V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

SAYFULLOYEVA GULNOZ SAYFULLOYEVNA

KATS EMPIRIK PROTSESSLARI UMUMLASHMALARI VA ULARNING ASIMPTOTIK XOSSALARI

01.01.05 – Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

NAVOIY – 2023

UDK: 519.234

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

SAYFULLOYEVA GULNOZ SAYFULLOYEVNA

KATS EMPIRIK PROTSESSLARI UMUMLASHMALARI VA ULARNING ASIMPTOTIK XOSSALARI

**01.01.05 – Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

NAVOIY – 2023

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2022.2.PhD/FM712 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Navoiy davlat pedagogika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (http:kengash.mathinst.uz) va «ZiyoNet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Abdushukurov Abduraxim Axmedovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Miraxmedov Sherzod Adilovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Nurmuxamedova Nargiza Saydillayevna fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Toshkent davlat transport universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil « 13 » iyun soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (160-raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40).

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil « 26 » may kuni tarqatildi.
(2023 yil « 26 » maydagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A.Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

J.K.Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.d.,katta ilmiy xodim

SH.Q.Formanov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash qoshidagi
ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Statistik tadqiqotlarning dastlabki bosqichida kuzatish natijalarini qayta ishlash va yechimlar qabul qilish qulay koʻrinishda ifodalanishi asosiy masalalardan biridir. Statistik xulosalarning sifat koʻrsatkichi nafaqat ularning hajmiga balki ularni olish usullariga ham bogʻliq boʻlib qoladi. Ammo yon atrofdagi mavjud statistik maʼlumotlar toʻliq boʻlmay, ular asosida bir yoki bir necha tasodifiy miqdorlarning nomaʼlum taqsimotlari yoki ularning funksionallari haqida statistik xulosalar chiqarishga toʻgʻri keladi. Toʻliq boʻlmagan tanlanmalar umr davomiyligi tipidagi maʼlumotlarni tahlil qilishda, sugʻurta ishida, demografiyada, astronomik tadqiqotlarda koʻplab uchrab turadi. Masalan, chidamlilikka tekshirilayotgan obʼyektlar (texnik uskunalar, individumlar) ni kuzatish jarayonida bunday toʻliq boʻlmagan sonli maʼlumotlarni uchratish mumkin. Bunday eksperimental holatlarda kuzatilayotgan tanlanmalar nafaqat bizni qiziqtiradigan tasodifiy miqdorlar, balki bizga xalaqit beruvchi, yaʼni senzuralovchi miqdorlardan ham iborat boʻlishi mumkin ekan. Bunday toʻliq boʻlmagan maʼlumotlar orqali baholanishi zarur boʻlgan asosiy xarakteristika – bu bir yoki bir necha tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlaridan iboratdir.

Toʻgʻri chiziqda bir karralik, koʻp karralik hamda bir jinslik boʻlmagan bir tomondan (chapdan yoki oʻngdan), ikki tomondan yoki kuzatiladigan va kuzatilmaydigan intervallar orqali senzurlangan tanlanmalarni kuzatish mumkin. Agar kuzatilayotgan obʼyekt (uskuna yoki individum) biror qoʻshimcha faktorlar taʼsirida (bosim, temperatura, kuchlanish va shu kabilar) boʻlsa, u holda senzurlanayotgan tasodifiy miqdorlardan tashqari qoʻshimcha biror hodisalarni ham kuzatish mumkin. Bunday tasodifiy miqdorlar va hodisalar kuzatiladigan statistik modellar raqobatli risk modellari deb ataladi. Ushbu dissertatsiya ishida raqobatli risklar modelida taqsimot funksiyalari uchun Kats tipidagi empirik protsesslar ularning modifikatsiyalangan variantlari hamda integral intensivlik funksiyalari, zichlik funksiyalari, xarakteristik funksiyalarining Kats baholari orqali tuzilgan funksionallari tadqiq qilingandir. Aynan shu tipidagi masalalar proporsional intensivliklar xususiy modellarida ham tadqiq etilgandir.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega boʻlgan ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning dolzarb yoʻnalishlariga ayniqsa eʼtibor qaratildi. «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fanining ustuvor yoʻnalishlari boʻyicha halqaro standartlar natijasida ilmiy tadqiqotlar olib borish asosiy vazifalar va faoliyat yoʻnalishlari etib belgilandi[1]. Mazkur qaror ijrosini taʼminlashda Kats empirik protsesslari va ularning asimptotikasini oʻrganish sohasida ilmiy tadqiqot ishlarini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega. Bu masalalarning asosiy yechimi bu dissertatsiya ishining asosini tashkil etadi.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son «Oʻzbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish boʻyicha harakatlar strategiyasi toʻgʻrisida»gi Farmoni, 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son «Matematika taʼlimi va

---

[1]Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar mahkamasi 2017 yil 18 maydagi «Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish toʻgʻrisida»gi 292-sonli qarori

fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi va 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Ushbu tadqiqot O‘zbekiston Respublikasida fan-texnika taraqqiyotining ustuvor yo‘nalishlariga muvofiq amalga oshirildi. IV. «Matematika, mexanika va informatika».

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. M.Kats empirik protsesslarning maxsus sinfini tadqiq qildi. Bu protsesslar parametri n ga teng bo‘lgan bog‘liq bo‘lmagan Puasson tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi yordamida qo‘shiluvchilarni maxsus tanlash yordamida empirik statistika ko‘rinishida tanlanadi. Bunday protsesslarni M.Csörgő, S.Csörgő, P.Gaenssler, W.Stute, Ya.Yu.Nikitin, L.Beghin, C.Klassen, J.Wellner va boshqalar tadqiq qilganlar.

Hozirga qadar olib borilgan tadqiqotlar M.Katsning klassik statistikasiga aloqador edi. Bu statistikaning muhim bir kamchiligi mavjudligi ko‘rinib qoldi. Gap shundaki, uning qiymati taqsimot funksiyasining boshqa baholaridan farqli holda 1 sonidan katta bo‘lib qolishi mumkin ekan. Ushbu dissertatsiya ishida tasodifiy senzurlanishning umumlashgan raqobatli risklar modelida tasodifiy miqdor va hodisalarning birgalikdagi taqsimotlari, ya’ni subtaqsimotlar uchun maxsus 1 sonidan oshmaydigan, modifikatsiya qilingan variantlari kiritilgan bo‘lib, ular yordamida boshqa xarakteristikalar uchun mos baholar tuzib, ular o‘rganilgan.

Mavjud adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, hozirga qadar taqsimot funksiyalari uchun bunday ko‘rinishdagi kesilgan Kats statistikalari va ular yordamida tuzilgan boshqa xarakteristikalarning asimptotik xossalari o‘rganilmagan ekan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Navoiy davlat pedagogika instituti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi tasodifiy senzurlanishning raqobatli risklar modelida modifikatsiya qilingan Kats statistikasi va uning funksionallarining asimptotik xossalarini isbotlashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

klassik Kats statistikasi yordamida tuzilgan empirik protsesslarni modifikatsiya variantlarini tuzish;

modifikatsiya qilingan Kats protsesslarining og‘ishini eksponensial tengsizliklar yordamida baholash;

senzurlanishning umumlashgan modelida modifikatsiya qilingan variantlari uchun approksimatsiya natijasini o‘rnatish;

eksponensial intensivlik baholaridan tuzilgan protsesslar uchun approksimatsiya teoremalarini o‘rganish;

tasodifiy senzurlanish modelida xarakteristik funksiyani bahosini qurish va uning tekis kuchli asoslilik xossasini o‘rganish;

proporsional intensivliklar modeli (PIM) va unda taqsimot funksiyasini baholash;

PIM dagi taqsimot funksiyasi bahosini approksimatsiya qilish;

PIM dagi taqsimot funksiyasi hosilalarining yadroviy Kats baholarini tadqiq qilish;

PIM dagi zichlik funksiyasining yadroviy bahosini tadqiq qilish.

Tadqiqot ob’yekti Katsning modifikatsiya qilingan empirik baholari va ularning funksionallaridan iborat.

Tadqiqot predmeti tasodifiy senzurlanishning umumlashgan senzurlanish modelidagi modifikatsiya qilingan Kats baholari va ularning approksimatsiya xossalari.

Tadqiqodning usullari: Tadqiqot ishida empirik va ular bilan bog‘liq bo‘lgan tasodifiy protsesslarning kuchli approksimatsiyasi hamda boshqa xossalaridan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

senzurlanishning raqobatli risklar modelida taqsimot funksiyalari uchun yangi Kats baholari topilgan hamda modifikatsiyalangan empirik baholardan tuzilgan protsesslar uchun eksponensial tengsizliklar va mos approksimatsiya teoremalari isbotlangan;

eksponensial intensivlik baholaridan tuzilgan protsesslar uchun approksimatsiya teoremalari keltirilgan;

xarakteristik funksiya uchun tasodifiy senzurlanish modelida bahoning kuchli asosliligi isbotlangan;

proporsional intensivliklar modelida taqsimot funksiyasi uchun Kats bahosi qurilgan hamda taqsimot funksiyasi hosilalari va xususan zichlik funksiyasi uchun silliqlangan yadroviy baholar qurilib, ularning asimptotik xossalari isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari tasodifiy senzurlanishning raqobatli risklar modelida taqsimot funksiyasi uchun modifikatsiya qilingan Kats bahosi qurilgan va ular orqali tuzilgan empirik protsesslar uchun approksimatsiya teoremalari isbotlangan hamda integral intensivliklar, xarakteristik funksiyalar, taqsimot funksiya hosilalari, zichlik funksiyalar uchun baholar qurilgan va ularning asimptotikasi o‘rganilgan. Bu natijalarning proporsional intensivliklar modelidagi o‘xshashliklari ham o‘rnatilgandir.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asimptotik nazariyasi usullarini qo‘llash yordamida hamda matematik isbotlarning qat’iyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati tasodifiy senzurlanishning umumlashgan modellarida qurilgan Kats protsesslarining asosliligi va optimal approksimatsiya tezligiga ega ekanligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati dissertatsiya ishining natijalari statistik ma'lumotlarni tahlil qilishda, statistik baholash va gipotezalarni tekshirishda hamda ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning empirik statistikaning empirik protsesslar bilan bog'liq maxsus kurslarini o'qishda qo'llash mumkin.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Tasodifiy senzurlanishning raqobatli risklar modelida modifikatsiya qilingan Kats statistikasi va uning funksionallarining asimptotikasiga oid masalalar bo'yicha olingan natijalar asosida:

tasodifiy senzurlanishning umumlashgan modelida yig'indilar sonini bog'liqsiz Puasson taqsimotiga ega tasodifiy miqdorlar bilan almashtirish orqali hosil qilingan empirik Kats statistikasidan OT-F-4-40 raqamli «O'lchovli funksiyalar sinfida indekslangan integral empirik protsesslarning asimptotik xossalarini tadqiq qilish» mavzusidagi fundamental loyihada taqsimot funksiyasi baholari asimptotik xossalariga doir teoremalarini isbotlashda foydalanilgan (O'zbekiston Milliy universitetining 2023 yil 30 yanvardagi №04/11-418-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo'llanilishi tasodifiy senzurlanishning umumlashgan modelida qaralayotgan taqsimot funksiyaning asimptotik xossalarini isbotlash imkonini bergan.

