

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

JO'RAYEV SHUKUR YUSUPOVICH

KRITIK TARMOQLANUVCHI TASODIFIY JARAYONLARNING
ASIMPTOTIK ANALIZI

01.01.05 – Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent–2024

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on
physical-mathematical sciences**

Jo'rayev Shukur Yusupovich

Kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning asimptotik analizi 3

Жураев Шукур Юсупович

Асимптотический анализ критических ветвящихся случайных процес-
сов 19

Juraev Shukur Yusupovich

Asymptotic analysis of critical branching random processes..... 35

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ

List of published works 38

**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

MATEMATIKA INSTITUTI

JO'RAYEV SHUKUR YUSUPOVICH

**KRITIK TARMOQLANUVCHI TASODIFIY JARAYONLARNING
ASIMPTOTIK ANALIZI**

01.01.05 – Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Toshkent–2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B2019.4.PhD/FM437 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (резюме)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (<http://ik-fizmat.nuu.uz>) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Formanov Shakir Kasimovich

fizika-matematika fanlari doktori, akademik

Rasmiy opponentlar:

Sharipov Olimjon Shukurovich

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Azimov Jahongir Bahromovich

fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Yetakchi tashkilot:

Namangan muhandislik-qurilish instituti

Dissertatsiya himoyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil « 24 » dekabr soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (191-raqami bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9- uy. Tel.: (+99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2024-yil « 04 » dekabr kuni tarqatildi.
(2024-yil « 04 » dekabrda 2-raqamli reestr bayonnomasi).



U.A. Roziqov

Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., akademik

J.K. Adashev

Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

Ya. M. Xusanbayev

Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar rais o'rinbosari,
f.-m.f.d., dotsent

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati. Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar nazariyasi tabiiy va ijtimoiy fanlarda uchraydigan ko‘plab sondagi zarrachalarning o‘zgarishi va bir holatdan ikkinchi holatga o‘tishi haqidagi hodisalarning modeli bo‘lib hisoblanadi. Tarmoqlanuvchi jarayonlar demografiya, tibbiyot, kimyo, biologiya, hamda genetik kodlash va populyatsiyani boshqarishda muhim ahamiyatga ega. Shuning uchun, tarmoqlanuvchi jarayonlarni tadqiq qilish zamonaviy ehtimollar nazariyasida dolzarb va muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda kritik tarmoqlanuvchi jarayonlarga yaqin bo‘lgan tarmoqlanuvchi jarayonlar asimptotikasini o‘rganish zamonaviy ehtimollar nazariyasidagi asosiy masalalardan biri bo‘lib, bu jarayonlarda o‘tish holatlariga oid ko‘plab ilmiy izlanishlar olib borilgan. Lekin bu izlanishlardagi natijalarda qoldiq hadlarning yaqinlashish tezligi bahosi, katta sondagi va tasodifiy sondagi zarrachalardan boshlanuvchi tarmoqlanuvchi jarayonlarda o‘tish holatlari, tarmoqlanuvchi jarayonlar davom etish ehtimolligi asimptotik yoyilmasidagi o‘zgarmas koeffisientlarning qiymatlarini topish yetarlicha o‘rganilmagan. Shu sababli, kritik tarmoqlanuvchi jarayonlarga yetarlicha yaqin bo‘lgan jarayonlar asimptotikasini topish, tasodifiy sondagi va katta sondagi zarrachalardan boshlanuvchi jarayonlarda o‘tish holatlariga oid limit teoremlar isbotlash, tarmoqlanuvchi jarayonlarda o‘tish holatlariga oid teoremlarda qoldiq hadni baholash maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda matematikaning fundamental va amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan ehtimollar nazariyasi, matematik statistika va tasodifiy jarayonlar nazariyasining katta amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan dolzarb yo‘nalishlariga, jumladan kritik tarmoqlanuvchi jarayonlarga yaqin bo‘lgan jarayonlar asimptotikasini tahlil qilishga alohida e‘tibor qaratildi. Buning natijasida tarmoqlanuvchi jarayonlarda o‘tish holatlarini tadqiq qilish bo‘yicha salmoqli natijalarga erishildi. “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar asosida ilmiy tadqiqotlar olib borish asosiy vazifalari va faoliyati yo‘nalishlaridan biridir¹. Bu borada tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasi sohasida ilmiy tadqiqot ishlarini rivojlantirish dolzarb va muhim ahamiyatga ega.

Mazkur dissertatsiya ishining mavzusi va obyekti, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017 yil 20 apreldagi PQ- 2909- son “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi va 2019 yil 9 iyuldagi

¹O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4387-son qarori

PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo’llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarori hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Dissertatsiyadagi olib borilgan ilmiy tadqiqot ishlari yuqorida keltirilgan O‘zbekiston Respublikasida Fan va Texnologiyalar rivojlantirish bo‘yicha qabul qilingan qarorlar asosida e‘lon qilingan va amaliy faoliyatda qo‘llanilayotgan Davlat dasturlariga muvofiq keladi. Bu tadqiqotlar O‘zbekistonda Fan va texnologiyalarni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha qabul qilingan Davlat dasturlarining “Matematika, mexanika va informatika” bo‘limiga mos keladi.

Muammoning o‘rganganlik darajasi. Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarga oid dastabki ilmiy natijalar F. Gal’ton, U. Vatson, A. N. Kolmogorov, B. A. Sevastyanov, N.A.Dmitriyev, A.M.Yaglom, S.V.Nagaev, T. Xarris, G.Kesten, P.Neylarning ishlarida bayon qilingan. Tarmoqlanuvchi jarayonlarga oid limit teoremlar A. N. Kolmogorov, B. A. Sevastyanov, V.M.Zolotarev, V.P.Chistyakov, S.V.Nagaev, A.V.Nagaev, R.Belman, P.Ney, T. Xarris, F.Spitzer, G.Kesten, K.B.Athreya, I.S.Badalboyev, A.M.Zubkov, V.A.Vatutin, I.Rahimov, Ya.M.Xusanbayev ishlarida tadqiq qilingan. Tarmoqlanuvchi jarayonlarda o‘tish holatlariga oid tadqiqotlar bilan B. A. Sevastyanov, S. V. Nagaev, V.A.Vatutin, R. I. Muxamedxanova, Sh. K. Formanov, I.S.Badalbaev, I.Rahimov va boshqalar shug‘ullanishgan.

Ma’lumki, tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasining boshlang‘ich teoremlaridan biri bu tarmoqlanuvchi jarayonning davom etish ehtimolligini asimptotik holatini o‘rganishga bag‘ishlangan. A. N. Kolmogorov subkritik va kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar davom etish ehtimolligi uchun asimptotik formula isbotlagan. A. V. Nagaev, I. S. Badalboevlar esa subkritik jarayonning davom etish ehtimolligi uchun Kolmogorov asimptotik formulasining o‘rinli bo‘lishi uchun zaruriy va yetarli shartlarni olishgan. A.M.Yaglom subkritik va kritik jarayonlar shartli taqsimotlarining asimptotikasini aniqlagan va kritik holda mos ravishda normallangan tarmoqlanuvchi jarayonning shartli taqsimoti bitta zarracha avlodlari soni chekli uchinchi momentga ega bo‘lganda ko‘rsatkichli taqsimotga yaqinlashishini ko‘rsatgan. R.Heathcote, E. Seneta, Vare-Joneslar ham Kolmogorov formulasi o‘rinli bo‘lish shartlarini o‘rganganlar. Kritik jarayonlarning davom etish ehtimolligi uchun limit teoremlar va bu limit teoremdagi qoldiq hadlar haqidagi natijalar B. A. Sevastyanov, P.Ney, K.B.Athreya ishlarida isbotlangan. S. V. Nagaev va R. I. Muxamedhanova kritik tarmoqlanuvchi jarayonlarda davom etish ehtimolligi uchun to‘rtinchi moment mavjud bo‘lganda asimptotik yoyilma olishgan. Uzluksiz vaqqli

kritik tarmoqlanuvchi jarayonlarning davom etish ehtimolligi uchun esa V.P.Chistyakov asimptotik yoyilma olgan. Tarmoqlanuvchi jarayonlarda o'tish holatlariga doir dastlabki ishlar B.A.Sevast'yanovga tegishlidir. B.A.Sevast'yanov ma'lum shartlarda $K(B_0, C_0) = \{F(x): F''(1) = B \geq B_0 > 0, F'''(1) = C \leq C_0 < \infty\}$ sinf olib, bu sinfga tegishli tarmoqlanuvchi jarayonlarning asimptotikasini tadqiq qilgan va bu jarayonlarga oid limit teoremlar isbotlagan. Diskret vaqli tarmoqlanuvchi jarayonlarda o'tish holatlariga oid limit teoremlar S.V. Nagaev va R. I. Muxamedxanova ishlarida isbotlangan.

Shuni ta'kidlash lozimki, yuqorida sanab o'tilgan ko'plab muhim natijalarga qaramasdan kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar to'rtinchi moment mavjud bo'lganda davom etish ehtimolligi asimptotik yoyilmasi, tarmoqlanuvchi jarayonlar o'tish holatlarida qoldiq hadning bahosi hamda katta sondagi va tasodifiy sondagi zarrachalardan boshlanuvchi tarmoqlanuvchi jarayonlarda o'tish holatlariga oid teoremlarni tadqiq qilish masalalari yetarli darajada hal qilinmagan. Shu nuqtai nazardan, bu sohadagi tadqiqotlar dolzarbdir.

Dissertatsiya tadqiqotining bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya O'zbekiston Fanlar Akademiyasi V. I. Romanovski nomidagi Matematika instituti "Stoxastik analiz" laboratoriyasi, Qo'qon davlat pedagogika institutining matematika kafedrasida ilmiy tadqiqot ishlari rejasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqot maqsadi tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning, tasodifiy miqdorlarning tasodifiy sondagi yig'indisi sifatida yozish mumkinligi asosida tarmoqlanuvchi jarayonlarning asimptotik masalalarini tahlil qilishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

kasr-chiziqli ko'rinishda bo'lgan hosil qiluvchi funksiyalar yuzaga keltirgan tarmoqlanuvchi jarayon uchun limit teoremlar isbotlash va ulardan foydalanib, Gal'ton – Vatson jarayoni uchun limit taqsimot sinfini shakllantirish;

kritik tipdagi tarmoqlanuvchi jarayonlar davom etish ehtimolligi asimptotik yoyilmalarini aniqlashtirish va bu yoyilmalardagi o'zgarma koeffitsientlarning aniq qiymatlarini topish;

kritik tipga yaqin bo'lgan diskret vaqli Gal'ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayoni uchun o'tish holatlarini tadqiq qilish;

Gal'ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonning o'tish holatlari uchun limit teoremlardagi qoldiq hadini baholash;

Tadqiqot ob'ekti. Kritik tipdagi Gal'ton – Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlar, tarmoqlanuvchi jarayonlarda o'tish holatlari.

