishlarida Izing modeli uchun DNK molekulalarida translyasion-invariant Gibbs o‘lchovlari tadbiqi o‘rganilgan. Shuning uchun Gibbs o‘lchovlarini biologiyaga, medisinaga, iqtisodiyotga va shunga o‘xshash sohalarga tadbiqlarini o‘rganish ham juda dolzarb masaladir.

Hozirgi vaqtda ko‘pgina statistik mexanika modellari uchun fazaviy o‘tish, ya’ni limit Gibbs o‘lchovlarining yagonamaslik masalasi o‘rganilgan. Lekin hali birorta ham model uchun limit Gibbs o‘lchovlarining to‘la tasnifi berilmagan. Statistik mexanikaning turli modellari uchun nazariyalar K.Preston, D.Ryuel, R.Bekster, X.O.Georgi, R.L.Dobrushin, S.A.Pirogov, Ya.G.Sinay, V.A.Malыshev, R.A.Minlos, Sh.B.Shlosman, D.Gandolfo, J.Ruiz, K.Kulske, P.M.Blexer, Yu.M.Suxov, L.V.Bogachev, E.N.Cirillo, E.Olivieri, N.N.Ganixodjayev, U.A.Rozikov, F.M.Muxammedov va boshqalarning ishlarida yaratilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasa-sining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti V.I.Romanovskiy nomli Matematika instituti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasidagi F4-FA-F013 “Noassosiativ va operatorlar algebralari, dinamik sistemalar, hamda ular-ning statistik fizika va populyasion biologiyaga tatbiqlari” (2012-2016 yillar) va OT-F4-82+OT-F4-87 “*Operatorlar va noassosiativ* *algebralarda lokal differensial-lash va avtomorfizmlar, nochizikli dinamik sistemalarda faza almashishlar va xaos*”, “*Yevklid va psevdo-Yevklid fazolaridagi egri chiziqlar va sirtlarning global invariantlari nazariyasi va uning mexanikaga tadbiqlari*” (2017-2021 yillar) mavzusidagi fundamental loyihalari doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi spin qiymatlari soni ko‘pi sanoqli bo‘lgan Izing, Potts, Solid-On-Solid (SOS) va Blyum-Kapel modellari uchun limit Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsivlash hamda bu o‘lchovlarning biologiya masalalariga tatbiq qilishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

Ikkinchi tartibli Keli daraxtida tarqoq raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli Potts modeli uchun yangi asosiy holatlar qurish;

Keli daraxtida sharli Izing va umumlashgan Potts modellari uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflash.

Keli daraxtida Izing va HC-Blyum-Kapel modellari uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlarini qurish;

Keli daraxtida HC-Blyum-Kapel modellari DNK molekulasi uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari mavjudlini ko‘rsatish va bu o‘lchovlarning biologiyaga tatbiq qilish;

Keli daraxtining ba’zi tipdagi sanoqli graflarga gomeomorfizmi orqali aniqlangan HC-Blyum-Kapel va o‘zgaruvchi magnitli SOS modellari uchun gradiyent Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflash.

Tadqiqotning ob’yekti. Keli daraxtida umumlashgan Potts, Izing, HC-Blyum-Kapel va o‘zgaruvchi magnitli SOS modellaridan iborat.

Tadqiqotning predmeti. Potts modeli uchun asosiy holatlar, umumlashgan Potts va sharli Izing modellari uchun fazaviy o‘tish masalasi, Izing va HC-Blyum-Kapel modellari uchun translyasion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari, Blyum-Kapel va Izing modellarini biologiyaga tatbiqi, Blyum-Kapel va SOS modellari uchun translyasion-invariant va davriy gradiyent Gibbs o‘lchovlarini topishdan iboratdir.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot ishida umumlashgan Markov jarayonlar nazariyasi, o‘lchovlar nazariyasi va qisqartirib akslantirish usullari, nochiziqli dinamik sistemalar nazariyasi, Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usuli qo‘llanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Ikkinchi tartibli Keli daraxtida tarqoq raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli Potts modeli uchun yangi asosiy holatlar qurilgan;

Keli daraxtida sharli Izing va umumlashgan Potts modellari uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi ko‘rsatilgan va parametrning faza almashishi mavjudligini ta’minlovchi aniq qiymati topilgan;

Keli daraxtining ba’zi chekli graflarga gomeomorfizmi orqali aniqlangan Izing va HC-Blyum-Kapel modellari uchun translyatsion-invariant, davriy Gibbs o‘lchovlari yagona bo‘lmaydigan parametrning qiymatlari to‘plami aniqlangan;

Keli daraxtida HC-Blyum-Kapel modellari DNK molekulasi uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari mavjudlik oraliqlari topilgan va bu o‘lchovlarning biologiyaga tatbiqi yoritilgan;

Keli daraxtining ba’zi sanoqli graflarga gomeomorfizmi orqali aniqlangan HC-Blyum-Kapel va o‘zgaruvchi magnitli Solid-On-Solid modellari uchun gradiyent Gibbs o‘lchovlari to‘plami to‘liq tavsiflangan.

Tadqiqotning amaliy natijasi Gibbs o‘lchovlari yagona bo‘lmagan modellar uchun parametrlarning fazaviy o‘tishlarni ta’minlaydigan aniq yoki taqribiy qiymatlarini aniqlanganligidan hamda ba’zi o‘lchovlar uchun fizik sistemaning sof fazasini ifodalovchi chekka o‘lchov bo‘lish oraliqlari topilganligi hamda bu Gibbs o‘lchovlarining biologiyaga tadbiqlarini topish usulining bayon qilinganligidan iborat.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi o‘lchovlar nazariyasining fundamental natijalaridan, funksional analiz, diskret argumentli funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilganligi va parametrlar fiksirlangan holda fazaviy o‘tish uchun topilgan kritik qiymatlar haqidagi tasdiqlar natijalari amaliy matematika dasturlash nazariyasi usullaridan qat’iy foydalanilganligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ishda olingan natijalardan Gibbs o‘lchovlari nazariyasida fizikaning panjarali sistemalarida va biologiyaning DNK termodinamikasida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ularni translyasion-invariant, davriy va gradiyent Gibbs o‘lchovlari hamda asosiy holatlariga oid natijalar, fizik sistemaning fazaviy o‘tish mavjudligini tekshirishga tatbiq etish bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Sanoqli graflarda biologik va fizik sistemalar uchun Gibbs o‘lchovlari bo‘yicha olingan natijalar asosida:

Keli daraxtida berilgan sharli Izing va umumlashgan Potts modellari uchun translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari to‘plamining tavsifidan “Kubik stoxastik operatorlarni saqlaydigan chekli o‘lchovli ortogonallik dinamikasi” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida Bete panjarasida q ta holatli Potts modelining faza diagrammalarini ifodalashda foydalanilgan (Xalqaro Islom universitetining 2023 yil 21 noyabrdagi ma’lumotnomasi, Malayziya). Ilmiy natijaning qo‘llanishi Potts modeli uchun faza almashishi mavjud bo‘ladigan kritik haroratni aniq hisoblash imkonini bergan;

Keli daraxtining ba’zi chekli graflarga gomeomorfizmi orqali aniqlangan HC-Blyum-Kapel modellari uchun translyatsion-invariant, davriy Gibbs o‘lchovlarining yagona emasligidan “Panjara modellarining p-adik Gibbs o‘lchovlari tavsifi” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida ba’zi bir modellar uchun noamenabel graflarda haqiqiy va p-adik Gibbs o‘lchovlarini qurishda foydalanilgan (Yaqin sharq Amerika universitetining 2023 yil 20 noyabrdagi ma’lumotnomasi, Quvayt). Ilmiy natijaning qo‘llanishi qattiq jismlar fizik sistemalariga mos faza almashishlarini tavsiflash imkonini bergan;

Keli daraxtida tarqoq raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirga ega Potts modeli uchun asosiy holatlarni qurish usullaridan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutida 2018-2019 yillarda bajarilgan YOFA-Ftex-2018-78 “Amenabel bo‘lmagan graflarda dinamik va termodinamik sistemalar” mavzusidagi fundamental loyihada λ-model uchun minimal enrgiyani hisoblashda foydalanilgan (Matematika institutining 2023 yil 25 oktabrdagi №2/459-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanishi Keli daraxtida λ-model uchun davriy va kuchsiz davriy asosiy holatlar mavjudligini isbotlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 29 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 10 ta xalqaro va 19 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 48 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 19 ta ilmiy maqola, jumladan, 12 tasi xorijiy va 7 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, to‘rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 190 betni tashkil etgan.

DISSERTASIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi va muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’yekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiyaning tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **«Potts modeli uchun Gibbs o‘lchovi va asosiy holatlar»** deb nomlanuvchi birinchi bobida tarqoq raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli Potts modeli uchun yangi asosiy holatlar sinflari qurilgan, sharli Izing va umumlashgan Potts modellari uchun translyasion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari o‘rganilgan va bu modellar uchun kontinuumta Gibbs o‘lchovlari mavjudligi isbotlangan.

Mazkur bobning birinchi paragrafi yordamchi xarakterda bo‘lib, bu yerda Gibbs o‘lchovlar nazariyasi tarixi, zarur ta’riflar, asosiy holat, Gibbs o‘lchovlari tushunchalari hamda ba’zi ma’lum faktlar keltirilgan.

$k\geq 1$ tartibli $\Im^k$ Keli daraxti bu cheksiz daraxtdir, ya’ni har bir uchidan $k+1$ ta qirra chiquvchi siklsiz grafdir.

$\Im^k=(V,L,i)$ ni qaraylik, bunda V to‘plam $\Im^k$ daraxtning uchlari to‘plami, $L-$uning qirralari to‘plami va $i-$har bir $l\in L$ qirraga uning $x,y\in V$ chetki nuqta-larini mos qo‘yuvchi insidentlik funksiyasidir. Agar $i(l)=\{x,y\}$ bo‘lsa, u holda x va y uchlar eng yaqin qo‘shnilar deyiladi va $l=\langle x,y\rangle$ kabi belgilanadi.

Keli da-raxtida $x, y \in V$ uchlar orasidagi $d(x,y)$ masofa ushbu formula orqali aniqlanadi

$$d(x,y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V,\ \langle x_0, x_1\rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}.$$

Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x,x^0) = n\},\ V_n = \{x \in V \mid d(x,x^0) \le n\},$$
$$L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

$x \in W_n$ uchun $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x,y) = 1\}$ to'plam x ning *to'g'ri avlodlari to'plami* deyiladi.

1-izoh. *Tushunarliki,* $\Im^k$ *da har bir* $x \ne x^0$ *uchining* k *to'g'ri avlodlari bor va* x^0 *uchda esa* $k+1$ *avlodlari bor.*

Ma'lumki, $\Im^k$ ni G_k – tashkil etuvchilari mos ravishda $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ bo'lgan $k+1$ ta ikkinchi tartibli siklik gruppalarning erkin ko'paytmasi kabi berish mumkin.

$A \subseteq V$ to'plamda aniqlangan $\sigma_A : x \in A \to \sigma_A(x) \in \Phi = \{1, ..., q\}$ funksiya konfiguratsiya deyiladi. A to'plamda aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to'plami $\Omega_A = \Phi^A$ kabi belgilanadi.

$\sigma \in \Omega$ konfigurasiyaning energiyasi ushbu

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{A \subset V: \\ diam(A) \le r}} I(\sigma_A), \qquad (1)$$

gamiltonian orqali beriladi, bunda $r \in N, diam(A) = \max_{x,y \in A} d(x,y)$ va $I(\sigma_A) : \Omega_A \to R-$ berilgan potensial.

$D^c = V \setminus D$ da φ_{D^c} chegaraviy shart berilgan chekli $D \subset V$ soha uchun shartli gamiltonian quyidagi

$$H(\sigma_D \mid \varphi_{D^c}) = \sum_{\substack{A \subset V : A \cap D \ne \varnothing \\ diam(A) \le r}} I(\sigma_A)$$

ko'rinishga ega, bunda

$$\sigma_A(x) = \begin{cases} \sigma(x), & \text{agar } x \in A \bigcap D \\ \varphi(x), & \text{agar } x \in A \bigcap D^c. \end{cases}$$

$G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, ..., H_r\} -$faktor gruppa bo'lsin, bunda $G_k^* -$indeksi $r \ge 1$ bo'lgan normal bo'luvchi.

1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x \in G_k$ *uchun* $x \in H_i$ *da* $\sigma(x) = \sigma_i$ *bo'lsa, u holda* $\sigma(x), x \in V$ *konfiguratsiya* G_k^**-davriy konfiguratsiya deyiladi.* G_k*-davriy konfiguratsiya translyasion-invariant deyiladi.*

$\mathbf{B} - \Omega$ to'plamning silindrik qism to'plamlaridan tashkil topgan σ-algebra bo'lsin.

Ushbu

$$\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V \setminus A}(x) = \begin{cases} \sigma(x), & \text{agar } x \in A, \\ \tilde{\sigma}(x), & \text{agar } x \in V \setminus A. \end{cases}$$

konfiguratsiyani qaraylik.

2-ta’rif. *Agar ixtiyoriy chekli* $A \subset V$ *to‘plam uchun ushbu*

$$\mu(\sigma_A \mid \tilde{\sigma}_{V\setminus A}) = \frac{e^{-\beta H(\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V\setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda μ *ehtimollik o‘lchovi* **B** σ*-algebrada limit Gibbs o‘lchovi deyiladi, bunda* $H(\sigma)$ *(1) formula orqali aniqlangan,* $\beta = 1/T$, $T > 0-$ *temperatura va*

$$Z_{A,\tilde{\sigma}} = \sum_{\varphi \in \Omega_A} e^{-\beta H(\varphi_A \vee \tilde{\sigma}_{V|A})}.$$

$\widehat{G}_k$ - G_k ning qism gruppasi bo‘lsin.

3-ta’rif. *Agar* $\forall x \in G_k, y \in \widehat{G}_k$ *uchun* $h_{yx} = h_x$ *bo‘lsa, u holda* $h = \{h_x, x \in G_k\}$ *qiymatlar majmui* $\widehat{G}_k$*-davriy deyiladi.* G_k *-davriy qiymatlar translyasion-invariant deyiladi.*

4-ta’rif. $\widehat{G}_k$*- davriy* h *qiymatlar majmuiga mos* μ *o‘lchovni* $\widehat{G}_k$*- davriy o‘lchov deyiladi.* G_k *-davriy o‘lchovlar translyasion-invariant o‘lchov deyiladi.*

Birinchi bobning ikkinchi paragrafi ikkinchi tartibli Keli daraxtida aniqlangan tarqoq raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli Potts modeli uchun yangi asosiy holatlar to‘plamini qurishga bag‘ishlangan.

Tarqoq raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli Potts modelining gamiltoniani quyidagi ko‘rinishga ega:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y\rangle; x,y \in V} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\rangle x,y\langle; x,y \in V} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_3 \sum_{\rangle\rangle x,y\langle\langle; x,y \in V} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \qquad (2)$$

bu yerda $J_1, J_2, J_3 \in \mathbb{R}$, $\rangle x, y\langle -$ bir xil "qavatda" va $\rangle\rangle x, y\langle\langle -$ har xil "qavatda" yotgan uzunliklari $d(x, y) = 2$ bo‘lgan $x, y \in V$ uchlar,

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & u = v, \\ 0, & u \neq v. \end{cases}$$

Deyarli hamma yerda, ya’ni chekli sondagi nuqtalardan tashqari hamma yerda, ustma-ust tushadigan σ va φ juftliklar uchun, σ, φ konfiguratsiyalar energiyalari orasidagi farqni ifodalovchi $H(\sigma, \varphi) -$ nisbiy gamiltonianni qaraymiz:

$$H(\sigma,\varphi) = J_1 \sum_{\langle x,y\rangle; x,y \in V} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}) + J_2 \sum_{\rangle x,y\langle; x,y \in V} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}) +$$

$$+ J_3 \sum_{\rangle\rangle x,y\langle\langle; x,y \in V} (\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \delta_{\varphi(x)\varphi(y)}), \qquad (3)$$

bu yerda $J = (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3 -$ ixtiyoriy fiksirlangan parametr.