proporsional risklar modelida integral intensivlik funksiyasi yordamida qurilgan baholar orqali tuzilgan empirik protsesslardan YO-F4-07 raqamli «Kopula funksiyalari yordamida statistik baholash va gipotezalarni tekshirish» mavzusidagi fundamental loyihada empirik protsesslarning Gauss protsessi bilan approksimatsiya teoremalarini isbotlashda foydalanilgan (O'zbekiston Milliy universitetining 2022 yil 20 maydagi №04/11-2884-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo'llanilishi tasodifiy senzurlanishning raqobatdosh risklar modelida funksionallarning asimptotik xossalarini xossalarini isbotlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 4 ta xalqaro va 8 ta respublika ilmiy amaliy anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 19 ta ilmiy ish chop etilgan, ulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 5 ta maqola, jumladan, 2 tasi xorijiy va 3 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 92 betdan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida mavzuning dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga muvofiqligi asoslangan, dissertatsiya mavzusi bo'yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlarning tahlili berilgan, muammoning o'rganilganlik darajasi yoritilgan, tadqiqotning maqsad va vazifalari, ob'yekti va predmeti ko'rsatilgan, tadqiqot natijalarining ilmiy yangiligi ochib berilgan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ko‘rsatilgan, tadqiqot natijalarining tatbiqi, shuningdek nashr etilgan ilmiy ishlar va dissertatsiyaning tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning «**Senzurlanishning umumlashgan modeli. Taqsimot funksiyasi uchun Kats bahosi**» deb nomlangan birinchi bobi tahliliy va yordamchi xarakterga ega bo‘lib, dissertatsiyada ishlatilgan asosiy tushunchalar va boshqa mualliflarning ilmiy natijalari keltirilgan. Ikkinchi va uchinchi boblarda dissertatsiya mavzusi bo‘yicha olingan ilmiy natijalar keltirilgan.

Dissertatsiyaning «**Kats protsesslarining umr davomiyligi funksionallarini approksimatsiyalarida qo‘llanilishi**» deb nomlangan ikkinchi bobda senzurlanishning umumlashgan modelida tuzilgan modifikatsiya qilingan variantlari uchun approksimatsiya natijalari o‘rganilgan. Bobning birinchi paragrafida taqsimot va subtaqsimotlarning modifikatsiya qilingan Kats baholarini va ular uchun mos limit teoremalar hamda asosiy natijalar keltirilgan.

$\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ ehtimolliklar fazosida kuzatilayotgan $\{Z_m, m \geq 1\}$ bog‘liq bo‘lmagan va bir xil $H(x) = P(Z_1 \leq x)$ taqsimot bilan berilgan tasodifiy miqdorlardan tashqari parametri n ga teng bo‘lgan Puasson taqsimotiga ega, bog‘liqsiz $\{\nu(n), n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ham berilgan bo‘lsin. Har ikkala ketma-ketlik o‘zaro bog‘liqsiz deb faraz qilamiz. Bundan tashqari, $\{\nu(n), n \geq 1\}$ ketma-ketlik $\left\{\left(A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, ..., A_m^{(k)}\right), m \geq 1\right\}$ ketma-ketlik bilan ham o‘zaro bog‘liqsiz deb hisoblaymiz. U holda $H(x)$ va $H(x;i) = P\left(Z_m \leq x, \delta_m^{(i)} = 1\right)$, $i \in J$ taqsimotlar uchun $H_n^*(x)$ va $H_n^*(x;i)$, $i \in J$ lar orqali ularning Kats empirik baholarini quyidagi ko‘rinishda kiritishimiz mumkin:

$$H_n^*(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{\nu(n)} I(Z_m \leq x), & agar\ \nu(n) \geq 1\ bo‘lsa, \\ 0, & aks\ holda, \end{cases}$$

hamda

$$H_n^*(x;i) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{\nu(n)} I\left(Z_m \leq x, \delta_m^{(i)} = 1\right), & agar\ \nu(n) \geq 1\ bo‘lsa, \\ 0, & aks\ holda. \end{cases}$$

Eslatib o‘tamiz, bu ikkala baho mos ravishda $H(x)$ va $H(x;i)$ lar uchun siljimagan baho bo‘ladi.

Quyidagi empirik protsesslarni kiritamiz:

$$a_n^{(0)*}(x) = \sqrt{n}\left(H_n^*(x) - H(x)\right),\ x \in R,$$

$$a_n^{(i)*}(x) = \sqrt{n}\left(H_n^*(x;i) - H(x;i)\right),\ x \in R,\ i \in J.$$

Bu protsesslardan iborat vektor uchun quyidagi approksimatsiya o‘rinlidir.

1-teorema. *Agar asosiy ehtimollik fazosi* $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ *yetarlicha boy bo'lsa, u holda shunday* $k+1$ *ta* $W_n^{(0)}(x), W_n^{(1)}(x), ..., W_n^{(k)}(x)$ *Gauss protsesslari ketma-ketliklarini aniqlash mumkinki,* $a_n^*(t) = \left(a_n^{(0)*}(t_0), a_n^{(1)*}(t_1), ..., a_n^{(k)*}(t_k)\right)$ *va* $W_n^*(t) = \left(W_n^{(0)}(t_0), W_n^{(1)}(t_1), ..., W_n^{(k)}(t_k)\right)$, $t = (t_0, t_1, ..., t_k)$ *lar uchun quyidagi o'rinli:*

$$P\left\{\sup_{t \in R^{k+1}} \left\| a_n^*(t) - W_n^*(t) \right\|^{(k+1)} > C^* n^{-1/2} \log n \right\} \le K^* n^{-r},$$

bu yerda $r \ge 2$, $C^* = C^*(r)$ *va* K^* *lar musbat sonlar. Bundan tashqari,* $W_n^*(t)$ *ning o'zi* $(k+1)$ *– o'lchovli vektor-qiymatli Gauss protsessi bo'lib,*

$$EW^{(i)}(x) = 0, \quad (x, i) \in R \times \overline{J}$$

va ixtiyoriy $i, j \in J$, $i \ne j$, $x, y \in R$ *uchun*

$$\begin{aligned} &EW_n^{(0)}(x) W_n^{(0)}(y) = \min\{H(x), H(y)\}, \\ &EW_n^{(i)}(x) W_n^{(j)}(y) = \min\{H(x;i), H(y;j)\}, \qquad (1) \\ &EW_n^{(i)}(x) W_n^{(0)}(y) = \min\{H(x;i), H(y)\}. \end{aligned}$$

$H_n^*(x)$ va $H_n^*(x;i)$, $i \in J$ Kats empirik baholari qiymati 1 sonidan musbat ehtimollik bilan katta bo'lishi mumkin. Shu boisdan, biz ularning modifikatsiya variantlarini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\tilde{H}_n(x) = 1 - \left(1 - H_n^*(x)\right) I\left(H_n^*(x) \le 1\right), \quad x \in R,$$

$$\tilde{H}_n(x;1) + \tilde{H}_n(x;2) + ... + \tilde{H}_n(x;k) = \tilde{H}_n(x).$$

$$\tilde{H}_n(x;i) = \begin{cases} H_n^*(x;i), & агар \ x < T_n^*, \\ H_n^*(T_n^*;i), & агар \ x \ge T_n^*, \end{cases}$$

bu yerda, $T_n^* = \inf\{x: \ H_n^*(x) = 1\}$.

Quyidagi teoremadagi tengsizliklar Kats statistikalarini tadqiq etishda muhim ahamiyatga egadir.

2-teorema. *Faraz qilaylik,* $\{\nu(n), n \ge 1\}$ *ketma-ketlik parametri* $E\nu(n) = n$ *ga teng Puasson taqsimotiga ega bo'lsin. U holda* $\varepsilon > 0$ *son va*

$$\frac{n}{\log n} \ge \frac{\varepsilon}{8(1+e/3)^2}, \qquad (2)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi n *uchun*

$$P\left(\left|\nu(n) - n\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} n \log n\right)^{1/2}\right) \le 2n^{-\varepsilon w},$$

$$P\left(\sup_{-\infty < x < \infty} \left|H_n^*(x;i) - H(x;i)\right| > 2\left(\frac{\varepsilon \log n}{2n}\right)^{1/2}\right) \le 4n^{-4\varepsilon w}, \ i \in J,$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\tilde{H}_n(x;i)-H(x;i)\right|>2\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{1/2}\right)\le 4n^{-4\varepsilon w},\ \ i\in J$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|H_n^*(x)-H(x)\right|>2\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{1/2}\right)\le 4kn^{-4\varepsilon w},$$

$$P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\tilde{H}_n(x)-H(x)\right|>2\left(\frac{\varepsilon\log n}{2n}\right)^{1/2}\right)\le 4kn^{-4\varepsilon w}$$

baholar o‘rinlidir. Bu yerda $w=\left[16(1+e/3)\right]^{-1}$.

Quyidagi $\tilde{a}_n(t)=\left(\tilde{a}_n^{(0)}(t_0),\tilde{a}_n^{(1)}(t_1),...,\tilde{a}_n^{(k)}(t_k)\right)$ vektorlarni kiritamiz, bu yerda $\tilde{a}_n^{(0)}(x)=\sqrt{n}\left(\tilde{H}_n(x)-H(x)\right)$, $\tilde{a}_n^{(i)}(x)=\sqrt{n}\left(\tilde{H}_n(x;i)-H(x;i)\right)$, $(x;i)\in R\times J$. Biz vektor-qiymatli empirik modifikatsiya qilingan $\tilde{a}_n(t)$ Kats protsessi uchun mos Gaussning vektor qiymatli protsessi bilan approksimatsiya qilish haqidagi teoremani keltiramiz.

