**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

MATEMATIKA INSTITUTI

YULDASHEVA NARGIZA TAXIRJONOVNA

SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI ARALASH TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN NOLOKAL CHEGARAVIY MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2024 yil

UDK: 517.956.6

Fizika – matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical – mathematical sciences

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

YULDASHEVA NARGIZA TAXIRJONOVNA

SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI ARALASH TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN NOLOKAL CHEGARAVIY MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestasiya komissiyasida B2024.1.PhD/FM1011 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (https://kengash.mathinst.uz) va "ZiyoNet" ta'lim axborot tarmog'ida (http://www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Ruziyev Menglibay Xoltojibayevich** fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
Rasmiy opponentlar:	**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Ergashev Tuxtasin Gulamjanovich fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Farg'ona davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025-yil 7 yanvar kuni soat 17:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+998 71) 207 91 40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (194-raqam bilan ro'yhatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+998 71) 207 91 40.

Dissertatsiya avtoreferati 2024-yil 20 dekabr kuni tarqatildi.
(2024-yil 20 dekabrdagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A. Roziqov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., akademik

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A.A. Azamov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash huzuridagi Ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati.

Zamonaviy dunyoda ilm-fan va amaliy tadqiqotlarning jadal rivojlanayotgan ko‘plab sohalari butun va kasr tartibli hosilali aralash tipdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarni o‘rganishga olib keladi. Bunday masalalar ko‘pgina biologik, fizik va kimyoviy jarayonlarning tabiiy matematik modellari bo‘lib, gidrodinamika, gaz dinamikasi, sirtlarning cheksiz kichik egilish nazariyasi, aerodinamika, matematik biologiya va fanning boshqa turli sohalarida qo‘llaniladi. Atrof-muhit jarayonlarining matematik modellarini o‘rganish aralash tipdagi tenglamalarning nazariy asosini ifodalaydi.

Bugungi kunda dunyoning ko‘plab ilmiy maktablari nolokal chegaraviy masalalarni, jumladan, chegaraviy shartlarida integral va differentsial operatori qatnashgan chegaraviy masalalarni hal qilish yo‘nalishlarini keng ishlab chiqmoqda. Butun va kasr tartibli hosilali aralash tipdagi tenglamalar uchun o‘rganiladigan lokal va nolokal masalalar murakkab tuzilishga ega bo‘lgan ob’yektlar, neft havzalari, simlardagi elektr tebranishlari, yer osti suvlaridagi issiqlik va massa almashinuvini matematik modellashtirishda katta ahamiyatga ega bo‘lgani uchun filtrlash, g‘ovakli muhit bilan o‘ralgan kanalda suyuqlik harakati va boshqa hodisalar, bunday muammolarni o‘rganish tobora dolzarb bo‘lib bormoqda. Kasr tartibli hosilali differensial tenglamalar stoxastik uzatishning fizik jarayonlarini tavsiflash uchun, shuningdek, polimer materiallarning deformatsiyaga chidamlilik xususiyatlarini o‘rganish uchun ishlatiladi. Kasr tartibli hosilali differensial tenglamalar diffuziya, gidrodinamika, klassik mexanika va issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalarida paydo bo‘ladi.

Respublikamizda ilmiy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan fundamental fanlarga katta e’tibor berilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. Jumladan, aralash tipdagi singulyar koeffitsiyentli tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalarni o‘rganish hamda ularni yechishning samarali usullarini topishga katta e’tibor beriladi. Matematikaning asosiy yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy tadqiqotlar olib borish V.I.Romanovskiy nomidagi matematika institutining asosiy vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilangan[1]. Qaror ijrosini ta’minlash maqsadida, butun va kasr tartibli xususiy hosilali aralash tipdagi tenglamalar nazariyasini rivojlantirish muhim ahamiyat ega.

Mazkur dissertatsiya ishining mavzusi va tadqiqoti O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi, 2017-yil 17-fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-son “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2018-yil 27-apreldagi PQ-

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori.

3682-son “Innovatsion gʻoyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi qarorlarda, shuningdek, fundamental fanga oid boshqa me’yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yoʻnalishlariga bogʻliqligi. Mazkur dissertatsiya Respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yoʻnalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning oʻrganilganlik darajasi.

Aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalarni oʻrganish xususiy hosilali differentsial tenglamalar nazariyasining muhim boʻlimlaridan biridir. Aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni oʻrganish S.A. Chapligin, F. Trikomi, S. Gellerstedt va F.I. Franklning ishlarida boshlangan. Shvet olimi S. Gellerstedt tomonidan koʻrib chiqilgan chegaraviy masalalar gaz dinamikasi va aerodinamika sohasida zaruriy qoʻllanmalarga ega. Rossiyalik olimlar V.I. Jegalov va A.M. Naxushev birinchi boʻlib elliptik-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun siljishli chegaraviy masalalar oʻrganishgan. A.V. Bitsadze va A.A. Samarskiy xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasini rivojlantirishga, elliptik tenglama uchun yangi masalalarni shakllantirish va oʻrganishga katta hissa qoʻshishdi.

Keyinchalik elliptik-giperbolik va parabolik-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar S.P. Pulkin, V.F. Volkodavov, M.S. Salahitdinov, T.D. Joʻrayev, M.M. Smirnov, T.Sh. Kalmenov, E.I. Moiseev, A.P. Soldatov, K.B. Sabitov, A.B. Psxu, A.A. Polosin, O.A. Repin, M.X. Abregov, S.K. Kumyukova, V.A. Naxusheva, Z.A. Naxusheva, M. Mirsaburov, M.A. Sadibekov, A.K. Urinov, A. Xasanov, A.S. Berdishev, B.I. Islomov, M.X. Ruziyev, T.G. Ergashev, Sh.T. Karimov, E.T. Karimov va ularning shogirdlarining ishlarida oʻrganildi.

Keyingi yillarda respublikada ham xorijda ham butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasi jadal rivojlanmoqda. Gellerstedt tenglamasi uchun A.A. Polosin tomonidan aralash sohaning giperbolik qismida chegaraviy shartlar chap chegaraviy xarakteristika boʻlagida va buzilish chizigʻiga parallel boʻlgan toʻgʻri chiziq kesmasida berilgan chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan. M. Mirsaburov va uning shogirdlari ishlarida aralash tipdagi tenglamalar uchun Bitsadze-Samarskiy shartiga oʻxshash va buzilish chizigʻidagi kesmada Frankl shartiga oʻxshash shartlar bilan chegaraviy masalalar oʻrganilgan.

Hozirgi vaqtda Sh.A. Alimov, R.R. Ashurov, S.R. Umarov, M. Yamamoto, A. Cabada, Yu. Luchko, Z. Li, Y. Liu va boshqa matematiklar kasrli tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish bilan faol shugʻullanib kelishyapti. Chegaralangan va chegaralanmagan sohalarda kasr tartibli xususiy hosilali aralash tipdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalar S.X. Gekkiyeva, A.A. Kilbas va O.A. Repin, O.A. Repin va

A.V. Tarasenko, O.A. Repin, C.A. Sayganova, M.X. Ruziyev, R.T. Zunnunov ishlarida o‘rganilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan Oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi.

Dissertatsiya tadqiqoti V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining F-FA-2021-424 “Butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish” mavzusidagi fundamental loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi quyidagilardan iborat**:**

aralash elliptik-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun Bitsadze-Samarskiy sharti va buzilish chizig‘ida Frankl shartining analogi berilgan chegaraviy masalalarni tadqiq qilish hamda kasr tartibli diffuziya tenglamasi va buziluvchan giperbolik tenglama uchun nolokal chegaraviy masalalarni yechish.

Tadqiqotning vazifalari:

aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy va ichki xarakteristikalarda siljishli chegaraviy masalalarni qo‘yish va o‘rganish;

umumlashgan Trikomi tenglamasi uchun ichki xarakteristikada va buzilish chizig‘ida Frankl shartining analogi berilgan shartlar bilan chegaraviy masalani tadqiq qilish;

chegaralanmagan sohalarda singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlash;

kasr tartibli diffuziya tenglamasini o‘z ichiga olgan differensial tenglamalar uchun nolokal masala yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash;

kasr tartibli diffuziya tenglamasi va buziluvchan giperbolik tenglamalar uchun siljishli chegaraviy masalalarni tadqiq qilish.

Tadqiqotning obyekti singulyar koeffitsiyentli butun va kasr tartibli xususiy hosilali aralash tipdagi differensial tenglamalar.

Tadqiqotning predmeti singulyar koeffitsiyentli butun va kasr tartibli xususiy hosilali aralash tipdagi differensial tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalardan iborat.

Tadqiqotning usullari. Ushbu dissertatsiyada ekstremum prinsipi, energiya integrali, singulyar integral tenglamalar va differensial tenglamalarni yechish usullari qo‘llanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

chegaralanmagan sohada singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun chegarada va ichki xarakteristikalarda siljishli shart bilan chegaraviy masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan;

umumlashgan Trikomi tenglamasi uchun ichki xarakteristikada va buzilish chizig‘ida Frankl sharti analogi bilan berilgan masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan;

elliptik qismi yuqori yarim tekislikdan iborat bo‘lgan sohada singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

chegaralangan sohada kasr tartibli diffuziya tenglamasi va singulyar koeffitsiyentli buziluvchan giperbolik tipidagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy masalasi tipidagi chegaraviy masala yechimining mavjudlik va yagonaligi isbotlangan;

kasr tartibli diffuziya tenglamasini o‘z ichiga olgan differensial tenglamalar uchun chegaraviy sharti umumlashgan kasr tartibli integro-differentsiallash operatorlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat nolokal chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

Dissertatsiyada aralash tipdagi tenglamalar va kasr tartibli diffuziya tenglamasi va buziluvchan giperbolik tenglama uchun chegaraviy masalalarni o‘rganish imkonini beruvchi asosiy fundamental nazariy natijalar olindi. Bu natijalar katta amaliy ahamiyatga ega, masalan, ular fraktal tuzilishga ega bo‘lgan muhitda turli jarayonlarni tavsiflovchi va tadbiqlari bilan bog‘liq muhim amaliy muammolarni hal qiladigan matematik modellar sifatida ishlatilishi mumkin;

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiyada olingan natijalarning ishonchliligi matematikada qabul qilingan tahlil usullari, butun va kasr hosilali aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning umumiy nazariyasi hamda teoremalarning qat’iy va to‘liq isbotlari bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Ishning ilmiy ahamiyati shundan iboratki, olingan natijalar butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida xizmat qilishi mumkin.

Dissertatsiya ishi natijalarining amaliy ahamiyati shundan iboratki, uning natijalari texnik, fizik, biologik va gaz-dinamik jarayonlarni matematik modellashtirishda qo‘llanilishi mumkin.

