V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

ALLAMBERGENOV ALLAYAR XASANBAEVICH

OKTONION VA OKUBO ALGEBRALARIDA LOKAL DIFFERENSIALLASHLAR VA LOKAL AVTOMORFIZMLAR

01.01.06 – Algebra

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

UDK: 512.554.38

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

ALLAMBERGENOV ALLAYAR XASANBAEVICH

OKTONION VA OKUBO ALGEBRALARIDA LOKAL DIFFERENSIALLASHLAR VA LOKAL AVTOMORFIZMLAR

01.01.06 – Algebra

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent – 2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.3.PhD/FM1137 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Nukus davlat pedagogika instituti va Matematika institutilarida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (www. kengash.mathinst.uz) va "ZiyoNet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Arzikulov Farxodjon Nematjonovich** fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
	Turdibaev Rustam Mirzalievich fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), katta ilmiy xodim
Yetakchi tashkilot:	**O'zbekiston milliy universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025 yil 21-yanvar kuni soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (195-raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40.

Disertatsiya avtoreferati 2024 yil 27-dekabr kuni tarqatiladi.
(2024 yil 27-dekabrdagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

U.A.Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., akademik

J.K.Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.,
katta ilmiy xodim

A.R.Hayotov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash huzuridagi ilmiy seminar
raisi o'rinbosari, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Algebraning har xil sohalariga, jumladan kompozitsion algebralarga, ya'ni ularning kriptografiya, kompyuter ilmlari va boshqada sohalarda tadbiq qilish imkoniyatlari kengligi sababli qiziqish ortib bormoqda. Noassosiativ algebralar nazariyasining muammolari koʻp yillar davomida dolzarb boʻlib qolmoqda. Umuman olganda, kompozitsion algebralarni oʻrganish matematikaning muhim va dolzarb sohasi boʻlib, u fundamental va amaliy tadqiqotlarda keng tadbiqlariga hamda potensial rivojlanish istiqbollariga ega.

Hozirgi kunda differensiallashlar nazariyasi bilan bir qatorda, operator algebralarida lokal va 2-lokal differensiallashlar nazariyasi ham muhim hisoblanadi. Oxirgi yigirma yil davomida fon Neyman algebralari, C^* - algebralarida lokal va 2-lokal differensiallashlar nazariyasini oʻrganish boʻyicha samarali natijalarga erishildi. Noassosiativ algebralar jumladan, oktonion algebralari va Okubo algebralari uchun lokal va 2-lokal differensiallashlarni oʻrganish hozirgi kunning dolzarb muammolaridan biri hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqiga ega boʻlgan amaliy matematika, informatika, raqamli iqtisodiyot fanlariga e'tibor kuchaytirildi. Jumladan, noassosiativ algebralar va ularning operatorlariga doir fundamental tadqiqotlarning rivojlanishiga ham alohida e'tibor qaratildi. Bu fundamental tadqiqotlar doirasida chekli oʻlchamli noassosiativ algebralarda lokal va 2-lokal differensiallashlarini oʻrganish borasida salmoqli natijalarga erishildi. Ilmiy ishning asosiy vazifasi[1] "Algebra va funksional analiz" ustuvor yoʻnalishlari boʻyicha xalqaro standartlar darajasida tadqiqot olib borishdan iborat. Ilmiy natijalarni tegishli fan sohasida qoʻllash uchun chekli oʻlchamli noassosiativ algebralar nazariyasini ishlab chiqish belgilangan vazifaning bajarilishini ta'minlashda muhim ahamiyatga ega.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947 «Oʻzbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish boʻyicha harakatlar strategiyasi toʻgʻrisida»gi Farmoni, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789 «Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora tadbirlari toʻgʻrisida»gi, 2018 yil 27 apreldagi PQ-3682 «Innovatsion gʻoyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida»gi va 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387 «Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qoʻllab-quvvatlash, shuningdek, Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida»gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

---

[1] Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar mahkamasining 2017 yil 18 maydagi "Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish toʻgʻrisida"gi 292-sonli qarori.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. So‘nggi yillarda klassik tizimlarning assosiativ bo‘lmagan analoglari matematika va fizikaning ko‘plab sohalarida qo‘llanilishi bilan qiziqish uyg‘otmoqda. Li va Leybnits algebralari kabi ba’zi noassosiativ algebralar uchun ham lokal operatorlar, xususan lokal va 2-lokal differensiallashlar (avtomorfizmlar) tushunchalari tadqiqotning asosiy ob’ektlariga aylandi. Ushbu tushunchalarga aloqador asosiy muammolar har bir lokal (yoki 2-lokal) differensiallash va avtomorfizm oddiy ma’noda differensiallash va avtomorfizm bo‘ladigan shartlarni topish, shuningdek, differensiallash bo‘lmagan (mos ravishda avtomorfizm) lokal va 2-lokal differensiallashga ega algebralar sinflarini aniqlashdan iboratdir. Ta’kidlash joizki, noassosiativ algebralar uchun lokal akslantirishlarni o‘rganish, 2014 yildagi AQShning Kaliforniya shtatida bo‘lib o‘tgan AQSh-O‘zbekiston konferensiyasidagi professor Sh.A.Ayupov va professor E.Zelmanovlar (Kaliforniya universiteti, San-Diego) o‘rtasidagi suhbatdan so‘ng boshlangan. Xarakteristikasi nolga teng algebraik yopiq maydon ustida chekli o‘lchamli Li algebralarida lokal va 2-lokal differensiallashlar va avtomorfizmga oid yurtimizda bir qator ilmiy izlanishlar olib borilib, dastlabki natijalar Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov, I.S.Raximov va Z.Chen va D.Wanglarga tegishlidir. Sh.A.Ayupov va K.K.Kudaybergenovlar tomonidan chekli o‘lchamli yarim sodda Li algebralaridagi har bir lokal differensiallashning oddiy ma’noda differensiallash ekanligi isbotlangan va differensiallash bo‘lmagan lokal differensiallashga ega chekli o‘lchamli nilpotent Li algebralariga misollar keltirdilar.

Sh.A.Ayupov va K.K.Kudaybergenovlar tomonidan xarakteristikasi >5 algebraik yopiq $\mathbb{F}$ maydon ustida klassik sodda $\mathfrak{g}$ Li algebrasi, maydon xarakteristikasi n ning bo‘luvchisi bo‘lgandagi $\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}_n(\mathbb{F})$ algebrasi bundan istisno bo‘lganda har qanday lokal differensiallashlar differensiallashlar bo‘lishini isbotladilar. Shuningdek, $char\mathbb{F} = 2,3$ bo‘lgan maydonlardagi ayrim oddiy Li algebralaridagi lokal differensiallashlar tavsiflangan va ularda differensiatsiyallash bo‘lmagan lokal differensiallashlar mavjud ekanligi isbotlangan. Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov, I.S.Raximovlar tomonidan yarim sodda Li algebrasidagi har bir 2-lokal differensiallash oddiy ma’noda differensiallash ekanligi hamda o‘lchami ikkidan katta ixtiyoriy nilpotent Li algebrasida differensiallash bo‘lmagan 2-lokal differensiallash mavjudligi isbotlandi.

Sodda Li algebralar uchun 2-lokal avtomorfizmlar Z.Chen va D. Wanglar tomonidan o‘rganila boshlanib, ular tomonidan A_l, D_l yoki $E_k, (k = 6,7,8)$ algebralar uchun har qanday 2-lokal avtomorfizm avtomorfizm ekanligi isbotlangan. Keyinchalik, Sh.A.Ayupov va K.K.Kudaybergenovlar tomonidan ushbu natija umumlashtirilib, xarakteristikasi nol bo‘lgan algebraik yopiq maydon ustida berilgan ixtiyoriy chekli o‘lchamli yarim sodda Li algebrasining har qanday 2-lokal avtomorfizmi avtomorfizm ekanligini isbotlandi. Bundan tashqari, ixtiyoriy chekli o‘lchamli nilpotent Li algebrasida avtomorfizm bo‘lmagan 2-lokal avtomorfizm mavjudligi ko‘rsatildi. Sh.A.Ayupov va K.K.Kudaybergenovlar tomonidan ba’zi chekli o‘lchamli sodda Li va Leybnits algebralarining lokal avtomorfizmlari ham o‘rganildi. T.Beker, J.Eskobar, C.Salas va R.Turdibaevlar uch o‘lchamli sodda Li algebrasining barcha lokal avtomorfizmlari to‘plami barcha avtomorfizmlar va anti-avtomorfizmlar gruppasi bilan usma-ust tushishini ko‘rsatishgan bo‘lsa, keyinchalik, M.Kostantini sodda Li algebrasidagi chiziqli akslantirishning lokal avtomorfizm bo‘lishi uchun uning avtomorfizm yoki anti-avtomorfizm bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotladi. Li superalgebralaridagi lokal va 2-lokal avtomorfizmlar va differensiallashlarga doir natijalarni X.Chen, Y.Vang va J.Nanlarning ishlarida ko‘rish mumkin. Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov va B.A.Omirovlar sodda Leybnits algebralarida lokal va 2-lokal differensiallash va avtomorfizmlarni o‘rganib, Li algebralaridagi kabi natijalarni isbotladilar. Noassosiativ algebralarda lokal va 2-lokal differensiallashlar bilan bog‘liq natijalardan, tabiiy ravishda oktonion algebrasi va Okubo algebralarida lokal va 2-lokal differensiallashlarning tuzilishi haqida savol kelib chiqadi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi.

Dissertatsiya tadqiqoti V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining “Operator algebralarining avtomorfizmlari, cheksiz o‘lchamli noassosiativ algebralar va super algebralarning klassifikatsiyalari” (F-FA-2021-423) mavzusidagi fundamental loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi oktonion algebrasida lokal va 2-lokal differensiallashlar va avtomorfizmlari hamda etti o‘lchamli sodda Malsev algebrasi va Okubo algebrlarining lokal va 2-lokal differensiallashlarini tasniflashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

Oktonion algebrasining lokal va 2-lokal differensiallashlari va avtomorfizmlarini o‘rganish;

7 o‘lchamli sodda Malsev algebrasining lokal va 2-lokal differensiallashlar va avtomorfizmlarini tavsiflash;

Okubo algebrasining lokal va 2-lokal differensiallashlarini o‘rganish.

Tadqiqotning ob’ekti: oktonion algebrasi, 7 o‘lchamli sodda Malsev algebrasi va Okubo algebrasi.

Tadqiqotning predmeti: ba’zi noassosiativ algebralarda differensiallash bo‘lmagan lokal va 2-lokal differensiallashlari va avtomorfizmlarining mavjudligi hamda lokal va 2-lokal differensiallashlar sinflari bilan oddiy ma’noda differensiallashlarning sinflari o‘zaro bog‘liqligi masalalari.