Tadqiqot predmeti. Tarmoqlanuvchi jarayonlar sonli xarakteristikalar, tarmoqlanuvchi jarayonlarning davom etish ehtimolligi, tarmoqlanuvchi jarayon hosil qiluvchi funksiyalari.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida ehtimolliklar nazariyasi usullaridan, hosil qiluvchi va xarakteristik funksiyalar analitik usullaridan va matematik tahlil usulidan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

kasr-chiziqli ko‘rinishdagi hosil qiluvchi funksiyaga ega bo‘lgan tarmoqlanuvchi jarayonlarda davom etish ehtimolligi uchun Kolmogorovning asimptotik formulasidagi no‘malum o‘zgarmasning mavjudligi isbotlangan;

diskret va uzluksiz tipdagi kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarida to‘rtinchi faktorial moment mavjud bo‘lganda, davom etish ehtimolligi uchun asimptotik yoyilmalar topilgan hamda bu yoyilmalardagi o‘zgarmasning ko‘rinishi keltirilgan;

tarmoqlanuvchi jarayonlarda ro‘y beradigan o‘tish holatlari haqidagi limit teoremlardagi qoldiq hadning nolga yaqinlashish tezligi baholangan;

katta va tasodifiy sondagi zarrachalardan boshlanuvchi tarmoqlanuvchi jarayonlarda o‘tish holatlariga oid limit teoremlar isbotlangan hamda qoldiq hadning yaqinlashish tezligi baholangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

ma‘lum populyatsiya evolyutsiyasining ko‘payishi va tarqalishining tarmoqlanuvchi jarayonlar o‘tish holatlari orqali ifodalashni taklif etilganligi va bu tasodifiy jarayonlar uchun limit taqsimotlarni aniqlash usullarini bayon qilinganligidan iborat.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Zamonaviy ehtimolliklar nazariyasi va uning analitik metodlarini qo‘llash usuli bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati tarmoqlanuvchi jarayonlar o‘tish holatlariga oid limit teoremlarni tadqiq qilishda foydalaniladi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ko‘payish jarayonlarida ishtirok etuvchi zarrachalar evolyutsiyasi haqida statistik xulosalar chiqarish, biologiya, raqamli taxlil va kriptografiya, meditsina, genetika masalalarini yechish imkonini berganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Kritik Gal‘ton – Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun limit teoremlar bo‘yicha olingan natijalar asosida:

diskret va uzluksiz tipdagi kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarida to‘rtinchi faktorial moment mavjud bo‘lganda, davom etish ehtimolligi uchun asimptotik yoyilmalaridan G00003447 raqamli “Kvant genetik algebralari va ularning tadbirlari” mavzusidagi xorijiy loyihada stoxastik rekurent jarayonlardan hosil qilingan dinamik sistemalarni tahlil qilishda foydalanilgan (Birlashgan arab amirliklari universitetining 2023 yil 15 noyabrdagi ma‘lumotnomasi, BAA). Ilmiy natijani qo‘llanishi tasodifiy genetik zanjirlarning asimptotikasini baholash imkonini bergan;

katta va tasodifiy sondagi zarrachalardan boshlanuvchi tarmoqlanuvchi jarayonlarda o‘tish holatlariga oid limit teoremlardan FA-Atex-2018-4 raqamli “Yangi dori vositalarini ishlab chiqishda molekulyar optimallashtirishning virtual usullarini ishlab chiqish: mashinani o‘rganishni chuqurlashtirish va biologik jarayonlarning prognozlash modellarini tushunish” mavzusidagi amaliy loyihada biologik jarayonlarni modellashtirishda foydalanilgan (Matematika institutining 2023 yil 6-dekabrdagi №1/543-sonli ma‘lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanishi biologik jarayonlar populyatsiyasini prognozlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 3 ta halqaro va 4 ta respublika ilmiy – amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e‘lon qilinganligi. Dissertatsiya tadqiqot mavzusi bo‘yicha jami 14 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta, jumladan 2 tasi xorijiy va 5 tasi respublika jurnallarida, shuningdek, 7 ta ma‘ruza tezislari ilmiy konferensiya materiallarida nashr etilgan.

Dissertatsiya tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 98 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Dissertatsiya kirish qism, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat.

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan. Mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan. Tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan. Olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma‘lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Kasr – chiziqli hosil qiluvchi funksiyaga tortilgan tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar”** nomli birinchi bobida hosil qiluvchi funksiyasi kasr – chiziqli bo‘lgan Gal‘ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayoni ko‘rilgan. Subkritik va kritik jarayonlar uchun limit teoremlar, Yaglom teoremasiga o‘hshash teorema isbotlangan. Uzluksiz holdagi tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun limit teoremlar va jarayonning davom etish ehtimolligi uchun A. N. Kolmogorov teoremlari ko‘rilib, bu teoremadagi o‘zgarma κ ning aniq ko‘rinishi keltirilgan.

$\{\xi_j^{(n)}, j, n \in N\}$ – bog‘liqsiz, bir hil taqsimlangan va $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ dan qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar berilgan.

1-ta’rif. Ushbu $Z_0 = 1, Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \xi_j^{(n)}, n \geq 1$ rekurrent formula bilan aniqlangan $\{Z_n, n \in Z_+\}$ jarayon Galton – Watson tarmoqlanuvchi jarayoni deyiladi. Bu yerda $\xi_j^{(n)} - (n-1)$ – avloddagi j inchi zarrachaning qoldirgan zarrachalar soni bo‘lib, u $P(\xi_1^{(1)} = k) = P(Z_1 = k) = p_k$ taqsimotga ega.

2-ta’rif. Z_1 tasodifiy miqdorning hosil qiluvchi funksiyasi deb, quyidagi $F(x) = Ex^{Z_1} = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k)x^k, |x| \leq 1$ munosabat bilan aniqlangan $F(x)$ funksiyaga aytiladi.

3-ta’rif. $F(x)$ hosil qiluvchi funksiyaning iteratsiyalari deb $F_0(x) = x$, $F_1(x) = F(x)$, $F_{n+1}(x) = F_n(F(x))$, $n \geq 1$ ketma-ketlikka aytiladi.

Gal’ton – Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlari quyidagi matematik kutilma $A = E\xi = E[Z_1 / Z_0 = 1] = F'(1)$ qiymatiga qarab uch sinfga bo’linadi.

4-ta’rif. Gal’ton – Vatson tarmoqlanuvchi jarayoni subkritik deyiladi, agar $A < 1$ bo’lsa, kritik deyiladi agar $A = 1$ bo’lsa, superkritik deyiladi agar $A > 1$ bo’lsa. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = E\xi = F'(1), B = E\xi(\xi - 1) = F''(1), C = E\xi(\xi - 1)(\xi - 2) = F'''(1).$$

5-ta’rif. Agar Gal’ton – Vatson tarmoqlanuvchi jarayonida $Z_k = 0$ bo’lsa, u holda jarayon k – momentda so’ngan deyiladi. $P_k(0) = P(Z_k = 0)$ ehtimollikni Galton – Vatson tarmoqlanuvchi jarayonining k – momentda so’nganlik ehtimolligi deyiladi.

$Q_n = P(Z_n > 0) = 1 - F_n(0)$, $n \rightarrow \infty$ jarayonning davom etish ehtimolligi deyiladi.

Umumiy holda, $0 \leq \delta < 1$ shartda kasr-chiziqli hosil qiluvchi funksiyani

$$F(x) = \frac{\alpha + \beta x}{1 - \delta x},$$

ko’rinishida yozish mumkin. Ma’lukmi, $F(x) = x$ tenglama ikkita ildizga ega:

$A = F'(1) \leq 1$ shartda 1 ga, $A > 1$ da esa birdan boshqa x_0 ($0 < x_0 < 1$) ildizga ham ega. U holda, $F(x)$ funksiya ko’rinishi shu ikkita A va x_0 parametrlar orqali quyidagiga teng:

$$F(x) = 1 - \frac{A(1-x)}{1 + \frac{1-A}{x_0-1}(1-x)}. \quad (1)$$

$F(x)$ ning n – iteratsiyasi ham shu $x_0 = F_n(x_0)$ ildizga ega va $F'_n(1) = F'_{n-1}(1) \cdot F'_1(1) = A^{n-1} \cdot A = A^n$, $n \geq 1$, tenglikni e’tiborga olib (1) dan

$$F_n(x) = 1 - \frac{A^n(1-x)}{1 + \frac{1-A^n}{x_0-1}(1-x)}$$

tenglik hosil bo’ladi. Hosil qiluvchi funksiyalarni ta’riflanishiga ko’ra va taqsimotlarni hisobga olsak $A \neq 1$ holda ehtimolliklar

$$p_0 = 1 - \frac{A(x_0-1)}{x_0-A}, p_k = A \left(\frac{x_0-1}{x_0-A} \right)^2 \left(\frac{1-A}{x_0-A} \right)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

ga, $A = 1$ holda esa

$$p_0 = 1 - \frac{2}{2+B}, p_k = \left(\frac{2}{2+B} \right)^2 \left(\frac{B}{2+B} \right)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

ga teng.

$F'_n(1) = A^n$, $F''_n(1) = Bn$ tengliklardan va yuqoridagi hisoblashlardan

$A \neq 1$ holda

$$P_n(0) = 1 - \frac{A^n(x_0-1)}{x_0-A^n}, P_n(k) = A^n \left(\frac{x_0-1}{x_0-A^n} \right)^2 \left(\frac{1-A^n}{x_0-A^n} \right)^{k-1}, \quad (2)$$

$A=1$ holda esa

$$P_n(0) = 1 - \frac{2}{2+Bn}, P_n(k) = \left(\frac{2}{2+Bn}\right)^2 \left(\frac{Bn}{2+Bn}\right)^{k-1}, k=1,2,\dots \quad (3)$$

tengliklar kelib chiqadi.