$M - V$ uchlardan iborat birlik sharlar to‘plami bo‘lsin. $b \in M$ shar ustida σ konfiguratsiya cheklanishini σ_b *cheklangan konfiguratsiya* deyiladi. b shardagi σ_b konfiguratsiya energiyasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\langle x,y\rangle; x,y \in b} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\rangle x,y\langle; x,y \in b} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_3 \sum_{\rangle\rangle x,y\langle\langle; x,y \in b} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \qquad (4)$$

bu yerda $J=(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3$.

$k=2$ va $q=3$ holni qaraymiz. Oson ko‘rish mumkinki, ixtiyoriy σ_b uchun $U(\sigma_b)\in\{U_1,U_2,...,U_9\}$, bu yerda

$$
\begin{gathered}
U_1=\frac{3}{2}J_1+2J_2+J_3, U_2=J_1+J_3, U_3=2J_2+J_3, U_4=\frac{1}{2}J_1+J_3,\\
U_5=J_3, U_6=J_1+J_2, U_7=\frac{1}{2}J_1+J_2, U_8=J_2, U_9=\frac{1}{2}J_1.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

5-ta’rif. *φ konfiguratsiya H nisbiy gamiltonianning asosiy holati deyiladi, agarda ixtiyoriy $b\in M$ uchun $U(\varphi_b)=\min\{U_1,U_2,...,U_9\}$.*

Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$A_1=\{J\in\mathbb{R}^3: J_1\le 0, J_1+4J_2\le 0, J_1+2J_2+2J_3\le 0\},$$

$$A_2=\{J\in\mathbb{R}^3: J_1\ge 0, J_2\le 0, J_2+J_3\le 0\},$$

$$A_3=\{J\in\mathbb{R}^3: J_1\le 0, J_1+4J_2\ge 0, J_2-J_3\ge 0, J_1+2J_3\le 0\},$$

$$A_4=\{J\in\mathbb{R}^3: J_1=0, J_2\ge 0, J_3\le 0\},$$

$$A_5=\{J\in\mathbb{R}^3: J_1\ge 0, J_2\ge 0, J_2-J_3\ge 0, J_1-2J_3\ge 0\},$$

$$A_6=\{J\in\mathbb{R}^3: J_1\le 0, J_1+2J_2\le 0, J_2-J_3\le 0, J_1+2J_2+2J_3\ge 0\},$$

$$A_7=\{J\in\mathbb{R}^3: J_1=0, J_2\le 0, J_2+J_3\ge 0\},$$

$$A_8=\{J\in\mathbb{R}^3: J_1\ge 0, J_1-2J_2\ge 0, J_3\ge |J_3|\},$$

$$A_9=\{J\in\mathbb{R}^3: |J_1|\le 2J_2, |J_1|\le 2J_3\};$$

$B_{i_1i_2...i_k}=A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap...\cap A_{i_k}$, $k=2,3,4$, qayerda $1\le i_j\le 9$, $j=1,...,k$.

$$\widetilde{A_1}=A_1\setminus(B_{12}\cup B_{13}\cup B_{16}),\ \widetilde{A_2}=B_{36}\setminus(B_{369}\cup B_{136}),$$

$$\widetilde{A_3}=A_2\setminus(B_{12}\cup B_{25}\cup B_{27}\cup B_{28}),\ \widetilde{A_4}=A_9\setminus(B_{39}\cup B_{49}\cup B_{59}\cup B_{69}\cup B_{89}),$$

$$\widetilde{A_5}=B_{589}\setminus\{(0,0,0)\},$$

$$\widetilde{B_1}=A_5\setminus(B_{58}\cup B_{59}\cup B_{25}\cup B_{35}),\ \widetilde{B_2}=A_8\setminus(B_{28}\cup B_{58}\cup B_{78}\cup B_{89}),$$

$$\widetilde{B_3}=B_{25}\setminus(B_{125}\cup B_{258}),\ \widetilde{B_4}=B_{58}\setminus(B_{258}\cup B_{589}),\ \widetilde{B_5}=B_{12}\setminus(B_{13}\cup B_{16}),$$

$$\widetilde{B_6}=B_{13}\setminus(B_{12}\cup B_{16}),\ \widetilde{B_7}=B_{39}\setminus(B_{49}\cup B_{369}),\ \widetilde{B_8}=B_{369}\setminus\{(0,0,0)\}.$$

$GS(H)-$barcha asosiy holatlar to‘plami, $GS_p(H)-$barcha davriy asosiy holatlar to‘plami bo‘lsin.

Birinchi bob ikkinchi paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremada ifodalangan.

1-teorema. *Quyidagi tasdiqlar o‘rinli.*

Agar $J=(0,0,0)$, u holda $GS(H)=\Omega$.

Agar $J\in\widetilde{A_1}\cup\widetilde{A_2}\cup\widetilde{A_3}\cup\widetilde{A_5}$, u holda $|GS_p(H)|=3$.

Agar $J\in\widetilde{A_5}$, u holda $|GS_p(H)|=6$.

Agar $J\in\widetilde{B_i}, i=\overline{1,4}$, u holda $|GS_p(H)|\ge 6$

Agar $J \in \widetilde{B}_i, i = 5, 6, 7, 8,$ *u holda* $|GS_p(H)| = 6$.

2-izoh. *Ilg'aymizki,* $J \in \widetilde{A}_5$ *va* $J \in \widetilde{B}_i, i = \overline{1, 4}$ *hollarda topilgan asosiy holatlar butunlay yangi.*

Birinchi bobning uchinchi paragrafi sharli Izing modeli uchun translyasion-invariant va davriy Gibbs o'lchovlarini o'rganishga bag'ishlangan. Shu bilan birga bu model uchun fazaviy o'tish, ya'ni Gibbs o'lchovlarini yagonamasligi isbotlangan.

$\Phi = \{-1,1\}$ va $\sigma \in \Phi^V$ $-$konfiguratsiya bo'lsin.

Sharli Izing modelining gamiltoniani quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\substack{\langle x_0, x_i \rangle, x_0, x_i \in V; \\ i = \overline{1, k+1}}} \sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2)...\sigma(x_{k+1}), \tag{6}$$

bu yerda $J \in \mathbb{R}$.

$x \in G_k$ uchun $x_{\downarrow} = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ belgilashni kiritamiz, bu yerda $S(x) - x \in V$ nuqtaning "*to'g'ri avlodlari*" to'plami.

$k = 2$ holni qaraymiz.

$$b(x) = \{x, xa_1, xa_2, xa_3\}, \quad \sigma_{b(x)} = \{\sigma(x), \sigma(xa_1), \sigma(xa_2), \sigma(xa_3)\}$$

bo'lsin

Ω_{V_n} da quyidagicha aniqlangan

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \sigma_b(x)}^{\sigma_b(x_{\downarrow})}\}, \tag{7}$$

$\mu^{(n)}$, $n = 1,2,...$ ehtimolliklar taqsimotini qaraylik, bu yerda $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$, $Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} exp\left\{-\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x), \bar{\sigma}_b(x)}^{\bar{\sigma}_b(x_{\downarrow})}\right\}$ $-$normallovchi bo'luvchi va $h_{b, \bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} \in \mathbb{R}$.

Agar ixtiyoriy $n \geq 1$ va $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ uchun quyidagi

$$\sum_{\{\omega_n \in \Omega_{V_n} : \, \omega_n|_{V_{n-1}} = \sigma_{n-1}\}} \mu^{(n)}(\omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \tag{8}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\mu^{(n)}$ ehtimolliklar ketma-ketligi *muvofiqlashgan* deyiladi.

Agar $\mu^{(n)}$ uchun muvofiqlik sharti o'rinli bo'lsa, u holda o'lchovni davomi to'g'risidagi Kolmogorov teoremasiga ko'ra $(\Omega, \mathbf{B})$ da ixtiyoriy n va $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ uchun ushbu

$$\mu(\{\sigma : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n).$$

tenglikni qanoatlantiruvchi yagona μ o'lchov mavjud.

$M -$birlik sharlar to'plami bo'lsin. b, c lar orqali $a \in M$ sharning to'g'ri avlodlarini belgilaymiz.

Standart usulda (qarang U.A. Rozikov ilmiy ishlaridan) sharli Izing modelidagi Gibbs o'lchovlarini o'rganish masalasini quyidagi funktsional tenglamalar sistemasini yechishga keltirish mumkin:

$$
\begin{aligned}
y_{a,0} = y_{a,6} &= \frac{y_{b,0}+\lambda^2 y_{b,1}+y_{b,2}}{\lambda^2 y_{b,0}+y_{b,1}+\lambda^2 y_{b,2}}\cdot\frac{y_{c,0}+\lambda^2 y_{c,1}+y_{c,2}}{\lambda^2 y_{c,0}+y_{c,1}+\lambda^2 y_{c,2}},\\
y_{a,1} = y_{a,7} &= \frac{y_{b,0}+\lambda^2 y_{b,1}+y_{b,2}}{\lambda^2 y_{b,0}+y_{b,1}+\lambda^2 y_{b,2}}\cdot\frac{\lambda^2 y_{c,3}+y_{c,4}+\lambda^2}{\lambda^2 y_{c,0}+y_{c,1}+\lambda^2 y_{c,2}},\\
y_{a,2} = y_{a,8} &= \frac{\lambda^2 y_{b,3}+y_{b,4}+\lambda^2}{\lambda^2 y_{b,0}+y_{b,1}+\lambda^2 y_{b,2}}\cdot\frac{\lambda^2 y_{c,3}+y_{c,4}+\lambda^2}{\lambda^2 y_{c,0}+y_{c,1}+\lambda^2 y_{c,2}},\\
y_{a,3} = y_{a,9} &= \frac{y_{b,3}+\lambda^2 y_{b,4}+1}{\lambda^2 y_{b,0}+y_{b,1}+\lambda^2 y_{b,2}}\cdot\frac{y_{c,3}+\lambda^2 y_{c,4}+1}{\lambda^2 y_{c,0}+y_{c,1}+\lambda^2 y_{c,2}},\\
y_{a,4} = y_{a,10} &= \frac{y_{c,3}+\lambda^2 y_{c,4}+1}{\lambda^2 y_{c,0}+y_{c,1}+\lambda^2 y_{c,2}}, y_{a,5}=1,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

bu yerda $\lambda = exp\{J\beta\}$, $\beta = 1/T$, $y_{a,i} = exp(h_{a,i} - h_{a,11})$, $i=\overline{0,10}.$

Birinchi bob uchinchi paragraf natijalari quyidagicha:

2-teorema. *(6) model uchun shunday aniq* $\lambda_{cr} = \sqrt[4]{0.064}$ *son mavjudki,* $\lambda \geq \lambda_{cr}$ *da kamida bitta TIGO‘ (translyasion-invariant Gibbs o‘lchovi) mavjud,* $0<\lambda<\lambda_{cr}$ *da kamida uchta TIGO‘ mavjud hamda* $0<\lambda<\lambda_{cr}$ *da translyasion-invariant bo‘lmagan kontinuum Gibbs o‘lchovi mavjud.*

Faraz qilaylik, (9) da quyidagi

$$y_{a,0} = y_{a,3},\ y_{a,1} = y_{a,4},\ y_{a,2} = 1,\ \forall a \in M. \tag{10}$$

bajarilsin.

(6) model uchun $\lambda > 0$ va (10) shart bajarilganda yagona $G_2^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovi mavjud. Shu bilan birga, bu o‘lchov translyasion-invariant o‘lchov bilan ustma-ust tushadi, bu yerda $G_k^{(2)} -$juft uzunlikdagi so‘zlardan iborat G_k qism gruppasi.

3-teorema. *(6) model uchun (10) shart bajarilganda sanoqsizta* H_A*-davriy Gibbs o‘lchovi mavjud. Shu bilan birga, bu o‘lchovlar translyasion-invariant ham va* $G_2^{(2)}$*-davriy ham bo‘lmaydi, bu yerda*

$$H_A = \{x \in G_2 : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ жуфт}\}.$$

Birinchi bobni to‘rtinchi paragrafida $k=3$ tartibli Keli daraxtida ta’sir radiusi ikki bo‘lgan umumlashgan Potts modeli uchun translyasion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi o‘rganilgan.

$\Phi = \{-1,1\}$ va $\sigma \in \Phi^V -$konfiguratsiya bo‘lsin. $|A|$ orqali A to‘plamning elementlari sonini belgilaymiz.

Ushbu

$$U(\sigma_A) : \Omega_A \to \{|A|-1, |A|-2, \ldots, |A| - \min(|A|, |\Phi|)\}$$

funksiya orqali umumlashgan Kroneker simvolini quyidagicha aniqlanadi:

$$U(\sigma_A) = |A| - |\sigma_A \cap \Phi|, \tag{11}$$

bu yerda $A \subset V$, $|\sigma_A \cap \Phi| - \sigma_A(x), x \in A$ ning har xil qiymatlari soni.

$|A|=5$ holni qaraymiz. M orqali radiusi 1 ga teng bo‘lgan barcha $b(x)=\{y\in V: d(x,y)\le 1\}$ sharlar to‘plamini belgilaymiz.

Umumlashgan Potts modeli gamiltoniani quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma)=-J\sum_{b\in M}U(\sigma_b), \tag{12}$$

bu yerda $J\in\mathbb{R}$.

3-izoh. *(12) model uchun $k=2$ holni U.A.Rozikov va G‘.T.Madg‘oziyev tomoni-dan o‘rganilgan. Biz $k=3$ holni qaraymiz. Ushbu paragrafda (12) model uchun translyasion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari o‘rganilgan va uchunchi parag-rafga o‘xshash natijalar olingan. Bu natijalar ichida eng muhimi 7-teorema ((12) model uchun ham shunday teorema o‘rinli). Bu tasdiq ko‘rib chiqilayotgan model-lar doirasida yangi hodisani aks ettiradi, chunki ilgari o‘rganilgan modellar uchun bunday davriy Gibbs o‘lchovlari mavjud emas edi.*

Dissertasiyaning **«Blyum-Kapel modeli uchun Gibbs o‘lchovlari»** deb nomlanuvchi ikkinchi bobi Blyum-Kapel modeli uchun translyasionno-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Modelning ba’zi chekli graf hollari uchun $k\ge 2$ tartibli Keli daraxtida translyasionno-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari yagona bo‘lmaydigan parametrning aniq qiymatlari topilgan. $k=2$ bo‘lganda esa mavjud translyasionno-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlarining chekka o‘lchov bo‘lish va bo‘lmaslik shartlari aniqlangan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida Keli daraxtida Izing-1 modeli uchun TIGO‘larini o‘rganishga bag‘ishlangan. Bunday o‘lchovlarning chekkaligini o‘rganish usuli berilgan. Bundan tashqari, yagona Gibbs o‘lchovi uchun chekka bo‘lish va bo‘lmaslik shartlari topilgan.

$\Phi=\{-1,0,1\}$ va $\sigma\in\Phi^V$ – konfiguratsiya bo‘lsin.

Izing-1 modeli gamiltoniani quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma)=-J\sum_{\langle x,y\rangle, x,y\in V;}\sigma(x)\sigma(y),$$

bu yerda $J>0$.

$h: x\mapsto h_x=(h_{-1,x},h_{0,x},h_{1,x})$ – $x\in V\setminus\{x^0\}$ ning vektor funksiyasi bo‘lsin.

Ω_{V_n} da

$$\mu^{(n)}(\sigma_n)=Z_n^{-1}exp\{-\beta H(\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}h_{\sigma(x),x}\} \tag{13}$$

$\mu^{(n)}$ ehtimollik taqsimotini qaraymiz. Bunda $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$ va Z_n – normallovchi bo‘luvchi

$$Z_n=\sum_{\overline{\sigma}_n\in\Omega_{V_n}}exp\{-\beta H(\overline{\sigma}_n)+\sum_{x\in W_n}h_{\overline{\sigma}(x),x}\},$$

bu yerda $h_{\overline{\sigma},x}\in\mathbb{R}$.

Standart usulda (qarang U.A. Rozikov ilmiy ishlaridan) Izing-1 modeli uchun Gibbs o‘lchovlarini o‘rganish masalasini quyidagi funktsional tenglamalar sistemasini yechishga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} z_{1,x} = \prod\limits_{y \in S(x)} \dfrac{\lambda z_{1,y} + \lambda^{-1} z_{-1,y} + 1}{z_{1,y} + z_{-1,y} + 1}, \\ z_{-1,x} = \prod\limits_{y \in S(x)} \dfrac{\lambda^{-1} z_{1,y} + \lambda z_{-1,y} + 1}{z_{1,y} + z_{-1,y} + 1}, \end{cases} \tag{14}$$

bu yerda $\lambda = exp\{J\beta\}, \beta = 1/T, z_{i,x} = exp(h_{i,x} - h_{0,x}), i = -1,1$.