3-teorema. *Faraz qilamiz,* $\{T_n,n\ge 1\}$ *quyidagi tengsizliklarni qanoatlantiruvchi sonli ketma-ketlik bo‘lsin: har bir* n *uchun*

$$T_n<T_H=\inf\left\{x:H(x)=1\right\}\le\infty,$$

shundayki,

$$\min_{i\in J}\left\{P\left(A^{(i)}\right)-H(T_n,i)\right\}\ge 2\left(\frac{r\log n}{2wn}\right)^{1/2}.$$

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ *uchun (2) shart bajarilgan bo‘lsa, u holda 2-teoremadagi ehtimolliklar fazosida o‘rta qiymati nolga teng bo‘lgan* $k+1$ *ta* $W_n^{(0)}(x),W_n^{(1)}(x),...,W_n^{(k)}(x)$ *- Gauss protsesslari ketma-ketliklarini shunday aniqlash mumkin bo‘ladiki, ularning kovariatsiya strukturalari (1) tengliklar bilan aniqlanadi va* $\tilde{a}_n(t)$ *hamda* $W_n^*(t)=\left(W_n^{(0)}(t_0),W_n^{(1)}(t_1),...,W_n^{(k)}(t_k)\right)$ *vektorlar uchun quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi:*

$$P\left\{\sup_{t\in(-\infty;T_n]^{k+1}}\left\|\tilde{a}_n(t)-W_n^*(t)\right\|^{(k+1)}>\tilde{C}n^{-1/2}\log n\right\}\le\tilde{K}n^{-\beta},$$

bu yerda $\tilde{K}$ - absolyut o‘zgarmas, $\tilde{C}=\tilde{C}(\varepsilon)$ va $\varepsilon>0$ uchun $\beta=\min(r,\varepsilon w)$.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida Kats baholari uchun foydali yordamchi tengsizliklar o‘rganilgan. Ushbu bobning uchinchi paragrafida esa integral intensivlik hamda eksponensial intensivlik finksiyalari baholari orqali tuzilgan empirik protsesslar uchun Gauss protsesslari bilan approksimatsiya teoremalari keltirilgan.

Mazkur bobning to‘rtinchi paragrafida tasodifiy senzurlanish modellarida xarakteristik funksiyalar uchun qurilgan baholarning asoslilik xossalari o‘rnatilgan. Birinchi paragrafda ko‘rib o‘tilgan statistik modelda (qulaylik uchun) $k=2$ deb tanlaymiz. Kuzatilayotgan statistik tanlanma $\{(Z_m,\delta_m),\ m=1,2,...,n\}$ bo‘lib, bu yerda $\delta_m = I(A_m)$ indikator funksiya va

$$H_1(x)=P(Z_m \le x,\delta_m =1),\ \ H_2(x)=P(Z_m \le x,\delta_m =0)$$

lar subtaqsimotlardir. $H_1(x)+H_2(x)=H(x)=P(Z_m \le x)$. Ushbu modelda $F(x)=1-\exp(-\Lambda_1(x))$ senzurlanuvchi va $G(x)=1-\exp(-\Lambda_2(x))$ esa senzurlovchi taqsimot funksiyalar hamda

$$\Lambda_1(x)=\int_{(-\infty,x]}\frac{dH_1(u)}{1-H(u)},\quad \Lambda_2(x)=\int_{(-\infty,x]}\frac{dH_2(u)}{1-H(u)}$$

funksiyalar esa mos integral intensivlik funksiyalaridir. Asosiy masala yuqorida keltirilgan juftliklardan iborat statistik tanlanma orqali

$$C(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x)$$

xarakteristik funksiyani

$$C_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-\Lambda_{1n}(x)}d\Lambda_{1n}(x),\ t\in R$$

-Kats statistikasi orqali baholashdan iboratdir. Bu yerda integral intensivlikning bahosi

$$\Lambda_{1n}(x)=\int_{(-\infty,x]}\frac{dH_{1n}(u)}{1-H_n(u)}.$$

U holda oldingi olingan natijalarga asosan

$$\sup_{x\le T_n}\left|F_n(x)-F(x)\right| \overset{\partial.x.}{=} O\left(b_n^2\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right).$$

Endi t ning qiymatlari to‘plamini biror kengayuvchi $[-\tau_n,\tau_n]$ oraliqlarni qaraymiz. Bu maqsadda

$$\Delta_n(\tau_n)=\sup_{|t|\le\tau_n}\left|C_n(t)-C(t)\right|$$

kattalikni kiritamiz.

4-teorema. $\{\tau_n, n\ge 1\}$ *sonlar ketma-ketligi* $n\to\infty$ *da* $\tau_n\to\infty$ *bo‘lsin. U holda*

$$\Delta_n(\tau_n)\xrightarrow{\partial.x.}0.$$

Dissertatsiyaning «**Proporsional intensivliklar modellari uchun Kats empirik protsesslari**» deb nomlangan uchinchi bobida PIMda taqsimot funksiyasining hosilalari va xususan zichlik funksiyasi uchun silliqlangan yadroviy baholar qurilgan va ularning asimptotik xossalari tadqiq qilingan. Birinchi paragrafda PIM ning ta’rifi, uni tavsiflovchi lemma hamda PIM dagi taqsimot funksiyasi bahosining asimptotik xossalari tadqiq etilgan. PIM raqobatlashuvchi risklar modelida $\left(Z, A^{(i)}\right)$ ga mos kelgan $1-F(x;i)$ chidamlilik funksiyasining $H(x)$ taqsimot funksiyasi orqali

$$1-F(x;i)=\left(1-H(x)\right)^{p^{(i)}}, \; i\in J, \; x\in R \tag{3}$$

tenglik orqali ifodalanadi. Bu yerda $1-F(x;i)=\exp\left(-\Lambda(x;i)\right)$, $\Lambda(x;i)=\int\limits_{(-\infty,x]}\frac{dH(u;i)}{1-H(u)}$, $p^{(i)}=P\left(A^{(i)}\right)$ va $0<p^{(i)}<1, \; i\in J$ bo‘lsin. PIM ni xarakterlovchi quyidagi lemma o‘rinlidir.

1-lemma. (3) tenglik Z tasodifiy miqdor va $A^{(1)},...,A^{(k)}$ hodisalarning bog‘liqsizligiga ekvivalentdir.

Ushbu bobning ikkinchi paragrafida PIM da taqsimot funksiyasi uchun qurilgan Kats bahosi uchun approksimatsiya teoremasi isbotlangan. PIM dagi kesilgan baholarni ikkinchi bobdagidek aniqlaymiz. Bunda $\tilde{p}_n^{(i)}=\tilde{H}_n(\infty;i), \; i\in J$.

5-teorema. $\{T_n, n\geq 1\}$ *o‘suvchi sonlar ketma-ketligi shunday tanlansinki, ular*

$$T_n\uparrow T_H, \qquad b_n^{-1}=\left(1-H(T_n)\right)\geq\left(\frac{2\varepsilon\log n}{wn}\right)^{1/2}$$

hamda $\dfrac{n}{\log n}\geq\max\left\{\dfrac{r}{2w\left(1-p^{(i)}\right)^2}, \dfrac{2r}{w\left(p^{(i)}\right)^2}\right\}$ *shartlarni qanoatlantirsin. U holda* $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ *ehtimollik fazosida quyidagi approksimatsiya o‘rinli bo‘ladi:*

$$P\left(\sup_{t\in(-\infty;T_n]^k}\left\|\tilde{\mathbb{Z}}_n(t)-\tilde{V}_n(t)\right\|^{(k)}>C_n\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)\leq kQn^{-r},$$

bu yerda $\varepsilon=r,$ $C_n=\dfrac{r}{4w}b_n^2+\left(A_4+\dfrac{r\left(1+e^{-1}\right)}{w}\right)+\dfrac{1}{ep^{(i)}}\left(A_4+\dfrac{4r}{wep^{(i)}}\right)$,

$Q=2A_5+16, \quad r\geq 2$ *va* A_4, A_5 *–o‘zgarmas sonlar hamda* $\tilde{\mathbb{Z}}_n(t)=\left(\tilde{\mathbb{Z}}_n^{(1)}(t_1), \tilde{\mathbb{Z}}_n^{(2)}(t_2), ..., \tilde{\mathbb{Z}}_n^{(k)}(t_k)\right)$, *va* $\tilde{V}_n(t)=\left(\tilde{V}_n^{(1)}(t_1), \tilde{V}_n^{(2)}(t_2), ..., \tilde{V}_n^{(k)}(t_k)\right)$, *vektor protsesslar* $\tilde{\mathbb{Z}}_n^{(i)}(x)=\sqrt{n}\left(\tilde{F}_n(x;i)-F(x;i)\right)$,

$\tilde{F}_n(x;i)=1-\left(1-\tilde{H}_n(x)\right)^{\tilde{p}_n^{(i)}}, \; x\in R, \; \tilde{p}_n^{(i)}=\tilde{H}_n(\infty;i), \; i\in J$ *va*

$\tilde{V}_n^{(i)}(x)=\left(1-H(x)\right)^{p^{(i)}}\left\{\dfrac{p^{(i)}W_n^{(0)}(x)}{1-H(x)}-W_n^{(i)}(\infty)\log\left(1-H(x)\right)\right\}$ *lar orqali aniqlanadi.*

Ushbu bobning uchinchi va to‘rtinchi paragraflarida PIM dagi taqsimot funksiyasi hosilalarining yadroviy Kats baholari tadqiq qilingan, xususan, zichlik funksiyasi uchun silliqlangan yadroviy baholar qurilgan va ularning asimptotik xossalari tadqiq qilingan.