(2) va (3) tengliklarda $A \leq 1$

$$1 - P_n(0) \rightarrow 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = 0, n \rightarrow \infty, k \geq 1.$$

munosabatlarni olishimiz mumkin.

Ko'rish mumkinki, $A \leq 1$ holda Q_n ehtimollik nolga intiladi.

$A < 1$ bo'lgan holda $F(x) = x$ tenglamaning ildizi x_0 va (2) munosabatdan $n \rightarrow \infty$ da

$$Q_n = 1 - P_n(0) = A^n \frac{x_0 - 1}{x_0} (1 + o(1))$$

asimptotik tenglik xosil bo'ladi.

1-eslatma. Umumiy holda $A < 1$ bo'lganda A. N. Kolmogorov tomonidan Q_n davom etish ehtimolligi uchun asimptotik formula isbotlangan. U $B = F''(1) < \infty$ ikkinchi faktorial moment mavjud bo'lganda shunday $K > 0$ o'zgarmas son mavjud bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da quyidagi

$$Q_n = KA^n (1 + o(1))$$

asimptotik formulani keltirgan. Demak, kasr-chiziqli hosil qiluvchi funksiyaga ega tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarda Kolmogorov teoremasidagi o'zgarmas

$$K = \frac{x_0 - 1}{x_0}$$

ga teng.

Quyida kasr-chiziqli hosil qiluvchi funksiyaga ega tarmoqlanuvchi jarayon uchun Yaglom teoremasiga o'xshash teorema keltirilgan:

1-teorema. $F(x)$ hosil qiluvchi funksiyaga ega tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayon $\{Z_0 = 1, Z_n, n \geq 1\}$ berilgan bo'lib, unda $A = F'(1) < 1$ shart o'rinli bo'lsin. U holda,

$$p_k^* = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = k / Z_n > 0), \sum_{k=1}^{\infty} p_k^* = 1$$

limit mavjud bo'lib, bunda $p_k^* = \frac{x_0 - 1}{x_0} \left(\frac{1}{x_0}\right)^{k-1}, k \geq 1$

va

$$F^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^* x^k = \frac{(x_0 - 1)x}{x_0 - x}, |x| \leq 1$$

hosil qiluvchi funksiya quyidagi

$$1 - F^*(F(x)) = A(1 - F^*(x))$$

funksional tenglikni qanoatlantiradi.

B.A. Sevast'yanov kritik Gal'ton – Vatson tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar nazariyasidagi asosiy lemmasiga o'xshash bo'lgan quyidagi teoremani keltirgan.

2-teorema. Agar $A=1$, $B < \infty$ bo'lsa, u holda

$$1 - F_n(x) = \frac{1-x}{1 + \frac{Bn}{2}(1-x)} (1 + \varepsilon_n(x))$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq 1} |\varepsilon_n(x)| = 0$.

S.V.Nagayev va R.Muhamadxanovlar $\varepsilon_n(x)$ kattalikning nolga intilish tezligi bahosiga oid teorema isbotlagan:

3-teorema. Agar $A=1$, $B > 0$, $C < \infty$ bo'lsa, u holda

$$\sup_{x \in B_x} \left| 1 - F_n(x) - \frac{1-x}{1 + \frac{Bn}{2}(1-x)} \right| = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda $B_x = \{x, |x| \leq 1, |x-1| \geq r > 0\}$.

Z_n , $n=0,1,2,\dots$ diskret vaqtli tarmoqlanuvchi jarayon berilgan bo'lsin.

A.V.Nagayev va I.S.Badalboyevlar A.N.Kolmogorov asimptotik formulasiga oid quyidagi teoremani isbotlashgan:

4-teorema. Agar $A < 1$ bo'lsa, u holda quyidagi

$$Q_n = KA^n (1 + o(1)) \quad (4)$$

Kolmogorov formulasi o'rinli bo'lishi uchun

$$\int_0^1 \frac{1 - Ax - F(1-x)}{x^2} dx$$

integralning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Dissertatsiyaning **“Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarda ayrim limit teoremlar”** nomli ikkinchi bobida subkritik tarmoqlanuvchi jarayon davom etish ehtimolligi uchun A. N. Kolmogorov teoremasi aniqlashtiriladi. Kritik jarayonning to'rtinchi faktorial momenti mavjud bo'lganda davom etish ehtimolligi uchun asimptotik yoyilma olingan. Bu asimptotik yoyilmadagi o'zgarmaslarning aniq ko'rinishi keltirilgan.

$\{Z_n, n \geq 1\}$ - Gal'ton – Vatson tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayoni berilgan bo'lsin.

5-teorema. X -manfiy bo'lmagan butun qiymatli tasodifiy miqdor bo'lib,

$0 < A = EX < \infty$ va Laplas almshtirishi $\varphi_X(u) = E\left(e^{\frac{-uX}{A}}\right)$, $u \geq 0$ bo'lsin. U holda,

quyidagi o'rta qiymat $EX |\log X| < \infty$ mavjud bo'lishi uchun ixtiyoriy $a > 0$ da

$$\int_0^a u^{-2} |\varphi_X(u) - e^{-u}| du < \infty$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu yerda $\varphi(u) = e^{-u}$, $u \geq 0$ funksiya birlik taqsimotga ega bo'lgan X tasodifiy miqdorning Laplas almashtirishidir.

Kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar davom etish ehtimolligi uchun to'rtinchi faktorial moment $D = F^{(IV)}(1)$ mavjud bo'lganda asimptotik yoyilma olingan.

6-teorema. Agar $A=1, B>0, D<\infty$ bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty$ da Q_n davom etish ehtimolligi uchun quyidagi asimptotik yoyilma o'rinalidir:

$$Q_n = \frac{1}{a_2 n} + \frac{a_3 - a_2^2}{a_2^3} \cdot \frac{\ln n}{n^2} - \frac{K_4}{a_2^2 n^2} + \frac{(a_3 - a_2^2)^2}{a_2^5} \cdot \frac{\ln^2 n}{n^3} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right).$$

Bu yerda
$$a_2 = \frac{B}{2}, a_3 = \frac{C}{3!}, a_4 = \frac{D}{4!},$$

$$K_4 = 1 + 2a_2^2 - a_3 - 2a_2 a_3 + a_4 + \frac{c_1}{a_2} (a_2^2 - a_3) + (a_2^2 - a_3) L_1 I_1 + \\ + (a_2^2 - 2a_2 a_3 + a_4) \left[\frac{\zeta(2)}{a_2^2} + \frac{2L_1 I_2}{a_2} + L_1^2 I_5 \right],$$

$$I_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}, I_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3}, I_5 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^2 k}{k^4}, L_1 = \frac{a_3 - a_2^2}{a_2^3},$$

$$\zeta(l) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{k^l} - \text{Rimanning } \partial zema \text{ funksiyasi, } c_1 - \text{Eylerning doimiysi.}$$

Uzluksiz vaqtli $\{Z(t), 0 \leq t < \infty\}$ Markov tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayoni berilgan bo'lsin.

$d = f^{(IV)}(1) < \infty$ faktorial moment mavjud holni ko'ramiz.

7-teorema. Agar $a=0, d<\infty, b>0$ bo'lsa, u holda $t \rightarrow \infty$ bo'lganda

$$Q(t) = \frac{2}{bt} + \frac{4c}{3b^3} \cdot \frac{\ln t}{t^2} - \frac{4K_4}{b^2 t^2} + \frac{8c^2}{9b^5} \cdot \frac{\ln^2 t}{t^3} - \frac{8c}{9b^4} (c + 6K_4) \cdot \frac{\ln t}{t^3} + o\left(\frac{\ln t}{t^3}\right)$$

asimptotik formula o'rinalidir. Bu yerda

$$K_4 = 1 - \frac{c}{6} \left(t_3 - \frac{4c}{3b^2} \right) + \frac{d}{24} \left(t_4 + \frac{4c}{3b^3} \left(\frac{8c}{3b^4} + 1 \right) + \frac{4}{b} \right), \\ t_3 = \int_0^1 Q(\tau) d\tau, t_4 = \int_0^1 Q^2(\tau) d\tau, 0 < t_4 \leq t_3 \leq 1.$$

B.A.Sevast'yanovning quyidagi teoremasini analitik usulda isbotlandi:

8-teorema. Aytaylik, x -kengaytirilgan natural sonlar to'plami $N_0 = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ dan qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdor bo'lib, uning k -chi faktorial momenti mavjud bo'lsin. U holda x tasodifiy miqdorning hosil qiluvchi funksiyasi uchun quyidagi:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{k-1} F^{(j)}(1) \frac{(x-1)^j}{j!} + R_k(x) \frac{(x-1)^k}{k!}$$

yoyilma o'rinli. Bunda $R_k(x)$ funksiya haqiqiy $0 \leq x \leq 1$ qiymatlarida kamaymaydigan funksiya va $0 \leq R_k(x) \leq F^{(k)}(1)$. Agar x kompleks son bo'lsa, u holda $|x| \leq 1$ sohada quyidagi munosabat o'rinli: $|R_k(x)| \leq F^{(k)}(1)$.

Dissertatsiyaning “**Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar uchun o'tish holatlarida limit teoremlar**” deb nomlangan uchinchi bobi B. A. Sevastyanovning “O'tish holatlari” haqidagi limit teoremlarini umumlashtirish va bu teoremadagi qoldiq hadning bahosini hisoblash masalalariga bag'ishlangan. Katta sondagi va tasodifiy sondagi zarrachalardan boshlanuvchi tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar uchun limit teoremlar keltirilgan.

Quyidagi tarmoqlanuvchi jarayonlar oilasini olaylik $\{Z_n = Z_n(A), 0 < A < \infty\}$, bu yerda $A = F'(1)$. Umumiy holda, bu masala $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ bo'lganda $\{Z_n = Z_n(A), 0 < A < \infty\}$ oilaning asimptotik holatlarini va taqsimotini o'rganishdan iborat.