$k = 2$ bo‘lsin. U holda Izing-1 modeli uchun shunday $\lambda_{cr} \approx 2.1132163$ topiladiki, $0 < \lambda \le \lambda_{cr}$ uchun yagona μ_0 TIGO‘ mavjud, $\lambda > \lambda_{cr}$ uchun aniq uchta μ_0, μ_1, μ_2 TIGO‘lari mavjud.

μ_0 TIGO‘ning chekka o‘lchov bo‘lish sharti quyidagicha. $k = 2$ bo‘lsin. Agar $\lambda \in (0, \lambda_1) \cup (\lambda_2, +\infty)$ da μ_0 o‘lchov chekka bo‘lmaydi, agar $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ da μ_0 o‘lchov chekka bo‘ladi, bu yerda $\lambda_1 \approx 0.336135$ va $\lambda_2 \approx 2.975$.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida $k \ge 2$ tartibli Keli daraxtida Blyum-Kapel modelining «jezl» tipidagi chekli graf holi ko‘rib chiqilgan. Bunday holda, TIGO‘larining to‘liq tavsifi olingan. Bundan tashqari, bu topilgan TIGO‘lari uchun chekka bo‘lish va bo‘lmaslik shartlari topilgan.

$\Phi = \{-1,0,1\}$ va $\sigma \in \Phi^V -$konfiguratsiya bo‘lsin.

Quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lgan uchta $-1,0,1$ uchli ($\sigma(x)$ qiymatlar to‘plamida) grafni ko‘rib chiqamiz:

jezl: $\{0,-1\}$, $\{0,1\}$, $\{-1,-1\}$, $\{1,1\}$.

Blyum-Kapel modeli gamiltonianini quyidagi ko‘rinishda ham aniqlash mumkin:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y \rangle, x,y \in V;} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \tag{15}$$

bu yerda $J \in \mathbb{R}$.

$O = \{\text{жезл}\}$, $G \in O$ bo‘lsin. Keli daraxtida (mos ravishda V_n da) σ konfiguratsiya G*-joiz konfiguratsiya* deyiladi, agarda $\{\sigma(x), \sigma(y)\} -$qirra V dan (V_n dan) olingan barcha x, y yaqin qo‘shnilar uchun G ning qirrasi bo‘lsa.

$h: x \mapsto h_x = (h_{-1,x}, h_{0,x}, h_{1,x}) - x \in V \setminus \{x^0\}$ ning vektor funksiyasi bo‘lsin.

Ω_{V_n} da

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\} \tag{16}$$

$\mu^{(n)}$ ehtimollik taqsimotini qaraymiz. Bunda $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ va $Z_n -$normallovchi bo‘luvchi

$$Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} exp\{-\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\bar{\sigma}(x),x}\},$$

bu yerda $h_{\bar{\sigma},x} \in \mathbb{R}$.

$L(G) - G$ graf qirralar to‘plami bo‘lsin, $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=-1,0,1}$ orqali G ning qo‘shnilik matrisasini belgilaymiz, ya’ni

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{agar } \{i,j\} \in L(G), \\ 0, & \text{agar } \{i,j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Standart usulda (qarang U.A. Rozikov ilmiy ishlaridan) HC-Blyum-Kapel modeli uchun Gibbs o‘lchovlarini o‘rganish masalasini quyidagi funktsional tenglamalar sistemasini yechishga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} z_{1,x} = \prod\limits_{y \in S(x)} \dfrac{a_{1,-1}\theta^4 z_{-1,y} + a_{1,0}\theta + a_{1,1}z_{1,y}}{a_{0,-1}\theta z_{-1,y} + a_{0,0} + a_{0,1}\theta z_{1,y}}, \\ z_{-1,x} = \prod\limits_{y \in S(x)} \dfrac{a_{-1,-1}z_{-1,y} + a_{-1,0}\theta + a_{-1,1}\theta^4 z_{1,y}}{a_{0,-1}\theta z_{-1,y} + a_{0,0} + a_{0,1}\theta z_{1,y}}, \end{cases} \tag{17}$$

bu yerda $\theta = exp\{-J\beta\}, \beta = 1/T, z_{i,x} = exp(h_{i,x} - h_{0,x}), i = -1,1.$

Ikkinchi bobning asosiy natijalari

4-teorema. *$k \geq 2$ va $\theta_{cr} = \theta_{cr}(k) = \sqrt[k+1]{k^k (k-1)2^{-k}}$ bo‘lsin. U holda Blyum-Kapel modeli «jezl» holati uchun $\theta \geq \theta_{cr}$ yagona μ_0 TIGO‘ mavjud, $\theta < \theta_{cr}$ aniq uchta μ_0, μ_1, μ_2 TIGO‘lari mavjud.*

μ_0, μ_1, μ_2 TIGO‘larining chekka o‘lchov bo‘lish shartlari quyidagicha.

$k = 2$ bo‘lsin. 1. Blyum-Kapel modeli «jezl» tipidagi chekli graf uchun μ_0 o‘lchov

$$\theta \in \left(0; 2^{-1}\sqrt[3]{4\sqrt{2} - 4}\right) \cup \left(2^{-1}\sqrt[3]{28 + 20\sqrt{2}}; +\infty\right)$$

chekka bo‘lmaydi va $2^{-1}\sqrt[3]{4\sqrt{2} - 4} < \theta < 2^{-1}\sqrt[3]{28 + 20\sqrt{2}}$ chekka bo‘ladi.

2. Blyum-Kapel modeli «jezl» holati uchun μ_1, μ_2 o‘lchovlar

$$\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1 + 2^{-1}\sqrt{2\sqrt{2} - 2}} < \theta < 1$$

chekka bo‘ladi.

4-izoh. *μ_1, μ_2 o‘lchovlar uchun $0 < \theta < \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 2} / 2}$ chekka o‘lchov bo‘lish masalasi hozircha ochiqligicha qolmoqda.*

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafi «jezl» holatli HC-Blyum-Kapel modeli uchun davriy Gibbs o‘lchovlariga bag‘ishlangan. $k \geq 2$ tartibli Keli darxtida davriy Gibbs o‘lchovlarning xarakteristikasi olingan. Bunday Gibbs o‘lchovlarning ikkinchi tartibli Keli daraxtida to‘liq tavsifi berilgan va bu o‘lchovlarning chekka o‘lchov bo‘lish masalasi o‘rganilgan.

Ikkinchi bobning to‘rtinchi paragrafi «umumlashgan jezl» holatli HC-Blyum-Kapel modeli uchun TIGO‘larini o‘rganishga bag‘ishlangan. TIGO‘larining ikkinchi tartibli Keli daraxtida to‘liq tavsifi berilgan va bu o‘lchovlarning chekka o‘lchov bo‘lish masalasi o‘rganilgan.

Ikkinchi bobning beshinchi paragrafi ximik potensialli HC-Blyum-Kapel modeli uchun TIGO‘larini o‘rganishga bag‘ishlangan. Bunday Gibbs o‘lchovlarning ikkinchi tartibli Keli daraxtida to‘liq tavsifi berilgan va bu o‘lchovlarning chekka o‘lchov bo‘lish masalasi o‘rganilgan.

Dissertasiyaning **«DNK molekulalaridagi ba’zi modellar uchun Hollidey birikmalari»** deb nomlanuvchi uchinchi bobi Gibbs o‘lchovlar nazariyasining biologiyaga tadbiqiga bag‘ishlangan. Biologiyadan asosiy ta’rif va ma’lum faktlar keltirilgan. DNK molekulasi, Hollidey birikmasi haqida tushuncha berilgan. $k \geq 2$ tartibli Keli daraxtida DNKni tavsiflash va uning termodinamikasini o‘rganish uchun Blyum-Kapel va Izing modellari ko‘rib chiqilgan.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida zarur ta’riflarni, DNK molekulasi, Hollidey birikmasi tushunchalarini, shuningdek, biologiyadan ba’zi ma’lum natijalar keltirilgan.

Ma’lumki, har bir *DNK* molekulasi asosiy juftliklar $C+G$ (sitozin-guanin) va $A+T$ (adenin-timin) orasidagi vodorod bog‘lamlari bilan bir-biriga bog‘langan ikkita qo‘shimcha nukleotid zanjiridan hosil bo‘lgan qo‘sh spiraldir.

Hollidey birikmasi bir-biriga bog‘langan to‘rtta ikki ipli qo‘lni o‘z ichiga olgan shoxlab ketgan nuklein kislota strukturasidir.

$\Im^k = (V, L) -$Keli daraxti bo‘lsin, bu yerda V va $L-$Keli daraxtining uchlar va qirralar to‘plami.

U.A. Rozikov va F.T. Ishonkulov ishlarida Keli daraxtining har bir uchidan butun sonlar ketma-ketligi bo‘yicha nomerlangan yagona yo‘l o‘tishi isbotlangan. Shu yo‘lni $\mathbb{Z}-yo‘l$ deb ataymiz.

Har bir $l \in L$ qirraga $\sigma(l) \in \{-1,0,1\}$ qiymatlarni mos qo‘yuvchi σ funksiyani qaraymiz, bunda $-1 = A+T$ va $1 = C+G$ hamda $\sigma(l) = 0$ qirra «erkin» ekanligini bildiradi.

$\sigma = \{\sigma(l), l \in L\}$ funksiya konfiguratsiya deyiladi. L (L_n) dagi barcha konfiguratsiyalar to‘plamini Ω (Ω_n) orqali belgilaymiz. $\sigma = \{\sigma(l), l \in L\}$ konfiguratsiya *joiz* deyiladi, agarda $\sigma(l) \neq 0$ barcha $l \in \mathbb{Z}-yo‘l$. $\mathbb{Z}-yo‘l$ dagi joiz konfiguratsiyalarning cheklashi *DNK* deyiladi. L (L_n) dagi joiz konfiguratsiyalar to‘plamini Ω^a (Ω_n^a) orqali belgilaymiz.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafi ikkinchi tartibli Keli daraxtida Blyum-Kapel modelining DNK molekulasi uchun TIGO‘ o‘rganishga bag‘ishlangan. Shu bilan birga, TIGO‘ning to‘liq tavsifi olingan. Har bir bunday o‘lchov DNK to‘plamining fazasini tavsiflaydi. Bundan tashqari, ko‘rilayotgan model uchun Hollidey birikmasi o‘rganilgan.

5-izoh. *Bunday masalalar U.A. Rozikovning ilmiy ishlarida Ising va Potts modeli uchun ko'rib chiqilgan.*

DNK to‘plamidagi σ konfiguratsiya energiyasi uchun quyidagi Blyum-Kapel modelini qarab chiqamiz:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle l,t\rangle \in L\times L;} (\sigma(l) - \sigma(t))^2, \tag{20}$$

bu yerda $J \in \mathbb{R}-$bog‘lanish o‘zgarmasi, $\sigma(l) \in \{-1,0,1\}$ va $\langle l,t\rangle$ yaqin qo‘shni qirralarni bildiradi, ya’ni umumiy uchga ega bo‘lgan qirralar. Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$E_n = \{\langle x, y\rangle \in L : x \in W_{n-1}, y \in W_n\},$$

$l \in E_{n-1}$ uchun $S(l) = \{t \in E_n : \langle l,t\rangle)\}$.

$$S_0(l) = S(l) \setminus \{l_0, l_1\},\ l \notin \mathbb{Z} - йўл,\ \ S_1(l) = S(l) \setminus \{l_1\},\ l \in \mathbb{Z} - йўл .$$

Ω_n^a da quyidagi

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{l \in E_n} h_{\sigma(l),l}\right\}, \quad (21)$$

μ_n ehtimollik taqsimotini qaraymiz, bu yerda $\sigma_n \in \Omega_n^a$, $\beta = 1/T$, $T > 0-$ temperatura, $Z_n^{-1}-$normallovchi koʻpaytuvchi, $\{h_{i,l} \in R, i = -1,0,1, l \in L\}-$ haqiqiy sonlar toʻplami va

$$H_n(\sigma_n) = J \sum_{l,t \in L_n : \langle l,t \rangle} (\sigma(l) - \sigma(t))^2.$$

Standart usulda (qarang U.A. Rozikov ilmiy ishlaridan) Blyum-Kapel modeli DNK molekulasi uchun Gibbs oʻlchovlarini oʻrganish masalasini quyidagi funktsional tenglamalar sistemasini yechishga keltirish mumkin:

$$\begin{aligned} z_{0,l} &= \frac{\lambda z_{l_0} + \lambda}{\lambda^4 z_{l_0} + 1} \cdot \frac{\lambda z_{l_1} + \lambda}{\lambda^4 z_{l_1} + 1} \cdot \prod_{t \in S_0(l)} \frac{\lambda z_{1,t} + \lambda + z_{0,t}}{\lambda^4 z_{1,t} + 1 + \lambda z_{0,t}}, l \notin \mathbb{Z} - yo\text{‘}l, \\ z_{1,l} &= \frac{z_{l_0} + \lambda^4}{\lambda^4 z_{l_0} + 1} \cdot \frac{z_{l_1} + \lambda^4}{\lambda^4 z_{l_1} + 1} \cdot \prod_{t \in S_0(l)} \frac{z_{1,t} + \lambda^4 + \lambda z_{0,t}}{\lambda^4 z_{1,t} + 1 + \lambda z_{0,t}}, l \notin \mathbb{Z} - yo\text{‘}l, \\ z_l &= \frac{z_l + \lambda^4}{\lambda^4 z_l + 1} \cdot \prod_{t \in S_1(l)} \frac{z_{1,t} + \lambda^4 + \lambda z_{0,t}}{\lambda^4 z_{1,t} + 1 + \lambda z_{0,t}}, l \in \mathbb{Z} - yo\text{‘}l. \end{aligned} \quad (22)$$

Bu yerda

$$\lambda = exp(J\beta); \; z_{i,l} = exp(h_{i,l} - h_{-1,l}), \; i = 0,1; \; z_l = exp(h_{1,l} - h_{-1,l}).$$

Uchincni bobning asosiy natijalari

5-teorema. *Ikkinchi tartibli Keli daraxtida (20) DNK modeli uchun quyidagi tasdiqlar oʻrinli:*

1) agar $T > T_c$ boʻlsa, u holda yagona μ_1 TIGOʻ mavjud boʻladi;

2) agar $T = T_c$ boʻlsa, u holda ikkita μ_1, μ_2 TIGOʻlari mavjud boʻladi;

3) agar $T < T_c$ boʻlsa, u holda uchta μ_1, μ_2, μ_3 TIGOʻlari mavjud boʻladi, qayerda $T_c = \left(ln\lambda_*^{-1}\right)^{-1}$, $\lambda_* = 0.711$.

Bu TIGOʻ uchun yuqori va past temperaturalarda Xollidey birikmalarining stasionar taqsimoti va tipik konfiguratsiyalari topilgan.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafi $k \geq 2$ tartibli Keli daraxtida HC-Blyum-Kapel modelining DNK molekulasi uchun TIGOʻ oʻrganishga bagʻishlangan. $k \geq 2$ va ixtiyoriy $T > 0$ temperaturada TIGOʻ yagonaligi koʻrsatilgan va Hollidey birikmasi DNKsining taqsimoti oʻrganilgan.

Uchinchi bobning toʻrtinchi paragrafida $k \geq 2$ tartibli Keli daraxtida HC-Blyum-Kapel modelining DNK molekulasi uchun «sikl» tipidagi chekli graf holi koʻrib chiqilgan. $k \geq 2$ va ixtiyoriy $T > 0$ temperaturada yagona TIGOʻ mavjudligi koʻrsatilgan. Bundan tashqari, Xollidey birikmasining stasionar taqsimoti va tipik konfiguratsiyalari oʻrganilgan.

Uchinchi bobning beshinchi paragrafi ikkinchi tartibli Keli daraxtida Izing-1 modelining DNK molekulasi uchun yangi Gibbs oʻlchovlarini oʻrganishga bagʻishlangan. Shu bilan birga, Gibbs oʻlchovi yagona boʻlmagan temperaturaning aniq qiymati topilgan. Har bir bunday oʻlchov DNK toʻplamining fazasini tavsiflaydi.