Tadqiqotning usullari: Dissertatsiyada noassosiativ algebralar nazariyasi usullari, invariantlar nazariyasi usullari qo‘llanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

xarakteristikasi nolga teng bo‘lgan maydonda berilgan oktonion algebrasining lokal avtomorfizmlari tasniflangan hamda uning ixtiyoriy 2-lokal differensiallashi va avtomorfizmlari mos ravishda differensiallash va avtomorfizm ekanligi isbotlangan;

haqiqiy sonlar maydonida berilgan oktonion algebrasi va etti oʻlchamli sodda Malsev algebrasi sodda noassosiativ algebralarida differensiallash boʻlmagan lokal differensialllash mavjud ekanligi isbotlangan;

etti oʻlchamli sodda Malsev algebrasining lokal va 2-lokal avtomorfizmlari tasniflangan;

Okubo algebrasining har qanday lokal va 2-lokal differensiallashlari differensiallash ekanligi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Oktonion algebralarida lokal, 2-lokal differensiallashlar va differensiallashlar orasidagi bogʻliqlik aniqlandi.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Natijalar algebra, differensiallashlar nazariyasi hamda matematik mulohazalarning qatʼiyligi bilan asoslangan. Olingan natijalar matematik jihatdan toʻgʻri isbotlangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati olingan natijalar noassotsiativ algebra nazariyasiga muhim hissa qoʻshadi, ularning simmetriya va strukturaviy xususiyatlarini tushunishga yordam beradi. Ushbu dissertatsiyada ishlab chiqilgan usullar Leybnits algebralari, Malsev algebralari va boshqa Li algebralari umumlashmalariga oʻxshash boshqa algebra sinflarida lokal va 2-lokal differensiallashlar hamda avtomorfizmlarni oʻrganishga qoʻllanilishi mumkin.

Dissertatsiyaning amaliy ahamiyati olingan natijalar noassosiativ algebralarning differensiallashlar nazariyasida qoʻllanilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi: Oktonion va Okubo algebralarida lokal differensiallashlar va lokal avtomorfizmlar boʻyicha olingan natijalar asosida:

oktonion algebralarning lokal differensiallashlari va avtomorfizmlari tasniflaridan «Algebra, geometriya va analizning sintetik usullari bilan funksional fazolar operatorlarini oʻrganish va uning axborot-taʼlimiy taʼminoti» mavzusidagi xorijiy ilmiy-tadqiqot loyihasida funksional fazolar operatorlarini tavsiflashda qoʻllanilgan (Janubiy matematika institutining 2024 yil 29-oktyabrdagi №9-sonli maʼlumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalarni qoʻllanishi operatorlarni algebra va analizning sintetik usullari yordamida tavsiflash imkonini bergan;

haqiqiy sonlar maydonida berilgan oktonion algebrasi va etti oʻlchamli sodda Malsev algebrasi lokal differensiallashlarida AP23489146 raqamli «Tenzorlarning funksional invariantlari» mavzusidagi xorijiy loyihada assosiativ va nokommutativ algebralarining differensiallashlarini tahlil qilishda foydalanilgan (Matematika va matematik modellashtirish institutining 2024 yil 4-noyabrdagi №01-06/186-sonli maʼlumotnomasi, Qozogʻiston). Ilmiy natijalarni qoʻllanishi assosiativ algebralarning differensiallashlarini va nokommutativ Novikov algebralarini strukturaviy xossalarni isbotlashni imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy mazmuni quyidagi xalqaro va respublika miqyosida oʻtkazilgan ilmiy anjumanlarda muhokama qilingan: «Tabiiy fanlarni rivojlantirishda axborot kommunikatsiya texnologiyalarining oʻrni» (Nukus, 2021), «Matematika va axborot tizimlarining dolzarb masalalari» (Urganch, 2021), «Operator algebralar, noassosiativ tuzilmalar va turdosh masalalar» (Toshkent, 2022), «Matematik analiz va uning zamonaviy matematik fizikaga qo‘llanilishi xalqaro konferensiyasi» (Samarqand, 2022), «Matematik modellashtirish va axborot texnologiyalarining dolzarb masalalari xalqaro konferensiyasi» (Nukus, 2023), «Amaliy matematika, matematik modellashtirish va informatikaning dolzarb muammolari» (Nukus, 2024), «Raqamli texnologiyalardan foydalanib ta’lim sifatini oshirishning dolzarb muammolari xalqaro konferensiyasi» (Nukus, 2024).

Dissertatsiyada olingan natijalar O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Matematika institutining «Operatorlar algebralari va ularning tadbiqlari», O‘zbekiston Milliy universitetining «Zamonaviy algebra va uning tatbiqlari» ilmiy seminarlarida muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 11 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 4 ta maqola, jumladan, 1 tasi xorijiy, 3 tasi respublika jurnallarida va 7 ta tezis nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qism, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissetatsiyaning umumiy hajmi 82 bet.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

“Oktonion va Okubo algebralari haqida asosiy ma’lumotlar” deb nomlangan birinchi bobida noassosiativ algebralar nazariyasidan zarurli tushunchalar va yordamchi natijalar berilgan. XIX-asr o‘rtalarida Gamilton [2] tomonidan kvaternionlarning kashf qilinishidan ko‘p o‘tmay Keli [3] va Graves [4] tomonidan oktonionlar kashf qilinadi. Ular haqiqiy sonlar maydoni ustida chekli o‘lchamli bo‘lish amaliga ega algebralarining to‘rtta ma’lum turlaridan birini ifodalaydi: haqiqiy sonlar, kompleks sonlar, kvaternionlar va oktonionlar. Oktonionlarni o‘rganish nafaqat o‘ziga xos algebraik xossalari, balki matematika va fizikaning turli sohalari bilan chuqur aloqadorligi tufayli ham qiziqish uyg‘otadi. Oktonionlar algebrasi haqida ko‘proq ma’lumotni Baezning [5] ishida topish mumkin.

1-ta’rif. Agarda birlik elementga ega C algebrasida xosmas N kvadratik forma mavjud bo‘lib, bu kvadratik forma uchun

$$N(xy) = N(x)N(y) \quad (x, y \in C)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda C algebrasi $\mathbb{K}$ maydoni ustida kompozitsion algebra deyiladi.

Kompozitsion algebralarga misol sifatida $\mathbb{R}-$ haqiqiy sonlar maydoni, $\mathbb{C}-$

[2] W.R. Hamilton, On Quaternions; or a new System of Imaginaries in Algebra, Phil. Mag. ser.3 25 489 (1845).
[3] A. Cayley, On Jacobi's Elliptic Functions, in reply to the Rev. Brice Bronwin and on Quaternions, The London and Edinburgh philosophical magazine and journal of science 3, 210 (1845).
[4] W.R. Hamilton, Note regarding the researches of John T. Graves, Esq., Transactions of the Royal Irish Academy, 21, 338 (1848).
[5] Baez J .C. The octonions. Bulletin of the American Mathematical Society, 39 (2002) p. 145 – 205.

kompleks sonlar maydoni, $\mathbb{H}$ – kvaternionlar algebrasi va $\mathbb{O}$ – oktonionlar algebrasini keltirish mumkin. Bulardan dastlabki uchtasi assosiativ algebralar bo‘lsa, $\mathbb{O}$ algebrasi alternativ noassosiativ algebra bo‘ladi.

C algebrasidagi N kvadratik forma norma deyiladi va u bilan bog‘liq bo‘lgan $\langle \cdot , \cdot \rangle$ bichiziqli formani esa skalyar ko‘paytma deymiz. Agarda C ning chiziqli qism fazosi skalyar ko‘paytmaga nisbatan nosingulyar bo‘lsa, u holda chiziqli qism fazo nosingulyar deyiladi. C kompozitsion algebrasining qism algebrasi yoki kompozitsion qism algebra deganda, C algebraning birlik elementini va ko‘paytirish amaliga nisbatan yopiq bo‘lgan nosingulyar D chiziqli qism fazo tushiniladi.

Kompozitsion C algebrasida $a = \langle x,e\rangle e + x,\ \ x \in C$ elementining qo‘shmasi $\overline{a} = \langle x,e\rangle e - x,\ \ x \in C$ ko‘rinishidagi element bo‘ladi.

Aytaylik, $\mathbb{F}$ xarakteristikasi nolga teng maydon bo‘lsin. Agarda A algebrasining ixtiyoriy x, y elementlari uchun

$$x(xy) = (xx)y,\ \ (xy)y = x(yy)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda A algebrasi alternativ algebra deyiladi.

Aytaylik, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ algebrasi $\mathbb{F}$ maydoni ustida oktonionlar algebrasi bo‘lsin, ya’ni $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ multiplikativ N kavdratik formaga ega 8 o‘lchamli unital alternativ algebra bo’lib, $N : \mathbb{O}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}$ akslantirish uchun quyidagilar o‘rinli:

- har qanday $\lambda \in \mathbb{F},\ x \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ uchun $N(\lambda x) = \lambda^2 N(x)$;
- quyidagi

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\big(N(x+y) - N(x) - N(y)\big)$$

ko‘rinishda aniqlangan $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{O}_{\mathbb{F}} \times \mathbb{O}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}$ akslantirish bichiziqlidir;

- ixtiyoriy $x, y \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ uchun $N(xy) = N(x)N(y)$;
- har qanday $y \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ uchun $\langle x, y\rangle = 0$ bo‘lsa, u holda $x = 0$.

Agar $\langle x, y\rangle = 0$ bo‘lsa, u holda $x, y \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ elementlari ortogonal deyiladi ($x \perp y$ ko‘rinishda belgilanadi). $x \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ elementi uchun uning ortogonal to‘ldiruvchisi

$$x^{\perp} = \left\{ y \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}} : x \perp y \right\}$$

to‘plamidan iborat bo‘ladi.

$\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ algebrasining $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sistemasi ortonormal sistema deyiladi, agarda quyidagi shart o‘rinli bo‘lsa:

$$\langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{agarda } i = j, \\ 0, & \text{agarda } i \neq j. \end{cases}$$

$\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ oktonionlar algebrasining tipi I deyiladi, agarda har qanday i uchun $e_i^2 = -1$ bo‘lgan $\{1, e_1, \ldots, e_7\}$ ortonormal bazis mavjud bo‘lsa, aks holda tipi II deyiladi. Agar $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ algebraning tipi II bo‘lsa, u holda algebra ajraluvchan algebra bo‘lib, $\{1, e_1, \ldots, e_7\}$ ortonormal bazisi uchun quyidagilar bajariladi:

• agar $i \le 3$ bo‘lsa $e_i^2 = -1$, aks holda $e_i^2 = 1$;

• $1, e_1, e_2, e_3$ chiziqli qobig‘i $\mathbb{F}$ maydoni ustida $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ kvaternionlar algebrasiga izomorf bo‘ladi.

Birlik elementi $e_0 = 1$ ga teng tipi I bo‘lgan oktonionlar algebrasini qaraymiz. Ko‘paytirish qoidasini $e_1 e_2 = e_4$ teng deb hisoblab va quyidagi qoida orqali aniqlash mumkin:

$$e_i e_j = -e_j e_i,\ i \ne j,$$
$$e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1},$$
$$e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k},$$

bu yerda qo‘shish va ko‘paytirish 7 moduli bo‘yicha amalga oshiriladi va $1 \le i, j, k \le 7$.

$\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ algebraning tipi I bo‘lganligi uchun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bichiziqli formani quyidagicha aniqlash mumkin:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i \beta_i,$$

bu yerda $x = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i e_i,\ \ y = \sum_{i=0}^{7} \beta_i e_i \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafda Okubo algebrasi haqida asosiy tushunchalarni keltiramiz. Okubo algebrasi birinchi bo‘lib yaponiyalik olim Susumo Okubo [6] tomonidan haqiqiy va kompleks sonlar maydoni ustida tasniflangan. Undan keyin A. Elduk va X. Myunglar[7] S. Okuboning natijalarini ixtiyoriy $\mathbb{F}$, $char\,\mathbb{F} \ne 2$ maydoni uchun, keyin esa $char\,\mathbb{F} = 2$ uchun umumlashtirgan.