B. A. Sevast'yanov quyidagi hosil qiluvchi funksiyalar sinfi $K(B_0, C_0)$ ni kiritgan:

$K(B_0, C_0) = \{F(x) : F''(1) = B \geq B_0 > 0, F'''(1) = C \leq C_0 < \infty\}$ va bu sinfga tegishli bo'lgan hosil qiluvchi funksiyalar uchun quyidagi teoremani isbotlagan:

9-teorema. Agar $F(x) \in K(B_0, C_0)$, $|x| \leq 1$ bo'lsa, istalgan $F(x)$ hosil qiluvchi funksiyalar uchun $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ bo'lganda

$$1 - F_n(x) = r_n(x)(1 + \eta_n(x))$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda

$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{A^n(1-x)}{1 + \frac{B}{2} \cdot \frac{A^n-1}{A-1}(1-x)}, & A \neq 1, \\ \frac{1-x}{1 + \frac{Bn}{2}(1-x)}, & A = 1, \end{cases} \quad \text{va } \eta_n(x) \rightarrow 0.$$

9-teoremani isbotlashda quyidagi ko'rinishda aniqlangan $g(n, A)$ funksiyaning xossalardan foydalaniladi:

$$g(n, A) = \begin{cases} \frac{A^n-1}{A-1}, & A \neq 1, \\ n, & A = 1. \end{cases}$$

1-lemma. $g(n, A)$ funksiya har bir o'zgaruvchi bo'yicha o'suvchi bo'ladi, ikkinchi argument fiksirlangan holda va barcha $n \geq 2$ va $A > 0$ ning qiymatlarida quyidagi tengsizlik o'rinlidir:

$$g(n, A) \geq \frac{1}{2} \min \left(n, \frac{1}{|1-A|} \right).$$

9-teoremadagi yaqinlashish tezligi bahosiga oid quyidagi teorema isbotlangan:

10-teorema. Agar $|A-1| \cdot n \rightarrow R, 0 \leq R < \infty$ bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ va $|x-1| \geq \delta > 0$ bo'lganda $1 - F_n(x) = r_n(x)(1 + \eta_n(x))$ tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda istalgan $F(x) \in K(B_0, C_0)$ hosil qiluvchi funksiyalar uchun

$$\sup_{|x-1| \geq \delta > 0} |\eta_n(x)| = O\left(\frac{\ln g(n, A)}{g(n, A)}\right).$$

Agar $|A-1| \cdot n \rightarrow \infty$ bo'lsa, u holda

$$\sup_{|x-1| \geq \delta > 0} |\eta_n(x)| = O\left(\max\left(|A-1|, \frac{\ln g(n, A)}{g(n, A)}\right)\right).$$

Bu 10-teoremadan foydalanib ko'rsatkichli taqsimotga yaqinlashish tezligi baholangan:

11-teorema. Agar $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ va $|x-1| \geq \varepsilon > 0$ bo'lsa, u holda barcha $F(x) \in K(B_0, C_0)$ hosil qiluvchi funksiyalar uchun

$$\sup_x |S_n(A, x) - S(x)| = O\left(\ln g(n, A) \cdot \max\left(|A-1|, \frac{\ln g(n, A)}{g(n, A)}\right)\right)$$

asimptotik tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda

$$S_n(A, x) = P\left\{\frac{Z_n}{E^*(n)} < x / Z_n > 0\right\}$$

va

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{agar } x > 0. \end{cases}$$

Qaralayotgan jarayon boshlang'ich holatda k ta zarrachaga ega bo'lsin deb faraz qilamiz. k ta zarrachadan boshlanuvchi jarayonning n vaqt momentidagi zarrachalar sonini $\nu_{k,n}$ deb bilgilaymiz. Bu holda qaralayotgan jarayonning ta'rifiga ko'ra

$$\nu_{k,n} = Z_1(n) + Z_2(n) + \dots + Z_k(n) \quad (5)$$

bo'lib, bu yerda $Z_i(n) - i$ - zarrachaning n vaqt momentidagi hosil qilgan zarrachalar soni.

n vaqt momentida (5) yig'indidagi musbat hadlar sonini ρ deb belgilasak, u holda ρ tasodifiy miqdor binomial taqsimotga ega bo'ladi:

$$P(\rho = r) = C_k^r Q_n^r (1 - Q_n)^{k-r}, \quad 0 \leq r \leq k \quad \text{va matematik kutilmasi } E\rho = kQ_n \text{ ga teng.}$$

Ko'rish mumkinki, $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ bo'lganda

$$kQ_n \sim \gamma = \begin{cases} \frac{kA^n}{1 + \frac{B}{2} \cdot \frac{1-A^n}{1-A}}, & \text{agar } A \neq 1, \\ \frac{k}{1 + \frac{Bn}{2}}, & \text{agar } A = 1. \end{cases}$$

asimptotik tenglik o‘rinli.

Belgilash kiritamiz: $\overline{Q_n} = P\{\nu_{k,n} > 0\} = 1 - (1 - Q_n)^k$,

$$\overline{E} = E\nu_{k,n} = kA^n, \quad \overline{E}^* = E(\nu_{k,n} / \nu_{k,n} > 0) = \frac{\overline{E}}{\overline{Q_n}} = \frac{kA^n}{1 - (1 - Q_n)^k}.$$

Quyidagi shartli taqsimot funksiyani o‘rganamiz:

$$H_{n,k}(A, x) = P\left\{\frac{\nu_{k,n}}{\overline{E}^*} \leq x / \nu_{k,n} > 0\right\}.$$

12-teorema. Agar $k \rightarrow \infty, A \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ va $kQ_n \rightarrow \gamma$ bo‘lsa, u holda, barcha $0 < \gamma < \infty$ va $F(x) \in K(B_0, C_0)$ hosil qiluvchi funksiyalar uchun

$$\sup_x |H_{n,k}(A, x) - h(x, \gamma)| = O\left(\ln g(n, A) \cdot \max\left(|A-1|, \frac{\ln g(n, A)}{g(n, A)}\right)\right)$$

munosabat o‘rinli bo‘lib, bu yerda

$$h(x, \gamma) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\gamma e^{-\gamma}}{(1 - e^{-\gamma})^{\frac{3}{2}}} \int_0^x y^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{y\gamma}{1 - e^{-\gamma}}\right\} I\left(2\gamma\sqrt{\frac{y}{1 - e^{-\gamma}}}\right) dy, & x > 0, \end{cases}$$

va $I(y) = \frac{y}{2} + \frac{1}{1!2!}\left(\frac{y}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{y}{2}\right)^5 + \dots$ – Bessel funksiyasi.

Boshlang‘ich holatda ξ tasodifiy sondagi zarrachalardan boshlanuvchi diskret vaqtli tasodifiy tarmoqlanuvchi jarayonni ko‘ramiz. ξ tasodifiy miqdor musbat, butun qiymatli bo‘lib, $E\xi = m$ matematik kutilmaga va $D\xi = \sigma^2 > 0$ dispersiyaga ega bo‘lsin. $Z_{n\xi}$ - n vaqt momentidagi zarrachalar soni. Qaralayotgan jarayon ta’rifidan kelib chiqadiki, $Z_{n\xi}$ tasodifiy miqdor bog‘liqsiz, bir hil taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning tasodifiy sondagi yig‘indisi ko‘rinishida ifodalanadi:

$$Z_{n\xi} = Z_1^{(n)} + Z_2^{(n)} + \dots + Z_\xi^{(n)}, \quad Z_i^{(0)} = 1.$$

Bu yerda $Z_i^{(n)}$ - i -zarrachaning n -avloddagi hosil qilgan zarrachalar soni bo‘lib, u bitta zarrachadan boshlanuvchi Gal‘ton – Vatson jarayonining n vaqt momentidagi Z_n zarrachalar soni bilan bir hil taqsimlangan. Jarayonning hosil

qiluvchi funksiyasini kiritsak: $\Lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = k)x^k$, $F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k)x^k$, $|x| \leq 1$.

Keltirilgan bu hosil qiluvchi funksiyalar uchun quyidagi teorema isbotlangan:

13-teorema. Agar $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ va $|x-1| \geq \varepsilon > 0$ bo‘lsa, u holda

$$1 - \Lambda(F_n(x)) = \overline{r}_n(x)(1 + \eta_n(x))$$

tenglik o‘rinli bo‘lib, bu yerda

$$\bar{r}_n(x) = \begin{cases} \frac{mA^n(1-x)}{1 + \frac{B}{2}g(n,A)(1-x)}, & A \neq 1, \\ \frac{m(1-x)}{1 + \frac{Bn}{2}(1-x)}, & A = 1, \end{cases}$$

va

$$\sup_{F(x) \in K(B_0, C_0)} |\eta_n(x)| = O \left(\max \left(|A-1|, \frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)} \right) \right).$$

14-teorema. Agar $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ va $|x-1| \geq \varepsilon > 0$ bo'lsa, u holda

$$\sup_x |S_{n\xi}(x) - S_m(x)| = O \left(\ln mg(n,A) \cdot \max \left(|A-1|, \frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)} \right) \right)$$

tenglik barcha $F(x) \in K(B_0, C_0)$ hosil qiluvchi funksiyalar uchun o'rinli, bo'lib bu yerda

$$S_{n\xi}(x) = P \left\{ \frac{Z_{n\xi}}{E(Z_{n\xi} / Z_{n\xi} > 0)} < x / Z_{n\xi} > 0 \right\}$$

va

$$S_m(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{m}}, & \text{agar } x > 0, \\ 0, & \text{agar } x \leq 0. \end{cases}$$

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishi tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning asimptotik tahlili(analizi)ga bag'ishlangan. Dissertatsiya kirish va uchta bobdan iborat. Kirish qismida tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning kelib chiqish tarixi va uning umumiy tasodifiy jarayonlar nazariyasidan alohida ajralib chiqishi qisqacha bayon qilingan.

Dissertatsiyada ko'rilgan masalalar va ularning qisqacha mazmuni quyidagilar:

kasr-chiziqli hosil qiluvchi funksiyalarga ega bo'lgan tarmoqlanuvchi jarayonlarning ta'rifi, uchta tipdagi tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar uchun olingan klassik asimptotik natijalarning mazmuni bayon qilingan. Amalda mavjud bo'lgan tarmoqlanuvchi jarayonlar ta'rifiga teng kuchli bo'lgan ta'rif keltirilgan va bu ta'rif Gal'ton-Vatson tasodifiy jarayonlarini o'zaro bog'liqsiz tasodifiy sondagi manfiy bo'lmagan butun qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarning yig'indisi shaklida ifodalash mumkin ekanligiga asoslangan;

subkritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning davom etish ehtimolligi uchun Kolmogorov tomonidan isbotlangan asimptotik formuladagi o'zgarmas koeffisientning mavjud bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shart topilgan. To'rtinchi faktorial momentlari mavjud bo'lgan kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar davom etish ehtimolligi uchun asimptotik yoyilmalar olingan, bunday yoyilmalardagi o'zgarmas koeffisientlarning aniq qiymatlari topilgan;

diskret vaqtli tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarda o'tish holatlariga tegishli bo'lgan limitik teoremlarda limitik taqsimotga intilish tezligi uchun baho topilgan. Mazkur intilish tezligi bahosidan foydalanib, ko'p sondagi zarrachalardan boshlanuvchi tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar uchun limitik teorema isbotlangan. Shunga o'xshash limitik teorema tasodifiy sondagi zarrachalardan boshlanuvchi tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar uchun ham isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

ЖУРАЕВ ШУКУР ЮСУПОВИЧ

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент–2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за № В2019.4.PhD/FM437.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице по адресу <http://kengash.mathinst.uz> и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу <http://www.ziynet.uz>.