Dissertatsiyaning **«Holatlar soni sanoqli boʻlgan baʼzi modellar uchun gradiyent Gibbs oʻlchovlari»** deb nomlanuvchi toʻrtinchi bobi Gibbs oʻlchovlar nazariyasining yangi boʻlimi hisoblangan gradiyent Gibbs oʻlchovlariga (GGOʻ) bagʻishlangan. $k \geq 2$ tartibli Keli daraxtida spin qiymatlari sanoqli $\mathbb{Z}$ toʻplamdan olingan HC-Blyum-Kapel va alternativ magnitizmli SOS modellari uchun GGOʻ oʻrganilgan.

Toʻrtinchi bobning birinchi paragrafida zarur taʼriflarni, GGOʻ tushunchalarini, shuningdek, baʼzi maʼlum natijalar keltirilgan.

Toʻrtinchi bobning ikkinchi paragrafi $k \geq 2$ tartibli Keli daraxtida spin qiymatlari sanoqli toʻplam boʻlgan HC-Blyum-Kapel modeliga bagʻishlangan. Ushbu model uchun TIGOʻning mavjudlik va mavjud boʻlmaslik shartlari topilgan, shu bilan birga mavjudlik shartida bunday oʻlchovning yagonaligi isbotlangan. Bundan tashqari davri ikkiga teng boʻlgan davriy Gibbs oʻlchovlari tadqiq qilingan. Davriy Gibbs oʻlchovlari yagona boʻlmagan holda parametrning aniq qiymati topilgan.

$\Phi = \mathbb{Z}$ va $\sigma \in \Phi^V -$konfiguratsiya boʻlsin.

Blyum-Kapel modeli gamiltonianini (15) formula yordamida aniqlanadi. Bu yerda joiz konfiguratsiyalar V dan olingan barcha $\langle x, y\rangle$ yaqin qoʻshnilar uchun $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ shartni qanoatlantiradi.

Toʻrtinchi bobning ikkinchi paragrafi asosiy natijalari

6-teorema. *$k \geq 2$, $\Theta_{cr}(k) = k^k(k-1)^{-(k+1)}$ boʻlsin. U holda HC-Blyum-Kapel modeli uchun quyidagi tasdiqlar oʻrinli:*

1. A) Agar $\theta \in (0,1)$ boʻlsa, bu yerda $\theta = \exp\{-J\beta\}$, $\beta = 1/T$, $T-$ temperatura, u holda yagona μ_0 TIGOʻ oʻlchovi mavjud;

B) Agar $\theta \geq 1$, u holda TIGOʻ mavjud boʻlmaydi;

2. *A) Agar $\theta \in (0,1)$ va yigʻindi $\sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \theta^{(k+1)j^2} = \Theta$ boʻlsa, u holda $0 < \Theta \leq \Theta_{cr}$ uchun TI boʻlgan yagona μ_0 $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs oʻlchovi mavjud, $\Theta > \Theta_{cr}$ uchun esa aniq uchta μ_0, μ_1, μ_2 $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs oʻlchovlari mavjud, bu yerda μ_1 va μ_2 oʻlchovlar TI boʻlmagan $G_k^{(2)}$-davriy boʻladi;*

B) Agar $\theta \geq 1$, u holda $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs oʻlchovlari mavjud boʻlmaydi.

6-izoh. *HC-Blyum-Kapel modeli uchun spin qiymatlari chekli boʻlganda, $\theta \geq 1$ holati uchun TIGOʻ va $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs oʻlchovi mavjud edi. Lekin bu teoremada TIGOʻ va $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o'lchovi $\theta \geq 1$ holatida mavjud boʻlmayapdi, ya'ni u yoʻqolmoqda.*

Toʻrtinchi bobning uchinchi paragrafida HC-Blyum-Kapel modeli spinlarning mumkin boʻlgan juftlik oʻzaro taʼsirini belgilaydigan «umumlashgan jezl» tipidagi sanoqli graf holi koʻrib chiqilgan. Translyasionno-invariant va davriy gradiyent Gibbs o‘lchovlari yagona bo‘lmagan parametrning aniq qiymatlari topilgan.

To‘rtinchi bobning to‘rtinchi paragrafida $k \geq 2$ tartibli Keli daraxtida spin qiymatlari sanoqli to‘plam bo‘lgan va alternativ magnetizmli SOS modeli o‘rganiladi. Chegara qonuni tenglamalariga asoslangan Kulske-Shrayver argumentidan foydalanib, $q = 2,3,4$ uchun bir nechta q-davriy TIGGO‘ topilgan.

$\sigma : x \in V \mapsto \sigma(x) \in \mathbb{Z}$ uchun alternativ magnetizmli SOS modeli quyidagi

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle, x,y \in V;} \alpha\left(| \sigma(x) - \sigma(y) | \right) | \sigma(x) - \sigma(y) |, \tag{28}$$

formula yordamida aniqlanadi, bu yerda $J \in \mathbb{R}$ va

$$\alpha(|m|) = \begin{cases} 1, \text{ agar } m \in 2\mathbb{Z}, \\ -1, \text{ agar } m \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases}$$

Ushbu modelni «sirmoq» tipidagi sanoqli grafda qaraymiz.

8-teorema. *$k \geq 2$, $\theta_c = \dfrac{2(k+1)}{k-1}$, $\theta_{cr} = \dfrac{k+2}{k-1}$ bo‘lsin. U holda alternativ magnetizmli SOS modeli uchun «sirtmoq» tipidagi sanoqli grafda:*

1. Balandlik bo‘yicha 2-davriy GGO‘ soni $\nu_2(k,\theta)$ quyidagi

$$\nu_2(k,\theta) = \begin{cases} 1, \text{ agar } \theta \leq \theta_c, \\ 3, \text{ agar } \theta > \theta_c, \end{cases}$$

formula bilan beriladi.

2. Balandlik bo‘yicha 3-davriy GGO‘ soni $\nu_3(k,\theta)$ quyidagi

$$\nu_3(k,\theta) = \begin{cases} 1, \text{ agar } \theta < \theta_{c,1}, \\ 3, \text{ agar } \theta = \theta_{c,1}, \theta_{cr}, \\ 5, \text{ agar } \theta \in (\theta_{c,1}, +\infty) \setminus \{\theta_{cr}\}, \end{cases}$$

formula bilan beriladi, bu yerda $\theta_{c,1}$ $\theta_{cr} > \theta_{c,1}$ son.

4. Balandlik bo‘yicha 4-davriy (2-va 3-davriy bo‘lmagan) GGO‘ soni $\nu_4(k,\theta)$ quyidagi

$$\nu_4(2,\theta) = \begin{cases} 0, \text{ agar } \theta \leq 2, \\ 5, \text{ agar } \theta \in (2, \theta_c^{(3)}), \\ 6, \text{ agar } \theta = \theta_c^{(3)}, \\ 8, \text{ agar } \theta > \theta_c^{(3)}, \end{cases}$$

formula bilan beriladi, bu yerda

$$\theta_c^{(3)} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{54 + 6\sqrt{33}} + \frac{8}{\sqrt[3]{54 + 6\sqrt{33}}} + 2 \approx 6.766.$$

XULOSA

Dissertatsiya ishi sanoqli graflarda spin qiymatlari soni chekli yoki sanoqli bo‘lgan Izing, Potts, SOS va Blyum-Kapel modellari uchun limit Gibbs o‘lchovlarining mavjudligini aniqlashga, bunday o‘lchovlar to‘plamining strukturasini va ba’zi Gibbs o‘lchovlarining biologiyaga tadbiqini o‘rganishga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Ikkinchi tartibli Keli daraxtida tarqoq raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirli Potts modeli uchun yangi asosiy holatlarni topilishini ta’kidlash joiz.

2. Keli daraxtida sharli Izing va umumlashgan Potts modellari uchun translyasion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari tavsiflangan va bu modellar uchun kontinuumta Gibbs o‘lchovlari mavjudligi isbotlangan. Shuni ta’kidlash joizki, bu modellar uchun topilgan H_A – davriy Gibbs o‘lchovlari yangi hodisani aks ettiradi, chunki ilgari o‘rganilgan modellar uchun bunday davriy Gibbs o‘lchovlari mavjud emas edi.

3. Keli daraxtida HC-Blyum-Kapel modellari uchun translyasion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari yagona bo‘lmaydigan parametrlarning qiymatlarini aniqlanganligini va bu o‘lchovlarni chekka o‘lchov bo‘lish shartlarini topilganligini keltirish mumkin.

4. Keli daraxtida HC-Blyum-Kapel modellari DNK molekulasi uchun translyasion-invariant Gibbs o‘lchovlari mavjudlini ko’rsatilgan va bu o‘lchovlarning biologiyaga tatbiq qilingan.

5. Keli daraxtida HC-Blyum-Kapel va o‘zgaruvchi magnitli SOS modellari uchun gradiyent Gibbs o‘lchovlarini tavsiflanganligini qayd etish lozim.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ХАТАМОВ НОСИРЖОН МУЙДИНОВИЧ

МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА СЧЕТНЫХ ГРАФАХ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ–2023

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за № B2023.3.DSc/FM225.

Диссертация выполнена в Институте Математики.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский, (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Ганиходжаев Насир Набиевич** доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией
Официальные оппоненты:	**Кудайбергенов Каримберген Кадырбергенович** доктор физико-математических наук, профессор
	Темир Сейит доктор математических наук, профессор
	Ботиров Голибжон Исроилович доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «16» января 2024 г. в 16:00 часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (регистрационный номер № 175). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «22» декабря 2023 г.
(протокол рассылки № 2 от «22» декабря 2023 г.).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

У.А.Розиков
Председатель Научного совета
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

У.У. Жамилов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший научный
сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Известно, что теория мер Гиббса лежит в основе научных и практических исследований, направленных на описание термодинамических состояний моделей статистической механики и биологических систем. Меры Гиббса особенно важны для объяснения теории фазовых переходов систем, состоящих из взаимодействующих частиц. Теория мер Гиббса представляет собой такое направление на стыке статистической физики и теории мер, что ее можно рассматривать как мост, соединяющий теоретическую и прикладную математику. Хотя применение понятия меры Гиббса связано с американским ученым Дж.Гиббсом, следует отметить несравнимые заслуги Р.Л.Добрушина, О.Е.Лэнфорда и Д.Рюэля в разработке и популяризации этой теории. Это понятие, первоначально введенное как закон распределения систем, находящихся в тепловом равновесии с окружающей средой при постоянной температуре, сегодня находит свое применение в биологии, генетике, экономике и многих других областях науки.

В настоящее время актуально описание множества периодических и трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей статистической механики в решетчатых системах с конечными и счетными значениями спина. Также с целью повышения эффективности некоторых классических моделей статистической механики, таких как модели Изинга и Поттса, особое внимание уделяется исследованию моделей смешанного типа, в которых множество значений спина счетно. Для таких моделей проводятся построение трансляционно-инвариантных и периодических гиббсовских мер, анализ структуры множества построенных мер, нахождение условий, при которых существующие гиббсовские меры являются крайними мерами, определение критических значений температуры, обеспечивающих фазовый переход, а также изучаются биологические интерпретации мер Гиббса, что является одним из целевых научных исследований.

В последние годы в нашей стране уделяется внимание современным направлениям фундаментальной науки, имеющим научное и практическое применение. В частности, значительные результаты были достигнуты в исследовании предельных мер Гиббса для классических (Изинга, Поттса, HC, Блюма-Капеля) моделей статистической механики, поиске методов определения существования трансляционно-инвариантных, периодических, градиентных мер Гиббса и их биологической интерпретации. В качестве основных задач и направлений деятельности математики определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям: функциональный анализ, математическая физика, теория вероятностей и теория динамических систем[1]. Для обеспечения реализации решений, использования научных результатов в

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

смежных областях науки важно исследовать свойства множества мер Гиббса для моделей смешанного типа и множество значений спина не более чем счетно и их применение в биологии.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2].

Научные исследования по теории мер Гиббса и их применениям ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: университеты Бари и Рима (Италия), Боннский университет, Карлов университет (Прага), Венский университет (Австрия), Институт прикладной Математики, Рурский университет Бохума (Германия), Научный институт INFN, Международный центр теоретической физики им. Абдуса Салама, Центр перспективных исследований, Университет Аквилы (Италия), Марсельский университет, Университет Прованса, CNRS и Парижский университет (Франция), МГУ, Институт проблем передачи информации, Институт математики РАН (Россия), Университет Авейру (Португалия), Университет Кюсю (Япония), Кембриджский университет, Школа математики, Лидский университет, Лафборо (Великобритания), Университет Зирве, Университет Харрана (Турция), Университет Женевы (Швейцария).

В результате исследований по построению мер Гиббса для различных моделей статистической физики и их применению был решен ряд актуальных задач, в частности получены следующие научные результаты: для Hard-Core (HC) модели на дереве Кэли показана единственность транцляционно-инвариантной меры Гиббса и при некоторых условиях на параметры HC-модели доказана неединственность периодических мер Гиббса с периодом два (Statistical Laboratory, DPMMS, University of Cambridge (Англия)); для

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Теоретическая и математическая физика, Математические заметки, Украинский математический журнал, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry http://www.springer.com/mathematics; Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, Lobachevskii journal of Mathematics, Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки: Conference Series https://www.researchgate.net, также были использованы и другие источники.

моделей жесткой сердцевины с тремя и четырьмя состояниями было введено понятие плодородной НС-модели и для таких моделей найдены условия (не) единственности мер Гиббса (Department of Mathematics, London School of Economics (Англия), Bell Laboratories, Lucent Technologies, Mountain Avenue Murray Hill, New Jersey (США)); дано полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса в ферромагнитном случае на дереве Кэли порядка $k \geq 2$, а на дереве Кэли порядка $k = 2$ найдены условия крайности этих мер (Fakultät für Mathematik-Ruhr-Universität Bochum (Германия)); показаны существование и неединственность трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для моделей жесткой сердцевины с четырьмя состояниями и для модели SOS на дереве Кэли (Centre de Physique Théorique, Universités Aix-Marseille et Sud Toulon-Var (Франция)). Исследовано биологическое применение трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли (University of Santiago de Compostela (Spain)).

В настоящее время в мире праводится ряд исследований по изучению свойств мер Гиббса для различных моделей и их применению в биологии, в том числе для обобщенной модели Изинга и моделей Поттса, НС, Блюма-Капеля, SOS, показано существование трансляционно-инвариантных, периодических и других мер Гиббса и дана классификация градиентных мер Гиббса; найдены условия крайности трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для моделей НС Блюма-Капеля; представлены точные значения параметров, при которых доказано, что трансляционно-инвариантная мера Гиббса не единственна, исследованы крайности таких мер для моделей НС Блюма-Капеля и SOS; исследованы и найдены условия существования трансляционно-инвариантных, периодических и градиентных мер Гиббса для моделей с конечным или счетным числом значений спина; проведен анализ биологической интерпретации трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей Изинга и Блюма-Капеля и т.д.

Степень изученности проблемы. Системы, состоящие из большого числа взаимодействующих компонент, являются основным классом моделей, с помощью которых удается изучить поведение сколь угодно больших (бесконечных) физических или информационных систем. Общая структура описания таких многокомпонентных моделей на физическом языке была разработана Больцманом и Гиббсом в XIX и XX вв. В их работах было положено начало новой науке - статистической механике. Первоначально статистическая механика была предназначена для решения чисто физических проблем, однако разработанные новые методы и подходы оказались настолько универсальными, что стали применяться к различным ситуациям, далеко выходящим за рамки физических задач. Основы математической статистической механики были заложены в 40-50х годах XX века Л. Ван Ховом, Л. Онзагером, Н.Н. Боголюбовым и Б.И.Хацетом, М.Кацем, Т.Ли и К.Янгом и, позднее, в 60-70е годы, были развиты в работах Р.Л. Добрушина, Р.А. Минлоса, Я.Г. Синая, Ф.А. Березина, О.Лэнфорда, Д.Рюэля, Дж.Галлавотти, Р.Гриффитса, Ж.Жинибра, Д.Робинсона, Ф.Спитцера, Дж.Лебовица, С.Миракль-Соля, в которых, в част-ности, на уровне математической строгости были введены понятия термоди-намического предельного перехода, гиббсовского случайного поля, построены предельные гиббсовские распределения, исследованы корреля-ционные функции непрерывных и решетчатых систем, построены основы теории фазовых переходов, введены неравновесные модели и изучена их связь с гиббсовскими состояниями. Теорема о существовании предельной меры Гиббса была доказана Р.Л.Добрушиным, К.Х.Ханин применил эту теорему к решеточным моделям квантовой теории поля. Основная теория фазовых переходов содержится в работах С.А.Пирогова, Я.Г.Синая, R.A.Minlos, N.Datta, R.Fernandez, J.Fröhlich, A.C.D.Enter и M.Zahradnik. Теоремы существования предельной меры Гиббса для моделей, где конфигурация принимает неограниченные значения, рассматривались также в работе J.Lebowitz и E.Presutti. Анализ предельных мер Гиббса для различных классов решетчатых моделей на основе метода контуров Пайерлса возник в работах В.Герцика, О.Дж.Хайльмана, Э.М.Либа, М.Кассандро, М.Да Фано, Г.Оливери, У.А.Розикова, Г.И.Ботирова и других ученых.