Tadqiqot ishlarning joriy qilinishi. Aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalar yuzasidan dissertatsiya ishida olingan natijalar quyidagi ilmiy loyihalarda amaliyotga tatbiq etildi:

chegaralanmagan sohada singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun chegarada va ichki xarakteristikalarda siljishli shart bilan chegaraviy masalani yechilish usulidan NIOKTR 122041800029-5-raqamli “Asosiy va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar va boshqarish masalalari va ularning taqsimlangan parametrli sistemalarni tadqiq qilishga tadbiqlari” mavzusidagi xorijiy loyihada aralash va giperbolik tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalarni yechishda qo‘llanilgan (Kabardin-Balkar ilmiy markazining Amaliy matematika va avtomatlashtirish boshqarmasining 2024 yil 11 oktyabrdagi 01-13/49-sonli ma'lumotnoma, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalar qo‘llanilishi aralash giperbolik-parabolik tipdagi tenglamalar uchun Bitsadze-Samarskiy masalasi tipidagi masalalarni tadqiq qilish va birinchi tur buziladigan giperbolik tenglamalar va ikkinchi tartibli aralash-giperbolik tenglamalar uchun siljishli masalalarni samarali yechish imkonini bergan;

kasr tartibli diffuziya va buziladigan to‘lqin tenglamalari uchun nolokal masalalarni yechish usullaridan AAAA-A21-121011290003-0 raqamli “Quyosh va litosfera ta’siridagi yaqin kosmos va geosferalar tizimidagi fizik jarayonlar” mavzusidagi xorijiy loyihada tuproq-atmosfera sistemasida radon ko‘chish jarayonini modellashtirishda foydalanilgan (Uzoq Sharq bo‘limi Kosmo-fizik tadqiqotlar va radioto‘lqinlarning tarqalishi institutining, 2024 yil 21 oktyabrdagi

406-son ma'lumotnoma, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalar qo‘llanilishi kasr tartibli diffuziya tenglamasi uchun masalaning sonli yechimlari olingan hamda ularning vizualizatsiyasini amalga oshirish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining “Matematik fizikaning zamonaviy muammolari” ilmiy seminarida, Termiz davlat universitetining “Matematik tahlil” va “Algebra va geometriya” kafedralarning “Matematikaning zamonaviy muammolari” qo‘shma ilmiy seminarida, O‘zbekiston Milliy universiteti va M.V.Lomonosov nomidagi Moskva davlat universitetining Toshkent shahridagi filialining “Differensial tenglamalar va matematik fizikaning zamonaviy muammolari” qo‘shma ilmiy-amaliy seminarida, shuningdek, 13 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, shu jumladan 8 ta xalqaro va 5 ta respublika miqyosida muhokama qilindi.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha 20 ta ilmiy ishlar chop etilgan bo‘lib, shulardan, 7 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasi tomonidan falsafa doktori dissertatsiyasining asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan ilmiy nashrlarida, shu jumladan, 3 tasi xorijiy jurnallarda va 4 tasi respublika jurnallarida chop etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiya hajmi 96 bet.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Tadqiqotlarning dolzarbligi va zarurati kirish qismida asoslangan, tadqiqotning Respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi “Singular koeffitsiyentli aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalar” deb nomlangan bo‘lib, unda aralash sohaning elliptik qismi birinchi chorak bo‘lgan umumlashgan Trikomi tenglamasi uchun buzilish chizig‘ida Frankl sharti analogi va Bitsadze–Samarskiy shartli nolokal chegaraviy masalaning korrektligi o‘rganilgan. Aralash tipdagi tenglamalarning bir sinfi uchun ichki xarakteristikasida Gellerstedt sharti va buzilish chizig‘idagi kesmada siljishli shartli chegaraviy masalaning bir qiymatli yechimining mavjudligi isbotlangan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida maxsus funksiyalar, Riman-Liuvill ma'nosida kasr integro-differensiallash operatorining ta'riflari, shuningdek, yadrosi Gauss gipergeometrik funktsiyasi bo‘lgan umumlashgan kasr tartibli integro-differentsiallash operatoriga oid ma’lumotlar keltirilgan.

Ikkinchi paragrafda quyidagi tenglama uchun

$$\operatorname{sign} y\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

bu yerda $m > 0$, $-m/2 < \beta_0 < 1$, nolokal masala yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

$D = D^+ \cup D^- \cup I$ $z = x + iy$ kompleks tekislikning sohasi bo‘lib, bu yerda D^+ – tekislikning birinchi choragi va D^- – (1) tenglamaning $O(0,0)$, $B(1,0)$ nuqtalaridan chiquvchi va $C\left(1/2, -\left((m+2)/4\right)^{2/(m+2)}\right)$ nuqtada kesishuvchi OC va BC xarakteristikalari hamda $y = 0$ o‘qning OB kesmasi bilan chegaralangan soha, $I = \{(x,y): 0 < x < 1, y = 0\}$.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $I_0 = \{(x,y): 0 < y < \infty, x = 0\}$, $I_1 = \{(x,y): 1 < x < \infty, y = 0\}$, C_0 va C_1 mos ravishda OC va BC xarakteristikalar bilan $E(c,0)$, nuqtadan chiquvchi xarakteristikalar kesishish nuqtalarini, bu yerda $c \in I$ – ixtiyoriy tayin son.

$q(x) \in C^1[c,1]$ – funksiya $[c,1]$ nuqtalar to‘plamini $[0,c]$, nuqtalar to‘plamiga akslantiruvchi diffeomofizm bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin $q'(x) < 0$, $q(c) = c$, $q(1) = 0$. Misol sifatida quyidagi chiziqli funksiyani olishimiz mumkin $q(x) = k(1-x)$, bu yerda $k = c/(1-c)$.

EG$_1$ masala. D sohada ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D})$, bu yerda $\overline{D} = \overline{D^-} \cup D^+ \cup \overline{I_0} \cup \overline{I_1}$;

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ bo‘lib, (1) tenglamani D^+ sohada qanoatlantirsin;

3) $u(x,y)$ funksiya D^- sohada R_1 sinfga tegishli umumlashgan yechimi bo‘lsin;

4) ushbu tengliklar bajarilsin

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0,\ R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2},\ x > 0,\ y > 0;$$

5) $u(x,y)$ chegaraviy shartlarni

$$u(0,y) = \varphi(y),\quad y \ge 0,$$

$$u(x,0) = \tau_1(x),\quad x \in \overline{I_1},$$

$$x^{\beta} D_{0,x}^{1-\beta} u[\theta(x)] = \delta(x)(x-c)^{\beta} D_{c,x}^{1-\beta} u[\theta^{\star}(x)] + \psi(x),\quad c < x < 1,$$

$$u(q(x),0) = \mu u(x,0) + f(x),\quad c \le x \le 1,$$

va ulash shartini

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y},\quad x \in I \setminus \{c\},$$

qanoatlantirsin. Bu limitlar $x = 0$, $x = 1$, $x = c$ nuqtalarda $1 - 2\beta$ dan kichik tartibda maxsuslikka ega bo‘lishi mumkin, bu yerda $\beta = (m + 2\beta_0)/\left(2(m+2)\right)$. Yuqoridagi shartlarda berilgan funksiyalar quyidagicha $f(x) \in C[c,1] \cap C^{1,\delta_1}(c,1)$,

$f(1)=0$, $f(c)=0$, $\mu=\text{const}$, $\delta(x)$, $\psi(x)\in C[c,1]\cap C^{1,\delta_2}(c,1)$, $\tau_1(x)$ –funksiya $\tau_1(x)\in C(\overline{I_1})$ bo‘lib, $x=1$ nuqta atrofida $\tau_1(x)=(1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x)\in C(\overline{I_1})$ ko‘rinishida ifodalanadi va yetarlicha katta x lar uchun $|\tau_1(x)|\le M/x^{\varepsilon}$ tengsizlikni qanoatlantiradi, bu yerda ε, M – musbat o‘zgarmas sonlar va ixtiyoriy $[1,N]$, $N>1$ kesmada Gyolder shartini qanoatlantirsin. $\varphi(y)$ funksiya $\varphi(y)\in C(\overline{I_0})$, $y^{(3m+2\beta_0)/4}\varphi(y)\in L(0,\infty)$ bo‘lib, ixtiyoriy $[0,H]$, $H>0$ kesmada Gyolder shartini qanoatlantirib $\varphi(\infty)=0$, $\varphi(0)=0$ bo‘lsin. $D_{0,x}^{1-\beta}$ va $D_{c,x}^{1-\beta}$ operatorlar Riman–Liuvill ma’nosidagi kasr tartibli differensiallash operatorlari. C_0C va EC_1 xarakteristikalar bilan $(x_0,0)$, $x_0\in(c,1)$ nuqtadan chiquvchi xarakteristikaning kesishish nuqtalarini mos ravishda quyidagicha belgilaymiz:

$$\theta(x_0)=\left(x_0/2,-\left(\left((m+2)x_0\right)/4\right)^{2/(m+2)}\right),$$

$$\theta^{\star}(x_0)=\left((c+x_0)/2,-\left((m+2)(x_0-c)/4\right)^{2/(m+2)}\right).$$

1-teorema. Ushbu shartlar $0<\mu<1$, $\delta(x)\le 0$ bajarilgan bo‘lsin. U holda, agar EG_1 masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u yagonadir.

2-teorema. $q(x)=k(1-x)$, $0<\mu<1$, $\delta(x)\le 0$, $\beta_0>-(m-1)/3$, $\mu k^{1/2-3\alpha}\left(1+2\sin(\beta\pi)\omega(c)\right)<1$ bo‘lsin, bu yerda $\alpha=(1-2\beta)/4$, $k=c/(1-c)$, $\omega(c)=1/(1-\delta(c))$. U holda EG_1 masalaning yechimi mavjud.

Bu teoremani isbotlash uchun EG_1 masala quyidagi noma’lum $\tau(x)$ qatnashgan integral tenglamani yechishga olib kelinadi:

$$\tau(x)-\lambda\int_c^1\left(\frac{x-c}{t-c}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}=g(x),\ x\in(c,1), \tag{2}$$

bu yerda

$$g(x)=\mu k\lambda\left(1+2\sin(\beta\pi)\omega(x)\right)\int_c^1\left(\frac{x-c}{c-q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)dt}{x-q(t)}+R[\tau]+F_1(x), \tag{3}$$

$R[\tau]$ – regulyar operator, $F_1(x)$ – berilgan funksiyalar orqali ifodalangan,

$$\lambda=\frac{\cos(\beta\pi)}{\pi\left(1+\sin(\beta\pi)\right)}.$$

(3) tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi operator regulyar operator emas, chunki, integral ostidagi ifoda $x=c$, $t=c$ nuqtada birinchi tartibli maxsuslikka ega, shuning uchun bu qo‘shiluvchi ajratib yozilgan.