PIMda aniqlangan taqsimot funksiyalarining $(r+1)-$ tartibdagi $F^{(j)}(x;i)=\dfrac{d^jF(x;i)}{dx^j},\ j=1,2,...,(r+1);\ i=1,...,k$ hosilalari mavjud bo‘lsin. $f(x;i)$ orqali $F(x;i)$ ning zichlik funksiyasini belgilaymiz $\left(f(x;i)=\dfrac{dF(x;i)}{dx}\right)$. Ushbu paragrafda biz $F^{(j)}(x;i)$ hosila funksiyalarini $\left\{\left(Z_m,\delta_m^{(1)},...,\delta_m^{(k)}\right),m=1,...,n\right\}$ statistik tanlanmalar bo‘yicha yadroviy baholash masalasini ko‘rib o‘tamiz. Buning uchun yadro funksiyalari $K(t)$ va “oyna kengligi” parametrini tanlab olamiz. Faraz qilaylik, $K(t)$ absolyut uzluksiz taqsimot funksiyasi (yadro) bo‘lib, u simmetrik va uzluksiz differensiallanuvchi $k(t)$ zichlik funksiyasiga ega bo‘lsin. $\{\mu=\mu(n),\ n\geq 1\}$ “oyna kengligi” ketma-ketligini $n\to\infty$ da $\mu=\mu(n)\downarrow 0$ va $n\mu(n)\to\infty$ shartlarni qanoatlantiruvchi etib tanlab olamiz. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$K^{(j)}(t)=\frac{d^jK(t)}{dt^j},\ K^{(j)}(t)=k^{(j-1)}(t),\ j=1,...,(r+1).$$

Quyidagi chiziqli funksionallarni kiritamiz:

$$\overset{*}{F}_n(x;i)=\int_{-\infty}^{\infty}K\left(\frac{t-y}{\mu(n)}\right)dF(y;i),\ x\in R,\ i\in J.$$

Quyidagi shartlarni kiritamiz:

(U1) $\mu=\mu(n)\downarrow 0,\ n\to\infty;$

(U2) $n\mu^{2j}\to\infty,\ j=\overline{1,(r+1)},\ n\to\infty;$

(U3) $v_j=Var\left\{K^{(j)}\right\}<\infty,\ j=\overline{1,(r+1)};$

(U4) $k(t)$ zichlik funksiyasi simmetrik: $k(-t)=k(t);$

(U5) $\int_{-\infty}^{\infty}t^{(j)}dK(t)=0,\ j=\overline{1,r},\ \lambda_1=\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{r+1}dK(t)<\infty;$

(U6) $\lambda_2=\int_{-\infty}^{\infty}\left(K^{(j)}(t)\right)^2dt<\infty,\ j=\overline{1,(r+1)}.$

Ko‘rish mumkinki,

$$\tilde{F}_n^{(j)*}(x;i)=\frac{d^j\tilde{F}_n(x;i)}{dx^j}=\frac{1}{\mu^j(n)}\int_{-\infty}^{\infty}K^{(j)}\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right)dF(y;i)=$$

$$=\frac{1}{\mu^j(n)}\int_{-\infty}^{\infty}k^{(j-1)}\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right)dF(y;i),\ j=1,...,r+1;\ x\in R,$$

$F^{(j)}(x;i)$ uchun bahoni quyidagidek tanlaymiz:

$$\tilde{F}_n^{(j)}\ (x;i)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mu(n)}K^{(j)}\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right)d\tilde{F}_n(y;i)=$$

$$=\frac{\tilde{p}_n^{(i)}}{\mu^j(n)}\int_{-\infty}^{\infty}K^{(j)}\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right)\left(1-\tilde{H}_n(y)\right)^{\tilde{p}_n^{(i)}-1}dH_n(y),$$

$$j=1,\dots,r+1;\ \ x\in R.$$

$F^{(j)}(x;i)$ taqsimot funksiyasining barcha uzluksiz nuqtalar sinfini $\mathbb{C}\left(F^{(j)}(\bullet;i)\right)$ orqali belgilab olamiz, $j=1,\dots,(r+1)$. Agar $T_{F(\bullet;i)}=\inf\left\{x\in R:F(x;i)=1\right\}$ belgilashni kiritsak, natijada quyidagi teoremaga ega bo‘lamiz.

6-teorema. *Faraz qilaylik (U1-U6) shartlar bajarilsin. U holda barcha* $x\in\left(-\infty;T_{F(\bullet;i)}\right)\cap\mathbb{C}\left(F^{(j)}(\bullet;i)\right)$ *nuqtalar bo‘yicha tekis holda*

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\tilde{F}_n^{(j)}(x;i)=F^{(j)}(x;i)\right)=1,\quad j=\overline{1,(r+1)};\quad i=\overline{1,k}.$$

$F(x;i)$ ga mos kelgan $f(x;i)=\dfrac{dF(x;i)}{dx}$, $i\in J$ zichlik funksiyasining ba’zi xossalarini ko‘rib o‘tamiz. (3) ga asosan $H(x)$ ning zichlik funksiyasi $h(x)=\dfrac{dH(x)}{dx}$ ning mavjudligi shartida

$$f(x;i)=p^{(i)}\left(1-H(x)\right)^{p^{(i)}-1}h(x),\ i\in J,\ x\in R,$$

formula bilan hisoblaymiz. Unga mos yadroviy bahoni

$$f_n(x;i)=\tilde{p}_n^{(i)}\left(1-\tilde{H}_n^c(x)\right)^{\tilde{p}_n^{(i)}-1}h_n(x),\ i\in J,\ x\in R,$$

ko‘rinishda tanlaymiz. Bu yerda

$$\tilde{p}_n^{(i)}=\lim_{x\uparrow\infty}\tilde{H}_n(x;i)=\tilde{H}_n(+\infty;i),\ i\in J,$$

$$h_n(x)=\frac{d\tilde{H}_n^c(x)}{dx}=\frac{1}{\mu(n)}\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right)d\tilde{H}_n(y),$$

$$\tilde{H}_n^c(x)=\frac{1}{\mu(n)}\int_{-\infty}^{\infty}K\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right)d\tilde{H}_n(y),$$

$K(t)$ biror zichlik funksiyasi, $k(t)=\dfrac{dK(t)}{dt}$; $K(t)$ va $k(t)$ lar to‘liq variatsiyasi $v_1=Var\{K\}$ va $v_0=Var\{k\}$ chegaralangan funksiyalar, “oyna kengligi” parametri $\left\{\mu=\mu(n),\ n\geq1\right\}$ $n\to\infty$ da $\mu(n)\to0$ va $n\mu^2(n)\to\infty$ shartlarni qanoatlantiradi. Quyidagilarni belgilaymiz:

$$h_n^*(x)=\frac{1}{\mu(n)}\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right)dH(y),$$

$$f_n^*(x;i)=\tilde{p}_n^{(i)}\left(1-\tilde{H}_n^c(x)\right)^{\tilde{p}_n^{(i)}-1}h_n^*(x),\ i\in J,$$

$$\Delta_n(x;i)=\tilde{p}_n^{(i)}\left(1-\tilde{H}_n^c(x)\right)^{\tilde{p}_n^{(i)}-1}-p^{(i)}\left(1-H(x)\right)^{p^{(i)}-1},\ i\in J.$$

Biror $T<T_H=\inf\{x:H(x)=1\}\le\infty$ sonini

$$b^{-1}=1-H(T)>2\left(\frac{(1+\varepsilon)\log n}{2n}\right)^{1/2},\varepsilon>0 \tag{4}$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz.

2-lemma. K, k *va* $\mu(n)$ *lar uchun yuqoridagi shartlar bajarilgan bo'lib,* (4) *ham o'rinli bo'lsin. U holda bir ehtimollik bilan*

$$\sup_{x\le T}\left(1-\tilde{H}_n^c(x)\right)^{-1}\le 2b.$$

7-teorema. $K(t)$ *va* $k(t)=K'(t)$ *to'liq variatsiyasi chegaralangan yadroviy funksiyalar bo'lib,* $K(t)$ *– zichlik funksiyasi bo'lsin. Bundan tashqari,* $\{\mu=\mu(n),\ n\ge1\}$ *ketma-ketlik* $n\to\infty$ *da*

$$\mu(n)\downarrow 0,\ n\mu^2(n)\to\infty$$

shartlarni qanoatlantirsin. Agar $h(x)$ *zichlik funksiyasi chegaralangan bo'lsa, u holda*

$$P\left(\sup_{x\le T}\left|f_n(x;i)-f(x;i)\right|=O\left(\left(\frac{\log n}{n\mu^2(n)}\right)^{1/2}\right)\right)=1,\ i\in J,$$

munosabat o'rinlidir.

Demak $f_n(x;i)$ baholar $f(x;i)$ lar uchun $(-\infty;T]$ oraliqda tekis kuchli asosli baholar bo'lar ekan.

Ushbu bobning beshinchi paragrafida esa PIM da ko'rsatkichli taqsimotning noma'lum parametri uchun kuchli asosli baho qurilgan.

Senzurlanuvchi X_m tasodifiy miqdorlar $F(x;\theta)=1-\exp(-\theta x),\ x\ge0,\ \theta>0$ hamda senzurlovchi Y_m tasodifiy miqdorlar $G(x;\lambda)=1-\exp(-\lambda x),\ x\ge0,\ \lambda>0$ ko'rsatkichli taqsimot funksiyalari bilan berilgan bo'lib, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar esa $Z_m=\min(X_m,Y_m)$ bo'lsin, bu yerda $\delta_m=I(Z_m=X_m)=I(X_m\le Y_m)$. Asosiy masala noma'lum θ parametrni baholashdan iborat, λ esa noma'lum yoki ma'lum bo'lishi mumkin. U holda qaralayotgan model PIM dan iborat bo'lib,

$$H(x;\theta)=1-\left(1-F(x;\theta)\right)\left(1-G(x;\lambda)\right)=1-\exp\left(-(\theta+\lambda)x\right),\ x\ge0,$$

tenglik o'rinlidir:

$$1-F(x;\theta)=\left(1-H(x;\theta)\right)^p,$$

bu yerda $p = \dfrac{\theta}{\theta + \lambda}$.

Biz noma'lum parametr θ uchun $\theta = \dfrac{EZ_m}{E\delta_m}$ ifodani olamiz va θ uchun momentlar usulida bahoni

$$\tilde{\theta}_n = \frac{\int_0^{T_n} u d\tilde{H}_n(u)}{\tilde{p}_n} \tag{5}$$

ko‘rinishida hosil qilamiz. (5) bahoning kuchli asosliligi haqidagi quyidagi davo o‘rinlidir.

8-teorema. *Agar* $\varepsilon > 0$ *soni uchun yetarlicha katta* n *larda*

$$\frac{n}{\log n} \geq \frac{\varepsilon}{2(1+e/3)^2}$$

shart bajarilsa, u holda $n \to \infty$ *da*

$$P\left(\tilde{\theta}_n \to \theta\right) = 1$$

o‘rinli bo‘ladi.

XULOSA

Dissertatsiya Kats empirik protsesslari umumlashmalari va ularning asimptotik xossalarini tadqiq qilishga bag‘ishlangan. Asosiy natijalar quyidagilardan iborat:

1. Tasodifiy senzurlanishning umumlashgan raqobatli risklar modelida tasodifiy miqdor va hodisalarning birgalikdagi taqsimotlari, ya’ni subtaqsimotlar uchun maxsus 1 sonidan oshmaydigan, modifikatsiya qilingan variantlari kiritilgan hamda ular yordamida boshqa xarakteristikalar uchun mos baholar tuzilgan va o‘rganilgan.

2. Modifikatsiyalangan empirik baholardan tuzilgan protsesslar, integral intensivlik funksiyalaridan tuzilgan empirik protsesslar uchun mos approksimatsiya teoremalari isbotlangan.

3. Tasodifiy senzurlanish modelida xarakteristik funksiya uchun qurilgan bahoning kuchli asimptotik asosliligi isbotlanilgan.

4. PIM da taqsimot funksiyasi, uning hosilalari uchun Kats bahosi qurilgan va xususan zichlik funksiyasi uchun silliqlangan yadroviy baholar qurilgan va ularning asimptotik xossalari tadqiq qilingan.