2-ta’rif. Aytaylik, $\mathcal{S}$ $*$ ko‘paytirish amali va n normaga ega kompozitsion algebra bo‘lsin. Agar normaning qutbiy shakli assosiativ bo‘lsa, ya’ni har qanday $x, y, z \in \mathcal{S}$ uchun

$$n(x * y, z) = n(x, y * z) \qquad (1)$$

tenglik bajarilsa, $\mathcal{S}$ kompozitsion algebrani simmetrik kompozitsion algebra deyiladi.

3-ta’rif. Xarakteristikasi 3 dan farq qiladigan $\mathbb{F}$ maydon ustida $(\mathcal{O}, *, n)$ – simmetrik kompozitsion algebra Okubo algebrasi deb ataladi.

$(\mathcal{S}, *, n)$ xosmas n kvadratik formaga ega algebra bo‘lsin. U holda n multiplikativ bo‘lib, uning qutbiy shakli assosiativ bo‘ladi, shunda va faqat shundagina, agar ixtiyoriy $x, y \in \mathcal{S}$ uchun

$$(x * y) * x = n(x) y = x * (y * x) \qquad (2)$$

bajarilsa.

---

[6] Okubo S. Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras. Hadronic J. 1 (1978).

[7] Elduque, A., Myung, H.C. (1990). On Okubo algebras. In From Symmetries to Strings: Forty Years of Rochester Conferences, Das, E. (ed.). World Science Publishing, River Edge, 299– 310.

Agar $*$ ko‘paytirish amalini $x*y=\overline{x}\,\overline{y}$ ko‘rinishda kiritsak, u holda $(\mathcal{S},*,n)$ algebra para-Gurvis algebrasi deyiladi va uning $e=1$ birlik elementi para-birlik element deyiladi.

1-teorema. Aytaylik, $(\mathcal{S},*,n)$ xarakteristikasi 3 dan farqli bo‘lgan algebraik yopiq maydon ustidagi simmetrik kompozitsion algebra bo‘lsin. U holda bu algebra izomorfizm aniqligida $\mathbb{F}$ maydon ustidagi para-Gurvis algebrasi yoki Okubo algebrasi bo‘ladi.

1-natija. Aytaylik, $(\mathcal{S},*,n)$ xarakteristikasi 3 dan farqli bo‘lgan algebraik yopiq maydon ustida va $\dim\mathcal{S}\geq 4$ simmetrik kompozitsion algebra bo‘lsin. U holda bu algebra izomorfizm aniqligida $\mathbb{F}$ maydon ustidagi para-Gurvis algebrasi yoki Okubo algebrasi bo‘ladi.

Endi S. Okubo ta’rifiga yaqin xarakteristikasi 3 dan farqli bo‘lgan $\mathbb{F}$ maydon ustida Okubo algebrasini kiritamiz. $\mathcal{R}=M_3(\mathbb{F})$ matritsalar algebrasini qaraylik va $\mathbb{F}$ maydon 1 ning primitiv ω,ω^2 kubik ildizlarini o‘z ichiga olsin. $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ da ko‘paytirish amalini quyidagicha aniqlaylik:

$$x*y=\omega xy-\omega^2 yx-\frac{\omega-\omega^2}{3}\mathrm{tr}(xy)1. \tag{3}$$

Boshqacha qilib aytganda, $x*y$ bu $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ da $\mathcal{R}=\mathbb{F}1\oplus\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ yoyilmaga nisbatan $\omega xy-\omega^2 yx$ ning proeksiyasi bo‘ladi. Har qanday $x\in\mathcal{R}$ element Keli-Gamilton tenglamasini qanoatlantiradi:

$$x^3-\mathrm{tr}(x)x^2+s(x)x-\det(x)1=0,$$

bu yerda $s(x)-$ kvadratik forma. Agar maydon uchun $char\,\mathbb{F}\neq 2$ bo‘lsa, u holda $s(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(x)^2-\mathrm{tr}\left(x^2\right)\right)$ bo’ladi, agar $s(x,y)$ – $s(x)$ ning qutbiy shakli bo‘lsa, ya’ni

$$s(x,y)=s(x+y)-s(x)-s(y)$$

bo’lsa, u holda

$$s(x,y)=\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)-\mathrm{tr}(xy).$$

Bu munosabat maydon xarakteristikasi 2 ga teng holda ham o‘rinli. Xususan, har qanday $x,y\in\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ uchun $s(x,y)=-\mathrm{tr}(xy)$. $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ da matritsa izi xosmas bo‘lganligi uchun $s(x)$ kvadratik forma ham xosmas bo‘ladi.

$s(x,y)=-\mathrm{tr}(xy)$ bo‘lganligidan

$$(x*y)*x=s(x)y \text{ va } x*(y*x)=s(x)y$$

tengliklari o‘rinli ekan degan xulosaga kelamiz. Shuning uchun $\left(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F}),*,s\right)$ algebrasi (2) bo‘yicha simmetrik kompozitsion algebra hisoblanadi.

Dissertatsiyaning **“Oktonionlar algebrasining lokal va 2-lokal differensiallashlari va avtomorfizmlari”** deb nomlangan ikkinchi bobida haqiqiy sonlar maydoni ustida oktonionlar algebrasining lokal differensiallashlarining umumiy ko‘rinishi keltiriladi.

Aytaylik, A algebra bo‘lsin (assosiativ bo‘lishi shart emas). $D:A\to A$

chiziqli operator uchun ixtiyoriy $a,b\in A$ elementlarda $D(ab)=D(a)b+aD(b)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda D chiziqli operatorga A algebrasining differensiallashi deyiladi. A algebraning barcha differensiallashlar fazosini $Der(A)$ orqali belgilaymiz. Agar ixtiyoriy $a\in A$ elementi uchun $D_a : A\to A$ differnsiallash $D_a(x)=ax-xa,\ x\in A$ ko’rinishda aniqlangan bo‘lsa, u holda D_a ichki differensiallash deyiladi.

Agar ixtiyoriy $x,y\in A$ elementlar uchun $\Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)$ tenglik o’rinli bo’lsa, u holda $\Phi : A\to A$ chiziqli biyeksiyaga avtomorfizm deyiladi.

Bizning isbotlarimizda oktonionlar algebrasining differensiallashining umumiy ko‘rinishi kerak bo‘lmaganligi uchun biz ulardan faqat to‘rttasini keltiramiz.

Har bir $i\neq j\in\{1,\ldots,7\}$ uchun $\Delta_{i,j}$ orqali $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ ning chiziqli akslantirishini belgilaymiz va basis elementlariga ta’siri quyidagicha:

$$\Delta_{ij}(e_i)=e_j,\ \Delta_{ij}(e_j)=-e_i,\ \Delta_{ij}(e_k)=0,\ k\neq i,j. \tag{4}$$

Quyidagi chiziqli akslantirishlar differensiallash bo‘ladi:

$$\Delta_{12}+\Delta_{75},\ \Delta_{35}+\Delta_{76},\ \Delta_{36}+\Delta_{57},\ \Delta_{37}+\Delta_{65}. \tag{5}$$

$\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ ning har qanday $x\in\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ elementi uchun D_x differensiallash topilib, $\Delta(x)=D_x(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $\Delta\colon\mathbb{O}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ chiziqli akslantirish lokal differensiallash deyiladi.

$\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ algebrasining barcha lokal differensiallashlar fazosini $LocDer(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})$ bilan belgilaymiz.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafning asosiy natijasi bo‘lgan teoremani keltiramiz.

2-teorema. Aytaylik, $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ haqiqiy sonlar maydoni ustida oktonionlar algebrasi bo‘lsin. $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ dagi Δ chiziqli akslantirishi matritsasi birinchi satr va birinchi ustuni nollardan iborat bo‘lgan kososimmetrik matritsa bo‘lgandagina va faqat shundagina lokal differensiallash bo‘ladi. Xususiy holda, $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ dagi $LocDer(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})$ lokal differensiallashlar fazosi Li qavslari orqali kiritilgan $\mathfrak{so}_7(\mathbb{R})$ Li algebrasiga izomorfdir.

2-teoremadan shuni aniqlash mumkinki $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ algebrada ixtiyoriy $\Delta_{i,j}$ $(1\leq i\neq j\leq 7)$ akslantirish lokal differensiallash bo‘ladi, bu yerda $\Delta_{i,j}$ – (4) formula bo‘yicha aniqlangan chiziqli akslantirish.

2-teoremadan haqiqiy sonlar maydoni ustidagi oktonionlar algebrasida differensiallash bo‘lmagan lokal differensiallashlar mavjud ekanligi haqida quyidagi natija kelib chiqadi.

2-natija. Quyidagi tenglik o‘rinli:

$$LocDer(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})=Der(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})\oplus\operatorname{span}\{\Delta_{1,2},\Delta_{2,3},\Delta_{3,4},\Delta_{4,5},\Delta_{5,6},\Delta_{6,7},\Delta_{7,1}\}. \tag{6}$$

Xususan, yuqoridagi tenglik $LocDer(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})/Der(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})$ faktor fazosining o‘lchami 7 ga teng ekanligini ko‘rsatadi.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida oktonionlar algebrasida chiziqli akslantirishning lokal avtomorfizm bo‘lishining zarurli va yetarli shartlari aniqlandi.

Agar har qanday $x \in A$ uchun shunday Φ_x (x ga bog‘liq) avtomorfizm topilib, $\Delta(x) = \Phi_x(x)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda Δ chiziqli akslantirish lokal avtomorfizm deb ataladi.

$\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ tipi I oktonionlar algebrasi bo‘lsin. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bichiziqli formani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i \beta_i,$$

bu yerda $x = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i e_i, \;\; y = \sum_{i=0}^{7} \beta_i e_i \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$.

$$x = x_0 e_0 + \sum_{k=1}^{7} x_k e_k$$

oktonionning qo‘shmasi

$$\overline{x} = x_0 e_0 - \sum_{k=1}^{7} x_k e_k$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ algebrada element qo‘shmasi involyusiya bo‘lib, $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ da Tr izi $Tr(x)e_0 = x + \overline{x} \in \mathbb{F}e_0$ ko‘rinishda aniqlanadi.

Aytaylik, $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ kvaternionlar algebrasi $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ algebraning qism algebrasi bo‘lsin. $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ markaziy sodda va assosiativ bo‘lganligi uchun Skolem-Noter teoremasi bo‘yicha $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ dagi har bir avtomorfizm ichki avtomorfizm bo‘ladi.

Aytaylik, $a \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$, $\langle a, a \rangle = 1$ elementi $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ ga ortogonal bo‘lsin. U holda $\mathbb{O}_{\mathbb{F}} = \mathbb{H}_{\mathbb{F}} \oplus \mathbb{H}_{\mathbb{F}} a$ bo‘ladi. Ushbu $\langle c, c \rangle = \langle p, p \rangle = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $c, p \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ elementlarini olaylik.

Quyidagi ko‘rinishda aniqlangan $\Phi_{c,p} : \mathbb{O}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ chiziqli akslantirish

$$\Phi_{c,p}(x + ya) = cxc^{-1} + \left(pcyc^{-1}\right)a, \;\; x + ya \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}} \oplus \mathbb{H}_{\mathbb{F}} a. \tag{7}$$

$\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ da avtomorfizm bo‘ladi.

Aytib o‘tishimiz kerakki, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ ning barcha $Aut\left(\mathbb{O}_{\mathbb{F}}\right)$ avtomorfizmlar gruppasi $SO(7, \mathbb{F})$ ortogonal gruppasiga izomorf bo‘lgan G_2 tipli gruppasi bo‘ladi. Xususan, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ dagi ixtiyoriy Φ avtomorfizm matritsasi ortogonal matritsaga ega, ya’ni har qanday $x, y \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ uchun

$$\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle. \tag{8}$$

Quyidagi teorema ushbu paragrafning asosiy natijasidir.