(2) integral tenglama yechimini $x=1$ nuqtada chegaralangan, $x=c$ nuqtada esa $1-2\beta$ dan kichik tartibda maxsuslikka ega bo‘lishi mumkin bo‘lgan $(c,1)$ oraliqda Gyolder sinfiga tegishli qilib izlaymiz. Bu sinfda (2) tenglamaning indeksi nolga teng. (2) tenglamaga Karleman–Vekua metodini qo‘llab uning yechimini quyidagi ko‘rinishda olamiz

$$\tau(x)=\cos^2(\pi\alpha)g(x)+\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}\int_c^1\left(\frac{(1-x)(x-c)^3}{(1-t)(t-c)^3}\right)^{\alpha}\frac{g(t)dt}{t-x},\ x\in(c,1). \tag{4}$$

Endi (3) dagi $g(x)$ ni (4) ga qo‘ysak quyidagini hosil qilishimiz mumkin

$$\rho(\xi)=\int_0^{\infty}N(\xi-t)\rho(t)dt+R_4[\rho(\xi)]+F_3(\xi),\ \xi\in(0,\infty), \tag{5}$$

bu yerda $\rho(\xi)=\tau(c+(1-c)e^{-\xi})e^{(3\alpha-1/2)\xi}$, $R_4[\rho(\xi)]$–regulyar operator, $F_3(\xi)$– berilgan funksiyalar orqali ifodalangan, $N(\xi)=\dfrac{\lambda\mu k^{1-3\alpha}\left(1+2\sin(\beta\pi)\omega(c)\right)\cos(\alpha\pi)}{ke^{\frac{\xi}{2}}+e^{-\frac{\xi}{2}}}$.

$N(\xi)\in C(0,\infty)$, $F_3(\xi)\in H_\theta(0,\infty)$ funksiyalar cheksizlikda eksponential tartibda kamayadi, bundan $N(\xi),\ F_3(\xi)\in L_2\cap H_\theta$.

(5) tenglama Viner–Hopf integral tenglamasi va Furye almashtirishi orqali Rimanning chegaraviy masalasiga keltiriladi.

O‘rama tipidagi integral tenglamalar uchun Fredgolm teoremalari faqat bitta xususiy holda, ya’ni tenglamaning indeksi nolga teng bo‘lganda o‘rinli. (5) tenglamaning indeksi nolga tengligi ko‘rsatilgan. Bundan, (5) tenglama bir qiymatli yechilishi masala yechimining yagonaligidankelib chiqadigan Fredgolm ikkinchi tur integral tenglamasiga bir qiymatli ravishda keltiriladi.

Uchinchi paragrafda EG_2 masalaning korrektligini o‘rganilgan bo‘lib, bu yerda ichki xarakteristika EC_0 Gellerstedt shartidan ozod qilinadi va bu yetishmayotgan shart ekvivalent ravishda buzilish chizig‘i kesmasidagi Frankl shartiga o‘xshash nolokal shart bilan almashtiriladi.

EG_2 masala. D sohada ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x,y)\in C(\overline{D})$, bu yerda $\overline{D}=\overline{D^-}\cup D^+\cup\overline{I_0}\cup\overline{I_1}$;

2) $u(x,y)\in C^2(D^+)$ bo‘lib, (1) tenglamani D^+ sohada qanoatlantirsin;

3) $u(x,y)$ funksiya D^- sohada R_1 sinfga tegishli umumlashgan yechim bo‘lsin;

4) ushbu tengliklar bajarilsin

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0,\ R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2},\ x>0,\ y>0;$$

5) $u(x,y)$ chegaraviy shartlarni

$$u(0,y)=\varphi(y),\quad y\ge 0,$$
$$u(x,0)=\tau_1(x),\quad x\in\overline{I_1},$$
$$u(x,y)|_{EC_1}=\psi(x),\quad c\le x\le\frac{c+1}{2},$$
$$u(q(x),0)=\mu u(x,0)+f(x),\quad c\le x\le 1,$$

va ulash shartini

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad x\in I\setminus\{c\},$$

qanoatlantirsin. Bu limitlar $x=0$, $x=1$, $x=c$ nuqtalarda $1-2\beta$ dan kichik tartibda maxsuslikka ega bo‘lishi mumkin, bu yerda $\beta=(m+2\beta_0)/\left(2(m+2)\right)$. Yuqoridagi shartlarda berilgan $\varphi(y)$, $\tau_1(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ funksiyalar quyidagicha:

$\varphi(y)$ funksiya $\varphi(y)\in C(\overline{I}_0)$, $y^{(3m+2\beta_0)/4}\varphi(y)\in L(0,\infty)$ bo‘lib, ixtiyoriy $[0,H]$, $H>0$ kesmada Gyolder shartini qanoatlantirib $\varphi(\infty)=0$, $\varphi(0)=0$ bo‘lsin;

$\tau_1(x)$ –funksiya $\tau_1(x)\in C(\overline{I}_1)$ bo‘lib, $x=1$ nuqtada atrofida $\tau_1(x)=(1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x)\in C(\overline{I}_1)$ ko‘rinishida ifodalanadi va yetarlicha katta x lar uchun $|\tau_1(x)|\le M/x^{\varepsilon}$ tengsizlikni qanoatlantiradi, bu yerda ε, M – musbat o‘zgarmas sonlar va ixtiyoriy $[1,N]$, $N>1$ kesmada Gyolder shartini qanoatlantirsin;

$\psi(x)\in C[c,1]\cap C^{1,\delta_2}(c,1)$, $\psi(c)=0$;

$f(x)\in C\left[c,1\right]\cap C^{1,\delta_1}\left(c,1\right)$, $f(1)=0$, $f(c)=0$, $0<\mu<1$.

3-teorema. Ushbu $0<\mu<1$ shart bajarilgan bo‘lsin. U holda, agar EG_2 masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u yagonadir.

4-teorema. Quyidagi shartlar bajarilsin $\mu k^{1/2-3\alpha}\sin(\alpha\pi)<1$, $\beta_0>-(m-1)/3$, $q(x)=k(1-x)$, bu yerda $\alpha=(1-2\beta)/4$. U holda EG_2 masala yechimi mavjud.

Dissertatsiyaning **ikkinchi bobi “Singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi tenglama uchun Bitsadze–Samarskiy tipidagi masala”** deb nomlanadi.

Bu bobda cheksiz sohada singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi elliptik-giperbolik tipdagi tenglama uchun chegaraviy shartda yadrosi Gauss gipergeometrik funksiyasini o‘z ichiga olgan umumlashgan kasr tartibli differensial operatorlar qatnashgan nolokal chegaraviy masala qaralgan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida quyidagi tenglama uchun

$$\operatorname{sign} y\,|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_x+\frac{\beta_0}{y}u_y=0, \qquad (6)$$

bu yerda $m>0$, $|\alpha_0|<(m+2)/2$, $-m/2<\beta_0<1$, chegaraviy masala qo‘yilgan.

$D=D^+\cup D^-\cup I$, $z=x+iy$ kompleks tekislikning sohasi bo‘lib, $D^+ - y>0$ yarim tekislik, D^- – (6) tenglamaning $O(0,0)$, $B(1,0)$ nuqtalaridan chiquvchi va $C\left(1/2,-\left((m+2)/4\right)^{2/(m+2)}\right)$ nuqtada kesishuvchi OC va BC xarakteristikalari hamda $y=0$ o‘qning OB kesmasi bilan chegaralangan, $I=\{(x,y):0<x<1, y=0\}$.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $I_1=\{(x,y):-\infty<x<0,\ y=0\}$, $I_2=\{(x,y):1<x<\infty,\ y=0\}$.

(6) tenglamaning yechimi tenglamadagi α_0 va β_0 larning qiymatlariga bog‘liq. $\alpha_0 O \beta_0$ parametrik tekislikda $B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2$, $A_0C_0 : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2$, $A_0B_0 : \beta_0 = 1$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan $A_0B_0C_0$, uchburchakni qaraymiz. $P(\alpha_0, \beta_0)$ nuqta bu uchburchakda joylashuviga qarab (6) tenglama uchun chegaraviy masalalar turlicha qo‘yiladi.

$P(\alpha_0, \beta_0) \in A_0B_0C_0$ bo‘lsin.

A **masala**. D sohada ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, bu yerda $\overline{D} = D^+ \cup \overline{D^-} \cup \overline{I_1} \cup \overline{I_2}$;

2) $D^+ \cup D^-$ sohada (6) tenglamani qanoatlantirsin;

3) ushbu tengliklar bajarilsin

$$\lim_{R \to \infty} u(x, y) = 0, \quad R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, \quad y \geq 0;$$

4) $u(x, y)$ chegaraviy shartlarni

$$u(x, y)|_{y=0} = \varphi_i(x), \quad \forall x \in \overline{I_i},$$

$$A_1 (I_{0+}^{-\alpha, 0, \alpha+\beta-1} u[\Theta(t)])(x) + A_2 u(x, 0) = g(x),$$

va ulash shartini

$$\lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I,$$

qanoatlantirsin. Bu limitlar $x = 0$, $x = 1$ nuqtalarda $1 - \alpha - \beta$ dan kichik tartibda maxsuslikka ega bo‘lishi mumkin, bu yerda $\alpha = \dfrac{m + 2(\beta_0 + \alpha_0)}{2(m+2)}$, $\beta = \dfrac{m + 2(\beta_0 - \alpha_0)}{2(m+2)}$.

Yuqoridagi shartlarda $g(x)$, $\varphi_i(x)$ berilgan funksiyalar quyidagicha:

$\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$ funksiyalar $[-N+1, 0]$, $[1, N]$, $N > 1$ kesmalarda Gyolder shartini qanoatlantirsin va yetarlicha katta $|x|$ lar uchun $|\varphi_i(x)| \leq M |x|^{-\delta}$ tengsizlik bajarilsin, bu yerda $\delta,\ M$ – musbat o‘zgarmaslar.