5. PIM da ko‘rsatkichli taqsimot parametri uchun kuchli asosli baho qurilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО РИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

НАВОИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

САЙФУЛЛОЕВА ГУЛЬНОЗ САЙФУЛЛОЕВНА

ОБОБЩЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ КАЦА И ИХ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Навои-2023

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образавания, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за B2022.2.PhD/FM712.

Диссертация выполнена в Навоийском государственном педагогическом институтите.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http:kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Абдушукуров Абдурахим Ахмедович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Мирахмедов Шерзод Адылович** доктор физико-математических наук, профессор
	Нурмухамедова Наргиза Сайдиллаевна доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, доцент
Ведущая организация:	**Ташкентский государственный транспортный университет**

Защита диссертации состоится « 13 » июнь 2023 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского АН РУз.(Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики им. В.И.Романовского АН РУз (зарегистрирована за № 160). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 26 » мая 2023 года.
(протокол рассылки № 2 от « 26 » мая 2023 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

Ш.К.Форманов
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению
ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Одним из ключевых вопросов на ранних стадиях статистических исследований является обработка результатов наблюдений и их представление в удобном виде. Качества статистических выводов зависит не только от их объема, но и от методов их получения. Однако, встречаются случаи при которых на основании неполных статистических данных необходимо делать статистические выводы о неизвестных распределениях одной или нескольких случайных величин или их функционалов. Неполные выборки распространены в анализе данных о продольжительности жизни, в страховом бизнесе, в демографии и в астрономических исследованиях. Например, в процессе наблюдения за объектами (техническими средствами, физическими лицами), испытываемыми на прочность, можно столкнуться с таким неполным количеством числовых данных. Оказывается, наблюдаемый в таких экспериментальных случаях выборка может состоять не только из интересующих нас случайных величин, но и из величин, которые нам мешают, т. е. цензуры. Основной характеристикой, которую необходимо оценить по таким неполным данным, являются законы распределения одной или нескольких случайных величин.

На прямой можно наблюдать цензурированные выборки, такие как однократные, многократные, неоднородно, цензурированные с одной стороны (слева или справа), с двух сторон или через наблюдаемые и ненаблюдаемые интервалы. Если на наблюдаемый объект (аппарат или индивидуум) воздействуют какие-то дополнительные факторы (давление, температура, напряжение и т. д.), то помимо цензурируемых случайных величин возможно наблюдение также и дополнительных событий. Статистические модели, в которых наблюдаются такие случайные величины и события, называются моделями с конкурирующими рисками. В диссертации исследуются эмпирические процессы типа Каца для функций распределения в модели конкурирующих рисков, а также их модифицированные варианты и функционалы функций интегральных интенсивностей, функции плотности, характеристических функций, построенных по оценкам Каца. Проблемы такого типа также изучались в частных моделях пропорциональных интенсивностей.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим прикладное значение, таким как современная теория эмпирических процессов. Было установлено, что проведение научных исследований по главным направлениям «Теории вероятностей и математической статистики» на уровне международных стандартов является основной задачей и активным направлением[1]. Исследования в области современной теории эмпирических процессов играют важную роль в

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистана от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

исполнении постановления. Решение этих задач составляет основное содержание данной диссертационной работы.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. М.Кац изучал особый класс эмпирических процессов. Эти процессы выбираются в виде эмпирической статистики с помощью специального подбора слагаемых с использованием независимой последовательности случайных величин Пуассона с параметром n. Такие процессы изучали М.Чёргё, Ш.Чёргё, П.Гаенслер, В. Штуте, Я.Ю.Никитин, Л.Бегин, К.Классен, Ж.Веллнер и другие.

Проведенное до сих пор исследование было связано с классической статистикой М.Каца. Оказалось, что в этой статистике есть существенный недостаток. Дело в том, что ее значение может быть больше 1, в отличие от других оценок функции распределения. В этой диссертации обобщенного модель конкурирующих рисков случайного цензурирования включала случайные величины и совместные распределения событий, то есть включены модифицированные варианты не более 1 специально для субраспределений, с помощью которых были сделаны и изучены соответствующие оценки для других характеристик.

Анализ существующей литературы показывает, что асимптотические свойства таких усеченных статистик Каца и других построенных с их помощью характеристик для функций распределения до настоящего времени не изучались.

Связь диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполняется диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках научно-исследовательской программы Навоийского государственного педагогического института.

Целью исследования является исследование асимптотических свойств модифицированной статистики Каца и ее функционалов в модели конкурирующих рисков случайного цензурирования.

Задачи исследования:

построение вариантов модификации эмпирических процессов, построенных с использованием классической статистики Каца;

оценка отклонений модифицированных процессов Каца с использованием экспоненциальных неравенств;

установление результата аппроксимации модифицированных вариантов, построенных в обобщенной модели случайного цензурирования;

изучение теорем аппроксимации для процессов, построенных с использованием оценок экспоненциальной интенсивности;

построение оценки характеристической функции в модели случайного цензурирования и изучение ее равномерной сильной состоятельности;

рассмотреть модель пропорциональной интенсивностей (МПИ) и оценка функции распределения в ней;

аппроксимация оценки функции распределения в МПИ;

изучение ядерных оценок Каца производной функции распределения в МПИ;

ядерная оценка функции плотности в МПИ.

Объектом исследования является модифицированные эмпирические оценки Каца и их функционалы.

Предметом исследования являются модифицированные оценки Каца в обобщенной цензурирующей модели случайного цензурирования и их аппроксимационные свойства.

Методы исследования. В исследовании использовались свойства слабой сходимости и аппроксимации эмпирических и связанных с ними случайных процессов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

в модели цензурирования конкурирующих рисков найдены новые оценки Каца для функций распределения, доказаны экспоненциальные неравенства и соответствующие аппроксимационные теоремы для процессов, построенных по модифицированным эмпирическим оценкам;

даны теоремы аппроксимации для процессов, построенных с использованием оценок экспоненциальной интенсивности;

доказана сильная состоятельность оценки в модели случайного цензурирования для характеристической функции;

в модели пропорциональных интенсивностей построена оценка Каца для функции распределения, доказаны сглаженные ядерные оценки производных функции распределения и, в частности, функции плотности, и их асимптотические свойства.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

В модели конкурирующих рисков случайного цензурирования построена модифицированная оценка Каца для функции распределения и доказаны аппроксимационные теоремы для построения по ним эмпирических процессов, построены оценки неизвестных интегральных интенсивностей, характеристических функций, производной функции распределения, функций плотности и исследованы их асимптотики. Также установлено сходство этих результатов в модели пропорциональных интенсивностей.

Достоверность результатов исследования. Теория вероятностей и математическая статистика основаны на применении методов асимптотической теории, а также на надежности математических доказательств.

Научная и практическая значимость. Научная значимость результатов исследования объясняется состоятельностью процессов Каца, построенных в обобщенных моделях случайной цензуры и имеется оптимальная скорость аппроксимации.

Практическая значимость результатов исследования заключаются в том, что результаты диссертационной работы могут быть использованы при анализе статистических данных, статистических оценок и проверки гипотез, а также при изучении специальных курсов, связанных с эмпирическими процессами в теории вероятностей и математической статистики.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были внедрены в практику по следующим направлениям:

в общей модели случайного цензурирования с использованием эмпирической статистики Каца, полученной путем замены количества слагаемых независимыми пуассоновскими случайными величинами, использованные для доказательства теорем об асимптотических свойствах оценки функции распределения, изучаемых в фундаментальном проекте ОТ-Ф-4-40 «Исследования асимптотических свойств интегральных эмпирических процессов, индексированных классом измеримых функций» (Справка №04/11-418 от 30 январь 2023 года Национального университета Узбекистана). Применение научного результата позволило доказать асимптотические свойства рассматриваемой функции распределения в обобщенной модели случайной цензуры;

в модели пропорционального риска эмпирические процессы, построенные с использованием оценок и построенных с помощью интегральной функции интенсивностей, использовались для доказательства их аппроксимационных теорем с гауссовым процессом в фундаментальном проекте Ё-Ф4-07 «Статистическое оценивание и проверка гипотез при помощи копула функций» (Справка №04/11-2884 от 20 мая 2022 года Национального университета Узбекистана). Применение научного результата позволило изучить асимптотические свойства исследуемых функций в модели конкурирующих рисков случайной цензуры.

Апробация результатов исследования: Основное содержание диссертации обсуждалось на 4 международных и 8 республиканских научных конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 19 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, рекомендуемых Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 3 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 92 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, отмечено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, дан обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, описана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, указаны объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Общая модель случайного цензурирования. Оценка Каца для функции распределения»,** имеет обзорный и вспомогательный характер. В первом параграфе первой главы излагаются обзор научных работ по теме диссертации и сущность последовательного статистического анализа. Во второй и третьей главах приведены научные результаты по теме диссертации.

Вторая глава диссертации, названная **«Применение процессов Каца в аппроксимациях функционалов продолжительности жизни»,** посвящена по изучению результатов аппроксимации модифицированных вариантов, построенных в общей модели случайного цензурирования. В первом параграфе главы представлены модифицированные оценки Каца распределений и субраспределений и соответствующие предельные теоремы для них, а также основные результаты.

Пусть помимо $\{Z_m, m \geq 1\}$ независимых и одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $H(x) = P(Z_1 \leq x)$ на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ также задана последовательность независимых случайных величин $\{\nu(n), n \geq 1\}$ имеющих распределение Пуассона с параметром n. Предположим, что эти две последовательности независимы. Кроме того, предполагаем, что последовательность $\{\nu(n), n \geq 1\}$ также не зависит от последовательности, образующей полную группу событий $\left\{\left(A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, \ldots, A_m^{(k)}\right), m \geq 1\right\}$ при фиксированном $k \geq 1$. Тогда можно ввести эмпирические оценки Каца для распределений $H(x)$ и $H(x;i) = P\left(Z_m \leq x, \delta_m^{(i)} = 1\right)$, $i \in J$ в следующем виде:

$$H_n^*(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\nu_n} I\left(Z_j\le x\right), & \text{если} \quad \nu_n\ge 1,\\ 0, & \text{в} \quad \text{противном случае},\end{cases}$$

и

$$H_n^*(x;i)=\begin{cases}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\nu_n} I\left(Z_j\le x, A_j^{(i)}\right), & \text{если} \quad \nu_n\ge 1,\\ 0, & \text{в} \quad \text{противном случае},\end{cases}$$

Напомним, что эти две оценки являются несмещенными оценками для $H(x)$ и $H(x;i)$ соответственно.