3-teorema. Aytaylik, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ xarakteristikasi nol bo‘lgan $\mathbb{F}$ maydoni ustidagi oktonionlar algebrasi va Δ – $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ ning chiziqli akslantirishi bo‘lsin. U holda Δ

akslantirish $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ da lokal avtomorfizm bo‘lish uchun u birni o‘z o‘rnida qoldiruvchi va matritsasi ortogonal bo‘lishi zarur va yetarli. Xususan, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ dagi $LocAut(\mathbb{O}_{\mathbb{F}})$ barcha lokal avtomorfizmlar gruppasi $O(7,\mathbb{F})$ gruppasiga izomorf bo‘ladi.

Quyidagi natija o‘rinli.

3-natija. Aytaylik, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ xarakteristikasi nol bo‘lgan $\mathbb{F}$ maydoni ustidagi oktonionlar algebrasi va Δ – $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ dagi chiziqli akslantirish bo‘lsin. U holda Δ akslantirish $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ da lokal avtomorfizm bo‘lishi uchun u birni o‘z o‘rnida qoldiruvchi izometriya bo‘lishi zarur va yetarli.

Uchinchi paragrafda xarakteristikasi nolga teng bo‘lgan $\mathbb{F}$ maydon ustida $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ oktonionlar algebrasida 2-lokal differensiallashlar o‘rganilib, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ da har qanday 2-lokal differensiallash oddiy ma’noda differensiallash bo‘lishi isbotlangan.

Aytaylik, A algebrasi $\mathbb{F}$ maydoni ustidagi ixtiyoriy algebra bo‘lsin. $\Delta: A\to A$ (chiziqli bo‘lishi shart emas) akslantirishi berilgan bo‘lib, algebraning ixiyoriy $x,y\in A$ elementlari uchun shunday $D_{x,y}: A\to A$ (x,y ga bog‘liqli) differensiallash topilib $\Delta(x)=D_{x,y}(x)$, $\Delta(y)=D_{x,y}(y)$ tengliklar bajarilsa, u holda Δ akslantirishga 2-lokal differensiallash deyiladi.

Quyidagi teorema ushbu paragrafning asosiy natijasi hisoblanadi.

4-teorema. Aytaylik, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ xarakteristikasi nolga teng bo‘lgan algebraik yopiq $\mathbb{F}$ maydon ustida oktonionlar algebrasi bo‘lsin. U holda $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ dagi ixtiyoriy 2-lokal differensiallash differensiallash bo‘ladi.

To‘rtinchi paragrafda algebraik yopiq $\mathbb{F}$ maydon ustida oktonionlar algebrasining ixtiyoriy 2-lokal avtomorfizmi avtomorfizm ekanligini isbotlangan. Haqiqiy sonlar maydoni ustida oktonionlar algebrasidagi akslantirishning 2-lokal avtomorfizm bo‘lishining zarur va yetarli shartlar topilgan.

Aytaylik A algebra bo‘lsin. $\Delta: A\to A$ (chiziqli bo‘lishi shart emas) akslantirishi berilgan bo‘lib, algebraning ixiyoriy $x,y\in A$ elementlari uchun shunday $\Phi_{x,y}: A\to A$ (x,y ga bog‘liqli) avtomorfizm topilib, $\Delta(x)=\Phi_{x,y}(x)$, $\Delta(y)=\Phi_{x,y}(y)$ tengliklar bajarilsa, u holda Δ akslantirishga 2-lokal avtomorfizm deyiladi.

5-teorema. Aytaylik, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ xarakteristikasi nolga teng bo‘lgan algebraik yopiq $\mathbb{F}$ maydon ustida oktonionlar algebrasi bo‘lsin. U holda $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ dagi ixtiyoriy 2-lokal avtomorfizmi avtomorfizm bo‘ladi.

6-teorema. Aytaylik, $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ haqiqiy sonlar maydoni ustida oktonionlar algebrasi va Δ – $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ algebradagi akslantirish bo‘lsin. U holda Δ 2-lokal avtomorfizm bo‘lishi uchun, u birni o‘z o‘rnida qoldiruvchi va matritsasi ortogonal bo‘lishi zarur va yetarli. Xususan, $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ dagi lokal avtomorfizmlar va 2-lokal avtomorfizmlar gruppasi teng bo‘ladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish joizki, Sh.A.Ayupov, A.Elduk va

K.K.Kudaybergenovlarning[8] ishida ixtiyoriy maydon ustida Keli algebrasining lokal va 2-lokal differensiallashlari hamda avtomorfizmlari tavsiflangan.

Dissertatsiyaning **“Malsev va Okubo algebralarining lokal va 2-lokal differensiallashlari”** deb nomlangan uchinchi bobida sodda noassosiativ algebralar bo‘lgan haqiqiy sonlar maydoni ustida $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ oktonionlar algebrasi va $M_7(\mathbb{R})$ Malsev algebralarida differensiallash bo‘lmagan lokal differensiallash mavjud ekanligi ko‘rsatiladi.

Malsev algebralari 1955 yilda A.I. Malsev tomonidan kiritilgan. Li algebralarining assosiativ algebralar bilan bog‘liq bo‘lgani kabi bu algebralar ham alternativ algebralar bilan bog‘liq: agarda A alternativ algebra bo‘lsa, u holda $[x,y]=xy-yx$ ko‘paytirish amali aniqlangan $A^{(-)}$ algebra Malsev algebrasidir.

$\mathbb{F}$ maydon ustidagi $(A,\circ)$ algebrasida ko‘paytirish amali antikommutativ va

$$J(x,\, y,\, xz)=J(x,\, y,\, z)x,$$

tenglik bajarilsa, u holda bunday algebra Malsev algebrasi deyiladi, bu yerda $J(x,y,z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y$ ifoda x,y,z elementlarning yakobiani.

Aytaylik, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ – $\mathbb{F}$ maydoni ustidagi oktonionlar algebrasi bo‘lsin va $\circ$ ko‘paytirish amalini quyidagicha aniqlaymiz:

$$x\circ y=\frac{1}{2}(xy-yx),\;\; x,\, y\in\mathbb{O}_{\mathbb{F}}.$$

U holda $(\mathbb{O}_{\mathbb{F}},\circ)$ Malsev algebrasi bo‘ladi.

Ixtiyoriy $x\in\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ uchun $e_0\circ x=0$ ekanligini hisobga olib, $M_7(\mathbb{F})=\mathbb{O}_{\mathbb{F}}/\{e_0\}$ faktor algebrasini qaraymiz. $M_7(\mathbb{F})$ algebrasi $\{e_1,\dots,e_7\}$ bazis elementlarga ega sodda Malsev algebrasi bo‘ladi va ko‘paytirish amali quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned}
&e_1e_2=2e_2,\;\; e_1e_3=2e_3,\;\; e_1e_4=2e_4,\\
&e_1e_5=-2e_5,\;\; e_1e_6=-2e_6,\;\; e_1e_7=-2e_7,\\
&e_2e_3=2e_7,\;\; e_3e_4=2e_5,\;\; e_4e_2=2e_6,\\
&e_5e_6=-2e_4,\;\; e_6e_7=-2e_2,\;\; e_7e_5=-2e_3,\\
&e_2e_5=e_1,\;\; e_3e_6=e_1,\;\; e_4e_7=e_1,
\end{aligned}$$

bu yerda qoldirilib ketilgan ko‘paytmalar antisimmetrik yoki nolga teng.

A. Sagl[9] ishidan ma’lumki, $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ oktonionlar algebrasining har qanday differensiallashi $M_7(\mathbb{F})$ algebrasida ham differensiallash bo‘ladi va aksincha. Aynan, agar $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ algebrasining D differensiallashining matritsaviy ko‘rinishi quyidagicha bo‘lsa:

$$D=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}^t & D_1\end{pmatrix},$$

bu yerda $\mathbf{0}=(0,0,0,0,0,0,0)$, D_1 – $\mathbb{F}$ maydonda o‘lchami 7×7 matritsa va t

[8] Ayupov Sh.A., Elduque A., Kudaybergenov K.K. Local derivations and automorphisms of Cayley algebras. Journal of Pure and Applied Algebra. 227 (2023), 107277

[9] Sagle A. Malcev algebras. Transactions of the American Mathematical Society. 101. (1961), p. 426-458.

transponirlash, u holda D_1 matritsa $M_7(\mathbb{F})$ algebrasida differensiallash bo‘ladi. Aksincha, agar D_1 – $M_7(\mathbb{F})$ algebrasining differensiallashi bo‘lsa, u holda yuqorida aniqlangan D chiziqli akslantirish $\mathbb{O}_\mathbb{F}$ algebrasining differensiallashini aniqlaydi. Shundan kelib chiqib, huddi shunday $\mathbb{O}_\mathbb{F}$ algebrasining lokal differensiallashlari (2-lokal differensiallashlari) va $M_7(\mathbb{F})$ Malsev algebrasining lokal differensiallashlari (2-lokal differensiallashlari) orasida moslik o‘rnatish mumkin.

2- va 5-teoremalardan quyidagi natijalarni olamiz.

7-teorema. Aytaylik, $M_7(\mathbb{R})$ haqiqiy sonlar maydoni ustidagi oktonionlar algebrasi $\mathbb{O}_\mathbb{R}$ bilan assotsirlangan Malsev algebrasi bo‘lsin. $\Delta : M_7(\mathbb{R}) \to M_7(\mathbb{R})$ chiziqli akslantirish lokal differensiallash bo‘lishi uchun uning matritsasi kososimmetrik matritsa bo‘lishi zarur va yetarli.

8-teorema. $M_7(\mathbb{F})$ algebrasi xarakteristikasi nolga teng algebraik yopiq $\mathbb{F}$ maydon ustidagi $\mathbb{O}_\mathbb{F}$ oktonionlar algebrasi bilan bog‘langan Malsev algebrasi bo‘lsin. U holda $M_7(\mathbb{F})$ da ixtiyoriy 2-lokal differensiallashi differensiallash bo‘ladi.

A. Elduk va X. Myung[10] ishlaridan ma’lumki, $\mathbb{O}_\mathbb{F}$ oktonionlar algebrasining har bir avtomorfizmi $M_7(\mathbb{F})$ algebrasida ham avtomorfizmni aniqlaydi va aksincha. Aniqrog‘i, agar Φ – $\mathbb{O}_\mathbb{F}$ da avtomorfizm bo‘lsa, u holda $\Phi|_{M_7(\mathbb{F})}$ akslantirishni chegaralash bu $M_7(\mathbb{F})$ Malsev algebrasida avtomorfizm bo‘ladi. Aksincha, agar Ψ – $M_7(\mathbb{F})$ algebrasining avtomorfizmi bo‘lsa, u holda Ψ ning

$$\Phi(\lambda e_0 + x) = \lambda e_0 + \Psi(x),\ \lambda \in \mathbb{F},\ x \in M_7(\mathbb{F}),$$

aniqlangan kengayttirmasi $\mathbb{O}_\mathbb{F}$ da avtomorfizmdir. Shuning uchun, $\mathbb{O}_\mathbb{F}$ oktonionlar algebrasining lokal (2-lokal) avtomorfizmlari va $M_7(\mathbb{F})$ Malsev algebrasining lokal (2-lokal) avtomorfizmlari orasida shunga o‘xshash moslik o‘rinli bo‘ladi.

3-, 5- va 6-teoremalardan quyidagi natijalarga erishamiz.