В работах Д.Гандолфо, Ж.Руиза, К.Кулске, П.М.Блехера, Дж.Либовица, Е.Презутти, Ю.М.Сухова, Н.Н.Ганиходжаева, У.А.Розикова, Ф.Мухаммедова, Р.М.Хакимова, М.М.Рахматуллаева, Н.М.Хатамова, Ш.А.Шоюсупова, А.М.Рахматуллаева, О.Хакимова, Ф.Хайдарова, М.Расуловой, М.Махамадалиева и других на основе метода теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнениях этой теории изучены предельные меры Гиббса. В работе У.А.Розикова, К.Кулске и Р.М.Хакимова описаны трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели Поттса. А в работе У.А.Розикова, К.Кулске изучена крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса. В работах У.А.Розикова, Ф.М.Мухаммедова, Г.И.Ботирова развит контурный метод Пайерлса (теория Пирогова-Синая) на дереве Кэли. Этим методом доказано существование различных мер Гиббса для достаточно широкого класса гамильтонианов на дереве Кэли. В работе У.А.Розикова, Х.Акина, С.А.Темура построено множество предельных мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли, отличных от ранее известных мер. В работах У. А. Розикова изучалось применение трансляционно-инвариантных мер Гиббса на молекулах ДНК для модели Изинга. Поэтому очень важно изучить применение мер Гиббса в биологии, медицине, экономике и других областях.

В настоящее время для многих моделей статистической механики изучается проблема фазового перехода, т.е. неединственность предельных мер Гиббса. Но ни для одной модели не получено полное описание всех предельных мер Гиббса. Теории для различных моделей статистической механики созданы в работах К. Престона, Д. Рюэля, Р. Бекстера, Х. О.Георги, Р. Л. Добрушина, С. А. Пирогова, Я. Г. Синая, В. А. Малышева, Р. А. Минлоса, С. Б. Шлосмана, Д. Гандольфо, Дж. Руиса, К. Кульске, П. М.

Блехера, Ю.М.Сухова, Л. В. Богачева, Э. Н. Чирилло, Э. Оливьери, Н.Н.Ганиходжаева, У. А. Розикова, Ф. М. Мухаммедова и других.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии», Институт математики (2012-2016 гг.) и ОТ-Ф4-82+ ОТ-Ф4-87 «Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в нелинейных динамических системах»+ «Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в Евклидовом и псевдо-Евклидовом пространствах и ее приложения в механике», Институт математики (2017-2021 гг.).

Целью исследования является изучение структуры множества предельных мер Гиббса для моделей Изинга, Поттса, SOS и Блюма-Капеля с конечным или счетным числом значений спина и применение этих мер в биологии.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

построение новых основных состояний для модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли второго порядка;

описание трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для шаровых моделей Изинга и обобщенных моделей Поттса на дереве Кэли;

построение трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля на дереве Кэли;

существование трансляционно-инвариантных мер Гиббса для молекулы ДНК моделей НС-Блюма-Капеля на дереве Кэли и применение этих мер в биологии;

описание множества градиентных мер Гиббса для моделей НС-Блюма-Капеля и SOS с альтернативным магнетизмом, определяемым гомеоморфизмом на дереве Кэли для некоторых типов счетных графов;

Объект исследования. Обобщенные модели Поттса, шаровые модели Изинга, НС-Блюма-Капеля и SOS-модели альтернативного магнетизма на дереве Кэли.

Предмет исследования. Основные состояния для модели Поттса, проблема фазового перехода для обобщенной модели Поттса и шаровой модели Изинга, трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля, применение моделей Блюма-Капеля и Изинга к биологии, нахождение трансляционно-инвариантных и периодических градиентных мер Гиббса для моделей Блюма-Капеля и SOS.

Методы исследования. В работе использовались теория обобщенных марковских процессов, теория мер и методы сжимающих отображений, теория нелинейных динамических систем, теория марковских случайных полей и рекуррентные уравнения этой теории.

Научная новизна исследования:

построены новые основные состояния для модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка два;

показано существование трансляционно-инвариантных мер Гиббса для шаровой модели Изинга и обобщенной модели Поттса на дереве Кэли и найдено точное значение параметра, обеспечивающего существование фазового перехода;

определены точные значения параметров, при которых трансляционно-инвариантная и периодическая меры Гиббса не единственны для моделей НС-Блюма-Капеля в некоторых типах конечных графов, определяемых гомеоморфизмом на дереве Кэли;

найдены условия существования трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей НС-Блюма-Капеля молекулы ДНК на дереве Кэли и изучено применение этих мер в биологии;

получено полное описание градиентных мер Гиббса для моделей НС-Блюма-Капеля и SOS с альтернативным магнетизмом в некоторых типах счетных графов, определяемых гомеоморфизмом на дереве Кэли.

Практические результаты исследования:

Определение точного или приближенного значения параметра, обеспечивающего существование фазового перехода, нахождение областей крайности для некоторых мер, определяющих чистую фазу физической системы, и описание метода приложений этих мер Гиббса в биологии.

Достоверность результатов исследования обоснована применением фундаментальных результатов теории мер, методов функционального анализа, теории функций с дискретными аргументами, а также результатов подтверждений критических значений физических процессов, найденных для фазового перехода с фиксированными параметрами, строго контролируемыми методами теории прикладного математического программирования.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования потверждается тем, что полученные в работе результаты использованы в теории мер Гиббса и решетчатых системах физики и термодинамики, ДНК биологии.

Практическая значимость результатов исследований определяется их приложением к трансляционно-инвариантным, периодическим и градиентным мерам Гиббса и результатам их основных состояний, проверкой существования фазового перехода физической системы.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с мерами Гиббса для биологических и физических систем на счетных графах, использовались в следующих исследовательских проектах:

метод доказательства существования трансляционно-инвариантных мер Гиббса, соответствующих модели Изинга и обобщенной модели Поттса на дереве Кэли, был использован в зарубежном грантовом проекте «Динамика конечномерной ортогональности, сохраняющая кубические стохастические операторы» для представления фазовых диаграмм состояния модели Поттса на решетке Бете (Справочник Международного исламского университета от 21 ноября 2023 г., Малайзия). Применение научного результата позволило точно рассчитать критическую температуру, при которой происходит фазовый переход для модели Поттса;

из неединственности трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для моделей НС-Блюма-Капеля, определяемых гомеоморфизмом дерева Кэли некоторым конечным графам были использованы в исследованиях зарубежного проекта «Описание p-адических мер Гиббса решетчатых моделей» для исследования вещественных и p-адических мер Гиббса для нескольких моделей на неаменабельных графах (Американского университета Ближнего Востока, справка от 20 ноября 2023 года, Кувейт). Применение научного результата позволило изучить возможность получения информации о фазах соответствующей физической системы;

методы построения основных состояний для модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли были использованы в фундаментальном проекте YOFA-Ftex-2018-78 «Динамические и термодинамические системы в неаменабельных графах», завершенном в 2018-2019 гг. в Институте им. В И. Романовского, при исследовании основных состояний λ-модели (Справка № 2/459 Института математики от 25 октября 2023 г.). Применение научного результата позволило доказать существование периодических и слабопериодических основных состояний λ-модели на дереве Кэли.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации были представлены и обсуждены на 29 научно-практических конференциях, в том числе на 10 международных и 19 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 48 научных работ, из них 19 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 12 опубликовано в зарубежных журналах и 7 в республиканских научных изданиях.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 190 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, указано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «Мера Гиббса и основные состояния для модели Поттса», построены новые классы основных состояний для модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями, изучены трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для моделей шаровых Изинга и обобщенных Поттса и доказаны, что для этих моделей существуют континуальные меры Гиббса.

Первый параграф этой главы носит вспомогательный характер и содержит история теории гиббсовских мер, необходимые определения, основное состояние, понятия мер Гиббса и некоторые известные факты.

Дерево Кэли $\Im^k$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, то есть граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро.

Пусть $\Im^k = (V, L, i)$, где V есть множество вершин $\Im^k$, $L-$множество его ребер и $i-$функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются ближайшими соседями вершины и обозначаются $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y),\ x,\ y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x,y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такие, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\},\ V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$
$$L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Для $x \in W_n$ обозначим

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} :\ d(x, y) = 1\}.$$

$S(x)$ называется множеством прямых потомков вершины x.

Замечание 1. *Заметим, что в $\Im^k$ всякая вершина $x \neq x^0$ имеет k прямых потомков, а вершина x^0 имеет $k+1$ потомков.*

Пусть G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$, соответственно.

Для $A \subseteq V$ конфигурация σ_A на A определяется как функция $x \in A \to \sigma_A(x) \in \Phi = \{1,...,q\}$. Множество всех конфигураций совпадает с $\Omega_A = \Phi^A$.

Энергия конфигурации $\sigma \in \Omega$ задается с помощью гамильтониана

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{A \subset V: \\ diam(A) \leq r}} I(\sigma_A), \qquad (1)$$

где $r \in N$, $diam(A) = \max_{x,y \in A} d(x,y)$ и $I(\sigma_A): \Omega_A \to R$ – данный потенциал.

Для конечной области $D \subset V$ с граничным условием φ_{D^c}, данным на его дополнении $D^c = V \setminus D$, условный гамильтониан есть

$$H(\sigma_D \mid \varphi_{D^c}) = \sum_{\substack{A \subset V: A \cap D \neq \varnothing \\ diam(A) \leq r}} I(\sigma_A) \quad ,$$

где

$$\sigma_A(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ если } x \in A \bigcap D \\ \varphi(x), \text{ если } x \in A \bigcap D^c. \end{cases}$$

Пусть $G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, ..., H_r\}$ – фактор группа, где G_k^* – нормальный делитель с $r \geq 1$-индексом.

Определение 1. *Конфигурация* $\sigma(x), x \in V$ *называется* G_k^*-*периодической, если* $\sigma(x) = \sigma_i$ *при* $x \in H_i$, $\forall x \in G_k$. G_k-*периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.*

Пусть $\mathbf{B}$ – σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω.

Обозначим

$$\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V \setminus A}(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ если } x \in A, \\ \tilde{\sigma}(x), \text{ если } x \in V \setminus A. \end{cases}$$

Определение 2. *Вероятностная мера* μ *на* σ-*алгебре* $\mathbf{B}$ *называется предельной мерой Гиббса, если для любого конечного* $A \subset V$ *имеет место*

$$\mu(\sigma_A \mid \tilde{\sigma}_{V \setminus A}) = \frac{e^{-\beta H(\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V \setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

где $H(\sigma)$ *определена в (1),* $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ – *температура и*

$$Z_{A,\tilde{\sigma}} = \sum_{\varphi \in \Omega_A} e^{-\beta H(\varphi_A \vee \tilde{\sigma}_{V|A})}.$$

Пусть $\widehat{G}_k$ – подгруппа группы G_k.

Определение 3. *Совокупность векторов* $h = \{h_x, x \in G_k\}$ *называется* $\widehat{G}_k$ -*периодической, если* $h_{yx} = h_x$, *для* $\forall x \in G_k$, $y \in \widehat{G}_k$. G_k - *периодические совокупности называются трансляциионно- инвариантными.*

Определение 4. *Мера* μ *называется* $\widehat{G}_k$ *-периодической, если она соответствует* $\widehat{G}_k$*-периодической совокупности векторов* h. G_k*-периодические меры называются трансляционно-инвариантными мерами.*

Второй параграф первой главы посвящен построению нового множества основных состояний для модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли второго порядка.

Гамильтониан модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями имеет следующий вид:

$$H(\sigma)=J_1\sum_{\langle x,y\rangle;x,y\in V}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}+J_2\sum_{\rangle x,y\langle;x,y\in V}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}+J_3\sum_{\rangle\rangle x,y\langle\langle;x,y\in V}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}\ , \quad (2)$$

где $J_1,J_2,J_3\in\mathbb{R}$, $x,y\in V$ вершины с длинами $d(x,y)=2$, $\rangle x,y\langle -$ лежащими на одном «этаже» и $\rangle\rangle x,y\langle\langle -$ на разных «этажах»,

$$\delta_{uv}=\begin{cases}1, & u=v,\\ 0, & u\neq v.\end{cases}$$

Для пары конфигураций σ и φ, совпадающих почти всюду, т.е. всюду, за исключением конечного числа точек, мы рассмотрим относительный гамильтониан $H(\sigma,\varphi)-$различие между энергиями конфигураций σ,φ, т.е.

$$H(\sigma,\varphi)=J_1\sum_{\langle x,y\rangle;x,y\in V}(\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}-\delta_{\varphi(x)\varphi(y)})+J_2\sum_{\rangle x,y\langle;x,y\in V}(\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}-\delta_{\varphi(x)\varphi(y)})+$$
$$+J_3\sum_{\rangle\rangle x,y\langle\langle;x,y\in V}(\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}-\delta_{\varphi(x)\varphi(y)}), \quad (3)$$

где $J=(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3-$произвольный фиксированный параметр.

Пусть $M-$множество единичных шаров с вершинами в V. Будем называть сужение конфигурации σ на шаре $b\in M$ *ограниченной конфигурацией* σ_b. Определим энергию конфигурации σ_b на шаре b следующим образом:

$$U(\sigma_b)\equiv U(\sigma_b,J)=\frac{1}{2}J_1\sum_{\langle x,y\rangle;x,y\in b}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}+J_2\sum_{\rangle x,y\langle;x,y\in b}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}+$$
$$+J_3\sum_{\rangle\rangle x,y\langle\langle;x,y\in b}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (4)$$

где $J=(J_1,J_2,J_3)\in\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим случай $k=2$ и $q=3$. Легко видеть, что $U(\sigma_b)\in\{U_1,U_2,...,U_9\}$ для любого σ_b, где

$$U_1=\frac{3}{2}J_1+2J_2+J_3,U_2=J_1+J_3,U_3=2J_2+J_3,U_4=\frac{1}{2}J_1+J_3,$$
$$U_5=J_3,U_6=J_1+J_2,U_7=\frac{1}{2}J_1+J_2,U_8=J_2,U_9=\frac{1}{2}J_1. \quad (5)$$

Определение 5. *Конфигурация* φ *называется основным состоянием относительного гамильтониана* H, *если для любого* $b \in M$ $U(\varphi_b)$ $= \min\{U_1, U_2, ..., U_9\}$.

Введем следующие обозначения:

$A_1 = \{J \in \mathbb{R}^3 : J_1 \le 0, J_1 + 4J_2 \le 0, J_1 + 2J_2 + 2J_3 \le 0\}$,

$A_2 = \{J \in \mathbb{R}^3 : J_1 \ge 0, J_2 \le 0, J_2 + J_3 \le 0\}$,

$A_3 = \{J \in \mathbb{R}^3 : J_1 \le 0, J_1 + 4J_2 \ge 0, J_2 - J_3 \ge 0, J_1 + 2J_3 \le 0\}$,

$A_4 = \{J \in \mathbb{R}^3 : J_1 = 0, J_2 \ge 0, J_3 \le 0\}$,

$A_5 = \{J \in \mathbb{R}^3 : J_1 \ge 0, J_2 \ge 0, J_2 - J_3 \ge 0, J_1 - 2J_3 \ge 0\}$,

$A_6 = \{J \in \mathbb{R}^3 : J_1 \le 0, J_1 + 2J_2 \le 0, J_2 - J_3 \le 0, J_1 + 2J_2 + 2J_3 \ge 0\}$,

$A_7 = \{J \in \mathbb{R}^3 : J_1 = 0, J_2 \le 0, J_2 + J_3 \ge 0\}$,

$A_8 = \{J \in \mathbb{R}^3 : J_1 \ge 0, J_1 - 2J_2 \ge 0, J_3 \ge |J_3|\}$,

$A_9 = \{J \in \mathbb{R}^3 : |J_1| \le 2J_2, |J_1| \le 2J_3\}$;

$B_{i_1 i_2 \dots i_k} = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}, k = 2,3,4$, где $1 \le i_j \le 9, j = 1,...,k$.