Введем следующие эмпирические процессы:

$$a_n^{(0)*}(x)=\sqrt{n}\left(H_n^*(x)-H(x)\right),\ x\in R,$$

$$a_n^{(i)*}(x)=\sqrt{n}\left(H_n^*(x;i)-H(x;i)\right),\ x\in R,\ i\in J.$$

Следующая аппроксимация верна для вектора, состоящего из этих процессов.

Теорема 1. *Если базовое вероятностное пространство* $\{\Omega,\mathscr{A},P\}$ *достаточно богато, то можно определить* $k+1$ *последовательности гауссовых процессов* $W_n^{(0)}(x),W_n^{(1)}(x),...,W_n^{(k)}(x)$ *таким образом, что для* $a_n^*(t)=\left(a_n^{(0)*}(t_0),a_n^{(1)*}(t_1),...,a_n^{(k)*}(t_k)\right)$ *и* $W_n^*(t)=\left(W_n^{(0)}(t_0),W_n^{(1)}(t_1),...,W_n^{(k)}(t_k)\right)$, $t=(t_0,t_1,...,t_k)$, *будем иметь*

$$P\left\{\sup_{t\in\overline{\mathbb{R}}^{k+1}}\left\|a_n^*(t)-W_n^*(t)\right\|^{(k+1)}>C^*n^{-1/2}\log n\right\}\le K^*n^{-r},$$

где $r\ge 2$, $C^*=C^*(r)$ *и* K^* *-положительные числа.*

Более того, $W_n^*(t)$ *является* $(k+1)$ *многомерным векторнозначным гауссовым процессом с математическим ожиданием* $EW^{(i)}(x)=0,\quad (x,i)\in R\times\overline{\mathfrak{I}}$ *и для любого* $i,j\in\mathfrak{I},\ i\ne j,\ x,y\in R$ *:*

$$\begin{aligned}&EW_n^{(0)}(x)W_n^{(0)}(y)=\min\{H(x),H(y)\},\\ &EW_n^{(i)}(x)W_n^{(j)}(y)=\min\{H(x;i),H(y;j)\},\\ &EW_n^{(i)}(x)W_n^{(0)}(y)=\min\{H(x;i),H(y)\}.\end{aligned}\tag{1}$$

Значение эмпирических оценок Каца $H_n^*(x)$ и $H_n^*(x;i),\quad i\in J$ могут быть больше 1 с положительной вероятностью. Поэтому определяем их модифицированные варианты следующим образом:

$$\tilde{H}_n(x)=1-\left(1-H_n^*(x)\right)I\left(H_n^*(x)\le 1\right),\quad x\in R,$$

$$\tilde{H}_n(x;1)+\tilde{H}_n(x;2)+...+\tilde{H}_n(x;k)=\tilde{H}_n(x).$$

$$\tilde{H}_n(x;i)=\begin{cases}H_n^*(x;i), & агар\ x<T_n^*,\\ H_n^*(T_n^*;i), & агар\ x\ge T_n^*,\end{cases}$$

где, $T_n^* = \inf\left\{x:\ H_n^*(x) = 1\right\}$.

Неравенства в следующей теореме важны при изучении статистики Каца.

Теорема 2. *Пусть последовательности* $\left\{\nu(n), n \ge 1\right\}$ *имеют распределение Пуассона с параметрами* n. *Тогда для* $\varepsilon > 0$ *и для числа* n *при выполнении неравенства*

$$\frac{n}{\log n} \ge \frac{\varepsilon}{8\left(1 + e/3\right)^2}, \tag{2}$$

справедливы оценки

$$P\left(\left|\nu(n) - n\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} n \log n\right)^{1/2}\right) \le 2n^{-\varepsilon w},$$

$$P\left(\sup_{-\infty < x < \infty}\left|H_n^*(x;i) - H(x;i)\right| > 2\left(\frac{\varepsilon \log n}{2n}\right)^{1/2}\right) \le 4n^{-4\varepsilon w},\ \ i \in J,$$

$$P\left(\sup_{-\infty < x < \infty}\left|\tilde{H}_n(x;i) - H(x;i)\right| > 2\left(\frac{\varepsilon \log n}{2n}\right)^{1/2}\right) \le 4n^{-4\varepsilon w},\ \ i \in J$$

$$P\left(\sup_{-\infty < x < \infty}\left|H_n^*(x) - H(x)\right| > 2\left(\frac{\varepsilon \log n}{2n}\right)^{1/2}\right) \le 4kn^{-4\varepsilon w},$$

$$P\left(\sup_{-\infty < x < \infty}\left|\tilde{H}_n(x) - H(x)\right| > 2\left(\frac{\varepsilon \log n}{2n}\right)^{1/2}\right) \le 4kn^{-4\varepsilon w}$$

где $w = \left[16\left(1 + e/3\right)\right]^{-1}$.

Вводим следующие векторы $\tilde{a}_n(t) = \left(\tilde{a}_n^{(0)}(t_0), \tilde{a}_n^{(1)}(t_1), \ldots, \tilde{a}_n^{(k)}(t_k)\right)$, здесь

$\tilde{a}_n^{(0)}(x) = \sqrt{n}\left(\tilde{H}_n(x) - H(x)\right)$, $\quad \tilde{a}_n^{(i)}(x) = \sqrt{n}\left(\tilde{H}_n(x;i) - H(x;i)\right)$, $\quad (x;i) \in R \times J$.

Таким образом, сформулируем теорему об аппроксимации векторнозначного эмпирически модифицированного процесса Каца $\tilde{a}_n(t)$ векторзначным процессов Гаусса.

Теорема 3. *Пусть* $\left\{T_n, n \ge 1\right\}$ *последовательность такая, что* $T_n < T_H = \inf\left\{x : H(x) = 1\right\}$. *Для каждого* n *справедливо неравенство*

$$\min_{i \in \Im}\left\{P\left(A^{(i)}\right) - H\left(T_n, i\right)\right\} \ge 2\left(\frac{r \log n}{2wn}\right)^{1/2}.$$

Если для любого $\varepsilon > 0$ *условия (2) выполняется, то на вероятностном пространстве теоремы 2 можно определить* $k+1$ *последовательности гауссовых процессов* $W_n^{(0)}(x), W_n^{(1)}(x), \ldots, W_n^{(k)}(x)$ *с нулевым средним и ковариационной структурой (1) таких, что для* $\tilde{a}_n(t)$ *и* $W_n^*(t) = \left(W_n^{(0)}(t_0), W_n^{(1)}(t_1), \ldots, W_n^{(k)}(t_k)\right)$ *имеем*

$$P\left\{ \sup_{t\in(-\infty;T_n]^{k+1}} \left\| \tilde{a}_n(t) - W_n^*(t) \right\|^{(k+1)} > \tilde{C} n^{-1/2} \log n \right\} \le \tilde{K} n^{-\beta},$$

где $\tilde{K}$ - абсолютная константа, $\tilde{C} = \tilde{C}(\varepsilon)$ и $\beta = \min(r, \varepsilon w)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Во второй главе второго параграфа изучались нужные вспомогательные неравенства для оценок Каца. В третьем параграфе данной главы представлены теоремы аппроксимации с гауссовыми процессами для эмпирических процессов, образованных оценками интегральной и экспоненциальной функций интенсивности.

В четвертом параграфе этой главы изложены свойства состоятельности оценок, построенных для характеристических функций в моделях случайного цензурирования.

В статистической модели, рассмотренной в первом параграфе, выбираем (для удобства) $k=2$. Наблюдаемая статистическая выборка $\left\{ (Z_m, \delta_m),\ m = 1,2,...,n \right\}$, где $\delta_m = I(A_m)$ - индикаторная функция и $H_1(x) = P(Z_m \le x, \delta_m = 1)$, $H_2(x) = P(Z_m \le x, \delta_m = 0)$ - субраспределения. $H_1(x) + H_2(x) = H(x) = P(Z_m \le x)$. В этой модели $F(x) = 1 - \exp(-\Lambda_1(x))$ цензурируемая, а $G(x) = 1 - \exp(-\Lambda_2(x))$ цензурирующая функция распределения а также

$$\Lambda_1(x) = \int_{(-\infty,x]} \frac{dH_1(u)}{1 - H(u)}, \quad \Lambda_2(x) = \int_{(-\infty,x]} \frac{dH_2(u)}{1 - H(u)}$$

— соответствующие функции интегральной интенсивности. Основная задача состоит в оценивании характеристической функции

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

по статистической выборке, состоящей по указанных выше пар с использованием статистики Каца

$$C_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\Lambda_{1n}(x)} d\Lambda_{1n}(x),\ t \in R.$$

Здесь оценка интегральной функции интенсивности

$$\Lambda_{1n}(x) = \int_{(-\infty,x]} \frac{d\tilde{H}_{1n}(u)}{1 - \tilde{H}_n(u)}.$$

Тогда по предыдущих результатов

$$\sup_{x \le T_n} \left| F_n(x) - F(x) \right| \overset{п.н.}{=} O\left(b_n^2 \left(\frac{\log n}{n} \right)^{1/2} \right).$$

Теперь рассмотрим множество значений t как расширяющийся интервал $\left[-\tau_n,\tau_n\right]$. Для этого введём $\Delta_n\left(\tau_n\right)=\sup\limits_{|t|\le\tau_n}\left|C_n\left(t\right)-C\left(t\right)\right|$.

Теорема 4. *Пусть* $\{\tau_n, n\ge1\}$ *числовая последовательность, стремящейся к* $+\infty$ *при* $n\to\infty$. *Тогда, при* $n\to\infty$

$$\Delta_n\left(\tau_n\right)\xrightarrow{п.н.}0$$

Третья глава диссертации **«Эмпирические процессы Каца для моделей пропорциональных интенсивностей»**, посвящена исследованию задачи построения оценки Каца для функции распределения в МПИ и для нее доказывается аппроксимационная теорема. В МПИ были построены сглаженные ядерные оценки производной функции распределения и в частном случае для функции плотности и исследованы их асимптотические свойства.

В первом параграфе рассматривается определение МПИ, которая характеризуется леммой и асимптотическими свойствами оценки функции распределения. В модели конкурирующих рисков через функцию распределения $H\left(x\right)$ выразим функцию выживания $1-F\left(x;i\right)$, соответствующую $\left(Z,A^{(i)}\right)$ и представим равенством

$$1-F\left(x;i\right)=\left(1-H\left(x\right)\right)^{p^{(i)}},\quad i\in J, x\in R^1. \qquad (3)$$

Здесь $1-F\left(x;i\right)=\exp\left(-\Lambda\left(x;i\right)\right)$ и $\Lambda\left(x;i\right)=\int\limits_{(-\infty,x]}\frac{dH\left(u;i\right)}{1-H\left(u\right)}$. Приведем теперь лемму характеризующую МПИ.

Лемма 1. Равенства (3) равносильно независимости случайной величины Z и событий $A^{(1)},...,A^{(k)}$.