Научный руководитель:

Форманов Шакир Касимович

доктор физико-математических наук, академик

Официальные оппоненты:

Шарипов Олимжон Шукурович

доктор физико-математических наук, профессор

Азимов Джахонгир Бахромович

кандидат физико-математических наук, доцент

Ведущая организация:

Наманганский инженерно-строительный институт

Защита диссертации состоится « 24 » декабря 2024 года в 16: на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 191). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 46. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 04 » декабря 2024 года.

(протокол рассылки № 2 от « 04 » декабря 2024 года).



У.А.Розиков

Заместитель председателя Научного совета по присуждению учёных степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К.Адашев

учёный секретарь Научного совета по присуждению учёных степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Я.М. Хусанбаев

Заместитель председателя Научного семинара при Научном совете по присуждению учёных степеней, д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Теория ветвящихся процессов является моделью многочисленных реальных явлений размножения и превращения частиц в естественных и общественных науках. Ветвящиеся случайные процессы играют важную роль при изучении задач в демографии, медицине, химии, биологии, а также при генетическом кодировании и управлении популяциями. Поэтому научные исследования по теории ветвящихся случайных процессов являются актуальной и важной задачей в современной теории вероятностей.

На сегодняшний день изучение асимптотики ветвящихся процессов, близких к критическим, представляет собой одну из центральных задач теории вероятностей. В данном направлении выполнено множество исследований, касающихся переходных явлений в этих процессах. Однако, в таких предельных теоремах не найдены оценки скорости сходимости остаточных членов. Остаются неизученными предельные теоремы и оценки скорости сходимости остаточных членов, связанные с переходными явлениями в ветвящихся случайных процессах, начинающихся с большого или случайного числа частиц. Задача об асимптотическом разложении вероятности продолжения ветвящихся процессов и явных значений коэффициентов в этих разложениях до конца не изучена. Поэтому в число целевых задач входят: нахождение асимптотики процессов, достаточно близких к критическим ветвящимся процессам, доказательство предельных теорем о переходных явлениях в процессах, начинающихся со случайного числа и большого числа частиц, а также оценка остаточного члена в теоремах о переходных явлениях в ветвящихся процессах.

В нашей стране особое внимание уделяется актуальным направлениям теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов как фундаментальное и практическое применение математики, имеющих большое практическое значение, в частности, к изучению асимптотики распределений и условных распределений ветвящихся случайных процессов. В результате были достигнуты существенные результаты в исследовании асимптотики распределений ветвящихся процессов. Проведение научных исследований на основе международных стандартов по приоритетным направлениям «Теория вероятностей и математическая статистика» является одной из основных задач и направлений деятельности². В связи с этим актуальным и важным является развитие научных исследований в области теории ветвящихся процессов.

Тема и объект исследования настоящей диссертационной работы соответствуют поручениям, обозначенным в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по даль-

² Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

нейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан», и № УП-4708 от 7 мая 2020 года «О повышении качества обучения в сфере математики и о мерах развития научных исследований», также настоящее диссертационное исследование в определенной мере служит реализации задач, определенных в постановлениях и других нормативных правовых актах, касающихся данной деятельности.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Научные исследования сделанной в диссертационной работе соответствуют выше изложенным постановлениям о развитие науки и технологий в Республике Узбекистан и действующей государственной программе. Данное исследование было выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Первоначальные работы по изучению ветвящихся случайных процессов были выполнены Ф. Гальтоном, У. Ватсоном, А.Н. Колмогоровым, Б. Севастьяновым, Н. А. Дмитриевым, А.М. Ягломом, С.В. Нагаевым, Т.Харрисом, Г.Кестеном, П. Нейом. Предельным теоремам для ветвящихся процессов посвящены работы А.Н. Колмогорова, Б. Севастьянова, В. Золотарева, В. Чистякова, С.В. Нагаева, А.В. Нагаева, Р.Белмана, П. Нея, Т.Харриса, Ф.Л. Спитцера, К.Б. Атрея, И. С. Бадалбаева, А.М. Зубкова, В.А. Ватутина, Ш. К. Форманова, И. Рахимова, Я.М.Хусанбаева и других. Научные исследования о переходных явлениях в ветвящихся процессах были проведены Б.А. Севастьяновым, С.В. Нагаевым, В.А. Ватутиным, Р.И. Мухамедхановой, Ш. К. Формановым, И. С. Бадалбаевым, И. Рахимовым, Я.М.Хусанбаевым и другими.

Известно, что одна из исходных теорем теории ветвящихся процессов посвящена исследованию асимптотики вероятности продолжения ветвящегося процесса. А. Н. Колмогоров доказал асимптотическую формулу для вероятности продолжения докритических и критических ветвящихся процессов. А. В. Нагаев и И. С. Бадалбоев получили необходимые и достаточные условия справедливости асимптотической формулы Колмогорова для вероятности продолжения докритического процесса. А.М. Яглом определил асимпотику условных распределений докритических и критических процессов и показал, что условное распределение соответствующим образом нормированного критического ветвящегося процесса слабо сходится к экспоненциальному распределению, в случае,

когда число поколений одной частицы имеет конечный третий момент. R. Heathcote, E. Seneta, Vane-Jones также изучали условия существования асимптотической формулы Колмогорова. Предельные теоремы для вероятности продолжения критических процессов, а также результаты по оценкам остаточных членов в этих предельных теоремах были доказаны в работах Б. А. Севастьянова, П. Нея и К. Б. Атрея. При условии существования факториального момента четвёртого порядка для вероятности продолжения критического процесса с дискретным временем С.В. Нагаев и Р.И. Мухамедханова получили асимптотическое разложение. Такая задача для процессов с непрерывным временем была решена В. П. Чистяковым. Ряд работ по переходным явлениям в ветвящихся процессах принадлежат Б. А. Севастьянову. Б. А. Севастьянов вводя класс производящих функций $K(B_0, C_0) = \{F(x) : F''(1) = B \geq B_0 > 0, F'''(1) = C \leq C_0 < \infty\}$ изучал асимптотические свойства ветвящихся процессов, принадлежащих этому классу и доказал ряд предельных теорем. В работах С.В. Нагаева и Р.И. Мухамедхановой доказаны предельные теоремы о переходных явлениях в ветвящихся процессах с дискретным временем.

Следует отметить, что вышеизложенные результаты требуют ряда уточнений. Для критических ветвящихся процессов получение асимптотического разложения для вероятности продолжения и нахождение явных выражений для постоянных коэффициентов в таких разложениях, оценка скорости сходимости остаточного члена в предельных теоремах о переходных явлениях в процессах Гальтона-Ватсона, доказательство и оценка скорости сходимости остаточного члена для процессов, начинающихся с большого числа и со случайного числа частиц, являются актуальными задачами научных исследований.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена по плану лаборатории «Стохастический анализ» Института математики им. В. И. Романовского АН РУз. и кафедрой математики Кокандского государственного педагогического института.

Целью исследования является изучения асимптотических задач ветвящихся процессов с использованием возможности представление этого процесса в виде суммы случайного числа случайных величин (случайные суммы).

Задачи исследования:

для ветвящихся случайных процессов с дробно-линейными производящими функциями доказать предельные теоремы, определить класс предельных распределений для критических ветвящихся процессов Гальтона - Ватсона;

уточнить асимптотическое разложения для вероятностей продолжения критических ветвящихся процессов при существовании факториального момента четвёртого порядка и находить явное выражение для постоянных коэффициентов;

изучение предельных теорем о переходных явлениях в ветвящихся процессах Гальтона - Ватсона;

находить общий вид оценки скорости сходимости остаточного члена в предельных теоремах о переходных явлениях в процессах Гальтона - Ватсона.

Объект исследования – Критические ветвящихся процессы Гальтона-Ватсона, переходные явления в процессах Гальтона - Ватсона.

Предмет исследования – Числовые характеристики ветвящихся процессов, вероятность продолжения таких процессов, переходные явления в ветвящихся процессах, производящие функции рассматриваемых процессов.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы современной теории вероятностей, аналитические методы производящих и характеристических функций и методы математического анализа.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

установлен точный вид неизвестной константы в асимптотической формуле Колмогорова для вероятности продолжения ветвящихся процессов с дробно-линейными производящими функциями;

найден асимптотическое разложение для вероятностей продолжения критических ветвящихся процессов с дискретным и непрерывным временем, получено явное выражение для постоянных коэффициентов в этих разложениях;

получена скорость сходимости к нулю остаточного члена в предельных теоремах о переходных явлениях в ветвящихся процессах;

доказана и получена скорость сходимости остаточного члена в предельных теоремах о переходных явлениях в ветвящихся процессах, начинающихся с большого числа и со случайного числа частиц.

Практические результаты исследования заключаются в предложении выразить математические модели распространения определённой популяции через ветвящиеся процессы и описании методов установления предельных распределений этих случайных процессов.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью применения асимптотических методов современной теории вероятностей и математической статистики.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость полученных результатов состоит в их применении для изучения предельных теорем, связанных с переходными явлениями в ветвящихся процессах.