$\widetilde{A_1} = A_1 \setminus (B_{12} \cup B_{13} \cup B_{16}),\ \widetilde{A_2} = B_{36} \setminus (B_{369} \cup B_{136}),$

$\widetilde{A_3} = A_2 \setminus (B_{12} \cup B_{25} \cup B_{27} \cup B_{28}),\quad \widetilde{A_4} = A_9 \setminus (B_{39} \cup B_{49} \cup B_{59} \cup B_{69} \cup B_{89}),$

$\widetilde{A_5} = B_{589} \setminus \{(0,0,0)\},$

$\widetilde{B_1} = A_5 \setminus (B_{58} \cup B_{59} \cup B_{25} \cup B_{35}),\ \widetilde{B_2} = A_8 \setminus (B_{28} \cup B_{58} \cup B_{78} \cup B_{89}),$

$\widetilde{B_3} = B_{25} \setminus (B_{125} \cup B_{258}),\ \widetilde{B_4} = B_{58} \setminus (B_{258} \cup B_{589}),\ \widetilde{B_5} = B_{12} \setminus (B_{13} \cup B_{16}),$

$\widetilde{B_6} = B_{13} \setminus (B_{12} \cup B_{16}),\ \widetilde{B_7} = B_{39} \setminus (B_{49} \cup B_{369}),\ \widetilde{B_8} = B_{369} \setminus \{(0,0,0)\}.$

Пусть $GS(H)-$множество всех основных состояний, а $GS_p(H)-$ множество всех периодических основных состояний.

Основной результат второго параграфа первой главы выражается в следующей теореме.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

Если $J = (0,0,0)$, *то* $GS(H) = \Omega$.

Если $J \in \widetilde{A_1} \cup \widetilde{A_2} \cup \widetilde{A_3} \cup \widetilde{A_4}$, *тогда* $|GS_p(H)| = 3$.

Если $J \in \widetilde{A_5}$, *тогда* $|GS_p(H)| = 6$.

Если $J \in \widetilde{B_i}, i = \overline{1,4}$, *тогда* $|GS_p(H)| \ge 6$.

Если $J \in \widetilde{B_i}, i = 5, 6, 7, 8,$ *тогда* $|GS_p(H)| = 6$.

Замечание 2. *Заметим, что в случаях* $J \in \widetilde{A_5}$ *и* $J \in \widetilde{B_i}, i = \overline{1,4}$ *найденные основные состояния являются совершенно новыми.*

Третий параграф первой главы посвящен изучению трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для шаровой модели Изинга. В то же время доказано существование фазового перехода для этой модели, т.е. неединственность мер Гиббса.

Пусть $\Phi = \{-1,1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ – конфигурация.

Гамильтониан шаровой модели Изинга определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\substack{\langle x_0, x_i \rangle, x_0, x_i \in V; \\ i=\overline{1,k+1}}} \sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2)...\sigma(x_{k+1}), \tag{6}$$

где $J \in \mathbb{R}$.

Для $x \in G_k$ введем обозначение $x_{\downarrow} = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$, где $S(x)$ – множество «*прямых потомков*» точки $x \in V$.

Рассмотрим случай $k = 2$. Пусть

$$b(x) = \{x, xa_1, xa_2, xa_3\}, \quad \sigma_{b(x)} = \{\sigma(x), \sigma(xa_1), \sigma(xa_2), \sigma(xa_3)\}.$$

Вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} имеет вид

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x),\sigma_b(x)}^{\sigma_b(x_{\downarrow})}\}, \tag{7}$$

где $\sigma_n \in \Omega_{V_n}, Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} exp\{-\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x),\bar{\sigma}_b(x)}^{\bar{\sigma}_b(x_{\downarrow})}\}$ и $h_{b,\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} \in \mathbb{R}$.

Говорят, что вероятностное распределение $\mu^{(n)}$, $(\forall n \geq 1)$ согласованно, если

$$\sum_{\left\{\omega_n \in \Omega_{V_n} : \, \omega_n|_{V_{n-1}} = \sigma_{n-1}\right\}} \mu^{(n)}(\omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \tag{8}$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$.

Пусть, $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \ldots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = V$ и $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots -$ последовательность вероятностных мер на $\Omega_{V_1}, \Omega_{V_2}, \ldots$, обладающая свойством согласованности (8). Тогда в силу теоремы Колмогорова существует, и притом единственная предельная мера Гиббса μ на Ω_V такая, что

$$\mu(\{\sigma : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Пусть M – множества единичных шаров. Обозначим b, c прямыми потомками шара $a \in M$.

Стандартным образом (см. работы У.А. Розикова) задачу исследования гиббсовских мер в шаровой модели Изинга можно свести к решению следующей системы функциональных уравнений:

$$y_{a,0} = y_{a,6} = \frac{y_{b,0} + \lambda^2 y_{b,1} + y_{b,2}}{\lambda^2 y_{b,0} + y_{b,1} + \lambda^2 y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,0} + \lambda^2 y_{c,1} + y_{c,2}}{\lambda^2 y_{c,0} + y_{c,1} + \lambda^2 y_{c,2}},$$

$$
\begin{aligned}
y_{a,1} = y_{a,7} &= \frac{y_{b,0}+\lambda^2 y_{b,1}+y_{b,2}}{\lambda^2 y_{b,0}+y_{b,1}+\lambda^2 y_{b,2}}\cdot\frac{\lambda^2 y_{c,3}+y_{c,4}+\lambda^2}{\lambda^2 y_{c,0}+y_{c,1}+\lambda^2 y_{c,2}},\\
y_{a,2} = y_{a,8} &= \frac{\lambda^2 y_{b,3}+y_{b,4}+\lambda^2}{\lambda^2 y_{b,0}+y_{b,1}+\lambda^2 y_{b,2}}\cdot\frac{\lambda^2 y_{c,3}+y_{c,4}+\lambda^2}{\lambda^2 y_{c,0}+y_{c,1}+\lambda^2 y_{c,2}},\\
y_{a,3} = y_{a,9} &= \frac{y_{b,3}+\lambda^2 y_{b,4}+1}{\lambda^2 y_{b,0}+y_{b,1}+\lambda^2 y_{b,2}}\cdot\frac{y_{c,3}+\lambda^2 y_{c,4}+1}{\lambda^2 y_{c,0}+y_{c,1}+\lambda^2 y_{c,2}},\\
y_{a,4} = y_{a,10} &= \frac{y_{c,3}+\lambda^2 y_{c,4}+1}{\lambda^2 y_{c,0}+y_{c,1}+\lambda^2 y_{c,2}}, y_{a,5}=1,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $\lambda = exp\{J\beta\}$, $\beta = 1/T$, $y_{a,i} = exp(h_{a,i}-h_{a,11})$, $i=\overline{0,10}.$

Основные результаты третьего параграфа первой главы состоят в следующем:

Теорема 2. *Для модели (6) существует* $\lambda_{cr}=\sqrt[4]{0.064}$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_{cr}$ *существует не менее одной ТИМГ, при* $0<\lambda<\lambda_{cr}$ *существует не менее трех ТИМГ, а также при* $0<\lambda<\lambda_{cr}$ *существует континуум мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными*.

Предположим, что (9) выпольнено

$$
y_{a,0}=y_{a,3},\ y_{a,1}=y_{a,4},\ y_{a,2}=1,\ \forall a\in M. \tag{10}
$$

Для модели (6) при $\lambda>0$ и при условиях (10) существует единственная $G_2^{(2)}$-периодическая мера Гиббса. Более того, эта мера совпадает с трансляционно-инвариантной, где $G_k^{(2)}-$подгруппа группы G_k, состоящая из слов четной длины.

Теорема 3. *Для модели (6) при условии (10) существуют несчетное число* H_A*-периодических мер Гиббса. Более того, эти меры не являются трансляционно-инвариантными и не являются* $G_2^{(2)}$*-периодическими, где* $H_A=\{x\in G_2:\sum_{i\in A}\omega_x(a_i)\ \text{четно}\}$, $\omega_x(a_i)-$ *число букв* a_i, *участвующих в несократимой записи слова* $x\in G_k$, $A\subset\{1,2,3\}$.

В четвертом параграфе первой главы изучается существование трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для обобщенной модели Поттса с радиусом взаимодействия два на дереве Кэли порядка $k=3$.

Пусть $\Phi=\{-1,1\}$ и $\sigma\in\Phi^V-$конфигурация. Пусть $A\subset V$. Обозначим через $|A|$ число элементов множества A.

Обобщенный символ Кронекера, как функция

$$
U(\sigma_A):\Omega_A\to\{|A|-1,|A|-2,...,|A|-\min\{|A|,|\Phi|\}\}
$$

определяется следующим образом:

$$
U(\sigma_A)=|A|-|\sigma_A\cap\Phi|, \tag{11}
$$

где $A\subset V$, а $|\sigma_A\cap\Phi|-$число различных значений $\sigma_A(x), x\in A$.

Мы рассмотрим случай $|A|=5$. Обозначим через M множество всех шаров $b(x)=\{y\in V: d(x,y)\leq 1\}$ с радиусом 1.

Гамильтониан определяется следующим образом

$$H(\sigma)=-J\sum_{b\in M}U(\sigma_b), \tag{12}$$

где $J\in\mathbb{R}$.

Замечание 3. *Случай $k=2$ модели (12) изучался У.А. Розиков и Г.Т. Мадгозиев. Мы рассмотрели эту модель в случае $k=3$. В этом параграфе мы изучаем трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели (12) и получаем результаты, аналогичные третьему параграфу. Наиболее важным среди этих результатов является теорема 7 (эта теорема справедлива для модели (12)). Это утверждение является новым явлением в рассматриваемых моделях, поскольку для ранее изученных моделей таких периодических мер Гиббса не существовало.*

Вторая глава диссертации, названной «**Меры Гиббса для модели Блюма-Капеля**», посвящена изучению трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для модели Блюма-Капеля. Для некоторых случаев конечного графа модели найдены условия и точные значения параметра, при которых трансляционно-инвариантная и периодическая меры Гиббса не единственны на дереве Кэли порядка $k\geq 2$. А также при $k=2$ исследована задача крайности существующих трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса.

Первый параграф второй главы посвящен изучению трансляционно-инвариантных мер Гиббса (ТИМГ) для модели Изинга-1 на дереве Кэли. Дан метод исследования крайности таких мер. Кроме того, изучена задача (не)крайности для единственной меры Гиббса.

Пусть $\Phi=\{-1,0,1\}$ и $\sigma\in\Phi^V$ − конфигурация.

Гамильтониан модели Изинга-1 определяется как

$$H(\sigma)=-J\sum_{\langle x,y\rangle, x,y\in V;}\sigma(x)\sigma(y),$$

где $J>0$.

Пусть $h: x\mapsto h_x=(h_{-1,x},h_{0,x},h_{1,x})$ − вектор функция от $x\in V\setminus\{x^0\}$. Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n}:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n)=Z_n^{-1}exp\{-\beta H(\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}h_{\sigma(x),x}\}. \tag{13}$$

Здесь Z_n − нормирующий делитель

$$Z_n=\sum_{\bar\sigma_n\in\Omega_{V_n}}exp\{-\beta H(\bar\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}h_{\bar\sigma(x),x}\},$$

где $h_{\bar\sigma,x}\in\mathbb{R}$.

Стандартным образом (см. работы У.А. Розикова) задачу исследования гиббсовских мер в модели Изинга-1 можно свести к решению следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} z_{1,x} = \prod\limits_{y\in S(x)} \dfrac{\lambda z_{1,y} + \lambda^{-1} z_{-1,y} + 1}{z_{1,y} + z_{-1,y} + 1}, \\ z_{-1,x} = \prod\limits_{y\in S(x)} \dfrac{\lambda^{-1} z_{1,y} + \lambda z_{-1,y} + 1}{z_{1,y} + z_{-1,y} + 1}, \end{cases} \tag{14}$$

где $\lambda = exp\{J\beta\}, \beta = 1/T, z_{i,x} = exp(h_{i,x} - h_{0,x}), i = -1,1$.

Пусть $k=2$. Тогда для модели Изинга-1 существует $\lambda_{cr} \approx 2.1132163$ такая, что при $0 < \lambda \le \lambda_{cr}$ существует ровно одна ТИМГ μ_0, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три ТИМГ μ_0, μ_1, μ_2.

Условия крайности ТИМГ μ_0. Пусть $k=2$. Если $\lambda \in (0,\lambda_1) \cup (\lambda_2, +\infty)$, то μ_0 не является крайней. Если $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, то μ_0 является крайней, где $\lambda_1 \approx 0.336135$ и $\lambda_2 \approx 2.975$.

Замечание 4. *Проверить (не)крайность мер* μ_1, μ_2 *очень трудно, даже с помощью компьютерного анализа. Поэтому эта задача пока остается открытой.*

Во втором параграфе второй главы рассмотрен случай конечного графа типа «жезл» модели Блюма-Капеля на дереве Кэли порядка $k \ge 2$. В этом случае получено полное описание ТИМГ. Кроме того, изучена задача (не)крайности этих мер.

Пусть $\Phi = \{-1,0,1\}$ и $\sigma \in \Phi^V -$ конфигурация.

Рассмотрим граф с тремя вершинами $-1,0,1$ (на множестве значений $\sigma(x)$), которые имеет следующий вид:

жезл: $\{0,-1\}$, $\{0,1\}$, $\{-1,-1\}$, $\{1,1\}$

Гамильтониан модели Блюма-Капеля определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle, x,y\in V;} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \tag{15}$$

где $J \in \mathbb{R}$.

Пусть $O = \{\text{жезл}\}$, $G \in O$. Конфигурация σ называется G-*допустимой конфигурацией* на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\} -$ ребро G для любой ближайшей пары соседей x,y из V (из V_n). Обозначим множество G-допустимых конфигураций через $\Omega^G (\Omega^G_{V_n})$.

Пусть $h: x \mapsto h_x = (h_{-1,x}, h_{0,x}, h_{1,x}) -$ вектор функция от $x \in V \setminus \{x^0\}$. Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на $\Omega^G_{V_n}$:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\sigma(x),x}\}, \tag{16}$$

где $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}, Z_n = \sum_{\bar\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}} exp\{-\beta H(\bar\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\bar\sigma(x),x}\}$ и $h_{\bar\sigma,x} \in \mathbb{R}$.

Пусть $L(G)-$множество ребер графа G, обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=-1,0,1}$ матрицу смежности G, т.е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i,j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Стандартным образом (см. работы У.А. Розикова) задачу исследования гиббсовских мер в модели Блюма-Капеля можно свести к решению следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} z_{1,x} = \prod\limits_{y \in S(x)} \dfrac{a_{1,-1}\theta^4 z_{-1,y} + a_{1,0}\theta + a_{1,1}z_{1,y}}{a_{0,-1}\theta z_{-1,y} + a_{0,0} + a_{0,1}\theta z_{1,y}}, \\ z_{-1,x} = \prod\limits_{y \in S(x)} \dfrac{a_{-1,-1}z_{-1,y} + a_{-1,0}\theta + a_{-1,1}\theta^4 z_{1,y}}{a_{0,-1}\theta z_{-1,y} + a_{0,0} + a_{0,1}\theta z_{1,y}}, \end{cases} \tag{17}$$

где $\theta = exp\{-J\beta\}, \beta = 1/T, z_{i,x} = exp(h_{i,x} - h_{0,x}), i = -1,1.$

Основным результатом второго параграфа

Теорема 4. *Пусть* $k \geq 2$ *и* $\theta_{cr} = \theta_{cr}(k) = \sqrt[k+1]{(k^k(k-1))/2^k}$. *Тогда для модели Блюма-Капеля в случае конечного графа типа «жезл» при* $\theta \geq \theta_{cr}$ *существует ровно одна ТИМГ* μ_0, *а при* $\theta < \theta_{cr}$ *существуют ровно три ТИМГ* μ_0, μ_1, μ_2.