Второй параграф этой главы доказывает аппроксимационную теорему для оценки Каца, построенной для функции распределения в МПИ. Как было сказано во второй главе, мы определим усеченные оценки в МПИ. Здесь $\tilde{p}_n^{(i)}=\tilde{H}_n\left(\infty;i\right),\ i\in J$.

Теорема 5. *Пусть* $\left\{T_n,n\ge1\right\}$ *- последовательность возрастающих чисел, удовлетворяющая условиям*

$$T_n\uparrow T_H,\qquad b_n^{-1}=\left(1-H\left(T_n\right)\right)\ge\left(\frac{2\varepsilon\log n}{wn}\right)^{1/2}$$

и $\dfrac{n}{\log n}\ge\max\left\{\dfrac{r}{2w\left(1-p^{(i)}\right)^2},\dfrac{2r}{w\left(p^{(i)}\right)^2}\right\}$. *Тогда на вероятностном пространстве* $\left\{\Omega,\mathscr{A},P\right\}$ *уместно следующая аппроксимация:*

$$P\left(\sup_{t\in(-\infty;T_n]^k}\left\|\tilde{\mathbb{Z}}_n(t)-\tilde{V}_n(t)\right\|^{(k)}>C_n\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)\le kQn^{-r},$$

где $\varepsilon=r$, $C_n=\frac{r}{4w}b_n^2+\left(A_4+\frac{r\left(1+e^{-1}\right)}{w}\right)+\frac{1}{ep^{(i)}}\left(A_4+\frac{4r}{wep^{(i)}}\right)$, $Q=2A_5+16,\quad r\ge 2$

и A_4, A_5 – *абсолютно постоянная. Векторные процессы* $\tilde{\mathbb{Z}}_n(t)=\left(\tilde{\mathbb{Z}}_n^{(1)}(t_1),\tilde{\mathbb{Z}}_n^{(2)}(t_2),...,\tilde{\mathbb{Z}}_n^{(k)}(t_k)\right)$, *и* $\tilde{V}_n(t)=\left(\tilde{V}_n^{(1)}(t_1),\tilde{V}_n^{(2)}(t_2),...,\tilde{V}_n^{(k)}(t_k)\right)$, *определяются с процессами* $\tilde{\mathbb{Z}}_n^{(i)}(x)=\sqrt{n}\left(\tilde{F}_n(x;i)-F(x;i)\right)$, $\tilde{F}_n(x;i)=1-\left(1-\tilde{H}_n(x)\right)^{\tilde{p}_n^{(i)}}$, $x\in R$, $\tilde{p}_n^{(i)}=\tilde{H}_n(\infty;i)$, $i\in J$ *и*

$$\tilde{V}_n^{(i)}(x)=\left(1-H(x)\right)^{p^{(i)}}\left\{\frac{p^{(i)}W_n^{(0)}(x)}{1-H(x)}-W_n^{(i)}(\infty)\log\left(1-H(x)\right)\right\}.$$

В третьем и четвертом параграфах этой главы изучаются ядерные оценки Каца производных функции распределения в МПИ, в частности, строятся сглаженные ядерные оценки для функции плотности и исследуются их асимптотические свойства.

Пусть существуют производные $(r+1)$- го порядка от функций распределения, определенных в МПИ. Обозначим через $f(x;i)$ функцию плотности $F(x;i)$. В этом параграфе рассмотрим задачу ядерной оценки производных функций $F^{(j)}(x;i)$ на статистических выборках $\left\{\left(Z_m,\delta_m^{(1)},...,\delta_m^{(k)}\right),m=1,...,n\right\}$.

Для этого выбираем функции ядра - $K(t)$ и параметр "ширина окна". Пусть $K(t)$— абсолютно непрерывная функция распределения (ядро) и пусть она имеет симметричную и непрерывно дифференцируемую функцию плотности $k(t)$. Выбирем последовательность «ширины окна» $\left\{\mu=\mu(n),\ n\ge 1\right\}$, удовлетворяющую условиям $\mu=\mu(n)\downarrow 0$ и $n\mu(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Введем следующие обозначения:

$$K^{(j)}(t)=\frac{d^jK(t)}{dt^j},\ K^{(j)}(t)=k^{(j-1)}(t),\ j=1,...,(r+1).$$

Введем следующие линейные функционалы:

$$\tilde{F}_n^*(x;i)=\int_{-\infty}^{\infty}K\left(\frac{t-y}{\mu(n)}\right)dF(y;i),\ x\in R,\ i\in J.$$

Введем следующие условия:

(У1) $\mu=\mu(n)\downarrow 0$, $n\to\infty$;

(У2) $n\mu^{2j}\to\infty$, $j=\overline{1,(r+1)}$, $n\to\infty$;

(У3) $v_j = Var\left\{K^{(j)}\right\} < \infty, \ \ j = \overline{1,(r+1)}$;

(У4) $k(t)$ функция плотности симметрична: $k(-t) = k(t)$;

(У5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{(j)} dK(t) = 0, \ \ j = \overline{1,r}, \ \ \lambda_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^{r+1} dK(t) < \infty$;

(У6) $\lambda_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(K^{(j)}(t)\right)^2 dt < \infty, \ \ j = \overline{1,(r+1)}$.

Видно, что

$$\tilde{F}_n^{(j)*}(x;i) = \frac{d^j \tilde{F}_n(x;i)}{dx^j} = \frac{1}{\mu^j(n)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^{(j)}\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right) dF(y;i) =$$

$$= \frac{1}{\mu^j(n)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k^{(j-1)}\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right) dF(y;i), \ \ j = 1,\dots,r+1; \ \ x \in R,$$

Выберем оценку для $F^{(j)}(x;i)$ следующим образом:

$$\tilde{F}_n^{(j)}(x;i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu(n)} K^{(j)}\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right) d\tilde{F}_n(y;i) =$$

$$= \frac{\tilde{p}_n^{(i)}}{\mu^j(n)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^{(j)}\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right) \left(1 - \tilde{H}_n(y)\right)^{\tilde{p}_n^{(i)}-1} dH_n(y),$$

$$j = 1,\dots,r+1; \ \ x \in R.$$

Обозначим класс всех непрерывных точек функции распределения $F^{(j)}(x;i), \ j = 1,\dots,(r+1)$ через $\mathbb{C}\left(F^{(j)}(\bullet;i)\right)$. Если ввести обозначение $T_{F(\bullet;i)} = \inf\left\{x \in R : F(x;i) = 1\right\}$, то получим следующую теорему.

Теорема 6. *Предположим, что условия (У1-У6) выполнены. Тогда равномерно во всех точках* $x \in \left(-\infty; T_{F(\bullet;i)}\right) \cap \mathbb{C}\left(F^{(j)}(\bullet;i)\right)$ *является*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \tilde{F}_n^{(j)}(x;i) = F^{(j)}(x;i)\right) = 1, \quad j = \overline{1,(r+1)}; \quad i = \overline{1,k}.$$

Рассмотрим некоторые свойства функции плотности $f(x;i) = \frac{dF(x;i)}{dx}, \ i \in J$, соответствующей $F(x;i)$.

По формуле (3)

$$f(x;i) = p^{(i)}\left(1 - H(x)\right)^{p^{(i)}-1} h(x), \ \ i \in J, \ \ x \in R.$$

Выберем соответствующее ядерное оценки в виде

$$f_n(x;i) = \tilde{p}_n^{(i)}\left(1 - \tilde{H}_n^c(x)\right)^{\tilde{p}_n^{(i)}-1} h_n(x), \ \ i \in J, \ \ x \in R,$$

Здесь

$$\tilde{p}_n^{(i)} = \lim_{x\uparrow\infty} \tilde{H}_n(x;i) = \tilde{H}_n(+\infty;i),\ i \in J,$$

$$h_n(x) = \frac{d\tilde{H}_n^c(x)}{dx} = \frac{1}{\mu(n)} \int_{-\infty}^{\infty} k\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right) d\tilde{H}_n(y),$$

$$\tilde{H}_n^c(x) = \frac{1}{\mu(n)} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right) d\tilde{H}_n(y),$$

$K(t)$ является функцией плотности, причём $k(t) = \frac{dK(t)}{dt}$. Полные вариации функции $v_1 = Var\{K\}$ и $v_0 = Var\{k\}$ ограниченны, «ширины окна» удовлетворяют условиям $\mu = \mu(n) \downarrow 0$ и $n\mu(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Введем обозначения:

$$h_n^*(x) = \frac{1}{\mu(n)} \int_{-\infty}^{\infty} k\left(\frac{x-y}{\mu(n)}\right) dH(y),$$

$$f_n^*(x;i) = \tilde{p}_n^{(i)} \left(1 - \tilde{H}_n^c(x)\right)^{\tilde{p}_n^{(i)}-1} h_n^*(x),\ i \in J,$$

$$\Delta_n(x;i) = \tilde{p}_n^{(i)} \left(1 - \tilde{H}_n^c(x)\right)^{\tilde{p}_n^{(i)}-1} - p^{(i)} \left(1 - H(x)\right)^{p^{(i)}-1},\ i \in J.$$

Выберем число $T < T_H = \inf\{x : H(x) = 1\} \le \infty$, удовлетворяющее неравенству

$$b^{-1} = 1 - H(T) > 2\left(\frac{(1+\varepsilon)\log n}{2n}\right)^{1/2}, \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Лемма 2. *Для* K, k *и* $\mu(n)$ *указанные выше условия выполнены, и пусть также выполнено* (4). *Тогда с вероятностью* 1

$$\sup_{x \le T} \left(1 - \tilde{H}_n^c(x)\right)^{-1} \le 2b.$$

Теорема 7. *Пусть полные вариации* $K(t)$ *и* $k(t) = K'(t)$ *будут ограниченными функциями ядра, а* $K(t)$ *будет функцией плотности. Также пусть последовательность* $\{\mu = \mu(n),\ n \ge 1\}$ *удовлетворяет условиям* $\mu(n) \downarrow 0,\quad n\mu^2(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty.$ *Если функция плотности* $h(x)$ *ограничена, тогда выполняется соотношение*

$$P\left(\sup_{x \le T} \left| f_n(x;i) - f(x;i) \right| = O\left(\left(\frac{\log n}{n\mu^2(n)}\right)^{1/2}\right)\right) = 1,\ i \in J.$$

Итак, оценки $f_n(x;i)$ являются равномерными сильно состоятельнами оценками для $f(x;i)$ на интервале $(-\infty;T]$.

В пятом параграфе этой же главы рассмотрена сильно состоятельная оценка для неизвестного параметра экспоненциального распределения в МПИ.