$\Theta(x)$ – (6) tenglamaning OC xarakteristikasi bilan $(x, 0) \in I$ nuqtadan chiquvchi xarakteristikasining kesishish nuqtasi;

$\left(I_{0+}^{\mu, \rho, \eta} f\right)(x)$ – M.Saygo tomonidan kiritilgan, yadrosida Gauss gipergeometrik funksiyasi qatnashgan umumlashgan integro-differensial operator bo‘lib, μ, ρ, η haqiqiy sonlar uchun va $f(x) \in L(0,1)$, $x > 0$ uchun quyidagi ko‘rinishga ega

$$\left(I_{0+}^{\mu,\rho,\eta} f\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\mu-\rho}}{\Gamma(\mu)} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{\mu-1} F\left(\mu+\rho, -\eta; \mu; 1-\frac{t}{x}\right) f(t)dt, & \mu > 0, \\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \left(I_{0+}^{\mu+n,\rho-n,\eta-n} f\right)(x), & \mu \le 0, \ n = [-\mu]+1. \end{cases}$$

$\mu > 0$ uchun quyidagi tengliklar o‘rinli

$$(I_{0+}^{\mu,-\mu,\eta} f)(x) = (I_{0+}^{\mu} f)(x), \ (I_{0+}^{-\mu,\mu,\eta} f)(x) = (D_{0+}^{\mu} f)(x),$$

xususan

$$(I_{0+}^{0,0,\eta} f)(x) = f(x), \ (I_{1-}^{0,0,\eta} f)(x) = f(x),$$

bu yerda $(I_{0+}^{\mu} f)(x)$ va $(D_{0+}^{\mu} f)(x)$ operatorlar $\mu > 0$ tartibli Riman–Liuvull ma’nosidagi integrallash va differensiallash operatorlari bo‘lib quyidagicha:

$$(I_{0+}^{\mu} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t)dt, \ \mu > 0, \ x > 0,$$

$$(D_{0+}^{\mu} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^x (x-t)^{n-\mu-1} f(t)dt, \ \mu > 0, \ n = [\mu]+1.$$

Ikkinchi paragrafda A masalaning yagona yechimi mavjudligi isbotlangan.

5-teorema. Quyidagi shartlar $A_1 > 0, \ A_2 \ge 0, \ \alpha_0 \le 0$ va $\beta_0 \le (2-m)/4$ bajarilsin. U holda A masalasi bir qiymatli yechiladi.

Dissertatsiyaning **uchinchi bobi “Kasr tartibli diffuziya tenglamasi va buziluvchan giperbolik tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalar”** deb nomlanadi. Bu bobda quyidagi differensial tenglama uchun

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0,y}^{\gamma} u = 0, \ \gamma \in (0,1), \ y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\alpha_0}{(-y)^{1-m/2}} u_x + \dfrac{\beta_0}{y} u_y = 0, \ y < 0, \end{cases} \tag{7}$$

bu yerda $D_{0,y}^{\gamma}$ – $u(x,y)$ funksiyadan olingan Riman–Liuvill ma’nosidagi γ $(0 < \gamma < 1)$ tartibli xususiy hosilali differensial operator, $m > 0, \ |\alpha_0| < (m+2)/2$, $-m/2 < \beta_0 < 1$, chekli va cheksiz sohalarda umumlashgan kasr tartibli integro-differensial operator hamda shunday operatorlarning chiziqli kombinatsiyasi qatnashgan nolokal chegaraviy masalalar o‘rganilgan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida (7) tenglama uchun $y > 0$ yarim tekislikda yotuvchi $x = 0, \ x = 1, \ y = 1$ to‘g‘ri chiziqlardagi OO_0, BB_0, O_0B_0 kesmalar va $y < 0$ yarim tekislikda $O(0,0)$ va $B(1,0)$ nuqtalardan chiquvchi OC va BC xarakteristikalar bilan chegaralangan chekli D sohada nolokal masala qaralgan.

PG$_1$ masala. (7) tenglamaning D sohadagi quyidagi chegaraviy va ulash shartlarini qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimi topilsin:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u(1,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le 1,$$
$$A_1\left(I_{0+}^{-\alpha,0,\alpha+\beta-1}u\left[\Theta_0(t)\right]\right)(x)+A_2u(x,0)=g(x),$$
$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\gamma}u(x,y)=\lim_{y\to 0-}u(x,y),\ \ \forall x\in \overline{I}, \tag{8}$$
$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\gamma}(y^{1-\gamma}u(x,y))_y=\lim_{y\to 0-}(-y)^{\beta_0}u_y(x,y),\ \ \forall x\in I,$$
bu yerda $A_1,\ A_2$ – quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi o‘zgarmas sonlar
$$-\frac{\Gamma(\beta)A_2}{\Gamma(\alpha+\beta)}<A_1<0\ \ \left(0<A_1<-\frac{\Gamma(\beta)A_2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right), \tag{9}$$
$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ g(x)$ – berilgan funksiyalat ushbu sinflarga tegishli
$$g(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^3(I),\ \varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0,$$
$$y^{1-\gamma}\varphi_1(y),\ y^{1-\gamma}\varphi_2(y)\in C([0,1]). \tag{10}$$
(7) tenglamaning OC xarakteristikasi bilan $(x,0)\in I$ nuqtadan chiquvchi xarakteristikasi kesishgan nuqtasini $\Theta_0(x)$ bilan belgilaymiz.
$$\alpha=\frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)},\ \ \beta=\frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}.$$
$u(x,y)$ yechimni quyidagi sinflardan izlaymiz
$$y^{1-\gamma}u(x,y)\in C(\overline{D^+}),\ \ u(x,y)\in C(\overline{D^-}),$$
$$y^{1-\gamma}\left(y^{1-\gamma}u(x,y)\right)_y\in C\left(D^+\cup\left\{(x,y):0<x<1,\ y=0\right\}\right),$$
$$u_{xx}\in C(D^+\cup D^-),u_{yy}\in C(D^-).$$
$\left(I_{0+}^{\mu,\rho,\eta}f\right)(x)$ – M.Saygo tomonidan kiritilgan, yadrosida Gauss gipergeometrik funksiyasi bo‘lgan umumlashgan integro-differensial operator.

1-lemma. Agar $\tau_1(x)$ funksiya o‘zining musbat maksimumi (manfiy minimumi)ga $[0,1]$ kesmadagi $x=x_0\ \left(0<x_0<1\right)$ nuqtada erishsa, u holda $\nu_1(x_0)\le 0\ \ \left(\nu_1(x_0)\ge 0\right)$ o‘rinli.

2-lemma. Agar $\tau_2(x)$ funksiya o‘zining musbat maksimumi (manfiy minimumi)ga $[0,1]$ kesmadagi $x=x_0\ \left(0<x_0<1\right)$ nuqtada erishib, $g(x)=0$ va (9) shartlar bajarilsa, u holda $\nu_2(x_0)>0\ \ (\nu_2(x_0)<0)$ bo‘ladi.

6-teorema. (9) tengsizlik bajarilsin. U holda PG_1 masalaning yechimi mavjud bo‘lsa u yagonadir.

7-teorema. (10) shart bajarilsin. U holda PG_1 masala yechimi mavjud.

Ikkinchi paragrafda (7) tenglama uchun chegaraviy shartida Saygo operatorining chiziqli kombinatsiyasi qatnashgan nolokal masala qaralgan.

PG_2 masala. D sohada (7) tenglamaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimi topilsin:
$$y^{1-\gamma}u\,|_{y=0}=0,\ \ (-\infty<x\le 0,\ 1\le x<\infty),$$
$$A_1x^{1+b-\alpha-\beta}(I_{0+}^{a,b,-a-\alpha}t^{\alpha+\beta-1}u[\Theta_0(t)])(x)+A_2(I_{0+}^{a+\alpha,0,\beta-1-a-b}u(t,0))(x)=g(x),\ \ x\in I,$$

$$\lim_{y\to 0-} u(x,y) = c(x) \lim_{y\to 0+} y^{1-\gamma} u(x,y), \ \forall x \in \overline{I},$$

$$\lim_{y\to 0-} (-y)^{\beta_0} u_y(t,y) = d(x) \lim_{y\to 0+} y^{1-\gamma} (y^{1-\gamma} u(x,y))_y, \ \forall x \in I,$$

bu yerda $\left(I_{0+}^{\mu,\rho,\eta} f\right)(x)-$ yadrosi $F(a,b,c;z)$ Gauss gipergeometrik funksiya bo‘lgan umumlashgan integro-differensial operator, $\alpha = \dfrac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}$, $\beta = \dfrac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$, $A_1,\ A_2$ – haqiqiy o‘zgarmas sonlar, $a > \max\{-\alpha, \beta-1\}$ ni qanoatlantiruvchi $a,\ b$ – haqiqiy sonlar, $g(x),\ c(x),\ d(x)-$ berilgan funksiyalar quyidagi shartlarni bajaradi

$$g(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^2(I),\ c(x),\ d(x) \in C^2(\overline{I}) \cap C^3(I),$$

$$c(x)d(x) > 0,\ \frac{d^2}{dx^2}\left[c(x)d(x)\right] \le 0.$$

Qo‘yilgan masalaning $u(x,y)$ yechimini D sohada quyidagi sinfdan izlaymiz

$$y^{1-\gamma} u(x,y) \in C(\overline{D^+}),\ \ u(x,y) \in C(\overline{D^-}),$$

$$y^{1-\gamma}(y^{1-\gamma} u(x,y))_y \in C(D^+ \cup \{(x,y): 0 < x < 1, y = 0\}),$$

$$u_{xx} \in C(D^+ \cup D^-),\ \ u_{yy} \in C(D^-).$$

8-teorema. $A_1 \le 0,\ A_2 > 0,\ c(x)d(x) > 0,\ \dfrac{d^2}{dx^2}\left[c(x)d(x)\right] \le 0$ bo‘lsin. U holda, agar PG$_2$ masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u yagonadir.

9-teorema. a) $k_1 \ne 0,\ k_2 = 0$; b) $k_1 = 0,\ k_2 \ne 0$; c) $c(x) = c = \mathrm{const}$; d) $c(x) = c = \mathrm{const},\ d(x) = d = \mathrm{const}$ bo‘lsin, bu yerda $k_1 = A_1\Gamma(\alpha+\beta)/\Gamma(\beta) - A_2$, $k_2 = -A_1\Gamma(1-\alpha-\beta)/\Gamma(1-\alpha)\left(2/(m+2)\right)^{\alpha+\beta}$. U holda PG$_2$ masala yechimi mavjud.

$\alpha_0 = 0,\ \beta_0 = -\dfrac{m}{2}$ bo‘lsin.

PG$_3$ masala. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi (7) tenglama $u(x,y)$ yechimi topilsin

$$y^{1-\gamma} u\,|_{y=0} = 0,\ \ (-\infty < x \le 0,\ 1 \le x < \infty),$$

$$\frac{d}{dx} u[\Theta_0(x)] = \frac{d}{dx} u(x,0) + \delta(x),$$

$$\lim_{y\to 0-} u(x,y) = \lim_{y\to 0+} y^{1-\gamma} u(x,y), \forall x \in \overline{I},$$

$$\lim_{y\to 0-} (-y)^{-\frac{m}{2}} u_y(x,y) = \lim_{y\to 0+} y^{1-\gamma} (y^{1-\gamma} u(x,y))_y, \forall x \in I.$$

Bu yerda $\delta(x)-$ berilgan funksiya bo‘lib, $C^1(\overline{I}) \cap C^2(I)$ sinfga tegishli.

PG$_3$ masalasi PG$_2$ masalasi kabi yechiladi.