9-teorema. Aytaylik, $M_7(\mathbb{F})$ xarakteristikasi nolga teng $\mathbb{F}$ maydoni ustidagi oktonionlar algebrasi bilan assotsirlangan Malsev algebrasi bo‘lsin. $\Phi : M_7(\mathbb{F}) \to M_7(\mathbb{F})$ chiziqli akslantirish lokal avtomorfizm bo‘lishi uchun uning matritsasi ortogonal bo‘lishi zarur va yetarli.

10-teorema. Aytaylik $M_7(\mathbb{F})$ xarakteristikasi nolga teng algebraik yopiq $\mathbb{F}$ maydon ustidagi oktonionlar algebrasi bilan bog‘liq bo‘lgan Malsev algebrasi bo‘lsin. U holda $M_7(\mathbb{F})$ da ixtiyoriy 2-lokal avtomorfizmi avtomorfizm bo‘ladi.

11-teorema. $M_7(\mathbb{R})$ haqiqiy sonlar maydoni ustidagi oktonionlar algebrasi $\mathbb{O}_\mathbb{R}$ bilan assotsirlangan Malsev algebrasi bo‘lsin. U holda $\Phi : M_7(\mathbb{R}) \to M_7(\mathbb{R})$ akslantirish 2-lokal avtomorfizm bo‘lishi uchun u chiziqli va ortogonal matritsaga

---

[10] Elduque A., Myung H. Ch. Mutations of alternative algebras. Mathematics and its Applications. 278. (1994), p. 92-135.

ega bo‘lishi zarur va yetarli.

Uchinchi bobning ikkinchi va uchinchi paragraflarda biz xarakteristikasi 3 dan farqli bo‘lgan maydon ustida Okubo algebrasining lokal va 2-lokal differensiallashlarini ko‘rib chiqamiz. Okubo algebrasining ixtiyoriy lokal va 2-lokal differensiallashlari differensiallash bo‘lishi isbotlangan.

12-teorema. $\mathcal{O}$ xarakteristikasi 3 dan farqli bo‘lgan $\mathbb{F}$ maydon ustida Okubo algebrasi bo‘lsin. U holda $\mathcal{O}$ algebrasining har qanday lokal differensiallashi differensiallash bo‘ladi.

13-teorema. $\mathcal{O}$ xarakteristikasi 3 dan farqli bo‘lgan $\mathbb{F}$ maydon ustida Okubo algebrasi bo‘lsin. U holda $\mathcal{O}$ algebrasida ixtiyoriy $\Delta : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ 2-lokal differensiallashi differensiallash bo‘ladi.

XULOSA

Dissertatsiya oktonion algebrasi va Okubo algebrasining lokal differensiallashlari va avtomorfizmlarini o‘rganishga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1) haqiqiy sonlar maydoni ustidagi oktonionlar algebrasining lokal differensiallashlari o‘rganilgan va $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ oktonion algebrasining ixtiyoriy 2-lokal differensiallashlari differensiallashlar ekanligi isbotlangan;

2) xarakteristikasi nolga teng $\mathbb{F}$ maydoni ustidagi oktonion algebrasining lokal avtomorfizmlari o‘rganilgan va $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ ning ixtiyoriy 2-lokal avtomorfizmi avtomorfizm ekanligi isbotlangan;

3) sodda noassosiativ algebralar bo‘lgan haqiqiy sonlar maydoni ustidagi $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ oktonion algebrasi va $M_7(\mathbb{R})$ Malsev algebrasi differensiallash bo‘lmaydigan lokal differensiallashlarga ega ekanligi isbotlangan;

4) 7 o‘lchamli sodda Malsev algebrasining lokal va 2-lokal avtomorfizmlari o‘rganilgan;

5) Okubo algebrasining har qanday lokal va 2-lokal differensiallashlari differensiallashlar ekanligi isbotlangan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АЛЛАМБЕРГЕНОВ АЛЛАЯР ХАСАНБАЕВИЧ

ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБР ОКТОНИОНОВ И АЛГЕБР ОКУБО

01.01.06 – Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за № B2024.3.PhD/FM1137.

Диссертация выполнена в Нукусском государственном педагогическом институте и Институте математики.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://kengash.mathinst.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Арзикулов Фарходжон Нематжонович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
	Турдибаев Рустам Миршалиевич доктор философии по физико-математическим наукам (PhD), старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится 21 января 2025 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 195). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан 27 декабря 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от 27 декабря 2024 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.Р.Хаётов
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В современном мире растет интерес к различным областям алгебры, таким как теория композиционных алгебр, из-за ее возможных применений в криптографии, компьютерных науках и других областях. Проблемы теории неассоциативных алгебр продолжают оставаться актуальными в течение многих лет. В целом, изучение композиционных алгебр представляет собой важную и актуальную область математики, которая имеет широкие приложения и потенциальные перспективы для развития как в фундаментальных, так и в прикладных исследованиях.

В настоящее время, наряду с теорией дифференцирований, важной считается теория локальных и 2-локальных дифференцирований на операторных алгебрах. В последние два десятилетия наблюдается плодотворное развитие теории локальных и 2-локальных дифференцирований на алгебрах фон Неймана, C^*-алгебрах на неассоциативных алгебрах. Следовательно описание локальных и 2-локальных дифференцирования на композиционных алгебрах и симметрических композиционных алгебрах является одним из целевых направлений научных исследований.

В нашей стране усиленное внимание уделяется прикладной математике, информатике, цифровой экономике, которые имеют научное и практическое применение фундаментальных наук. В частности, особое внимание уделяется развитию фундаментальных исследований по неассоциативным алгебрам и их операторам. В рамках этого фундаментального исследования получены важные результаты в изучении локального и 2-локального дифференцирований на конечномерных неассоциативных алгебрах. В обеспечении реализации решений [1], определенных в качестве основных задач и направлений деятельности, важно проводить исследования на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Алгебра и функциональный анализ», а также при разработке теории дифференцирований на операторных алгебрах.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 г. «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, руководству и финансированию научной деятельности», ПП-3682 от 27 апреля 2018 г. «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практической реализации инновационных идей, технологий и проектов» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах по дальнейшему развитию математического образования и науки, а также коренному совершенствованию деятельности Института математики им. В.И.Романовского Академии наук Узбекистан» и №ПП-4708 от

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан, от 18.05.2017 г. № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научных организаций Академии наук Республики Узбекистан».

7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативных актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением науки и техники Республики Узбекистан IV «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В последние годы неассоциативные аналоги классических конструкций вызывают интерес в связи с их приложениями во многих разделах математики и физики. Понятия локальных и 2-локальных дифференцирований (автоморфизмов) также стали основными объектами исследования для некоторых неассоциативных алгебр, таких как алгебры Ли и Лейбница. Основная идея исследования заключаются в том, чтобы определить условия, при которых всякий локальный (или 2-локальный) дифференцирование или автоморфизм автоматически является дифференцированием (соответственно автоморфизмом), а также привести примеры алгебр, в которых локальные и 2-локальные дифференцирования или автоморфизмы не являются дифференцированиями (соответственно автоморфизмами). Программа исследования локальных отображений на неассоциативных алгебрах появилась в результате дискуссии академиком Ш.А. Аюповым и профессором Э. Зельмановым (Калифорнийский университет, Сан-Диего) во время США-Узбекской конференции, проходившей в Калифорнийском государственном университете в Фуллертоне в мае 2014 года. Первые результаты связанные с локальными и 2-локальными дифференцированиями и автоморфизмами на конечномерных алгебрах Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики получены в работах Ш. Аюпова, К. Кудайбергенова, И. Рахимова и З. Чен, Д. Ванг. В работе Ш. Аюпова, К. Кудайбергенова доказано, что всякие локальные дифференцирования конечномерных полупростых алгебрах Ли являются дифференцированиями, и приведены примеры нильпотентных конечномерных алгебр Ли с локальными дифференцированиями, не являющимися дифференцированиями.

В работе Ш. Аюпова, К. Кудайбергенова доказано, что каждое локальное дифференцирование на произвольной классической простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики > 5 является (глобальным) дифференцированием, исключая алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}_n(\mathbb{F})$ в случае, когда $char\mathbb{F}$ делит n. И также дано описание локальных дифференцирований на некоторых простых алгебрах Ли над полями $char\mathbb{F} = 2,3$ и доказано, что они допускают локальные дифференцирования, которые не являются дифференцированиями. В работе Ш. Аюпова, К. Кудайбергенова, И. Рахимова доказано, что всякое 2-локальное дифференцирование на полупростой алгебре Ли L является дифференцированием и что каждая конечномерная нильпотентная алгебра Ли размерности больше двух допускает 2-локальное дифференцирование не являющиеся дифференцированием.

Что касается 2-локального автоморфизма, З.Чен и Д.Ванг доказали, что если L – простая алгебра Ли типа A_l, D_l или $E_k, (k=6,7,8)$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, то каждый 2-локальный автоморфизм L является автоморфизмом. Наконец, в работе Ш.А.Аюпова и К.К.Кудайбергенова обобщена результат З.Чена и Д.Ванга, и доказано, что всякий 2-локальный автоморфизм конечномерной полупростой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики является автоморфизмом. Более того, они также показали, что каждая нильпотентная алгебра Ли с конечной размерностью больше двух допускает 2-локальные автоморфизмы, которые не являются автоморфизмами. Локальные автоморфизмы некоторых конечномерных простых алгебр Ли и Лейбница исследованы Ш.А.Аюповым и К.Кудайбергеновым. Относительно локального автоморфизма Т.Беккер, Дж.Эскобар, К.Салас и Р.Турдибаев установили, что группа всех локальных автоморфизмов $LAut(\mathfrak{sl}_2)$ совпадает с группой $Aut^{\pm}(\mathfrak{sl}_2)$ всех автоморфизмов и антиавтоморфизмов. Позднее М.Костантини доказал, что линейное отображение на простой алгебре Ли является локальным автоморфизмом тогда и только тогда, когда оно является либо автоморфизмом, либо антиавтоморфизмом. Аналогичные результаты относительно локальных и 2-локальных дифференцирований и автоморфизмов на супералгебрах Ли были получены в работах И.Ванг, Х.Чен, Ж.Нан. Ш.А.Аюпов, К.К.Кудайбергенов, Б.А.Омиров доказали аналогичные результаты для локальных и 2-локальных дифференцирований и автоморфизмов на простых алгебрах Лейбница. Учитывая все вышеперечисленные результаты, связанные с локальными и 2-локальными дифференцированиями на неассоциативных алгебрах естественно возникает вопрос об описании локальных и 2-локальных дифференцирований на алгебрах октонионов и алгебр Окубо.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения, в котором выполняется диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с запланированной темой фундаментального проекта «Автоморфизмы операторных алгебр, классификации бесконечномерных неассоциативных алгебр и супералгебр» Института Математики (Ф-ФА-2021-423).

Целью исследования является описание локальных и 2-локальных дифференцирований и автоморфизмов алгебры октонионов, а также локальных и 2-локальных дифференцирований семимерных простых алгебр Мальцева и алгебр Окубо.

Задачи исследования:

исследовать локальные и 2-локальные дифференцирования и автоморфизмы алгебры октонионов;

описать локальные и 2-локальные дифференцирования и автоморфизмы 7-мерной простой алгебры Мальцева;

изучить локальные и 2-локальные дифференцирования алгебры Окубо.

Объект исследования: алгебра октонионов, 7-мерная простая алгебра Мальцева и алгебра Окубо.

Предмет исследования: вопросы существования локальных и 2-локальных дифференцирований, не являющихся дифференцированиями и связь локальных и 2-локальных дифференцирований и дифференцирований на различных неассоциативных алгебрах.