Практическая значимость диссертации состоит: результаты применяются при получении новых результатов и статистических выводов о распределениях эволюции некоторой популяции частиц и при изучении биологических, цифровых анализах и криптографиях, медицине и в генетических задачах.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных предельных теорем для критических процессов Гальтона-Ватсона были внедрены:

асимптотическое разложение для вероятностей продолжения критических процессов Гальтона – Ватсона было использовано для описания асимптотических свойств ветвящихся процессов в научном проекте G00003447 «Квантовые генетические алгебры и их приложения» для исследования динамических систем порождаемых стохастическими рекуррентными процессами (Справка Университета Объединенных Арабских Эмиратов от 15 ноября 2023 г., ОАЭ). Применение научного результата позволило описать предельное распределение динамических систем с дискретным временем;

результаты о предельных теорем для ветвящихся процессов были использованы при прогнозировании биологических и химических процессов в практическом проекте ФА-Атех-2018-4 «Разработка виртуальных методов молекулярной оптимизации при разработке новых лекарств: углубление машинного обучения и понимание прогнозных моделей биологических процессов» (Справка института Математики № 1/543 от 06 декабря 2023 г.). Применение научного результата позволило моделировать ситуации, возникающие в биологических процессах.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были обсуждены на 3 международных и 4 республиканских научно – практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 14 научных работ, из них 7 входят в перечень научных изданий, предположенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 2 из них опубликована в зарубежных журналах и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 98 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введение, трёх глав, заключение и список литературы.

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, под названием «**Ветвящиеся случайные процессы порождённые дробно–линейными производящими функциями**» определяются ветвящиеся процессы (ВП) с дробно–линейными произ-

водящими функциями и приведены некоторые их свойства. Далее приводятся классические результаты по предельным теоремам для ветвящихся процессов дробно – линейными производящими функциями. В §1.1 даётся определение ветвящихся процессов порождённые дробно – линейными производящими функциями и приведены числовые характеристики, производящая функция, а также некоторые ее свойства. §1.2 - §1.3 приведены известные результаты по предельным теоремам для ветвящихся процессов.

Пусть $\{\xi_j^{(n)}, j, n \in N\}$ - последовательность независимых, одинокого распределённых случайных величин, принимающих значения из множество $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Определение 1. Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин $\{Z_n, n \in Z_+\}$ определяемой рекуррентной формулой

$$Z_0 = 1, Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \xi_j^{(n)}, n \geq 1$$

называется ветвящимся случайным процессом Гальтона – Ватсона. Здесь $\xi_j^{(n)}$ – число потомков j -ой частицы, принадлежащий $(n-1)$ -му поколению в процессе Гальтона – Ватсона с распределением $P(\xi_j^{(1)} = k) = P(Z_1 = k) = p_k$.

Определение 2. Производящей функцией случайной величины Z_1 называется функция $F(x) = E x^{Z_1} = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k) x^k, \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_1 = k) = 1, |x| \leq 1$.

Определение 3. n -ой итерацией производящей функции $F(x)$ называется последовательность функций $F_0(x) = x, F_1(x) = F(x), F_{n+1}(x) = F_n(F(x)), n \geq 1$. Математическое ожидание величины Z_1 в процессе Гальтона – Ватсона равна $A = E\xi = E(Z_1 / Z_0 = 1) = F'(1)$.

Определение 4. Процесс Гальтона – Ватсона называется докритическим, критическим и надкритическим, если $0 < A < 1, A = 1, A > 1$, соответственно.

Обычно, в теории ветвящихся процессов используют следующие обозначения: $A = E\xi = F'(1), B = E\xi(\xi - 1) = F''(1), C = E\xi(\xi - 1)(\xi - 2) = F'''(1)$.

Определение 5. Если в процессе Гальтона – Ватсона к моменту времени $n, Z_n = 0$, то говорят, что процесс вырождена к моменту времени n . Вероятность $P_n(0) = P(Z_n = 0)$ называют вероятностью вырождения процесса в момент времени n . Вероятность $Q_n = P(Z_n > 0) = 1 - F_n(0)$ является вероятностью продолжения процесса Гальтона – Ватсона. В общем случае можно записать дробно – линейную производящую функцию в виде:

$$F(x) = \frac{\alpha + \beta x}{1 - \delta x}, \quad 0 \leq \delta < 1.$$

Как хорошо известно, что уравнение $F(x) = x$ всегда имеет два корня: 1 при $A = F'(1) \leq 1$, и другой корень, который существует при $A > 1$, мы обозна-

чим через x_0 ($0 < x_0 < 1$). Выражая оставшиеся два независимые коэффициенты через числа A и x_0 , получаем следующие представления:

$$F(x) = 1 - \frac{A(1-x)}{1 + \frac{1-A}{x_0-1}(1-x)}. \quad (1)$$

Поскольку n -я итерация п. ф. $F(x)$ имеет тот же самый корень $x_0 = F_n(x_0)$ и $F'_n(1) = F'_{n-1}(1) \cdot F'_1(1) = A^{n-1} \cdot A = A^n$, $n \geq 1$, то получим

$$F_n(x) = 1 - \frac{A^n(1-x)}{1 + \frac{1-A^n}{x_0-1}(1-x)}$$

По определению п. ф. и $p_k = P(Z_1 = k)$, $P_n(k) = P(Z_n = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ следует, что при $A \neq 1$

$$p_0 = 1 - \frac{A(x_0 - 1)}{x_0 - A}, \quad p_k = A \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 - A} \right)^2 \left(\frac{1 - A}{x_0 - A} \right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно при $A = 1$,

$$p_0 = 1 - \frac{2}{2+B}, \quad p_k = \left(\frac{2}{2+B} \right)^2 \left(\frac{B}{2+B} \right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поскольку $F'_n(1) = A^n$, что при $A \neq 1$

$$P_n(0) = 1 - \frac{A^n(x_0 - 1)}{x_0 - A^n}, \quad P_n(k) = A^n \left(\frac{x_0 - 1}{x_0 - A^n} \right)^2 \left(\frac{1 - A^n}{x_0 - A^n} \right)^{k-1}, \quad (2)$$

и при $A = 1$ имеет место равенство $F''_n(1) = Bn$ и вытекают следующие формулы:

$$P_n(0) = 1 - \frac{2}{2+Bn}, \quad P_n(k) = \left(\frac{2}{2+Bn} \right)^2 \left(\frac{Bn}{2+Bn} \right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Из формул (2), (3) очевидным образом следует, что при $A \leq 1$

$$1 - P_n(0) \rightarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = 0, \quad k \geq 1, \quad n \rightarrow \infty$$

Легко видеть, что вероятность продолжения процесса Q_n при $A \leq 1$ стремится к нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 0$$

Далее заметим, что при $A < 1$ решение уравнения $F(x) = x$, обозначаемое через $x_0 > 1$ и следует, что $P_n(0) = F_n(0) = 1 - \frac{A^n(x_0 - 1)}{x_0 - A^n}$. Последнее соотношение перепишем в виде

$$Q_n = 1 - P_n(0) = A^n \frac{x_0 - 1}{x_0} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Замечание 1. В общем случае при $A < 1$ асимптотика вероятностей продолжения процесса Q_n установлена А. Н. Колмогоровым. Он доказал, что если существует $B = F''(1) < \infty$, то существует положительная константа $K > 0$, такая, что

$$Q_n = KA^n (1 + o(1)), n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, для в. с. п., порожденных дробно – линейных п. ф., константа в теореме Колмогорова равна

$$K = \frac{x_0 - 1}{x_0}.$$

Следующая теорема представляет собой аналог известной теоремы Яглома для в. с. п. с дробно – линейной п. ф.

Теорема 1. Пусть $\{Z_0 = 1, Z_n, n \geq 1\}$ ветвящийся случайный процесс с дробно – линейной производящей функцией $F(x)$, для которой $A = F'(1) < 1$. Тогда, существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = k / Z_n > 0) = P_k^*, \sum_{k=1}^{\infty} P_k^* = 1$$

где $P_k^* = \frac{x_0 - 1}{x_0} \left(\frac{1}{x_0} \right)^{k-1}, k \geq 1$

и производящая функция $F^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^* x^k = \frac{(x_0 - 1)x}{x_0 - x}, |x| \leq 1$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$1 - F^*(F(x)) = A(1 - F^*(x))$$

Б.А.Севастьяновым приведена следующая теорема, которая представляет собой аналог основной леммы для критических в. с. п. Гальтона – Ватсона.

Теорема 2. Пусть $A = 1, B < \infty$. Тогда

$$1 - F_n(x) = \frac{1 - x}{1 + \frac{Bn}{2}(1 - x)} (1 + \varepsilon_n(x)),$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq 1} |\varepsilon_n(x)| = 0$.

С.В.Нагаев и Р.Мухамедханова получили оценку скорости сходимости к нулю величины $\varepsilon_n(x)$.

Теорема 3. Пусть $A = 1, B > 0, C < \infty$. Тогда

$$\sup_{x \in B_x} \left| 1 - F_n(x) - \frac{1 - x}{1 + \frac{Bn}{2}(1 - x)} \right| = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

где $B_x = \{x, |x| \leq 1, |x - 1| \geq r > 0\}$.

Пусть $Z_n, n = 0, 1, 2, \dots$, ветвящийся случайных процесс с дискретным временем и с одним типом частиц.

А. В. Нагаев и И. С. Бадалбаев доказали следующую теорему:

Теорема 4. Если $A < 1$, то асимптотическая формула Колмогорова

$$Q_n = KA^n (1 + o(1)) \quad (4)$$

справедлива тогда и только тогда, когда интеграл

$$\int_0^1 \frac{1 - Ax - F(1-x)}{x^2} dx$$

сходится.

Вторая глава диссертации, под названием «Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся случайных процессов» посвящена асимптотическому анализу ветвящихся процессов, а также асимптотическому разложению вероятности продолжения для ветвящихся процессов с дискретным и непрерывным временем.

Пусть Z_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, ветвящийся случайный процесс с дискретным временем и с одним типом частиц.

Теорема 5. Пусть X - неотрицательная целочисленная случайная величина удовлетворяет условию $0 < m = EX < \infty$ и имеет преобразование Лапласа

$$\varphi_X(u) = E \left(e^{\frac{-uX}{m}} \right), u \geq 0. \quad \text{Тогда для существования среднего значения}$$

$EX |\log X| < \infty$ необходима и достаточна сходимость интеграла

$$\int_0^a u^{-2} |\varphi_X(u) - e^{-u}| du$$

при любом $a > 0$. Здесь функция $\varphi(u) = e^{-u}$, $u \geq 0$ является преобразованием Лапласа случайной величины X имеющий единичное распределение.

Переходим теперь к рассмотрению случая, когда существует факториальный момент $D = F^{(IV)}(1) < \infty$.