XULOSA

Dissertatsiya ishida olib borilgan tadqiqot jarayonida quyidagi asosiy natijalar olingan:

ekstremum prinsipi yordamida va integral tenglamalar usuli bilan singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun nolokal chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan, Karleman-Vekua usulidan foydalanib, hosil boʻlgan oʻng tomoni nofredgolm operatoridan iborat singulyar integral tenglama Viner-Hopf integral tenglamasiga keltirilgan, uning indeksi nolga tengligi koʻrsatilgan;

aralash tipdagi tenglamalarning bir sinfi uchun ichki xarakteristikada Gellerstedt sharti va buzilish chizigʻida Frankl shartiga oʻxshash shartli chegaraviy masala yechimining mavjudlik va yagonaligi isbotlangan;

singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy shartda yadrosi Gauss gipergeometrik funksiyasini oʻz ichiga olgan umumlashgan kasr tartibli integro-differentsial operator qatnashgan nolokal masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

kasr tartibli diffuziya tenglamasi va buziluvchan giperbolik tenglama uchun nolokal chegaraviy masala yechimining mavjudlik va yagonaligi isbotlangan;

kasr tartibli diffuziya tenglamasini oʻz ichiga olgan differensial tenglama uchun chegaraviy sharti umumlashgan kasr tartibli integro-differentsiallash operatorlarining chiziqli kombinatsiyasini oʻz ichiga olgan chegaraviy masala yechimining bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЮЛДАШЕВА НАРГИЗА ТАХИРЖОНОВНА

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ – 2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за №. B2024.1.PhD/FM1011.

Диссертация выполнена в Институте математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://kengash.mathinst.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (http://www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Рузиев Менглибай Холтожибаевич** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
	Эргашев Тухтасин Гуламжанович доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Ферганский государственный университет**

Защита диссертации состоится 7 января 2025 года в 17:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 194). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан 20 декабря 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от 20 декабря 2024 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

У.А. Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.,старший научный сотрудник

А.А.Азамов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В современном мире многие стремительно развивающие направления науки и прикладные исследования, приводят к исследованию локальных и нелокальных граничных задач для уравнений смешанного типа с частными производными целого и дробного порядка. Математическими моделями многих биологических, физических и химических процессов представляют собой вышеуказанные задачи и применяются в гидродинамике, газовой динамике, теории бесконечно малых изгибов поверхностей, аэродинамике, математической биологии и в разных других разделах науки. Исследование математических моделей процессов окружающей среды, представляет теоретическую основу уравнений смешанного типа.

На сегодняшний день во многих научных школах во всем мире широко развиваются направления решения нелокальных граничных задач, в том числе краевые задачи с участием оператора дробного интегрирования и дифференцирования в граничных условиях. Изучение таких задач становится все более актуальным так как, локальные и нелокальные задачи, изучаемые для уравнений смешанного типа, имеют большое значение при математическом моделировании обмена тепло массы в объектах со сложным строением, нефтяных бассейнов, фильтрации подземных вод и других явлениях. Дифференциальные уравнения с производными дробного порядка используются при описании физических процессов стохастического переноса, а также при изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов. Дифференциальные уравнения дробного порядка возникают в задачах диффузии, гидродинамики, классической механики и теплопроводности.

В нашей республике значительное внимание предоставляется фундаментальным наукам, имеющим научное и практическое применение. В том числе, значительное внимание предоставляется исследованию нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами, а также, нахождению результативных методов их решения. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов в приоритетных областях математических наук, в частности, в области уравнений с целыми и дробными производными являются одной из ключевых задач Института математики имени В.И.Романовского[1]. Развитие теории уравнений смешанного типа с частными производными целого и дробного порядков имеет большое значение при исполнении этого Постановления.

Тема и объект исследования этой диссертации находятся в содержание задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947

---

[1] Указ Президента Республики Узбекистан № ПП-4387 от 09 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан».

от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № ПП-4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, относящихся или касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии в республике. Настоящее исследование выполнено в согласно с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными является изучение нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа. Исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было вложено в работах С.А. Чаплыгина, Ф. Трикоми, С. Геллерстедта и Ф.И. Франкля. Краевые задачи которые рассмотрены шведским ученым С. Геллерстедта имеют необходимые приложения в области околозвуковой газовой динамике и аэродинамике. Российскими учеными В.И Жегаловым и А.М. Нахушевым впервые были исследованы краевые задачи со смещением в граничных условиях для уравнений эллиптико-гиперболического типа. А.В. Бицадзе и А.А. Самарский внесли большой вклад в развитии теории дифференциальных уравнений с частными производными, сформулировав и исследовав новые задачи для эллиптического уравнения.

В дальнейшем краевые задачи для уравнений эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов исследованы в работах С.П. Пулкина, В.Ф. Волкодавова, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, М.М. Смирнова, Т.Ш.Кальменова, Е.И. Моисеева, А.П. Солдатова, К.Б. Сабитова, А.В. Псху, А.А. Полосина, О.А. Репина, М.Х. Абрегова, С.К. Кумыковой, В.А. Нахушевой, З.А. Нахушевой, М. Мирсабурова, М.А. Садыбекова, А.К. Уринова, А. Хасанова, А.С. Бердышева, Б.И. Исломова, М.Х. Рузиева, Т.Г. Эргашева, Ш.Т. Каримова, Э.Т. Каримова и их учеников.

В последние годы как в республике, так и за рубежом стремительно развивалась теория краевых задач для уравнений в частных производных целого и дробного порядка. Для уравнения Геллерстедта А.А. Полосиным доказана однозначная разрешимость краевой задачи Трикоми в смешанной области, граница задания начальных данных которой в гиперболической части сначала совпадает с граничной характеристикой, а затем отходит от нее, проходя вдоль линии вырождения. В работах М. Мирсабурова и его учеников изучены краевые задачи с условиями Бицадзе–Самарского и аналогом условия Франкля на линии вырождения для уравнений смешанного типа.

Современные исследования активно охватывают краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка. В этой области ведут работу такие математики, как Ш.А. Алимов, Р.Р. Ашуров, С.Р. Умаров, M. Yamamoto, A. Cabada, Yu. Luchko, Z. Li, Y. Liu и другие. В ограниченных и неограниченных областях исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа с частной дробной производной в работах С.Х. Геккиевой, А.А. Килбаса и О.А. Репина, О.А. Репина и А.В. Тарасенко, О.А. Репина и С.А. Сайгановой, М.Х. Рузиева, Р.Т. Зуннунова.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация.

Данная диссертационная работа выполнена с плановой темой научно-исследовательских работ Ф-ФА-2021-424 «Решение краевых задач для дифференциальных уравнений с целыми и дробными порядками» Института Математики имени В.И.Романовского АН РУз.

Целью исследования является исследование краевых задач с условием Бицадзе–Самарского и аналогом условия Франкля на линии вырождения для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа и решение нелокальных краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка и вырождающегося гиперболического уравнения.

Задачи исследования:

формулировка и исследование краевых задач со смещением на граничной и внутренней характеристиках для уравнений смешанного типа;

исследование краевой задачи с условием, заданным на внутренней характеристике, и аналогом условия Франкля на линии вырождения для обобщенного уравнения Трикоми;

доказательство однозначной разрешимости нелокальных краевых задач для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченных областях;

доказательство существования и единственности решения нелокальной задачи для дифференциального уравнений, содержащего уравнения диффузии дробного порядка;

исследование задачи со смещением для уравнения смешанного типа, содержащего частную дробную производную.

Объектом исследования представляют собой уравнения смешанного типа с частными производными целого и дробного порядка, содержащего сингулярный коэффициент.

Предметом исследования являются нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа с частными производными целого и дробного порядка с сингулярным коэффициентом.

Методы исследования. В рамках данной диссертации использовались методы принцип экстремума, интегралов энергии, сингулярных интегральных уравнений, и методы решений дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказаны существование и единственность решения краевой задачи со смещением на граничной и внутренней характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом в неограниченной области;

доказаны существование и единственность решения задачи с условием, заданным на внутренней характеристике, и аналогом условия Франкля на линии вырождения для обобщенного уравнения Трикоми;

доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в области, эллиптическая часть которой является верхней полуплоскостью;

доказаны существование и единственность решения краевой задачи типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения диффузии дробного порядка и вырождающегося гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами;

доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи, краевое условие которой представляет собой линейную комбинацию обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования для дифференциального уравнения, содержащего уравнение диффузии дробного порядка.

Практические результаты исследования.

В диссертации получены основные фундаментальные теоретические результаты, позволяющие исследовать краевые задачи для уравнений смешанного типа, а также для уравнения диффузии дробного порядка и вырождающегося гиперболического уравнения. Эти результаты имеют значительным практическим потенциалом, так как может быть использованы в качестве математических моделей, описывающих различные процессы в средах имеющих фрактальную структуру, а также для решений важных практических задач, связанных с приложениями в разных областях.

Достоверность результатов исследования. Достоверность полученных результатов в диссертационной работе обоснована использованием принятых в математике методов анализа, общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа с производной целого и дробного порядка, а также строгими и полными доказательствами теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования:

Научная значимость работы заключается в том, что полученные результаты могут стать основой для дальнейших исследований в теории дифференциальных уравнений с частными производными целого и дробного порядков.

Практическая значимость результатов диссертационной работы заключается в их применении для моделирования и решения задач, связанными с реальными процессами в средах с фрактальной структурой.

Внедрение результатов исследования.

Результаты, полученные в диссертационной работе по нелокальным краевым задачам для уравнений смешанного типа, были внедрены в практику в рамках следующих научно-исследовательских проектах:

метод решения краевой задачи со смещением на граничной и внутренней характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом в неограниченной области были использованы в зарубежном проекте № НИОКТР 122041800029-5 по теме «Краевые задачи и задачи управления для основных и смешанного типов уравнений и их применения к исследованию систем с распределёнными параметрами», при исследовании нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного и гиперболического типов (Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино–Балкарского научного центра РАН, справка № 01-13/49 от 11 октября 2024 года, Российская Федерация). Применение научных результатов позволило получить возможность исследовать задачи типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа и решении задач со смещением для вырождающихся гиперболических уравнений первого рода и смешанно-гиперболического уравнения второго порядка;

метод решения нелокальных задач дробной диффузии и вырождающегося волнового уравнения были использованы в зарубежном проекте № AAAA-A21-121011290003-0 по теме «Физические процессы в системе ближнего космоса и геосфер при солнечных и литосферных воздействиях» (Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, справка № 406 от 21 октября 2024 года, Российская Федерация) при моделирования процессов переноса радона в системе грунт-атмосфера. При реализации проекта, используя вышеуказанные результаты, были получены численные решения задачи для уравнения дробной диффузии, а также проведена их визуализация.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на научном семинаре “Современные проблемы математической физики” Института математики имени В.И.Романовского АН РУз, на объединенном научном семинаре “Современные проблемы математики” кафедр “Математический анализ” и “Алгебра и геометрия” Термезского государственного университета, на совместном научно-исследовательском семинаре Национального университета Узбекистана и Филиалом МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Ташкенте “Современные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики”, а также были представлены на 13 научно-практических конференциях, включая 8 международных и 5 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 20 научных работ, включая 7 научных статьей, из которых 3 опубликованы в зарубежных изданиях и 4– в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для размещения основных научных результатов диссертаций доктора философии.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 96 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность и востребованность темы диссертации обоснованы во введении, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, раскрыта степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, обоснована теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется **“Нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом”**. В этой главе исследована краевая задача с условием Бицадзе–Самарского и аналогом условия Франкля на линии вырождения для обобщенного уравнения Трикоми в смешанной области, эллиптическая часть которой первый квадрант плоскости. Доказана однозначная разрешимость краевой задачи с условием Геллерстедта на внутренней характеристике и условием локального смешения на отрезке линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа.