Методы исследования: В диссертации применены методы теории неассоциативных алгебр, а также методы теории инвариантов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

описаны локальные автоморфизмы алгебры октонионов над полем нулевой характеристики и доказано, что всякое 2-локальные дифференцирования и автоморфизмы в них являются дифференцированием и автоморфизмом соответственно;

доказано, что в алгебре октонионов над полем вещественных чисел и 7-мерной алгебре Мальцева, являющиеся простой неассоцитивной алгеброй, существует локальное дифференцирование не являющееся дифференцированием;

описаны локальные и 2-локальные автоморфизмы 7-мерной простой алгебры Мальцева;

доказано, что всякое локальное и 2-локальное дифференцирование алгебры Окубо является дифференцированием.

Практические результаты исследования. Установлена взаимосвязь между классами локальных, 2-локальных дифференцирований и пространством дифференцирований алгебры октонионов.

Достоверность результатов исследования. Результаты получены с использованием методов алгебры, теории дифференцирования, а также строгостью математических рассуждений. Доказательства полученных результатов математически корректны.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные результаты вносят существенный вклад в теорию неассоциативных алгебр, расширяя понимание их симметрий и структурных свойств, а методы, разработанные в данной диссертации, могут быть применены к изучению локальных и 2-локальных дифференцирований и автоморфизмов в других классах алгебр, таких как алгебры Лейбница, алгебры Мальцева и другие обобщения алгебр Ли.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты исследования могут быть использованы в теории дифференцирований неассоциативных алгебр.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных результатов по изучению локальных дифференцирований и автоморфизмов алгебр октонионов и Окубо:

описания локальных дифференцирований и автоморфизмов алгебр октонионов была использована в рамках зарубежного научно-исследовательского проекта на тему «Исследование операторов в функциональных пространствах синтетическими методами алгебры, геометрии и анализа и его информационно-образовательное обеспечение», для классификации операторов функциональных пространств (Справка Южного математического института ВНЦ РАН от 29-октября 2024 года, № 09, Российская Федерация). Научные результаты позволили получить описание операторов с использованием синтетических методов алгебры и анализа;

локальные дифференцирования вещественной алгебры октонионов и 7-мерной простой алгебры Мальцева были применены в рамках зарубежного научно-исследовательского проекта на тему «Функциональные инварианты тензоров» с номером AP23489146 для анализа дифференцирований ассоциативных и некоммутативных алгебр (Справка Института математики и математического моделирования за номером №01-06/186 от 4 ноября 2024 года, Казахстан). Применение научных результатов позволили доказать структурные свойства дифференцирований ассоциативных алгебр и некоммутативных алгебр Новикова.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации обсуждались на следующих международных и республиканских научных конференциях: «Роль информационно-коммуникационных технологий в развитии естествознания» (Нукус, 2021), «Актуальные вопросы математики и информационных систем» (Ургенч, 2021), «Операторные алгебры, неассоциативные структуры и смежные проблемы» (Ташкент, 2022), «Математический анализ и его приложения в современной математической физике» (Самарканд, 2022), «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» (Нукус, 2023), «Актуальные проблемы повышения качества образования с использованием цифровых технологий» (Нукус, 2024), «Актуальные проблемы прикладной математики, математического моделирования и информатики» (Нукус, 2024).

Эта работа обсуждалась на республиканских семинарах «Операторные алгебры и их приложения» Института математики Академии Наук Республики Узбекистан, на семинаре «Современная алгебра и ее приложения» Национального университета Узбекистана.

Публикации результатов исследований. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, из них 4 включены в перечень научных публикаций, предложенных ВАК Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 1 из них опубликовано в зарубежном журнале и 3 в национальных научных журналах и 7 тезисов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 9 параграфов, заключения и 44 наименований использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 82 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения об алгебрах октонионов и Окубо»**, приведены необходимые понятия и вспомогательные результаты из теорий неассоциативных алгебрах. Открытие октонионов Кэли[2] и Грейвсом[3] последовало вскоре после открытия Гамильтоном[4] кватернионов в середине XIX века. Они представляют один из четырёх известных типов конечномерных алгебр с делением над вещественными числами: действительные числа, комплексные числа, кватернионы и октонионы. Изучение октонионов представляет интерес не только из-за их уникальных алгебраических свойств, но и из-за их глубоких связей с различными областями математики и физики. Более подробную информацию об алгебре октонионов можно найти в работе[5].

В параграфе 1.1 мы вводим основные определения и обозначения об алгебре октонионов.

Определение 1. Алгебра C с единицей над полем $\mathbb{K}$ называется композиционной, если существует невырожденная квадратичная форма N на C, допускающая композицию

$$N(xy) = N(x)N(y) \quad (x, y \in C).$$

Примерами композиционной алгебры являются поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ и комплексных чисел $\mathbb{C}$, тело кватернионов $\mathbb{H}$ и алгебра октонионов $\mathbb{O}$, взятые с евклидовой нормой $n(x) = (x, x) = |x|^2$. Первые три из них ассоциативны, а алгебра $\mathbb{O}$ является альтернативной неассоциативной алгеброй.

Квадратичную форму N называют нормой на C, а связанную с ней билинейную форму $\langle \cdot , \cdot \rangle$ называют *скалярным произведением*. Линейное подпространство в C называется несингулярным, если оно несингулярно относительно скалярного произведения. Подалгеброй композиционной алгебры C или композиционной подалгеброй понимается несингулярное линейное подпространство D, замкнутое относительно умножения и содержащее единичный элемент e алгебры C.

Введем понятие сопряжения для элемента $a = \langle x, e \rangle e + x,\ x \in C$ в композиционной алгебре C следующим образом

$$\overline{a} = \langle x, e \rangle e - x, \quad x \in C.$$

Пусть $\mathbb{F}$ поле нулевой характеристики. Напомним, что алгебра A называется альтернативной, если

$$x(xy) = (xx)y, (xy)y = x(yy)$$

для всех $x, y \in A.$

Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ – алгебра октонионов над $\mathbb{F}$, т.е. $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ является 8 -мерной унитальной альтернативной алгеброй над $\mathbb{F}$ с невырожденной мультипликативной квадратичной формой N, т.е $N : \mathbb{O}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}$ является

[2] A. Cayley, On Jacobi's Elliptic Functions, in reply to the Rev. Brice Bronwin and on Quaternions, The London and Edinburgh philosophical magazine and journal of science 3, 210 (1845).

[3] W.R. Hamilton, Note regarding the researches of John T. Graves, Esq., Transactions of the Royal Irish Academy, 21, 338 (1848).

[4] W.R. Hamilton, On Quaternions; or a new System of Imaginaries in Algebra, Phil. Mag. ser.3 25 489 (1845).

[5] Baez J .C. The octonions. Bulletin of the American Mathematical Society, 39 (2002) p. 145 – 205.

отображением такое, что

• $N(\lambda x) = \lambda^2 N(x)$ для всех $\lambda \in \mathbb{F},\ x \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$;

• отображение $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{O}_{\mathbb{F}} \times \mathbb{O}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}$, определенное

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\big(N(x+y) - N(x) - N(y)\big)$$

билинейное;

• $N(xy) = N(x)N(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$;

• если $\langle x, y\rangle = 0$ для всех $y \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$, то $x = 0$.

Напомним, что элементы $x, y \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ называются *ортогональными* (обозначается $x \perp y$), если $\langle x, y\rangle = 0$. Для элемента $x \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ его ортогональное дополнение равно

$$x^{\perp} = \left\{ y \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}} : x \perp y \right\}.$$

Система $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ называется *ортонормированной*, если

$$\langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Алгебра октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ называется *типа* I, если она имеет ортонормированный базис $\{1, e_1, \ldots, e_7\}$ такой, что $e_i^2 = -1$ для всех i, и *типа* II в противном случае. По [27, § 3] если $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ имеет тип II, то она расщеплеятся и имеет ортонормированный базис $\{1, e_1, \ldots, e_7\}$ такой, что

• $e_i^2 = -1$ если $i \leq 3$ и $e_i^2 = 1$ в противном случае;

• подалгебра, порожденная элементами $1, e_1, e_2, e_3$ изоморфна $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ кватернионам над $\mathbb{F}$.

Рассмотрим алгебру октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ типа I с единицей $e_0 = 1$. Правила умножения можно определить, установив $e_1 e_2 = e_4$, и затем применив следующие правила, как показано в [11]:

$$e_i e_j = -e_j e_i,\ i \neq j,$$

$$e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1},$$

$$e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k},$$

где сложение и умножение по модулю 7 и $1 \leq i, j, k \leq 7$.

Поскольку $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ имеет тип I. Тогда билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ определяется следующим выражением

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i \beta_i$$

где $x = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i e_i,\ \ y = \sum_{i=0}^{7} \beta_i e_i \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$.

В параграфе 1.2 приведено основные определения и обозначения их теории алгебр Окубо.

Алгебры Окубо были впервые введены и описаны японским ученым

Сусумо Окубо [6] для поля вещественных и комплексных чисел. Название алгебры Окубо было дано в работе Элдука и Мьюнга[7].

Определение 2. Композиционная алгебра $\mathcal{S}$ с умножением $*$ и нормой n называется симметричной, если полярная форма нормы ассоциативна, т.е.

$$n(x * y, z) = n(x, y * z), \tag{1}$$

для любых $x, y, z \in \mathcal{S}$.

Определение 3. Симметричная композиционная алгебра $(\mathcal{O}, *, n)$ называется алгеброй Окубо над полем $\mathbb{F}$ характеристики отличной от 3.

Пусть $(\mathcal{S}, *, n)$ алгебра снабжена невырожденной квадратичной формой n. Тогда n мультипликативна, а ее полярная форма ассоциативна тогда и только тогда, когда он удовлетворяет

$$(x * y) * x = n(x)y = x * (y * x) \tag{2}$$

для любых $x, y \in \mathcal{S}$.

Если в качестве операцию умножение $*$ возмьем $x * y = \overline{x}\,\overline{y}$, тогда алгебра $(\mathcal{S}, *, n)$ называется алгебра пара-Гурвица и ее единичный элемент $e = 1$ называется пара-единицей.

Теорема 1. Пусть $(\mathcal{S}, *, n)$ симметричная композиционная алгебра над алгебраически замкнутым полем, $char\,\mathbb{F} \neq 3$. Тогда с точностью до изоморфизма это либо алгебра пара-Гурвица либо алгебра Окубо над $\mathbb{F}$.

Следствие 1. Пусть $(\mathcal{S}, *, n)$ симметричная композиционная алгебра над полем $\mathbb{F}$, $char\,\mathbb{F} \neq 3$ с $dim\mathcal{S} \geq 4$. Тогда с точностью до изоморфизма $\mathcal{S}$ является либо алгеброй пара-Гурвица либо алгеброй Окубо.

Приведем другую конструкцию алгебры Окубо над полем $\mathbb{F}$, $char\,\mathbb{F} \neq 3$ более близкую к исходному определению из работы С. Окубо. Рассмотрим алгебру матриц $\mathcal{R} = M_3(\mathbb{F})$ и предположим, что $\mathbb{F}$ содержит примитивные кубические корни из единицы: $1, \omega, \omega^2$. Определим на $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ умножение по формуле

$$x * y = \omega xy - \omega^2 yx - \frac{\omega - \omega^2}{3} \mathrm{tr}(xy)1 \tag{3}$$

Другими словами, $x * y$ это проекция $\omega xy - \omega^2 yx$ на $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ относительно разложения $\mathcal{R} = \mathbb{F}1 \oplus \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$. Любой элемент $x \in \mathcal{R}$ удовлетворяет уравнению Кэли-Гамильтона

$$x^3 - \mathrm{tr}(x)x^2 + s(x)x - \det(x)1 = 0,$$

где $s(x)$ – квадратичная форма. Если $char\,\mathbb{F} \neq 2$, то $s(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(x)^2 - \mathrm{tr}\left(x^2\right)\right)$, так что если $s(x, y)$ является полярной формой $s(x)$, т. е.

$$s(x, y) = s(x + y) - s(x) - s(y),$$

---

[6] Okubo S. Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras. Hadronic J. 1 (1978).