Для цензурированных X_m случайных величин с функцией распределения $F(x;\theta)=1-\exp(-\theta x),\ x\geq 0,\ \theta>0$ а также для цензурирующих Y_m случайных величин с функцией распределения $G(x;\lambda)=1-\exp(-\lambda x),\ x\geq 0,\ \lambda>0,$ наблюдаются случайные величины $Z_m=\min(X_m,Y_m),$ где $\delta_m=I(Z_m=X_m)=I(X_m\leq Y_m)$. Основная задача состоит в оценивании неизвестного параметра θ, а λ может быть известным или неизвестным. Тогда рассматриваемая модель является МПИ:

$$H(x;\theta)=1-\left(1-F(x;\theta)\right)\left(1-G(x;\lambda)\right)=1-\exp\left(-(\theta+\lambda)x\right),\ x\geq 0,$$

и имеет место равенство:

$$1-F(x;\theta)=\left(1-H(x;\theta)\right)^{p},$$

где $p=\dfrac{\theta}{\theta+\lambda}$.

Для неизвестного параметра θ находим выражение $\theta=\dfrac{EZ_m}{E\delta_m}$ и методом моментов построим оценку в виде

$$\tilde{\theta}_n=\frac{\int_0^{T_n} u\,d\tilde{H}_n(u)}{\tilde{p}_n} \tag{5}$$

Имеет место теорема о сильной состоятельности оценки (5).

Теорема 8. *Если для числа* $\varepsilon>0$ *для достаточно больших* n *справедливо* $\dfrac{n}{\log n}\geq\dfrac{\varepsilon}{2(1+e/3)^2}$

тогда при $n\to\infty$

$$P\left(\tilde{\theta}_n\to\theta\right)=1$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена изучению обобщений эмпирических процессов Каца и их асимптотических свойств.

Основные результаты состоят из следуюшего:

1. Обобщенного моделя конкурирующих рисков случайного цензурирования включала в себя случайные величины и совместные распределения событий, то есть модифицированные варианты не более 1 специально для субраспределений, с помощью которых были сделаны и изучены соответствующие оценки для других характеристик.
2. Доказаны соответствующие теоремы аппроксимации для процессов, построенных по модифицированным эмпирическим оценкам и эмпирическим процессам, построенных по интегральным функциям интенсивностей.
3. Доказана сильная асимптотическая состоятельность оценки в модели случайного цензурирования для характеристической функции.
4. Построены ядерные оценки Каца функции распределения и для его производных в МПИ, в частности, строятся сглаженные ядерные оценки для функции плотности и исследуются их асимптотические свойства.
5. В ПИМ строится сильная состоятельная оценка для параметра экспоненциального распределения.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

NAVOI STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE

SAYFULLOEVA GULNOZ SAYFULLOEVNA

GENERALIZATION OF EMPIRICAL KAC PROCESSES AND THEIR ASYMPTOTIC PROPERTIES

01.01.05 – Probability theory and mathematical statistics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Navoi – 2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number № B2022.2.PhD/FM712.

Dissertation has been prepared at Navoi State Pedagogical Institute.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" of information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Abdushukurov Abdirakhim Akhmedovich** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor
Official opponents:	**Mirakhmedov Sherzod Adylovich** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor
	Nurmukhamedova Nargiza Saydillaevna Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences, Docent
Leading organization:	**Tashkent State Transport University**

Defense will take place « 13 » June 2023 at 16.00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered № 160) (Address: University str.9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on « 26 » May 2023 year
(Mailing report № 2 on « 26 » May 2023 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

Sh.K.Formanov
Chairman of Scientific Seminar
under Scientific Council on award
of scientific degrees, D.F.-M.S., academician

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the work is to study the asymptotic properties of the modified Kac statistics and its functionals in the model of competing risks of random censoring.

The research objects are asymptotically effective stopping times and consistent confidence intervals of a fixed width of multidimensional probability density and its derivatives, regression functions and the probability density of an asymptotically uncorrelated process.

The research objects are modified empirical estimates of Kac and their functionals.

The scientific novelty of the research work consists of the followings:

proposed new Kac estimates for distribution functions in the competing risks model of censoring and approximation theorems are proved for empirical processes composed of integral hazard functions;

estimates are constructed for the distribution function and approximation theorems are proved for them;

the strong asymptotic validity of the estimate in the random censoring model for the characteristic function is proved;

A Kac estimate for the distribution function is constructed in proportional hazards model (PHM) and an approximation theorem was proved for it and in PHM, smoothed kernel estimates for the derivatives of the distribution function, and in particular for the density function, were constructed and their asymptotic properties were investigated.

Implementations of the research results. The results obtained in the dissertation were practically applied in the following areas:

in the proportional risk model, empirical processes built using estimates and built using the integral hazard function were used to prove their approximation theorems with a Gaussian process in the fundamental project project Yo-F4-07 «Statistical estimation and testing of hypotheses using a copula of functions» (Reference No. 04 / 11-2884 dated May 20, 2022 of the National University of Uzbekistan). The application of the scientific result made it possible to study the asymptotic properties of the studied functions in the model of competing risks of random censorship;

in the general random censorship model of using empirical Kac statistics, obtained by replacing the number of terms with independent Poisson random variables, used to prove theorems on the asymptotic properties of the distribution function estimate, studied in the fundamental project OT-F-4-40 “Investigations of the asymptotic properties of integral empirical processes indexed by the class of measurable functions” (Reference No. 04/11-418 dated January 30, 2023 of the National University of Uzbekistan). The application of the scientific result made it possible to carry out an asymptotic study of the distribution function under study in the general random censorship model.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and the list of used literature. The full volume of the thesis is 92 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
SPISOK OPUBLIKOVANNЫX RABOT
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim ((Часть I; Part I)

1. Abdushukurov A.A., Sayfulloeva G.S. On approximation of empirical Kac processes under general random censorship model. // Journal of Siberian Federal University: Mathematics and physics. 2022. Vol. 15(3), P. 292-307. (3.Scopus. IF=0.268).
2. Abdushukurov A.A., Sayfulloyeva G.S. Asymptotic properties of modified empirical Kac processes under general random censorship model. // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2022. №61.P.26-36 (3.Scopus. IF=0.547).
3. Abdushukurov A.A., Sayfulloyeva G.S. Empirical Kac processes in simple proportional hazards model under competing risks. // Bulletin of the Institute of Mathematics. 2022. Vol 5, №4, pp. 1-6 (01.00.00; № 17)
4. Абдушукуров А.А., Сайфуллоева Г.С. Оценка интегральной функции интенсивности статистикой типа Каца. // Бюллетень института Математики. 2022. № 6. с. 32-36 (01.00.00; № 17)
5. Sayfulloyeva G.S. Proporsional intensivliklar modelida taqsimot funksiyasi hosilalarining Kats baholari. // “Ilm sarchashmalari” Urganch davlat universiteti jurnali, 2022 yil, № 5, 7-11bet (01.00.00; № 12).

II bo‘lim (Часть II; Part II)

6. Sayfulloyeva G.S. On approximation of empirical Kac processes under general random sensorship model // Proceedings of VI international conference “Statistics and its applications” 2022, 19-20 October, Namangan p.207-212.
7. Sayfulloyeva G.S. Empirical Kac processes under general random censorship model. // ITMM2021. 20th International Conference named after A.F.Terpugov Information Technologies and Mathematical Modelling, 1-5 december, Tomsk. p.304-309.
8. Сайфуллоева Г.С. Об одной полупараметрической оценке характеристической функции. // Научной конференции “Актуальные проблемы стохастического анализа” посвященной 80 летию академика Ш.К.Форманова. Ташкент, 20-21 февраля, 2021 год, с. 238-239.
9. Сайфуллоева Г.С. Полупараметрические процессы и их асимптотические свойства. // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа”. Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз Бухарское отделение института математики. Бухара, 4–5 ноябрь, 2021 год, с. 366-367.

10. Sayfulloyeva G.S. Xarakteristik funksiyaning tasodifiy senzurlanishli modeldagi baholari. // UzACADEMIA ilmiy-uslubiy jurnalining №16, VOL 2, ISSUE 1 (16), may 2021. 178-179 бет.
11. Sayfulloyeva G.S. Tasodifiy senzurlanishli umumlashgan modelda vektor – qiymatli empirik Kats protsesslarining approksimatsiyasi. // “Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari” mavzusida respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi, Andijon, 28 mart 2022 yil, 138-140 bet.
12. Abdushukurov A.A., Sayfulloyeva G.S. Proporsional intensivliklar modelida taqsimot funksiyasi hosilalarini yadroviy baholash. // “Matematika, mexanika va intellektual texnologiyalar” mavzusida yosh olimlarning ilmiy-amaliy konferensiyasi. Toshkent, 21-22 aprel 2022 yil, 115-116 bet.
13. Sayfulloyeva G.S. Proporsional intensivliklar modelida Kats empirik protsesslari. // «Matematika va informatika fanlarini oʻqitishning muammolari va ularning yechimlari» mavzusida respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi, Nukus, 21-22 aprel 2022 yil, 136-138 bet.
14. Sayfulloyeva G.S. Tasodifiy senzurlanishli umumlashgan modelda Kats protsesslarining modifikatsiyalari uchun natijalar. // “XXI asr – intellektual yoshlar asri” mavzusidagi respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi, Yosh olimlar axborotnomasi, №1 (4) 2022 yil, 93-97 bet.
15. Сайфуллоева Г.С. Оценка интегральной функции интенсивности // ITMM-2021. 21-я Международная конференция имени А.Ф.Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование», 25-29 октября, 2022 г, Карши, с.405-409.
16. Sayfulloyeva G.S. Asymptotic properties of modified empirical Kac processes // International scientific conference “Limit theorems of probability theory and mathematical statistics”, 26-28 september, 2022 y, Tashkent, p.105-107.
17. Сайфуллоева Г.С. Проверка гипотезы о справедливости модели пропорциональных интенсивностей // международная конференция “Математический анализ и его приложения в современной математической физике”, 23-24 сентября, 2022 г, Самарканд. с. 79-80.
18. Sayfulloyeva G.S. Tanlanmada arifmetik o`rtacha va tanlanma hajmi birgalikdagi taqsimoti // “Fundamental matematika muammolari va ularning tadbiqlari” mavzusidagi respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi, Navoiy, 25 may 2019 yil, 137-139 bet.
19. Sayfulloyeva G.S. Proporsional intensivliklar modelida approksimatsiya. // “Yosh matematiklarning yangi teoremalari – 2022” mavzusida respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi, Namangan, 13-14 may 2022 yil, 164-166 bet.

Avtoreferat «O‘zbekiston matematika jurnali» tahririyatida
o‘zbek, rus va ingliz tillardagi nusxalari 2023 yil 15- mayda tahrirdan o‘tkazilib,
matnlari o`zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 30/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.