Условия крайности ТИМГ μ_0, μ_1, μ_2. Пусть $k = 2$. A) Для модели Блюма-Капеля в случае «жезл» мера μ_0 при $\theta \in \left(0; 2^{-1}\sqrt[3]{4\sqrt{2}-4}\right) \cup \left(2^{-1}\sqrt[3]{28+20\sqrt{2}}; +\infty\right)$ не является крайней и при $2^{-1}\sqrt[3]{4\sqrt{2}-4} < \theta < 2^{-1}\sqrt[3]{28+20\sqrt{2}}$ является крайней.

B) Для модели Блюма-Капеля в случае «жезл» меры μ_1, μ_2 при

$$\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2\sqrt{2}-2}\,/\,2} < \theta < 1$$

являются крайними.

Замечание 5. *Для мер* μ_1, μ_2 *при* $0 < \theta < \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2\sqrt{2}-2}\,/\,2}$ *задача (не)крайности пока остается открытой.*

Третий параграф второй главы посвящен периодическим мерам Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля в случае «жезл». Получена характеристика периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. Дано полное описание таких мер Гиббса на дереве Кэли порядка два, а также изучена задача (не)крайности этих мер.

Четвертый параграф второй главы посвящен исследованию ТИМГ для модели НС-Блюма-Капеля в случае «обобщенный жезл». Дано полное описание ТИМГ. Кроме того, изучена задача (не)крайности этих мер.

Пятый параграф второй главы посвящен исследованию ТИМГ для модели НС-Блюма-Капеля с химическим потенциалом. Дается полное описание таких мер Гиббса на дереве Кэли второго порядка и изучается задача (не)крайности этих мер.

Третья глава диссертации, названная **«Структуры Холлидея для некоторых моделей молекул ДНК»**, посвящена применению теории меры Гиббса к биологии. Приведены основные определения и известные факты из биологии. Дано понятие о молекуле ДНК, соединении Холлидея. Для описания ДНК и изучения ее термодинамики были рассмотрены модели Блюма-Капеля и Изинга на дереве Кэли порядка $k \geq 2$.

В первом параграфе третьей главы представлены необходимые определения, понятия о молекуле ДНК, соединении Холлидея, а также некоторые известные факты из биологии.

Известно, что каждая молекула ДНК представляет собой двойную спираль, образованную двумя комплементарными нитями нуклеотидов, которые удерживаются вместе водородными связями между парами оснований $C+G$ (цитозин-гуанин) и $A+T$ (аденин-тимин).

Соединение Холлидея представляет собой разветвленную структуру нуклеиновой кислоты, содержащую четыре двухцепочечных плеча, соединенных вместе.

Пусть $\Im^k = (V, L) -$дерево Кэли, где V и $L-$ множества вершин и ребер дерева Кэли.

В работе У.А. Розикова и Ф.Т. Ишанкулова было доказано, что из каждого вершины дерева Кэли проходит единственный путь, занумерованный последовательностью целых чисел. Мы называем эту путь $\mathbb{Z}-путь$.

Рассмотрим функцию σ, которая присваивает каждому ребру $l \in L$ значение $\sigma(l) \in \{-1, 0, 1\}$ так, что $-1 = A+T$ и $1 = C+G$, а $\sigma(l) = 0$ означает, что ребро "свободно".

Функция $\sigma = \{\sigma(l), l \in L\}$ называется конфигурацией. Множество всех конфигураций на L (на L_n) обозначается как Ω (как Ω_n). Конфигурация $\sigma = \{\sigma(l), l \in L\}$ называется *допустимой,* если $\sigma(l) \neq 0$ для всех $l \in \mathbb{Z}-путь$. Ограничение допустимой конфигурации на $\mathbb{Z}-путь$ называется *ДНК*. Множество допустимых конфигураций на L (на L_n) обозначим как Ω^a (как Ω_n^a).

Второй параграф третьей главы посвящен изучению ТИМГ для молекулы ДНК модели Блюма-Капеля на дереве Кэли второго порядка. При этом было получено полное описание ТИМГ. Каждая такая мера описывает фазу множества ДНК. Кроме того, были изучены соединения Холлидея для рассматриваемой модели.

Замечание 6. *Такие задачи рассмотрены в работах У.А. Розикова для модели Изинга и Поттса.*

Мы рассматриваем следующую модель Блюма-Капеля энергии конфигурации σ на множестве ДНК:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle l,t \rangle \in L \times L;} (\sigma(l) - \sigma(t))^2, \tag{20}$$

где $J\in\mathbb{R}-$константа связи, $\sigma(l)\in\{-1,0,1\}$ и $\langle l,t\rangle$ обозначает ребра, являющиеся ближайшими соседями, т.е. ребра, у которых имеется общая вершина. Положим

$$E_n=\{\langle x,y\rangle\in L: x\in W_{n-1}, y\in W_n\},$$

Для $l\in E_{n-1}$ введем обозначение

$$S(l)=\{t\in E_n:\langle l,t\rangle)\}.$$

Положим

$$S_0(l)=S(l)\setminus\{l_0,l_1\},\ l\notin\mathbb{Z}-путь,\ S_1(l)=S(l)\setminus\{l_1\},\ l\in\mathbb{Z}-путь.$$

Рассмотрим вероятностное распределение μ_n на Ω_n^a:

$$\mu_n(\sigma_n)=Z_n^{-1}exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n)+\sum_{l\in E_n}h_{\sigma(l),l}\right\},\qquad(21)$$

где $\sigma_n\in\Omega_n^a$, $\beta=1/T$, $T>0-$ температура, $Z_n^{-1}-$ нормирующий множитель, $\{h_{i,l}\in R,\ i=-1,0,1,\ l\in L\}-$ набор действительных чисел и

$$H_n(\sigma_n)=J\sum_{l,t\in L_n:\langle l,t\rangle}(\sigma(l)-\sigma(t))^2.$$

Стандартным образом (см. работы У.А. Розикова) задачу исследования гиббсовских мер в молекуле ДНК модели Блюма-Капеля можно свести к решению следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{aligned}
z_{0,l}&=\frac{\lambda z_{l_0}+\lambda}{\lambda^4 z_{l_0}+1}\cdot\frac{\lambda z_{l_1}+\lambda}{\lambda^4 z_{l_1}+1}\cdot\prod_{t\in S_0(l)}\frac{\lambda z_{1,t}+\lambda+z_{0,t}}{\lambda^4 z_{1,t}+1+\lambda z_{0,t}},l\notin\mathbb{Z}-путь,\\
z_{1,l}&=\frac{z_{l_0}+\lambda^4}{\lambda^4 z_{l_0}+1}\cdot\frac{z_{l_1}+\lambda^4}{\lambda^4 z_{l_1}+1}\cdot\prod_{t\in S_0(l)}\frac{z_{1,t}+\lambda^4+\lambda z_{0,t}}{\lambda^4 z_{1,t}+1+\lambda z_{0,t}},l\notin\mathbb{Z}-путь,\\
z_l&=\frac{z_l+\lambda^4}{\lambda^4 z_l+1}\cdot\prod_{t\in S_1(l)}\frac{z_{1,t}+\lambda^4+\lambda z_{0,t}}{\lambda^4 z_{1,t}+1+\lambda z_{0,t}},l\in\mathbb{Z}-путь.
\end{aligned}\qquad(22)$$

Здесь

$$\lambda=exp(J\beta);\ z_{i,l}=exp(h_{i,l}-h_{-1,l}),\ i=0,1;\ z_l=exp(h_{1,l}-h_{-1,l}).$$

Основным результатом второго параграфа

Теорема 5. *Для модели (20) ДНК на дереве Кэли второго порядка справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $T>T_c$, *то существует единственная ТИМГ* μ_1;

2) *если* $T=T_c$, *то существуют две ТИМГ* μ_1,μ_2;

3) *если* $T<T_c$, *то существуют три ТИМГ* μ_1,μ_2,μ_3.

где $T_c=\left(ln\lambda_*^{-1}\right)^{-1}$, $\lambda_*=0.711$.

Для этих ТИМГ найдены стационарные распределения и типичные конфигурации соединения Холлидея при высоких и низких температурах.

Третий параграф третьей главы посвящен изучению ТИМГ для молекулы ДНК модели НС-Блюма-Капеля на дереве Кэли порядка $k\geq 2$.

Показано, что при $k \geq 2$ для любой температуры $T > 0$ существует единственная ТИМГ и изучена распределения ДНК соединения Холлидея.

В четвертом параграфе третьей главы рассмотрен случай конечного графа типа «цикл» для молекулы ДНК модели НС-Блюма-Капеля на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. Показано, что при $k \geq 2$ для любой значение температуры существует единственный ТИМГ. Кроме того, изучена стационарные распределения и типичные конфигурации соединения Холлидея.

Пятый параграф третьей главы посвящен изучению новых мер Гиббса для молекулы ДНК модели Изинга-1 на дереве Кэли второго порядка. При этом было найдено точное значение температуры, при которых мер Гиббса не единственна. Каждая такая мера описывает фазу множества ДНК.

Четвертая глава диссертации, названной **«Градиентные меры Гиббса для некоторых моделей со счетным числом состояний»** посвящена градиентным мерам Гиббса (ГМГ) - новому разделу теории мер Гиббса. Мы изучаем ГМГ со счетным множеством $\mathbb{Z}$ значений спина для моделей НС-Блюма-Капеля и SOS с альтернативным магнетизмом на дереве Кэли порядка $k \geq 2$.

В первом параграфе четвертой главы представлены необходимые определения, понятия ГМГ, а также некоторые известные результаты.

Второй параграф четвертой главы посвящен модели НС-Блюма-Капеля со счетным множеством значений спина на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. Найдены условия существования и не существования ТИМГ, а также доказана единственность такой меры при условии существования. Кроме того, исследованы периодические меры Гиббса с периодом два. Найдено точное значение параметра, при котором периодическая мера Гиббса не является единственной.

Пусть $\Phi = \mathbb{Z}$ и $\sigma \in \Phi^V -$конфигурация.

Гамильтониан модели Блюма-Капеля определяется по формуле (15). Здесь допустимые конфигурации удовлетворяют условию $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для всех ближайших соседей $\langle x, y \rangle$ из V.

Теорема 7. *Пусть* $k \geq 2$, $\Theta_{cr}(k) = k^k (k-1)^{-(k+1)}$. *Тогда для модели НС-Блюма-Капеля справедливы следующие утверждения:*

1. А) Если $\theta \in (0,1)$, *здесь* $\theta = \exp\{-J\beta\}, \beta = 1/T, T -$*температура, то существует единственная трансляционно- инвариантная мера Гиббса* μ_0*;*

Б). Если $\theta \geq 1$, *то не существует трансляционно-инвариантной меры Гиббса;*

2. А) Если $0 < \theta < 1$ *и сумма* $\sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \theta^{(k+1)j^2} = \Theta$, *то при* $0 < \Theta \leq \Theta_{cr}$ *существует ровно одна* $G_k^{(2)}$*-периодическая мера Гиббса* μ_0, *которая является ТИ, а при* $\Theta > \Theta_{cr}$ *существуют ровно три* $G_k^{(2)}$*-периодические меры Гиббса* μ_0, μ_1, μ_2, *где меры* μ_1 *и* μ_2 *являются* $G_k^{(2)}$*-периодическими(не ТИ);*

Б). Если $\theta \ge 1$, то не существует $G_k^{(2)}$-периодической меры Гиббса.

Замечание 7. *Заметим, что для модели НС-Блюма-Капеля, когда значения спина были конечными, существовали ТИМГ и $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса в случае $\theta \ge 1$. Но в этой теореме для $\theta \ge 1$ ТИМГ и $G_k^{(2)}$-периодической меры Гиббса не существует, то есть она исчезает.*

В третьем параграфе четвертой главы рассматривается модель НС-Блюма-Капеля в случае счетного графа типа «обобщенный жезл» задающего возможные попарные взаимодействия спинов. Найдено точное значение параметра, для которого трансляционно-инвариантная и периодическая градиентная меры Гиббса не являются единственной.

Четвертый параграф четвертой главы посвящен градиентным мерам Гиббса (ГМГ) SOS-модели со счетным множеством значений спина и альтернативным магнетизмом на деревьях Кэли порядка $k \ge 2$. Используя аргумент Кульске-Шрайвера, основанный на уравнениях граничного закона, дается несколько q-периодических трансляционно-инвариантных ГМГ для $q = 2,3,4$.

Для $\sigma : x \in V \mapsto \sigma(x) \in \mathbb{Z}$ рассмотрим гамильтониан модели SOS с альтернативным магнетизмом, т.е.

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle, x,y \in V;} \alpha\left(|\sigma(x)-\sigma(y)|\right) |\sigma(x)-\sigma(y)|, \tag{28}$$

где $J \in \mathbb{R}$ и

$$\alpha(|m|) = \begin{cases} 1, \text{ если } m \in 2\mathbb{Z}, \\ -1, \text{ если } m \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases}$$

Рассмотрим эту модель на счетном графе типа «петля».

Теорема 8. *Пусть $k \ge 2$, $\theta_c = \dfrac{2(k+1)}{k-1}$, $\theta_{cr} = \dfrac{k+2}{k-1}$. Тогда для модели SOS с альтернативным магнетизмом в счетном графе типа «петля»:*

1. Число $\nu_2(k,\theta)$ 2-периодические по высоте ГМГ задаются следующей формулой

$$\nu_2(k,\theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } \theta \le \theta_c, \\ 3, \text{ если } \theta > \theta_c. \end{cases}$$

где $\theta = \exp(J\beta)$.

2. Число $\nu_3(k,\theta)$ 3-периодические по высоте ГМГ задаются следующей формулой

$$\nu_3(k,\theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } \theta < \theta_{c,1}, \\ 3, \text{ если } \theta = \theta_{c,1}, \theta_{cr}, \\ 5, \text{ если } \theta \in (\theta_{c,1}, +\infty) \setminus \{\theta_{cr}\}, \end{cases}$$

где $\theta_{c,1}$ такое, что $\theta_{cr} > \theta_{c,1}$.

3. Число $\nu_4(k,\theta)$ 4-периодические по высоте ГМГ (которые не являются 2- и 3-периодическими) задаются следующей формулой

$$\nu_4(2,\theta)=\begin{cases}0, \text{ если } \theta\le 2,\\ 5, \text{ если } \theta\in(2,\theta_c^{(3)}),\\ 6, \text{ если } \theta=\theta_c^{(3)},\\ 8, \text{ если } \theta>\theta_c^{(3)},\end{cases}$$

где

$$\theta_c^{(3)}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{54+6\sqrt{33}}+\frac{8}{\sqrt[3]{54+6\sqrt{33}}}+2\approx 6.766.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена определению существования предельных мер Гиббса для моделей Изинга, Поттса, SOS и Блюма-Капеля с конечным или конечным числом значений спина в счетных графах, изучению структуры такого множества мер и применение некоторых мер Гиббса к биологии.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. Найдены новые основные состояния для модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.

2. Изучены трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для шаровых моделей Изинга и обобщенных моделей Поттса на дереве Кэли и доказано существование континуальных мер Гиббса для этих моделей. Стоит отметить, что H_A – периодические меры Гиббса, найденные для этих моделей, являются новым явлением, поскольку для ранее изученных моделей таких периодических мер Гиббса не существовало.

3. Определены точные значения параметров, при которых трансляционно-инвариантная и периодическая мера Гиббса не единственна для моделей НС-Блюма-Капеля в некоторых типах конечных графов на дереве Кэли и найдены условия крайности для этих мер.

4. Найдены условия существования трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля молекулы ДНК на дереве Кэли и изучено применение этих мер в биологии.

5. Получено полное описание градиентных мер Гиббса для моделей НС-Блюма-Капеля и SOS с альтернативным магнетизмом в некоторых типах счетных графов на дереве Кэли.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

KHATAMOV NOSIRJON MUYDINOVICH

GIBBS MEASURES FOR BIOLOGICAL AND PHYSICAL SYSTEMS ON COUNTABLE GRAPHS

01.01.01 – Mathematical analysis

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT - 2023

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the of Ministers of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2023.3.DSc/FM225

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Ganikhodjaev Nasir Nabievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department
Official opponents:	**Kudaybergenov Karimbergen Kadyrbergenovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher
	Temir Seyit PhD, professor
	Botirov Golibjon Isroilovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher
Leading organization:	**National University of Uzbekistan**

Defense will take place 16 January 2024 at 16:00 at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (Address: University str., Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40. e-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz)

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 175) (Address: University str., Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on 22 December 2023 year.
(Mailing report № 2 on 22 December 2023 year).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

U.U. Jamilov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. It is known that the theory of Gibbs measures underlies scientific and practical research aimed at describing the thermodynamic states of models of statistical mechanics and biological systems. Gibbs measures are especially important for explaining the theory of phase transitions of systems consisting of interacting particles. Gibbs measure theory is such a direction at the intersection of statistical physics and measure theory that it can be considered as a bridge connecting theoretical and applied mathematics. Although the application of the concept of the Gibbs measure is associated with the American scientist J. Gibbs, the merits of R.L. should be noted. Dobrushina, O.E. Lanford and D. Ruel are incomparable in the development and popularization of this theory. This concept, originally introduced as the law of distribution of systems in thermal equilibrium with the environment at a constant temperature, today finds its application in biology, genetics, economics and many other fields of science.