В первом параграфе этой главы, приведены специальные функции, определения оператора дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, а также оператора обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса.

Во втором параграфе доказана единственность и существование решения нелокальной задачи для уравнения

$$\operatorname{sign} y\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, $-m/2 < \beta_0 < 1$.

Пусть, $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексная плоскость $z = x + iy$, где D^+ - первый квадрант плоскости, D^- - конечная, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (1) выходящими из точек $O(0,0)$, $B(1,0)$ и пересекающиеся в точке $C\left(1/2, -\left((m+2)/4\right)^{2/(m+2)}\right)$, а также отрезком OB прямой $y = 0$, $I = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$.

Обозначим: $I_0 = \{(x, y) : 0 < y < \infty, x = 0\}$, $I_1 = \{(x, y) : 1 < x < \infty, y = 0\}$, точками пересечения характеристик OC и BC с характеристикой исходящей из точки $E(c, 0)$, соответственно C_0 и C_1, где $c \in I$ – произвольное фиксированное число.

Пусть функция $q(x) \in C^1[c,1]$ – диффеоморфизм, который отображает множество точек отрезка $[c,1]$ в множество точек отрезка $[0,c]$, причем $q'(x) < 0$, $q(c) = c$, $q(1) = 0$. Примером такой функции является $q(x) = k(1 - x)$, где $k = c/(1 - c)$.

Задача EG₁. Найти в области D функцию $u(x,y)$ обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{D})$ где $\overline{D}=\overline{D^-}\cup D^+\cup\overline{I_0}\cup\overline{I_1}$;

2) $u(x,y)\in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;

4) выполняются равенства

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0,\ R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2},\ x>0,\ y>0;$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi(y),\quad y\ge 0,$$

$$u(x,0)=\tau_1(x),\quad x\in\overline{I_1},$$

$$x^{\beta}D_{0,x}^{1-\beta}u[\theta(x)]=\delta(x)(x-c)^{\beta}D_{c,x}^{1-\beta}u[\theta^{*}(x)]+\psi(x),\ c<x<1,$$

$$u(q(x),0)=\mu u(x,0)+f(x),\ c\le x\le 1,$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I\setminus\{c\},$$

причем эти пределы при $x=0$, $x=1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=(m+2\beta_0)/\left(2(m+2)\right)$, $f(x)\in C[c,1]\cap C^{1,\delta_1}(c,1)$, $f(1)=0$, $f(c)=0$, $\mu=\mathrm{const}$, $\delta(x)$, $\psi(x)\in C[c,1]\cap C^{1,\delta_2}(c,1)$, $\tau_1(x)\in C(\overline{I_1})$, причем функция $\tau_1(x)$ в окрестности точки $x=1$ представима в виде $\tau_1(x)=(1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x)\in C(\overline{I_1})$ и при достаточно больших x удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)|\le M/x^{\varepsilon}$, ε, M – положительные константы, $\tau_1(x)$ – удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[1,N]$, $N>1$, $\varphi(y)\in C(\overline{I_0})$, $y^{\left(3m+2\beta_0\right)/4}\varphi(y)\in L(0,\infty)$, $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[0,H]$, $H>0$, $\varphi(\infty)=0$, $\varphi(0)=0$, $D_{0,x}^{1-\beta}$ и $D_{c,x}^{1-\beta}$ – операторы дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля. Точками пересечения характеристик C_0C и EC_1 с характеристикой, исходящей из точки $(x_0,0)$, $x_0\in(c,1)$, являются

$$\theta(x_0)=\left(x_0/2,-\left(\left((m+2)x_0\right)/4\right)^{2/(m+2)}\right),$$

$$\theta^{*}(x_0)=\left((c+x_0)/2,-\left((m+2)(x_0-c)/4\right)^{2/(m+2)}\right).$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия $0<\mu<1$, $\delta(x)\le 0$. Тогда, если решение задачи EG₁ существует, то оно единственно.

Теорема 2. Пусть выполнены условия $q(x)=k(1-x)$, $0<\mu<1$, $\delta(x)\le 0$, $\mu k^{1/2-3\alpha}\left(1+2\sin(\beta\pi)\omega(c)\right)<1$, $\beta_0>-(m-1)/3$, где $\alpha=(1-2\beta)/4$, $k=c/(1-c)$, $\omega(c)=1/(1-\delta(c))$. Тогда существует решение задачи EG₁.

Для доказательства этой теоремы задача EG_1 эквивалентно сводится к исследованию, следующему сингулярному интегральному уравнению Трикоми относительно неизвестной функции $\tau(x)$:

$$\tau(x)-\lambda\int_c^1\left(\frac{x-c}{t-c}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}=g(x),\ x\in(c,1), \tag{2}$$

где

$$g(x)=\mu k\lambda\left(1+2\sin(\beta\pi)\omega(x)\right)\int_c^1\left(\frac{x-c}{c-q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)dt}{x-q(t)}+R[\tau]+F_1(x), \tag{3}$$

$R[\tau]$ – регулярный оператор, $F_1(x)$ – выражается через заданные функции, $\lambda=\dfrac{\cos(\beta\pi)}{\pi\left(1+\sin(\beta\pi)\right)}$.

В правой части (3) первый интегральный оператор не является регулярным, поскольку подынтегральная функция при $x=c,\ \ t=c$ имеет изолированную особенность первого порядка. Поэтому это слагаемое выделено отдельно.

Решение интегрального уравнения (2) будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера на интервале $(c,1)$, которые при $x=1$ ограниченных, а при $x=c$ допускаемых обращаться в бесконечность порядка ниже $1-2\beta$.

В этом классе индекс уравнения (2) равен нулю. Применяя метод Карлемана–Векуа к уравнению (2) получим его решение

$$\tau(x)=\cos^2(\pi\alpha)g(x)+\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}\int_c^1\left(\frac{(1-x)(x-c)^3}{(1-t)(t-c)^3}\right)^{\alpha}\frac{g(t)dt}{t-x},\ x\in(c,1). \tag{4}$$

Теперь с учетом выражения для $g(x)$ из (3) решение (4) преобразуем к уравнению вида

$$\rho(\xi)=\int_0^{\infty}N(\xi-t)\rho(t)dt+R_4[\rho(\xi)]+F_3(\xi),\ \xi\in(0,\infty), \tag{5}$$

где $\rho(\xi)=\tau(c+(1-c)e^{-\xi})e^{(3\alpha-1/2)\xi}$, $R_4[\rho(\xi)]$–регулярный оператор, $F_3(\xi)$ – выражается через заданные функции, $N(\xi)=\dfrac{\lambda\mu k^{1-3\alpha}\left(1+2\sin(\beta\pi)\omega(c)\right)\cos(\alpha\pi)}{ke^{\frac{\xi}{2}}+e^{-\frac{\xi}{2}}}$.

Функции $N(\xi)$ и $F_3(\xi)$ имеют экспоненциальный порядок убывания на бесконечности, при этом $N(\xi)\in C(0,\infty)$, $F_3(\xi)\in H_\theta(0,\infty)$. Следовательно, $N(\xi),\ F_3(\xi)\in L_2\cap H_\theta$.

Уравнение (5) является интегральным уравнением Винера-Хопфа и с помощью преобразования Фурье оно приводится к краевой задаче Римана.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свертки справедливы лишь в одном частном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю. Показано, что индекс уравнения (5) равен нулю. Следовательно, уравнение (5) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи EG_1.

Третий параграф посвящен исследованию корректности задачи EG_2, где внутренняя характеристика EC_0 освобождена от краевого условия Геллерстедта и это недостающее условие эквивалентно заменено на нелокальное условие аналога условия Франкля на отрезке линии вырождения.

Задача EG_2. Найти функцию $u(x,y)$ в области D со свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D})$, где $\overline{D} = \overline{D^-} \cup D^+ \cup \overline{I_0} \cup \overline{I_1}$;

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;

4) выполняются равенства

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0,\ R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2},\ x > 0,\ y > 0;$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi(y),\quad y \geq 0,$$

$$u(x,0) = \tau_1(x),\quad x \in \overline{I_1},$$

$$u(x,y)|_{EC_1} = \psi(x),\quad c \leq x \leq \frac{c+1}{2},$$

$$u(q(x),0) = \mu u(x,0) + f(x),\quad c \leq x \leq 1,$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y},\quad x \in I \setminus \{c\},$$

причем указанные приделы при $x=0$, $x=1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta = (m+2\beta_0)/\left(2(m+2)\right)$, $\varphi(y)$, $\tau_1(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ – заданные функции такие, что $\varphi(y) \in C(\overline{I_0})$, $y^{(3m+2\beta_0)/4}\varphi(y) \in L(0,\infty)$, $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[0,H]$, $H>0$, $\varphi(\infty)=0$, $\varphi(0)=0$; $\tau_1(x) \in C(\overline{I_1})$, причем функция $\tau_1(x)$ в окрестности точки $x=1$ представима в виде $\tau_1(x) = (1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x) \in C(\overline{I_1})$ и при достаточно больших x удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)| \leq M/x^{\varepsilon}$, где ε, M – положительные константы, $\tau_1(x)$– удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[1,N]$, $N>1$; $\psi(x) \in C\left[c,(c+1)/2\right] \cap C^{1,\delta_2}\left(c,(c+1)/2\right)$, $\psi(c)=0$; $f(x) \in C\left[c,1\right] \cap C^{1,\delta_1}\left(c,1\right)$, $f(1)=0$, $f(c)=0$, $0<\mu<1$.

Теорема 3. Пусть выполнено условие $0 < \mu < 1$. Тогда, если решение задачи EG_2 существует, то оно единственно.

Теорема 4. Пусть выполнены условия $\mu k^{1/2-3\alpha}\sin(\alpha\pi) < 1$, $\beta_0 > -(m-1)/3$, $q(x) = k(1-x)$, где $\alpha = (1-2\beta)/4$. Тогда существует решение задачи EG_2.