Теорема 6. Если $A=1$, $B > 0$, $D < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$Q_n = \frac{1}{a_2 n} + \frac{a_3 - a_2^2}{a_2^3} \cdot \frac{\ln n}{n^2} - \frac{K_4}{a_2^2 n^2} + \frac{(a_3 - a_2^2)^2}{a_2^5} \cdot \frac{\ln^2 n}{n^3} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

где

$$a_2 = \frac{B}{2}, a_3 = \frac{C}{3!}, a_4 = \frac{D}{4!},$$

$$K_4 = 1 + 2a_2^2 - a_3 - 2a_2 a_3 + a_4 + \frac{c_1}{a_2} (a_2^2 - a_3) + (a_2^2 - a_3) L_1 I_1 +$$

$$+ (a_2^2 - 2a_2 a_3 + a_4) \left[\frac{\zeta(2)}{a_2^2} + \frac{2L_1 I_2}{a_2} + L_1^2 I_5 \right],$$

$I_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$, $I_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3}$, $I_5 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^2 k}{k^4}$, $L_1 = \frac{a_3 - a_2^2}{a_2^3}$, $\zeta(l) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^l}$ - дзета функция Римана, c_1 - постоянная Эйлера.

Пусть $\{Z(t), 0 \leq t < \infty\}$ - ветвящихся процесс с непрерывным временем и $d = f^{(IV)}(1) < \infty$.

Теорема 7. Если $a = 0$, $b > 0$, $d < \infty$, то при $t \rightarrow \infty$

$$Q(t) = \frac{2}{bt} + \frac{4c}{3b^3} \cdot \frac{\ln t}{t^2} - \frac{4K_4}{b^2 t^2} + \frac{8c^2}{9b^5} \cdot \frac{\ln^2 t}{t^3} - \frac{8c}{9b^4} (c + 6K_4) \cdot \frac{\ln t}{t^3} + o\left(\frac{\ln t}{t^3}\right)$$

где

$$K_4 = 1 - \frac{c}{6} \left(t_3 - \frac{4c}{3b^2} \right) + \frac{d}{24} \left(t_4 + \frac{4c}{3b^3} \left(\frac{8c}{3b^4} + 1 \right) + \frac{4}{b} \right),$$

$$t_3 = \int_0^1 Q(\tau) d\tau, \quad t_4 = \int_0^1 Q^2(\tau) d\tau, \quad 0 < t_4 \leq t_3 \leq 1.$$

Мы доказали следующую теорему Б.А. Севастьянова аналитическим методом.

Теорема 8. Пусть k -й факториальный момент случайной величины x , со значениями из расширенного множества натуральных чисел $N_0 = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ конечен. Тогда имеет место разложение производящей функции

$$F(x) = \sum_{j=0}^{k-1} F^{(j)}(1) \frac{(x-1)^j}{j!} + R_k(x) \frac{(x-1)^k}{k!},$$

причем $R_k(x)$ при действительных $0 \leq x \leq 1$ не убывает по x , и

$$0 \leq R_k(x) \leq F^{(k)}(1),$$

а при комплексных $|x| \leq 1$

$$|R_k(x)| \leq F^{(k)}(1)$$

и при $x \rightarrow 1$

$$R_k(x) \rightarrow F^{(k)}(1).$$

В третьей главе диссертации, названной «Предельных теоремах о переходных явлениях для ветвящихся случайных процессов» получена оценка скорости сходимости в предельных теоремах о переходных явлениях в ветвящихся случайных процессах и сходимости к показательному закону. Переходные явления в процессах, начинающихся с большого числа частиц, получена оценка скорости сходимости в предельных теоремах о переходных явлениях в ветвящихся случайных процессах начинающегося с большого числа и со случайного числа частиц.

В силу изложенных рассуждений представляет особый интерес исследования асимптотического поведения ветвящихся случайных процессов близким к критическим. Впервые на эти задачи обратил внимания Б. А. Севастьянов и он указал на постановку этих задач в следующем виде: рассматривается семейства ветвящихся случайных процессов

$$\{Z_n = Z_n(A), 0 < A < \infty\}$$

где параметр семейства $A = F'(1)$. Общая задача состоит в нахождении предельного поведения величины $\{Z_n = Z_n(A), 0 < A < \infty\}$ при $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$.

Б. А. Севастьянов ввел класс функций $K(B_0, C_0)$:

$K(B_0, C_0) = \{F(x) : F''(1) = B \geq B_0 > 0, F'''(1) = C \leq C_0 < \infty\}$ и доказал следующую теорему:

Теорема 9. Выполняется равенство

$$1 - F_n(x) = r_n(x)(1 + \eta_n(x))$$

где

$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{A^n(1-x)}{1 + \frac{B}{2} \cdot \frac{A^n-1}{A-1}(1-x)}, & \text{при } A \neq 1, \\ \frac{1-x}{1 + \frac{Bn}{2}(1-x)}, & \text{при } A = 1, \end{cases}$$

а $\eta_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ и равномерно по всем функциям $F(x) \in K(B_0, C_0)$, $|x| \leq 1$.

При доказательстве теоремы 9 существенно используются соответствующие свойства функции $g(n, A)$, определяемой равенством:

$$g(n, A) = \begin{cases} \frac{A^n - 1}{A - 1}, & \text{при } A \neq 1, \\ n, & \text{при } A = 1. \end{cases}$$

Лемма 1. Функция $g(n, A)$ возрастает по каждому аргументу при фиксированном втором аргументе. При всех $n \geq 2$ и $A > 0$ имеет место неравенство

$$g(n, A) \geq \frac{1}{2} \min\left(n, \frac{1}{|1-A|}\right)$$

Мы изучаем оценки скорости сходимости к нулю величины $\eta_n(x)$ в теореме 9.

Теорема 10. Пусть $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ и $|x-1| \geq \delta > 0$.

Тогда выполняется равенство $1 - F_n(x) = r_n(x)(1 + \eta_n(x))$ и,

если $|A-1| \cdot n \rightarrow R, 0 \leq R < \infty$, то $\sup_{|x-1| \geq \delta > 0} |\eta_n(x)| = O\left(\frac{\ln g(n, A)}{g(n, A)}\right)$,

а если $|A-1| \cdot n \rightarrow \infty$, то $\sup_{|x-1| \geq \delta > 0} |\eta_n(x)| = O\left(\max\left(\frac{\ln g(n, A)}{g(n, A)}, |A-1|\right)\right)$ равномерно по всем производящим функциям $F(s) \in K(B_0, C_0)$ и $|x| \leq 1$.

Теорема 11. Если $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ и $|x-1| \geq r > 0$, тогда

$$\sup_x |S_n(A, x) - S(x)| = O\left(\ln g(n, A) \cdot \max\left(|A-1|, \frac{\ln g(n, A)}{g(n, A)}\right)\right),$$

равномерно по классу производящих функций $F(x) \in K(B_0, C_0)$.

где $S_n(A, x) = P\left\{\frac{Z_n}{E(Z_n / Z_n > 0)} < x / Z_n > 0\right\}$ и $S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$

Пусть в начале процесса имеется k частиц. Обозначим $\nu_{k,n}$ число частиц к моменту времени n , если процесс начался с k частиц. В этом случае

$$\nu_{k,n} = Z_1(n) + Z_2(n) + \dots + Z_k(n) \quad (5)$$

где $Z_i(n)$ – число частиц, произведённое i -й частицей за время n . Пусть случайная величина ρ означает число положительных слагаемых в (5) к моменту времени n . Случайная величина ρ имеет биномиальное распределение $P\{\rho = r\} = C_k^r Q_n^r (1 - Q_n)^{k-r}$, $0 \leq r \leq k$ с математическим ожиданием $E\rho = kQ_n$. Далее при $n \rightarrow \infty, A \rightarrow 1$ имеем

$$kQ_n \sim \gamma = \begin{cases} \frac{kA^n}{1 + \frac{B}{2} \cdot \frac{1-A^n}{1-A}}, & \text{при } A \neq 1, \\ \frac{k}{1 + \frac{Bn}{2}}, & \text{при } A = 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$\overline{Q}_n = P\{\nu_{k,n} > 0\} = 1 - (1 - Q_n)^k, \quad \overline{E} = E\nu_{k,n} = kA^n,$$

$$\overline{E}^* = E(\nu_{k,n} / \nu_{k,n} > 0) = \frac{\overline{E}}{\overline{Q}_n} = \frac{kA^n}{1 - (1 - Q_n)^k}.$$

Будем изучать условный закон распределения

$$H_{n,k}(A, x) = P\left\{\frac{\nu_{k,n}}{\overline{E}^*} \leq x / \nu_{k,n} > 0\right\}.$$

Теорема 12. Если $k \rightarrow \infty, A \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ и $kQ_n \rightarrow \gamma$, то

$$\sup_x |H_{n,k}(A, x) - h(x, \gamma)| = O\left(\ln g(n, A) \cdot \max\left(|A-1|, \frac{\ln g(n, A)}{g(n, A)}\right)\right),$$

равномерно по всем $0 < \gamma < \infty$ и $F(x) \in K(B_0, C_0)$,

$$\text{где } h(x, \gamma) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\gamma e^{-\gamma}}{(1 - e^{-\gamma})^{\frac{3}{2}}} \int_0^x y^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{y\gamma}{1 - e^{-\gamma}}\right\} I\left(2\gamma \sqrt{\frac{y}{1 - e^{-\gamma}}}\right) dy, & x > 0 \end{cases}$$

а $I(y) = \frac{y}{2} + \frac{1}{1!2!}\left(\frac{y}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{y}{2}\right)^5 + \dots$ – функция Бесселя.

Рассмотрим ветвящийся случайный процесс с дискретным временем начинающихся со случайного числа ξ частиц. Предполагается, что случайная величина ξ – положительная и целочисленная с математическим ожиданием $E\xi = m$ и дисперсией $D\xi = \sigma^2 > 0$.

Пусть $Z_{n\xi}$ – число частиц к моменту времени n . Как легко следует из определение рассматриваемого процесса, случайная величина (с. в.) $Z_{n\xi}$ представимо в виде суммы независимых, одноклоного распределённых случайных величин со случайного числа слагаемых:

$$Z_{n\xi} = Z_1^{(n)} + Z_2^{(n)} + \dots + Z_{\xi}^{(n)}, \quad (Z_i^{(0)} = 1)$$

где $Z_i^{(n)}$ – число частиц, произведённое i -ой частицей за n поколений. (i – номер частицы), причём с. в. $Z_i^{(n)}$ – одноклоного распределены с Z_n – число частиц к моменту времени n в процессе Гальтона – Ватсона начинающегося с одной частицы.