[7] Elduque, A., Myung, H.C. (1990). On Okubo algebras. In From Symmetries to Strings: Forty Years of Rochester Conferences, Das, E. (ed.). World Science Publishing, River Edge, 299– 310.

то

$$s(x,y)=\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y)-\mathrm{tr}(xy).$$

Это справедливо даже для характеристики 2. В частности, $s(x,y)=-\mathrm{tr}(xy)$ для любых $x,y\in\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$. Поскольку форма следа невырождена на $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$, квадратичная форма $s(x)$ невырождена.

Так как $s(x,y)=-\mathrm{tr}(xy)$, заключаем

$$(x*y)*x=s(x)y,$$

и $x*(y*x)=s(x)y$. Следовательно, $\left(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F}),*,s\right)$ является симметричной композиционной алгеброй по (2).

Во второй главе диссертации, названной **«Локальные и 2-локальные дифференцирования и автоморфизмы алгебры октонионов»**, описываются общий вид локальных дифференцирований на вещественной алгебре октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$.

Пусть A – алгебра (необязательно ассоциативная). Линейный оператор $D:A\to A$ называется *дифференцированием*, если $D(ab)=D(a)b+aD(b)$ при всех $a,b\in A$. Пространство всех дифференцирований алгебры A обозначим через $Der(A)$. Если каждый элемент $a\in A$ определяет дифференцирование $D_a:A\to A$ по правилу $D_a(x)=ax-xa,\ x\in A$, то тогда дифференцирования вида D_a называются внутренними.

Линейная биекция $\Phi:A\to A$ называется автоморфизмом, если $\Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)$ для всех $x,y\in A$.

В наших доказательствах нам не понадобится общий вид дифференцирований на алгебрах октонионнов, поэтому ограничимся только четырымя дифференцированиями.

В наших доказательствах нам не понадобится общий вид дифференцирований на алгебрах октонионнов, поэтому ограничимся только четырымя дифференцированиями.

Для каждой пары $i\neq j\in\{1,\dots,7\}$ обозначим через $\Delta_{i,j}$ линейное отображение на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$, которое действуют на базисные элементы как:

$$\Delta_{ij}(e_i)=e_j,\ \Delta_{ij}(e_j)=-e_i,\ \Delta_{ij}(e_k)=0,\ k\neq i,j. \tag{4}$$

Следующие линейные отображения являются дифференцированиями:

$$\Delta_{12}+\Delta_{75},\ \Delta_{35}+\Delta_{76},\ \Delta_{36}+\Delta_{57},\ \Delta_{37}+\Delta_{65}. \tag{5}$$

Линейное отображение $\Delta:\mathbb{O}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ называется локальным дифференцированием, если для каждого $x\in\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ существует дифференцирование D_x на $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ (зависящий от x) такой, что $\Delta(x)=D_x(x)$.

Пространство всех локальных дифференцирований алгебры $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ обозначим через $LocDer\left(\mathbb{O}_{\mathbb{R}}\right)$.

Следующая теорема является основным результатом параграфа 2.1.

Теорема 2. Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ вещественная алгебра октонионов. Тогда линейное отображение Δ на $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ является локальным дифференцированием тогда и только тогда, когда его матрица кососимметрична с нулями в первой строке и первом столбце. В частности, пространство $LocDer(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})$ – всех локальных дифференцирований на $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ со скобкой Ли изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{so}_7(\mathbb{R})$.

Заметим, что по Теореме 2 каждый $\Delta_{i,j}$ $(1 \le i \ne j \le 7)$ является локальным дифференцированием на $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$, где $\Delta_{i,j}$ – линейное отображение, определяемое формулой (4).

Из Теоремы 2 вытекает следующее следствие который дает, условия существования локальных дифференцирований вещественной алгебры октонионов не являющихся дифференцированиями.

Следствие 2. Верно следующее равенство:

$$LocDer(\mathbb{O}_{\mathbb{R}}) = Der(\mathbb{O}_{\mathbb{R}}) \oplus \operatorname{span}\{\Delta_{1,2}, \Delta_{2,3}, \Delta_{3,4}, \Delta_{4,5}, \Delta_{5,6}, \Delta_{6,7}, \Delta_{7,1}\}. \quad (6)$$

В частности, приведенное выше равенство дает нам, что размерность фактор-пространства $LocDer(\mathbb{O}_{\mathbb{R}}) / Der(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})$ равна 7.

В параграфе 2.2 найдено необходимое и достаточное условия, когда линейное отображение является локальным автоморфизмом.

Линейное отображение Δ называется локальным автоморфизмом, если для каждого $x \in A$ существует автоморфизм Φ_x на A (зависящем от x) такой, что $\Delta(x) = \Phi_x(x)$.

Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ алгебра октонионов типа I. Тогда билинейная форма $\langle \cdot,\cdot \rangle$ определяется выражением

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i \beta_i$$

где $x = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=0}^{7} \beta_i e_i \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$. Сопряжение октониона

$$x = x_0 e_0 + \sum_{k=1}^{7} x_k e_k$$

задается

$$\bar{x} = x_0 e_0 - \sum_{k=1}^{7} x_k e_k.$$

Сопряжение является инволюцией $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ и удовлетворяет $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$.

След Tr на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ определяется $Tr(x)e_0 = x + \bar{x} \in \mathbb{F}e_0$.

Пусть $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ подалгебра кватернионов на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$. Поскольку $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ является ассоциативной центральной простой, то каждый автоморфизм $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ является внутренним по теореме Сколема-Нётера (см. [26, § 4.6, следствие из теоремы 4.9]).

Пусть элемент $a \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ ортогональный к $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ такой, что $\langle a, a \rangle = 1$. Тогда $\mathbb{O}_{\mathbb{F}} = \mathbb{H}_{\mathbb{F}} \oplus \mathbb{H}_{\mathbb{F}} a$. Возьмем элементы $c, p \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}}$ с $\langle c, c \rangle = \langle p, p \rangle = 1$.

Линейное отображение $\Phi_{c,p} : \mathbb{O}_{\mathbb{F}} \to \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ определенное следующим образом

$$\Phi_{c,p}(x + ya) = cxc^{-1} + \left(pcyc^{-1}\right)a,\ x + ya \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}} \oplus \mathbb{H}_{\mathbb{F}}a. \qquad (7)$$

является автоморфизмом $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ (см. [40, с. 26, формула (2.2)]).

Отметим, что группа всех автоморфизмов $Aut\left(\mathbb{O}_{\mathbb{F}}\right)$ алгебры октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ является группой типа G_2 которая изоморфна подгруппе специальной ортогональной группы $SO(7,\mathbb{F})$ (см. [27, Теорема 6], [40, Теорема 2.3.5]). В частности, любой автоморфизм Φ на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ имеет ортогональную матрицу, т.е.

$$\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \qquad (8)$$

для всех $x, y \in \mathbb{O}_{\mathbb{F}}$.

Следующая теорема является основным результатом параграфа 2.2.

Теорема 3. Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ алгебра октонионов над полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики и Δ линейное отображение на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$. Тогда Δ является локальным автоморфизмом тогда и только тогда, когда оно оставляет единицу неподвижным и его матрица ортогональна. В частности, группа всех локальных автоморфизмов $LocAut\left(\mathbb{O}_{\mathbb{F}}\right)$ на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ изоморфна группе $O(7,\mathbb{F})$.

Имеет место следующее

Следствие 3. Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ алгебра октонионов над полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики и Δ линейное отображение на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$. Тогда Δ является локальным автоморфизмом тогда и только тогда, когда она изометрия оставляющая единицу неподвижной.

В параграфе 2.3 рассмотрено 2-локальные дифференцирования на алгебре октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики и доказано, что каждое 2-локальное дифференцирование на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ является дифференцированием.

Пусть A – произвольная алгебра над полем $\mathbb{F}$. Отображение $\Delta : A \to A$ (не обязательно линейное) называется 2-*локальным дифференцированием*, если для каждой пары $x, y \in A$ существует дифференцирование $D_{x,y} : A \to A$ (в зависимости от x, y) такие, что $\Delta\left(x\right) = D_{x,y}\left(x\right),\ \Delta\left(y\right) = D_{x,y}\left(y\right)$.

Следующая теорема является основным результатом данного параграфа.

Теорема 4. Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ алгебра октонинов над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики. Тогда всякое 2-локальное дифференцирование на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ является дифференцированием.

В параграфе 2.4 доказано, что каждый 2-локальный автоморфизм алгебры октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ над алгебраическим замкнутем полем $\mathbb{F}$ является автоморфизмом. Найдено необходимое и достаточное условия, когда отображение на вещественные алгебры октонионов является 2-локальным автоморфизмом.

Пусть A – алгебра. Отображение $\Delta : A \to A$ (не обязательно линейное) называется 2-локальным автоморфизмом, если для каждой пары $x, y \in A$ существует автоморфизм $\Phi_{x,y} : A \to A$ (зависящий от x, y) такой, что $\Delta(x) = \Phi_{x,y}(x),\ \Delta(y) = \Phi_{x,y}(y)$.

Теорема 5. Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ – алгебра октонионов над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики. Тогда всякий 2-локальный автоморфизм на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ является автоморфизмом.

Теорема 6. Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ вещественная алгебра октонионов и Δ отображение на $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$. Тогда Δ является 2-локальным автоморфизмом тогда и только тогда, когда он являяется линейным отображением, которое оставляет единицу неподвижным, а его матрица ортогональна. В частности, группы всех 2-локальных автоморфизмов и локальных автоморфизмов на $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ совпадают.

Отметим, что описание локальных и 2-локальных дифференцирований и автоморфизмов алгебры Кэли над произвольным полем было получено в работе Ш. А. Аюпова, А. Элдука и К. К. Кудайбергенова[8].

В третьей главе диссертации, названной **«Локальные и 2-локальные дифференцирования алгебры Мальцева и Окубо»**, получено, что алгебра Мальцева $M_7(\mathbb{R})$ является простым неассоциативным алгеброй, допускающий чисто локальные дифференцирования, т.е. существует локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями. А также дано описание локальных и 2 -локальных автоморфизмов 7-мерной простой алгебры Мальцева.

Алгебры Мальцева были введены в 1955 году А.И. Мальцевым [44] как касательные алгебры аналитических луп Муфанг. Они связаны с альтернативными алгебрами так же, как алгебры Ли связаны с ассоциативными алгебрами: если A альтернативная алгебра, то алгебра $A^{(-)}$ с умножением $[x,y]=xy-yx$ является алгеброй Мальцева.

Алгебра $(A,\circ)$ над полем $\mathbb{F}$ называется алгеброй Мальцева, если ее умножение антикоммутативно и удовлетворяет следующему тождеству:

$$J(x,\,y,\,xz)=J(x,\,y,\,z)x,$$

где $J(x,y,z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y$ – якобиан элементов x,y,z.

Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ алгебра октонинов над полем $\mathbb{F}$ и определим новое умножение $\circ$ следующим образом:

$$x\circ y=\frac{1}{2}(xy-yx),\;\; x,\,y\in\mathbb{O}_{\mathbb{F}}.$$

Тогда $\left(\mathbb{O}_{\mathbb{F}},\circ\right)$ является алгеброй Мальцева.

Поскольку $e_0\circ x=0$ для всех $x\in\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$, можно рассматривать фактор-алгебру $M_7(\mathbb{F})=\mathbb{O}_{\mathbb{F}}/\{e_0\}$. Алгебра $M_7(\mathbb{F})$ является простой алгеброй Мальцева и допускает базис $\{e_1,\dots,e_7\}$ со следующей таблицей умножения:

$$\begin{gathered}e_1e_2=2e_2,\;\; e_1e_3=2e_3,\;\; e_1e_4=2e_4,\\ e_1e_5=-2e_5,\;\; e_1e_6=-2e_6,\;\; e_1e_7=-2e_7,\\ e_2e_3=2e_7,\;\; e_3e_4=2e_5,\;\; e_4e_2=2e_6,\\ e_5e_6=-2e_4,\;\; e_6e_7=-2e_2,\;\; e_7e_5=-2e_3,\end{gathered}$$

[8] Ayupov Sh.A., Elduque A., Kudaybergenov K.K. Local derivations and automorphisms of Cayley algebras. Journal of Pure and Applied Algebra. 227 (2023), 107277

$$e_2e_5 = e_1, \quad e_3e_6 = e_1, \quad e_4e_7 = e_1.$$

где опущенные произведения антисимметричны или равны нулю.

Из работы А. Сагла[9] известно, что всякое дифференцирование алгебры октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ определяет дифференцирование на $M_7(\mathbb{F})$, и наоборот. Точнее, если D является дифференцированием на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ со следующим матричным представлением:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & D_1 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, D_1 является 7×7 -матрицей над $\mathbb{F}$ и t является транспонированием, то матрица D_1 определяет дифференцирование на $M_7(\mathbb{F})$. Обратно, если D_1 является дифференцированием на $M_7(\mathbb{F})$, то линейное отображение D , определенное выше, дает дифференцирование на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$. Следовательно, аналогичное соответствие между локальными (2-локальными) дифференцированиями алгебры октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ и алгеброй Мальцева $M_7(\mathbb{F})$ также верны.

Из Теоремы 2 и Теоремы 5 получаем следующие результаты.

Теорема 7. Пусть $M_7(\mathbb{R})$ алгебра Мальцева ассоциированная с вещественной алгеброй октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$. Линейное отображение $\Delta: M_7(\mathbb{R}) \to M_7(\mathbb{R})$ является локальным дифференцированием тогда и только тогда, когда его матрица кососимметрична.

Теорема 8. Пусть $M_7(\mathbb{F})$ алгебра Мальцева связанная с алгеброй октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики. Тогда всякое 2 -локальное дифференцирование на $M_7(\mathbb{F})$ является дифференцированием.

Из работы А. Элдука и Х. Мюнга[10] известно, что всякий автоморфизм алгебры октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ определяет автоморфизм на $M_7(\mathbb{F})$, и обратно. Точнее, если Φ является автоморфизмом на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$, то ограничение $\Phi|_{M_7(\mathbb{F})}$ является автоморфизмом на $M_7(\mathbb{F})$. Обратно, если Ψ является автоморфизмом на $M_7(\mathbb{F})$ то его расширение на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ определяемое как

$$\Phi(\lambda e_0 + x) = \lambda e_0 + \Psi(x),\ \lambda \in \mathbb{F},\ x \in M_7(\mathbb{F}),$$

является автоморфизмом на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$. Поэтому аналогичное соответствие между локальными (2-локальными) автоморфизмами алгебры октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ и алгебры Мальцева $M_7(\mathbb{F})$ также верно.

Из теорем 3, 5 и 6 получаем следующие результаты.

Теорема 9. Пусть $M_7(\mathbb{F})$ алгебра Мальцева ассоциированная с алгеброй октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ над полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики. Линейное отображение

---

[9] Sagle A. Malcev algebras. Transactions of the American Mathematical Society. 101. (1961), p. 426-458.

[10] Elduque A., Myung H. Ch. Mutations of alternative algebras. Mathematics and its Applications. 278. (1994), p. 92-135.

$\Phi: M_7(\mathbb{F}) \to M_7(\mathbb{F})$ является локальным автоморфизмом тогда и только тогда, когда его матрица ортогональна.

Теорема 10. Пусть $M_7(\mathbb{F})$ алгебра Мальцева связанная с алгеброй октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики. Тогда каждый 2-локальный автоморфизм на $M_7(\mathbb{F})$ является автоморфизмом.

Теорема 11. Пусть $M_7(\mathbb{R})$ алгебра Мальцева ассоциированная с алгеброй октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Тогда отображение $\Phi: M_7(\mathbb{R}) \to M_7(\mathbb{R})$ является 2-локальным автоморфизмом тогда и только тогда, когда оно линейно и его матрица ортогональна.

В параграфах 3.2 и 3.3 рассмотрены локальные и 2-локальные дифференцирования алгебры Окубо над полем $\mathbb{F}$ характеристики отличной от 3. Доказывается, что каждое локальное и 2-локальное дифференцирование алгебры Окубо является дифференцированием.

Теорема 12. Пусть $\mathcal{O}$ алгебра Окубо над полем F характеристики отлично от 2 и 3. Тогда всякое локальное дифференцирование алгебры $\mathcal{O}$ является дифференцированием.

Теорема 13. Пусть $\mathcal{O}$ алгебра Окубо над полем $\mathbb{F}$ характеристики $\neq 2,3$. Тогда каждое 2-локальное дифференцирование $\Delta: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ является дифференцированием.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена изучению локальных дифференцирований и автоморфизмов алгебры октонионов и алгебры Окубо.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1) исследованы локальные дифференцирования на вещественной алгебре октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ и доказано, что всякое 2-локальное дифференцирование на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ является дифференцированием;

2) изучены локальные автоморфизмы на алгебре октонионов $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ над полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики и доказано, что всякий 2-локальный автоморфизм на $\mathbb{O}_{\mathbb{F}}$ является автоморфизмом;

3) установлено, что в алгебре октонионов над полем вещественных чисел и 7-мерной алгебре Мальцева, являющиеся простой неассоцитивной алгеброй, существует локальное дифференцирование не являющееся дифференцированием;

4) изучены локальные и 2-локальные автоморфизмы 7-мерной простой алгебры Мальцева;

5) доказано, что всякое локальное и 2-локальное дифференцирование алгебры Окубо является дифференцированием.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ALLAMBERGENOV ALLAYAR XASANBAEVICH

LOCAL DERIVATIONS AND AUTOMORPHISMS OF OCTONION ALGEBRAS AND OKUBO ALGEBRAS

01.01.06 – algebra

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2024.3.PhD/FM1137.

Dissertation has been prepared at Nukus State Pedagogical Institute and Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Arziqulov Farxodjon Nematovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
	Turdibaev Rustam Mirzalievich Doctor of philosophy(Ph.D) physical and mathematical sciences, Senior researcher
Leading organization:	**National University of Uzbekistan**

Defense will take place 21 January, 2025 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered № 195). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on 27 December, 2024.
(Mailing report № 2, on 27 December, 2024).

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.-M.S.,
Senior researcher

A.R. Hayotov
Deputy chairman of the scientific seminar
at the Scientific Council for the
award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study local and 2-local derivations, automorphisms of octonion algebras, the 7-dimensional simple Malcev algebra, and local and 2-local derivations of Okubo algebras.

The object of the research work: octonion algebras, 7-dimensional simple Maltsev algebra and Okubo algebras.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

local derivations and automorphisms on octonion algebra over a field of the characteristic zero have been described and it is proved that any 2-local derivations and automorphisms coincide with derivations and automorphisms, respectively;

it has been proven that the real octonion algebra and the 7-dimensional Malcev algebra are simple non-associative algebras on which the space of local derivations does not coincide that of derivations;

local and 2-local automorphisms of the 7-dimensional simple Maltsev algebra have been described;

it has been proven that every local and 2-local derivation of the Okubo algebra is a derivation.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation were used in the following scientific studies:

the classification of local derivations and automorphisms of octonion algebras was used in an international research project titled «Study of Operators in Functional Spaces Using Synthetic Methods of Algebra, Geometry, and Analysis, and Their Information and Educational Support» to classify operators in functional spaces (Reference from the Southern Mathematical Institute No. 9, October 29, 2024, Russian Federation). The research findings enabled the description of operators using synthetic methods of algebra and analysis.

the local derivations of the real octonion algebra and the 7-dimensional simple Malcev algebra were applied in the international research project «Functional Invariants of Tensors», with project number AP23489146, to analyze the differentiations of associative and non-commutative algebras (Reference from the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling No. 01-06/186, November 4, 2024, Kazakhstan). The application of these scientific results allowed for the proof of structural properties of the differentiations of associative and non-commutative Novikov algebras.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters divided into 9 paragraphs, a conclusion, and 44 references used literature. The total volume of the thesis is 82 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (I часть; part I)

1. Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov, A.X.Allambergenov, Local and 2-local derivations on octonion algebras, Journal of Algebra and its Applications, 2023, Vol. 22, No. 07, 2350147. (3. Scopus. IF=0.5).
2. Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov, A.X.Allambergenov, Local and 2-local automorphisms on octonion algebras, Uzbek Mathematical Journal, 2022, 66(2), p.22-34. (01.00.00; №6).
3. А.Х. Алламбергенов, Локальные дифференцирования алгебры Окубо, Бюллетень Института математики, 2022, 5(5), с. 87- 96. (01.00.00; №6).
4. А.Х. Алламбергенов, 2-локальные дифференцирования алгебры Окубо, Бюллетень Института математики, 2023, 6(4), с. 108-112. (01.00.00; №17).

II bo‘lim (II часть; part II)

5. К.К.Кудайбергенов, А.Х.Алламбергенов, Локальные и 2-локальные дифференцирование на алгебра октонионов, Республиканская научно-практическая конференция ”Роль информационно-коммуникационных технологий в развитии естествознания”, 9-ноября 2021год, Нукус, 25-27 б.
6. A.H.Allambergenov, Local and 2-local automorphisms on octonion algebras, Respublican scientific conference ”Actual issues of mathematics and information systems”, Urgench, November 12-13, 2021 p. 109-111.
7. А.Х.Алламбергенов, Локальные дифференцирования алгебры Окубо, Научная конференция “Операторные алгебры, неассоциативные структуры и смежные проблемы”, 14-15 сентября 2022 года Ташкент, с. 107-108
8. A.H. Allambergenov, 2-local derivations of Okubo algebras, International conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”, September 23-24, 2022, Samarkand, p. 86-87.
9. А.Х.Алламбергенов, Локальные и 2-локальные дифференцирования алгебры Окубо, Международная научно-практическая конференция “Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий”, 2-3-мая 2023 года, Нукус, с. 55-56.
10. А.Х.Алламбергенов, Локальные автоморфизмы простой 7- мерной алгебры мальцева, Международная научно-практическая конференция ”Актуальные проблемы повышения качества образования с использованием цифровых технологий”, 16-17-мая 2024 года, Нукус, с. 132-133.
11. А.Х.Алламбергенов, Локальные дифференцирования простой 7- мерной алгебры мальцева, Республиканская научная конференция, “Актуальные проблемы прикладной математики, математического моделирования и информатики”, 24-25-мая 2024 года, Нукус, с. 46-48.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida
2024 yil 2-dekabrda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar
o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 52/24.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.