Вторая глава диссертации называется **«Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами».**

В этой главе исследована нелокальная задача с обобщенным оператором дробного дифференцирования, ядро которого содержит гипергеометрическую функцию Гаусса для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области.

В первом параграфе приведена постановка краевой задачи с обобщенными оператором дробного дифференцирования, ядро которой содержит гипергеометрическую функцию Гаусса, для уравнения

$$\operatorname{sign} y\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_x + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0, \tag{6}$$

где $m > 0$, $|\alpha_0| < (m+2)/2$, $-m/2 < \beta_0 < 1$.

Пусть, $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексная область $z = x + iy$, где D^+ – полуплоскость $y > 0$, D^- – конечная область четвертого квадранта плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (6) исходящими из точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$ и отрезком OB прямой $y = 0$, $I = \{(x,y): 0 < x < 1, y = 0\}$.

Для удобства введем следующие обозначения: $I_1 = \{(x,y): -\infty < x < 0,\ y = 0\}$, $I_2 = \{(x,y): 1 < x < \infty,\ y = 0\}$.

Свойства решений уравнения (6) зависят от значений коэффициентов α_0 и β_0, которые соответствуют младшим членам уравнения (6). На плоскости параметров $\alpha_0 O \beta_0$ выделяется треугольная область $A_0B_0C_0$, ограниченная прямыми $B_0C_0: \beta_0 - \alpha_0 = -m/2$, $A_0C_0: \beta_0 + \alpha_0 = -m/2$, $A_0B_0: \beta_0 = 1$. В зависимости от расположения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются краевые задачи для уравнения (6).

Пусть $P(\alpha_0, \beta_0) \in A_0B_0C_0$.

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ в области D, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, где $\overline{D} = D^+ \cup \overline{D^-} \cup \overline{I_1} \cup \overline{I_2}$;

2) удовлетворяет уравнению (6) в области $D^+ \cup D^-$;

3) выполняются равенства

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y)=0,\ \ R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2},\ \ y\ge 0;$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0}=\varphi_i(x),\ \ \forall x\in \overline{I_i},$$

$$A_1(I_{0+}^{-\alpha,0,\alpha+\beta-1}u[\Theta(t)])(x)+A_2u(x,0)=g(x),$$

а также условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I,$$

причем эти пределы при $x=0$, $x=1$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=\dfrac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}$, $\beta=\dfrac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$, $g(x)$, $\varphi_i(x)$ – заданные функции, причем функции $\varphi_i(x)$, $i=1,2$ удовлетворяют условию Гельдера на любых отрезках $[-N+1,0]$, $[1,N]$, $N>1$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\varphi_i(x)|\le M|x|^{-\delta}$, где $\delta,\ M$ – положительные постоянные, $\Theta(x)$ – точка пересечения характеристики уравнения (6), выходящей из точки $(x,0)\in I$, с характеристикой OC;

Оператор $\left(I_{0+}^{\mu,\rho,\eta}f\right)(x)$ представляет собой обобщенный дробный оператор интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса. Этот оператор был введенный М.Сайго и имеет следующий вид при действительных μ,ρ,η и $x>0$, а также $f(x)\in L(0,1)$ вид

$$\left(I_{0+}^{\mu,\rho,\eta}f\right)(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{-\mu-\rho}}{\Gamma(\mu)}\displaystyle\int_0^x(x-t)^{\mu-1}F\left(\mu+\rho,-\eta;\mu;1-\frac{t}{x}\right)f(t)dt, & \mu>0,\\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n\left(I_{0+}^{\mu+n,\rho-n,\eta-n}f\right)(x), & \mu\le 0,\ \ n=[-\mu]+1.\end{cases}$$

Заметим, что если $\mu>0$, то справедливы формулы

$$(I_{0+}^{\mu,-\mu,\eta}f)(x)=(I_{0+}^{\mu}f)(x),\ \ (I_{0+}^{-\mu,\mu,\eta}f)(x)=(D_{0+}^{\mu}f)(x),$$

в частности

$$(I_{0+}^{0,0,\eta}f)(x)=f(x),\ \ (I_{1-}^{0,0,\eta}f)(x)=f(x),$$

где $(I_{0+}^{\mu}f)(x)$ и $(D_{0+}^{\mu}f)(x)$ – операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана–Лиувилля порядка $\mu>0$;

$$(I_{0+}^{\mu}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x(x-t)^{\mu-1}f(t)dt,\ \ \mu>0,\ \ x>0,$$

$$(D_{0+}^{\mu}f)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\int_0^x(x-t)^{n-\mu-1}f(t)dt,\ \ \mu>0,\ \ n=[\mu]+1.$$

Во втором параграфе этой главы доказана однозначная разрешимость задачи А.

Теорема 5. Пусть выполнены условия $A_1 > 0,\ A_2 \geq 0,\ \alpha_0 \leq 0$ и $\beta_0 \geq (2-m)/4$. Тогда задача А однозначно разрешима.

Третья глава диссертации называется **«Нелокальные задачи для уравнения диффузии дробного порядка и вырождающегося гиперболического уравнения».** В этой главе изучены задачи для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0,y}^{\gamma} u = 0,\ \ \gamma \in (0,1),\ \ y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\alpha_0}{(-y)^{1-m/2}} u_x + \dfrac{\beta_0}{y} u_y = 0,\ \ y < 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $D_{0,y}^{\gamma}$ – производная Римана-Лиувилля порядка $\gamma\ (0 < \gamma < 1)$, $m > 0,\ |\alpha_0| < (m+2)/2$, $-m/2 < \beta_0 < 1,$ содержащего уравнения диффузии дробного порядка. Анализ проводится как для ограниченной, так и для неограниченной области, при этом краевые условиями которые формулируются с использованием обобщенного оператора дробного интегро-дифференцирования и линейную комбинацию таких операторов.

В первом параграфе этой главы рассматривается краевая задача для уравнения (7) в конечной области D, ограниченной отрезками $OO_0,\ BB_0,$ O_0B_0 прямых $x = 0,\ x = 1,\ y = 1$ соответственно, лежащих в полуплоскости $y > 0$ и характеристиками OC и BC исходящими из точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$ уравнения (7) в полуплоскости $y < 0$.

Задача PG$_1$. Найти в области D, решение $u(x,y)$ уравнения (7) удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ \ u(1,y) = \varphi_2(y),\ \ 0 \leq y \leq 1,$$

$$A_1\left(I_{0+}^{-\alpha,0,\alpha+\beta-1} u\left[\Theta_0(t)\right]\right)(x) + A_2 u(x,0) = g(x),$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\gamma} u(x,y) = \lim_{y \to 0-} u(x,y),\ \ \forall x \in \overline{I}, \tag{8}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\gamma}(y^{1-\gamma} u(x,y))_y = \lim_{y\to 0-}(-y)^{\beta_0} u_y(x,y),\ \ \forall x \in I,$$

где $A_1,\ A_2$ – следующие действительные

$$-\frac{\Gamma(\beta)A_2}{\Gamma(\alpha+\beta)} < A_1 < 0 \ \ \left(0 < A_1 < -\frac{\Gamma(\beta)A_2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right), \tag{9}$$

$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ g(x)$ – заданные функции такие, что

$$g(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^3(I),\ \ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0,$$

$$y^{1-\gamma}\varphi_1(y),\ \ y^{1-\gamma}\varphi_2(y) \in C([0,1]). \tag{10}$$

Точкой пересечения характеристики уравнения (7), выходящей из точки $(x,0) \in I$, с характеристикой OC обозначим через $\Theta_0(x)$.

$$\alpha = \frac{m + 2(\beta_0 + \alpha_0)}{2(m+2)},\ \ \beta = \frac{m + 2(\beta_0 - \alpha_0)}{2(m+2)}.$$

Решение задачи PG_1 ищется в классе дважды дифференцируемых функций в области D, таких что

$$y^{1-\gamma}u(x,y)\in C(\overline{D^+}),\;\; u(x,y)\in C(\overline{D^-}),$$

$$y^{1-\gamma}\left(y^{1-\gamma}u(x,y)\right)_y\in C\left(D^+\cup\left\{(x,y):0<x<1,\; y=0\right\}\right),$$

$$u_{xx}\in C(D^+\cup D^-),u_{yy}\in C(D^-).$$

$\left(I_{0+}^{\mu,\rho,\eta}f\right)(x)$ – оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b,c;z)$, введенный М.Сайго.

Имеют места следующие две леммы.

Лемма 1. Если функция $\tau_1(x)$ достигает положительного максимума (или отрицательного минимума) на отрезке $[0,1]$ в точке $x=x_0$ $\left(0<x_0<1\right)$ то $\nu_1(x_0)\le 0$ $\left(\nu_1(x_0)\ge 0\right)$.

Лемма 2. Если функция $\tau_2(x)$ достигает положительного максимума (или отрицательного минимума) на отрезке $[0,1]$ в точке $x=x_0$ $\left(0<x_0<1\right)$, а также выполняются условия $g(x)=0$ и (9) тогда $\nu_2(x_0)>0$ $(\nu_2(x_0)<0)$.

Теорема 6. Пусть выполняется неравенства (9). Тогда если существует решение задачи PG_1, то оно единственно.

Теорема 7. Пусть выполнено условие (10). Тогда, если существует решение задачи PG_1, то оно единственно.

Во втором параграфе рассмотрена нелокальная краевая задача для уравнения (7) в области D, указанной в параграфе 1, главы 2.

Задача PG_2. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (7) в области D удовлетворяющее условиям:

$$y^{1-\gamma}u\,|_{y=0}=0,\;\;(-\infty<x\le 0,\; 1\le x<\infty),$$

$$A_1x^{1+b-\alpha-\beta}(I_{0+}^{a,b,-a-\alpha}t^{\alpha+\beta-1}u[\Theta_0(t)])(x)+A_2(I_{0+}^{a+\alpha,0,\beta-1-a-b}u(t,0))(x)=g(x),\;\; x\in I,$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0-}u(x,y)=c(x)\lim_{y\to 0+}y^{1-\gamma}u(x,y),\;\;\forall x\in\overline{I},$$

$$\lim_{y\to 0-}(-y)^{\beta_0}u_y(t,y)=d(x)\lim_{y\to 0+}y^{1-\gamma}(y^{1-\gamma}u(x,y))_y,\;\;\forall x\in I.$$

где $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)$ – оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b,c;z)$, $\alpha=\dfrac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}$, $\beta=\dfrac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$, $A_1,\,A_2$ – действительные константы, $a,\; b$ – действительные числа, при этом выполняется условие $a>\max\{-\alpha,\beta-1\}$, а заданные функции $g(x),\,c(x),\,d(x)$ удовлетворяют условиям

$$g(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^2(I),\,c(x),\,d(x)\in C^2(\overline{I})\cap C^3(I),$$

$$c(x)d(x) > 0,\ \frac{d^2}{dx^2}\left[c(x)d(x)\right] \le 0.$$

Решение поставленной задачи будем искать в классах таких, что

$$y^{1-\gamma}u(x,y) \in C(\overline{D^+}),\ \ u(x,y) \in C(\overline{D^-}),$$

$$y^{1-\gamma}(y^{1-\gamma}u(x,y))_y \in C(D^+ \cup \{(x,y): 0 < x < 1, y = 0\}),$$

$$u_{xx} \in C(D^+ \cup D^-),\ \ u_{yy} \in C(D^-).$$

Теорема 8. Пусть $A_1 \le 0,\quad A_2 > 0,\quad c(x)d(x) > 0,\quad \frac{d^2}{dx^2}\left[c(x)d(x)\right] \le 0.$ Тогда, если существует решение задачи PG_2, то оно единственно.