The aim of the research work is to study the structure of the set of Gibbs limit measures for the Ising, Potts, SOS and Blume-Capel models with a finite or countable number of spin values and to apply these measures to biology.

The tasks of research work:

construction of new ground states for the Potts model with scattered competing interactions on a second-order Cayley tree;

description of translation-invariant and periodic Gibbs measures for spherical Ising models and generalized Potts models on the Cayley tree;

construction of translation-invariant and periodic Gibbs measures for the Ising and HC-Blume-Capel models on the Cayley tree;

the existence of translation-invariant Gibbs measures for the DNA molecule of the HC-Blume-Capel model on the Cayley tree and the application of these measures in biology;

description of the set of gradient Gibbs measures for the HC-Blume-Capel and SOS models with alternative magnetism determined by the homeomorphism of the Cayley tree to some type of countable graphs;

The object of the research work are Generalized Potts, Ising, HC-Blume-Capel and SOS models of alternative magnetism on the Cayley tree.

Scientific novelty of the research work is as follows:

new ground states were constructed for the Potts model with scattered competing interactions on a second-order Cayley tree;

the existence of translation-invariant Gibbs measures for the spherical Ising model and the generalized Potts model in the Cayley tree is shown and the exact value of the parameter ensuring the existence of the phase transition is found;

the exact values of the parameters are determined for which the translation-invariant and periodic Gibbs measure is not unique for the Ising and HC-Blume-Capel models in some types of finite graphs defined by a homeomorphism on the Cayley tree;

conditions for the existence of translation-invariant Gibbs measures for HC-Blume-Capel models of a DNA molecule on a Cayley tree were found and the application of these measures in biology was studied;

a complete description of the Gibbs gradient measures is obtained for the HC-Blume-Capel and SOS models with alternative magnetism in some types of countable graphs defined by a homeomorphism on the Cayley tree;

Summary of the dissertation. The dissertation is devoted to the study of the structure of the set of Gibbs limit measures for the Ising, Potts, SOS and Blume-Capel models with a finite or countable number of spin values and the application of these measures in biology.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis have been used in the following research projects:

the method of proving the existence of translation-invariant Gibbs measures corresponding to the Ising model and the generalized Potts model on the Cayley tree was used in the foreign grant project "Finite dynamics of dimensional orthogonality preserving cubic stochastic operators" to present phase diagrams of the state of the Potts model on the Bethe lattice (Handbook of the International Islamic University dated 21 November 2023, Malaysia). The application of the scientific result made it possible to accurately calculate the critical temperature at which the phase transition occurs for the Potts model;

from the non-uniqueness of translation-invariant and periodic Gibbs measures for HC-Blume-Capel models, defined by the homeomorphism of the Cayley tree to some finite graphs, were used in the research of the foreign project "Description of p-adic Gibbs measures of lattice models" to study real and p-adic Gibbs measures for several models on non-amenable graphs (American University of the Middle East, reference dated November 20, 2023, Kuwait). The application of the scientific result made it possible to study the possibility of obtaining information about the phases of the corresponding physical system;

methods for constructing ground states for the Potts model with scattered competing interactions on a Cayley tree were used in the fundamental project YOFA-Ftex-2018-78 "Dynamical and thermodynamic systems in non-amenable graphs", completed in 2018-2019. at the Institute V.I. Romanovsky, when studying the basic states of the λ-model (Certificate No. 2/459 of the Institute of Mathematics dated October 25, 2023.). The application of the scientific result made it possible to prove the existence of periodic and weakly periodic ground states of the λ-model on the Cayley tree;

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 190 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. Хатамов Н.М. Новые классы основных состояний для модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. // Теор. и мат. физика, 2014. Том 180, -№ 1. -С. 827-834. (3. Scopus. IF=0.47)
2. Хатамов Н.М. Не единственность меры Гиббса для шаровой модели Изинга с радиусом взаимодействия два. // Теор. и мат. физика, 2014. Том 180, -№ 3. -С. 318-328. (3. Scopus. IF=0.47)
3. Хатамов Н.М., Мадгозиев Г.Т. Меры Гиббса для обобщенной модели Поттса с радиусом взаимодействия два на дереве Кэли. // Теор. и мат. физика, 2015. Том 183, -№ 3. -С. 450-459. (3. Scopus. IF=0.48)
4. Khatamov N.M., Khakimov R.M. Translation-invariant Gibbs measures for the Blume-Capel model on a Cayley tree. // Jour. Math. Phys. Anal. Geom, 2019, 15(2), -p.239-255. (3. Scopus. IF=0.29)
5. Хатамов Н.М. Система функциональных уравнений для модели Блюма-Капеля на дереве Кэли. // Вестник НамГУ, – 2019. № 9. –С. 18-21 (01.00.00; № 14).
6. Хатамов Н.М. Крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Блюма-Капеля в случае «жезл» на дереве Кэли.// Укр. матем. журнал, 2020, Том 72, -№ 4. -С. 540-556. (3. Scopus. IF=0.32)
7. Хатамов Н.М. Структуры Холлидея в модели Блюма-Капеля молекулы ДНК. // Теор. и мат. физика, 2021. Том 206, -№ 3. -С. 439-447. (3. Scopus. IF=0.32)
8. Khatamov N.M. Holliday junctions for the HC (cycle) Blume-Capel model of DNA. // UzMJ, 2021, -№ 1, p. 87-97. (01.00.00; №6).
9. Khatamov N.M. Holliday junctions in the HC Blume–Capel model in «one case» on DNA. // Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 2021, 12(5), p. 563-568 (Scopus. SJR=0.22)
10. Хатамов Н.М. Экстремальность мер Гиббса для модели НС-Блюма–Капеля на дереве Кэли. // Матем. заметки, 2022. Том 111, -№ 5. -С. 762-777. (2. Scopus. IF=0.49)
11. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А., Хатамов Н.М. Меры Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля со счетным числом состояний на дереве Кэли. // Теор. и мат. физика, 2022. Том 211, -№ 3. -С. 491-501. (3. Scopus. IF=0.32)
12. Хатамов Н.М. Новые меры Гиббса для модели Изинга молекулы ДНК на дереве Кэли. // Бюллетень Института математики, – 2022, № 5, –С. 85 – 90. (01.00.00; №17).

13. Хатамов Н.М., Нажмиддинов Р.Я. Термодинамика ренатурации ДНК-РНК для модели Изинга с химическим потенциалом. // Вестник НамГУ, – 2022. № 4. –С. 78-85 (01.00.00; № 14).
14. Хатамов Н.М., Эргашев Б.А. Экстремальность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели HC-Блюма-Капеля в случае «цикл» на дереве Кэли. // Вестник НамГУ, – 2022. № 5. –С. 90-100 (01.00.00; № 14).
15. Хатамов Н.М. Экстремальность некоторых мер Гиббса для модели HC-Блюма-Капеля на дереве Кэли. // Вестник УдУ Мат. Мех. Комп. науки, 2022. Том 32, Вып. 2. -С. 256-278. (3. Scopus. IF=0.34)
16. Khatamov N.M. Periodik Gibbs measures and their extremes for the HC-Blume-Capel model in the case of a «wand» on the Cayley tree. // Lob. Jour. of Math., 2022, 43(9), -p.2515-2524. (2. Scopus. IF=0.42)
17. Khatamov N.M. Gradiyent Gibbs measures for the HC-Blume-Capel model with a countable number of states in the case of a «generalized wand» on the Cayley tree. // UzMJ, 2022, -№ 3, p. 62-74. (01.00.00; №6).
18. Ganikhodjaev N.N., Rozikov U.A., Khatamov N.M. Gradiyent Gibbs measures of an SOS model with alternating magnetizm on Cayley tree. // Rep. on Math. Phys., 2023, 92(3), -p.309-322. (2. Scopus. IF=0.31).
19. Khatamov N.M. Gibbs measures for the HC-Blume-Capel model. // UzMJ, 2023, -№ 2, p. 115-123. (01.00.00; №6).

II bo‘lim (Часть II; Part II)

20. Хатамов Н.М. Крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для одной модели на дереве Кэли. // Тез. докл. Респ. научной конф. с участ. ученых из СНГ «Современные методы математической физики и их приложения». – Ташкент, 2015, 15-17 апреля. – С. 83-85.
21. Хатамов Н.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для шаровой модели Изинга с радиусом взаимодействия два. // VII Ферганская конференция «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения». – Наманган, 2015. – С. 349-351.
22. Хатамов Н.М., Шарипов Ф.М. Система функциональных уравнений для обобщенной модели Поттса на дереве Кэли. // Рес. научной конф. с учатием зарубежных ученых «Алгебра, анализ и квантовая вероятность». – Ташкент, 2015, 10-12 сентября. – С. 236-239.
23. Хатамов Н.М., Гафуров А.А., Шарипов Ф.М. Условия согласованности для модели Блюма-Капеля на решетке Бете. // «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Бухара, 2015, 26-27 ноября. – С. 141-143.
24. Хатамов Н.М., Полванов А., Уматиллаев Н. Периодические конфигурации для модели Блюма-Капеля на дереве Кэли. // «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Бухара, 2015, 26-27 ноября. – С. 143-145.

25. Хатамов Н.М. Система функциональных уравнений для модели Блюма-Капеля на дереве Кэли. // Рес. научной конф. с учатием зарубежных ученых «Проблемы современной топологии и ее приложения». – Ташкент, 2016, – С. 195-198.
26. Хатамов Н.М. Существование трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели Блюма-Капеля на решетке Бете. // «Математика и ее современные применения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Андижан, 2016. – С. 257-260.
27. Хатамов Н.М. Изучение трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Блюма-Капеля на дереве Кэли. // «Перспективы реформ, проводимых а системе высшего образования республики Узбекистан». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, ТВОКУ, 2017. – С. 606-608.
28. Хатамов Н.М., Икромджанов А. Функциональные уравнения для модели Блюма-Капеля с внешним магнитным полем на дереве Кэли. // Материалы республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков-2018», Наманган, Узбекистан, 18-19 октября, 2018, –С. 106-108.
29. Хатамов Н.М., Муйдинов Д.Н. Не единственность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Блюма-Капеля в случае «петля» на дереве Кэли. // Материалы республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков-2018», Наманган, Узбекистан, 18-19 октября, 2018, –С. 108-111.
30. Хатамов Н.М., Муйдинов Д.Н. Существование единственной трансляционно-инвариантной меры Гиббса при одной случаи для модели Блюма-Капеля на дереве Кэли. // «Современные проблемы математики и информатики». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Фергана, 2019. – С. 89-92.
31. Хатамов Н.М., Муйдинов Д.Н. Крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для модели Блюма-Капеля на дереве Кэли. // «Управление, оптимизация, и динамические системы». – Андижан, 2019. – С. 108-110.
32. Хатамов Н.М., Нишонбоев Ж.П. Периодическая конфигурация для модели Блюма-Капеля с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. // «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Фергана, 2020. – С. 110-111.
33. Хатамов Н.М., Адашова С.Р. Некрайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для модели Блюма-Капеля на дереве Кэли. // «Современные проблемы математики». Онлайн конф. – Нукус, 20 мая, 2020. – С. 90-93.
34. Хатамов Н.М., Адашова С.Р. Система функциональных уравнений для модели Блюма-Капеля в ДНК на дереве Кэли. // «Современные проблемы стохастического анализа». Тез. докл. науч. конф. – Ташкент, 21-22 сентября, 2020. – С. 243-245.

35. Хатамов Н.М., Нишонбоев Ж.П. Существование единственной трансляционно-инвариантной меры Гиббса для модели Hard-Core Блюма-Капеля в случае «жезл» на дереве Кэли.// «Современные проблемы математики: проблемы и решения». Тез. докл. онлайн науч. конф. – Термиз, 21-23 октября, 2020. – С. 188-190.
36. Хатамов Н.М., Адашова С.Р. Non-uniqueness of the translyation-invariant in a set of DNA for the Blume-Capel model on the Cayley tree. // «Современные проблемы стохастического анализа». Тез. докл. науч. конф. – Ташкент, 20-21 февраля, 2021. – С. 400-403.
37. Хатамов Н.М., Нишонбоев Ж.П. Фазавый переход для модели hard-core Блюма-Капеля в случае «жезл» на дереве Кэли. // «Современные проблемы стохастического анализа». Тез. докл. науч. конф. – Ташкент, 20-21 февраля, 2021. – С. 460-463.
38. Хатамов Н.М., Нажмиддинов Р.Я. Система функциональных уравнений ренатурации ДНК-РНК для модели Изинга с внешним полем. // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа», Бухара, Узбекистан, 4-5 ноября, 2021. – С. 368-369.
39. Хатамов Н.М., Эргашев Б.А. Единственность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля в случае «цикл» на дереве Кэли. // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа», Бухара, Узбекистан, 4-5 ноября, 2021. – С. 370-371.
40. Хатамов Н.М., Ибрагимов И.И. Существование новых трансляционно-инвариантных мер Гиббса в модели Изинга молекулы ДНК на дереве Кэли. // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа», Бухара, Узбекистан, 4-5 ноября, 2021. – С. 372-373.
41. Khatamov N.M., Khakimov R.M., Makhammadaliev M.T. The HC model with countable set of spin values on the Cayley tree. // Programme of the International Conferens «Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies-al-Khwarizm», November, 15-17, 2021, Fergana-2021. p. 239-240.
42. Хатамов Н.М., Эркабоева З.Ш., Адашев К.О. Трансляционно-инвариантные градиентные меры Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля в случае «жезл» на дереве Кэли. // Сборник материалов Республиканской научной конференции «Теоретические основы и прикладные задачи современной математики», Андижан, Узбекистан, 28 марта, 2022, –С. 143-146.
43. Хатамов Н.М., Эргашев Б.А., Мирзаакбаров А.М. Некрайность единственной трансляционно-инвариантной меры Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля в случае «цикл» на дереве Кэли. // Материалы

республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков-2022», Наманган, Узбекистан, 13-14 мая, 2022, –С. 91-93.
44. Хатамов Н.М., Ибрагимов И.И., Адашев К.О. Существование новых трансляционно-инвариантных мер Гиббса в модели Блюма-Капеля молекулы ДНК на дереве Кэли. // Материалы республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков-2022», Наманган, Узбекистан, 13-14 мая, 2022, –С. 93-95.
45. Хатамов Н.М., Эркабоева З.Ш. Условия согласованности для модели Блюма-Капеля с химическим потенциалом на дереве Кэли. // Материалы республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков-2022», Наманган, Узбекистан, 13-14 мая, 2022, –С. 95-97.
46. Khatamov N.M., Erkabaeva Z.Sh. Translation-invariant Gibbs measures for the HC Blume-Capel model on a Cayley tree. // International conferense «Limit theorems of probability theory and mathematical statistics», Tashkent, Uzbekistan, Septeber 26-28, 2022, –p. 54-56.
47. Хатамов Н.М., Адашев К.О. С Существование единственной трансляционно-инвариантной меры Гиббса для модели НС Блюма-Капеля в «одном случае» ДНК на дереве Кэли. // Труды международной научной конференции «Статистика и её применения», Наманган, НамИТИ, Узбекистан, 19-20 октября, 2022, –С. 272-276.
48. Хатамов Н.М., Мирзаакбаров А.М. Некрайность единственной трансляционно-инвариантной меры Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля в случае «цикл» на дереве Кэли. // Международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование и актуальные вопросы информационных технологии», Нукус, Узбекистан, 2-3 мая, 2023, –С. 86-88.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida
2023-yil 20-dekabrda tahrirdan o‘tkazildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tobog‘i: 3,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 75/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MChJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.