Введём теперь производящие функции рассматриваемых здесь случайных величин $\Lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = k) x^k$, $F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k) x^k$, $|x| \leq 1$.

Теорема 13. Пусть $n \rightarrow \infty$, $A \rightarrow 1$ и $|x-1| \geq \varepsilon > 0$. Тогда выполняется равенство $1 - \Lambda(F_n(x)) = \bar{r}_n(x)(1 + \eta_n(x))$,

$$\text{где } \bar{r}_n(x) = \frac{mA^n(1-x)}{1 + \frac{B}{2}g(n,A)(1-x)}, \quad \sup_{|x-1| \geq \varepsilon > 0} |\eta_n(x)| = O\left(\frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\right),$$

равномерно по всем производящим функциям $F(s) \in K(B_0, C_0)$ и $|x| \leq 1$.

Теорема 14. Пусть $n \rightarrow \infty$, $A \rightarrow 1$ и $|x-1| \geq \varepsilon > 0$. Тогда

$$\sup_x |S_{n\xi}(x) - S_m(x)| = O\left(\ln mg(n,A) \cdot \max\left(|A-1|, \frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\right)\right)$$

равномерно по всем $F(s) \in K(B_0, C_0)$, где

$$S_{n\xi}(x) = P\left\{\frac{Z_{n\xi}}{E(Z_{n\xi} / Z_{n\xi} > 0)} < x / Z_{n\xi} > 0\right\}$$

и

$$S_m(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{m}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена асимптотическому анализу ветвящихся процессов. Диссертационная работа состоит из введения и трёх глав. Во введении вкратце излагается история возникновения и становления ветвящихся процессов как самостоятельной ветви из общей теории случай-

ных процессов и отмечается актуальность решаемых в диссертации задач и основное её содержание.

даётся определение ветвящихся процессов с дробно – линейными производящими функциями и приводятся классические результаты по асимптотическим результатам всех трёх типов ветвящихся процессов. Использовано эквивалентное определение к существующему определению ветвящихся случайных процессов. Это определение связано с возможностью представить случайных процессов Гальтона – Ватсона в виде суммы случайного числа слагаемых независимых случайных величин принимающих неотрицательные целочисленные значения (случайные суммы);

для докритических ветвящихся процессов найдены необходимые и достаточные условия для существования постоянного коэффициента в асимптотической формуле для вероятности продолжения процесса в теореме А. Н. Колмогорова. Получено асимптотическое разложение для вероятности продолжения критических ветвящихся процессов, имеющих факториальные моменты четвертого порядка, а также выведены явные выражения для постоянных величин, входящих в такие разложения;

получена скорость сходимости к предельным распределениям в предельных теоремах о переходных явлениях в ветвящихся процессах с дискретным временем. Пользуясь скорости сходимости была доказана предельная теорема для ветвящихся процессов, начинающегося с большого числа частиц. Аналогичная предельная теорема доказана также для ветвящихся процессов, начинающихся со случайного числа частиц.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED
AFTER V.I. ROMANOVSKIY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

JURAEV SHUKUR YUSUPOVICH

**ASYMPTOTIC ANALYSIS OF CRITICAL BRANCHING
RANDOM PROCESSES**

01.01.05 - Probability theory and mathematical statistics

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent-2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at of Ministers of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2019.4.Phd/FM437.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website <http://kengash.mathinst.uz> and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal <http://www.ziynet.uz/>.

Scientific supervisor:

Formanov Shakir Kasimovich

Doctor of physical and mathematical sciences,
Academician

Official opponents:

Sharipov Olimjon Shukurovich

Doctor of physical and mathematical sciences, Professor

Azimov Jakhongir Bahromovich

Candidate of physical and mathematical sciences, Docent

Leading organization:

Namangan engineering-construction institute

Defense will take place " 24 " December 2024 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmash@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered № 191). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on « 04 » December 2024 year
(Mailing report № 2 on « 04 » December 2024 year)



U.A.Rozikov

Chair of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., academician

J.K.Adashev

Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

Ya. M. Xusanbaev

Deputy Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., docent

INTRODUCTION (abstract of (PhD) thesis)

The aim of the research work is to analyze asymptotic problems of branching processes using the possibility of representing this process as a sum of a random number of random variables.

The object of research: a study of limit theorems for random sums for "stochastic" analyses of critical branching Galton-Watson processes.

Scientific novelty of the research is as follows

in branching random processes with fractional linear driving functions in the asymptotic Kolmogorov formula for the probability of continuation of the process, the exact form of the unknown constant is established ;

asymptotic expansion for the probability of continuation of critical branching processes with discrete and continuous time is found, an explicit expression for the constant coefficients in such expansions is obtained;

the rate of convergence to zero of the residual term in the limit theorems on transient phenomena for branching processes is obtained;

the rate of convergence to zero of the residual term in the limit theorems on transient phenomena for branching processes starting from a large number and from a random number of particles is proved and obtained.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation were used in the following research projects:

asymptotic expansion for continuation probabilities of critical Galton-Watson processes was used to describe the asymptotic properties of branching processes in the scientific project G00003447 "Quantum genetic algebras and their applications" for the study of dynamic systems generated by stochastic recurrent processes (Reference from the University of the United Arab Emirates dated November 15, 2023, UAE). The application of the scientific result made it possible to describe the limit distribution of dynamic systems with discrete time;

the results on limit theorems for branching processes were used in predicting biological and chemical processes in the practical project FA-Atech-2018-4 "Development of virtual methods of molecular optimization in the development of new drugs: deepening machine learning and understanding predictive models of biological processes" (Reference from the Institute of Mathematics No. 1/543 dated December 06, 2023). The application of scientific results made it possible to model situations arising in biological processes.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 98 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (Часть I; Part I)

1. Formanov Sh. K., Juraev Sh. Yu., On Transient Phenomena in Branching Random Processes with Discrete Time. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol.42, No.12, pp.2777-2784, (Scopus. IF=0.378).
2. Formanov Sh. K., Juraev Sh. Yu., Refining the Main Lemma of the Theory of Critical Branching Random Processes. AIP Conference Proceedings 2365, 060010-1-060010-10 (2021) (Scopus IF=0.177).
3. Formanov Sh. K., Juraev Sh. Yu., Estimation of the degree of convergence in limit theorems on transition phenomena for the branching random processes. Uzbek Mathematical Journal, 2020, No 4, pp.32-39.(01.00.00; №6)
4. Жураев Ш. Ю. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона, порожденные дробно-линейной производящей функцией. Бюллетень Института математики. 2019 г., N 6, стр. 17-22. (01.00.00; №17)
5. Жураев Ш. Ю. Некоторые предельные теоремы для критических ветвящихся случайных процессов. Бюллетень Института математики. 2020 г., N 4, 60-66 стр. (01.00.00; №17).
6. Jo'rayev Sh. Yu., Kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar davom etish ehtimolligi asimptotik yoyilmasini aniqlashtirish haqida. NamDU Ilmiy axborotnomasi, 2024 yil 4-son, 35-38 betlar. (01.00.00; №14)
7. Жураев Ш. Ю., Об уточнениях асимптотического разложения продолжения критических ветвящихся случайных процессов. Научный вестник НамГУ, 2024, выпуск 9, стр. 41-44. (01.00.00; №14)

II bo'lim (Часть II; Part II)

8. Жураев Ш. Ю., Об уточнениях асимптотического разложения продолжения критических ветвящихся случайных процессов. Вестник Краунц. Физ.-мат. науки. 2020 г. Т. 32. N 3. 34-43 стр.
9. Жураев Ш. Ю., Алиев А. Ф., Оценка скорости сходимости в предельных теоремах о переходных явлениях для ветвящихся случайных процессов. Вестник Краунц. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 36. No 3. С. 15-28
10. Жураев Ш.Ю. Tarmoqlanuvchi diskret tasodifiy jarayonlar davom etish ehtimolligi uchun asimptotik baholar. Материалы Республиканской научной конференции "Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики" 30 апреля-1 мая 2019 год, Ташкент, 87-88 стр.
11. Жураев Ш. Ю. О локальной предельной теореме для ветвящихся случайных процессов Гальтона-Ватсона. Scientific Conference Abstracts CODS-2019, Andijan, October 17-19, 2019, p.137-138.

12. Жураев Ш.Ю., Туракулов Х. Некоторые предельные теоремы для ветвящихся случайных процессов Гальтона-Ватсона. Тезисы докладов Международной научной конференции на тему "Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики" том II, 12-13 марта, 2020 год, Фергана, 181-183 стр.
13. Жураев Ш.Ю. Асимптотические разложения для вероятностей продолжения критических ветвящихся случайных процессов. ABSTRACTS of the Uzbekistan-Malaysia international online conference COMPUTATIONAL MODELS AND TECHNOLOGIES, 24-25 August, Ташкент, 2020, p.192.
14. Жураев Ш.Ю. Некоторые предельные теоремы для критических ветвящихся случайных процессов. "Стохастик тахлилнинг замонавий муаммолари" мавзусидаги илмий конференция, 21-22 сентябрь, Ташкент, 2020, стр.179.
15. Жураев Ш.Ю. О переходных явлениях для ветвящихся случайных процессов Гальтона-Ватсона. "Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики", тезисы докладов конференции, 25 сентябрь 2020, Карши, стр. 86-88.
16. Жураев Ш.Ю. Оценка скорости сходимости в предельных теоремах о переходных явлениях для ветвящихся случайных процессов. Proceedings of scientific conference "Actual problems of stochastic analysis" dedicated to the 80th anniversary of the birth of academician Sh. K. Formanov, February 20-21, 2021, Tashkent, pp. 140-142.
17. Formanov Sh. K., Juraev Sh. Yu. On transient phenomena for branching processes close to critical ones. XIII Белорусская математическая конференция, материалы Международной научной конференции, Минск, 20-25 ноября 2021 года.

**Avtoreferat «O‘zbekiston matematika jurnali» tahririyatida
2024 yil 11-noyabrda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi
matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.**

Bosmaxona litsenziyasi



9338

Bichimi: 84x60 ¹/₁₆. «Times New Roman» garniturası.

Raqamli bosma usulda bosildi.

Shartli bosma tabog'i: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 43/24.

Guvohnoma № 851684.

«Tipograff» MChJ bosmaxonasida chop etilgan.

Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko'chasi, 83-uy.