Теорема 9. Пусть выполнены условия a) $k_1 \ne 0,\ k_2 = 0;$ b) $k_1 = 0,\ k_2 \ne 0;$ c) $c(x) = c = \mathrm{const};$
d) $c(x) = c = \mathrm{const},\quad d(x) = d = \mathrm{const},$ где $k_1 = A_1\Gamma(\alpha+\beta)/\Gamma(\beta) - A_2,$ $k_2 = -A_1\Gamma(1-\alpha-\beta)/\Gamma(1-\alpha)\left(2/(m+2)\right)^{\alpha+\beta}.$ Тогда существует решение задачи PG_2.

Пусть $\alpha_0 = 0,\ \beta_0 = -\frac{m}{2}.$

Задача PG_3. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (7), удовлетворяющее краевым условиям

$$y^{1-\gamma}u\,|_{y=0} = 0,\ \ (-\infty < x \le 0,\ 1 \le x < \infty),$$

$$\frac{d}{dx}u[\Theta_0(x)] = \frac{d}{dx}u(x,0) + \delta(x),$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0-} u(x,y) = \lim_{y\to 0+} y^{1-\gamma}u(x,y), \forall x \in \overline{I},$$

$$\lim_{y\to 0-}(-y)^{-\frac{m}{2}}u_y(x,y) = \lim_{y\to 0+} y^{1-\gamma}(y^{1-\gamma}u(x,y))_y, \forall x \in I.$$

Здесь $\delta(x)$ – заданная функция такая, что

$$\delta(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^2(I).$$

Задача PG_3 решается как задача PG_2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе исследований, проведенных в диссертационной работе, получены следующие основные результаты:

с помощью принципа экстремума и метода интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом, применив метод Карлемана–Векуа, сингулярное интегральное уравнение с нефредгольмовым оператором в правой части преобразовано в интегральное уравнение Винера–Хопфа, показано, что его индекс равен нулю;

доказаны существование и единственность решения краевой задачи с условием Геллерстедта на внутренней характеристике и аналогом условия Франкля на линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа;

доказана однозначная разрешимость нелокальной задачи с обобщенным оператором дробного дифференцирования, ядро которой содержит гипергеометрическую функцию Гаусса, для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами;

доказаны существование и единственность решения нелокальной краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка и вырождающегося гиперболического уравнения;

доказана однозначная разрешимость задачи, краевое условие которой содержит линейную комбинацию обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования для дифференциального уравнения, содержащего уравнение диффузии дробного порядка.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

YULDASHEVA NARGIZA TAKHIRJONOVNA

NON-LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE MIXED TYPE EQUATIONS WITH A SINGULAR COEFFICIENT

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent– 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the of Ministers of Higher Education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2024.1.PhD/FM1011.

Dissertation has been prepared at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Ruziev Menglibay Kholtojibaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher
Official opponents:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Ergashev Tukhtasin Gulamdjanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent
Leading organization:	**Ferghana State University**

Defense will take place 7 January 2025 at 17:00 at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 194). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the dissertatsion sent out on 20 December 2024 year
(Mailing report № 2 on 20 December 2024 year)

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Academician

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on awarding of scientific degrees, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Senior researcher

A.A.Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Academician.

INTRODUCTION (abstract of the dissertation of Doctor of Philosophy (PhD))

The aim of the research is to investigate boundary value problems with the Bitsadze-Samarskii condition and an analogue of the Frankl condition on the degeneracy line for equations of mixed elliptic-hyperbolic type and to solve nonlocal boundary value problems for the fractional diffusion equation and the degenerate hyperbolic equation.

The object of the research are mixed-type equations with partial derivatives of integer and fractional order with a singular coefficient.

The scientific novelty of the study is as follows:

the existence and uniqueness of a solution to the boundary value problem with a shift on the boundary and internal characteristics for the Gellerstedt equation with a singular coefficient in an unbounded domain have been proven;

the existence and uniqueness of a solution to the problem with a condition specified on the internal characteristic and an analogue of the Frankl condition on the degeneration line for the generalized Tricomi equation have been established;

the unique solvability of a nonlocal boundary value problem for a mixed-type equation with singular coefficients in a domain where the elliptic part is the upper half-plane has been proven;

the existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem of the Bitsadze–Samarsky type for a fractional-order diffusion equation and a degenerate hyperbolic equation with singular coefficients have been established;

the unique solvability of a nonlocal boundary value problem, where the boundary condition is a linear combination of generalized fractional integro-differentiation operators for a differential equation containing a fractional-order diffusion equation, has been proven.

Implementation of the research results.

The results obtained in the dissertation on nonlocal boundary value problems for mixed-type equations were implemented in practice within the framework of the following research projects:

the method for solving the boundary value problem with a shift on the boundary and internal characteristics for the Gellerstedt equation with a singular coefficient in an unbounded domain was utilized in the international project No. NIOCTR 122041800029-5 on the topic "Boundary value problems and control problems for fundamental and mixed-type equations and their applications to the study of systems with distributed parameters," during the investigation of nonlocal boundary value problems for differential equations of mixed and hyperbolic types (Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, reference No. 01-13/49 dated October 11, 2024, Russian Federation). The application of scientific results enabled the study of problems such as the Bitsadze–Samarsky-type problem for mixed hyperbolic-parabolic equations and the solution of shifted problems for degenerate hyperbolic equations of the first kind and mixed-hyperbolic equations of the second order;

methods for solving nonlocal fractional diffusion problems and degenerate wave equations were applied in the international project No. AAAA-A21-121011290003-0 on the topic "Physical processes in the near-Earth space and geospheres under solar and lithospheric impacts" (Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, reference No. 406 dated October 21, 2024, Russian Federation) in the modeling of radon transport processes in the soil-atmosphere system. Within the framework of the project, using the above-mentioned results, numerical solutions to the fractional diffusion problem were obtained and visualized.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and a list of references. The full volume of the dissertation is 96 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (I часть; I part)

1. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. Краевая задача с условием Геллерстедта и аналогом условия Франкля для уравнения смешанного типа // Бюллетень Института Математики. №5(3). (2022), С.62-71. **(01.00.00, № 17).**

2. Ruziev M.Kh., Yuldasheva N.T. On a Boundary Value Problem for a Mixed Type Equation with a Partial Fractional Derivative // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 43, No. 11. (2022), pp. 3264-3270. **(3. Scopus, IF=0,42).**

3. Юлдашева Н.Т. Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной // Бюллетень Института Математики. № 5(5). (2022), С. 194-200. **(01.00.00, № 17).**

4. Ruziev M.Kh., Yuldasheva N.T. On a boundary value problem for a class of equations of mixed type // Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 44. №7. (2023), pp. 2916-2929. **(3. Scopus, IF=0,42).**

5. Ruziev M.Kh., Yuldasheva N.T. A problem of the Bitsadze–Samarskii type for mixed-type equations with singular coefficients // Uzbek Mathematical Journal. Volume 68. Issue 1. (2024), pp.157-162. **(01.00.00, № 17).**

6. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. Краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка и вырождающегося гиперболического уравнения // Бюллетень Института Математики. №7(3). (2024), С.126-132. **(01.00.00, № 17).**

7. Ruziev M., Parovik R., Zunnunov R. and Yuldasheva N. Non-Local Problems for the Fractional Order Diffusion Equation and the Degenerate Hyperbolic Equation. //Fractal Fractional. (2024), 8. 538. **(3. Scopus, IF=0,65).**

II bo‘lim (II часть; II Part)

8. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами // «Вестник Ошского государственного университета. Математика, физика, техника». – Ош. 2023. № 2. С.160-168.

9. Юлдашева Н. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с дробной производной // «Ёш олимлар ахборотномаси». Научный журнал, –Тошкент: 2023. №4(3). С. 59-61.

10. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. Краевая задача для уравнения Геллерстента с сингулярным коеффициентом в неограниченной области \\ Теоретические основы и прикладные задачи современной математики. Республиканская научно-практическая конференция. –Андижан. – 2022. 26-март 2022. С.266-267.

11. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа // Современные проблемы

теории чисел и математического анализа. Международной конференция. – Душанбе. 29-30 апреля. – 2022. С.189-190.

12. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. О краевой задаче для дифференциального уравнения с частной дробной производной Римана-Лиувилля // Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари. Халқаро илмий-амалий анжумани. – Бухоро. 11-12-май. – 2022. С.222-223.

13 Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. Краевая задача для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Operator algebras, non-associative structures and related problem. 14–15 сентября. – 2022. – Ташкент, Узбекистан. С.242.

14. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. О краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Неклассические уравнения математической физики и их приложения. Международная научная конференция. – Ташкент, 6-8 октября 2022. С.167-168.

15. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. О краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами // Актуальные вопросы алгебры и анализа. Республиканская научно-практическая конференция. – Термиз. – 2022. 18-19 ноябрь, 2 часть. С.170-171.

16. Юлдашева Н.Т. Краевая задача для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом в неограниченной области // II Республиканская научно-практическая конференция молодых ученых "Математика, механика и интеллектуальные технологии, Ташкент-2023" – Ташкент, 28-29 марта. – 2023. С.167.

17. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной // Традиционная международная апрельская научная конференция в честь Дня Науки. 4-8 апреля 2023, – Алматы, Казахстан. с. 183-184.

18. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т. Об одной краевой задаче для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения. Международная научная конференция. – Ташкент. 23-25 ноября. –2023. С.350-351.

19. Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т Об одной нелокальной задаче для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» VII Международная научная конференция. (B&NAK 2023). – Нальчик. 4-8 декабря 2023. С.237-239.

20. Юлдашева Н.Т. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения с частной производной дробного порядка // «Молодые ученые третьего ренессанса: Современные задачи, инновации и перспективы" Международная научно-практическая конференция. 3 мая 2024 г. – Ташкент. С. 290-292.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida
2024 yil 2- dekabrda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar
o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,75. Adadi 50 dona. Buyurtma № 222

Guvohnoma № 857343.
«Ildiz nashriyoti» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: Toshkent sh., Yunusov ko‘chasi, 3-uy.
Tel: (+99894) 625-57-58