V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

SATTAROV ALOBERDI MO'MINJON O'G'LI

FILIFORM LEYBNITS ALGEBRALARINING PRE-DIFFERENSIALLASHLARI VA O'NG-KOMMUTATIV VA CHAP-SIMMETRIK ALGEBRALARNING TASNIFI

01.01.06 – Algebra

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

Toshkent – 2023

UDK: 512.554.38

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Sattarov Aloberdi Mo‘minjon o‘g‘li
Filiform Leybnits algebralarining pre-differensiallashlari va o‘ng-kommutativ va chap-simmetrik algebralarning tasnifi 3

Саттаров Алоберди Муминжон угли
Пред-дифференцирование филиформных алгебр Лейбница и классификация право-коммутативных и лево-симметричных алгебр……………………………………………………………………….. 19

Sattarov Aloberdi Mominjon ugli
Pre-derivation of filiform Leibniz algebras and classification of right-commutative and left-symmetric algebras ………………………………….. 35

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published works…………………………………………………... 38

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

SATTAROV ALOBERDI MO‘MINJON O‘G‘LI

FILIFORM LEYBNITS ALGEBRALARINING PRE-DIFFERENSIALLASHLARI VA O‘NG-KOMMUTATIV VA CHAP-SIMMETRIK ALGEBRALARNING TASNIFI

01.01.06 – Алгебра

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent – 2023

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2022.4.PhD/FM442 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz(rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (www. kengash.mathinst.uz) va "ZiyoNet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Xudoyberdiyev Abror Xakimovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Arzikulov Farhodjon Nematjonovich** fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
	Qurbanbaev Tuuelbay Qadirbayevich fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Yangi O'zbekiston universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil «23» may soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika Institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (159-raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40.

Disertatsiya avtorefarati 2023 yil «10» may kuni tarqatiladi.

(2023 yil «10» maydagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A.Roziqov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

J.K.Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.,
katta ilmiy xodim

B.A.Omirov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy
kengash huzuridagi ilmiy seminar
raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Bugungi kunga kelib jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlarning aksariyati fundamental algebraning asoslarini tadqiq qilish masalalariga keltiriladi. Noassotsiativ algebralarni tasniflashga bo‘lgan qiziqishning ortishi ularning tuzilishi haqida kengroq ma’lumot olish bilan, geometrik tasnifi esa bunday algebralar ko‘philligining keltirilmas komponentalarini aniqlash imkonini berganligi bilan asoslanadi. Kichik o‘lchamli noassotsiativ algebralarning algebraik tasniflashning markaziy kengaytma metodi algebralarning strukturaviy nazariyasida eng ko‘p qo‘llaniladigan metodlardan hisoblanadi. Noassotsiativ algebralarning tuzilish nazariyasi va tasniflash muammolari esa algebralarning muhim vazifalaridan bo‘lib kelmoqda.

Hozirgi kunda assotsiativ, Li, Yordan algebralari kabi klassik algebralarning umumlashmasi bo‘lgan noassotsiativ algebralarni o‘rganish katta qiziqishlarga sabab bo‘lmoqda. Leybnits algebralari Li algebralarining umumlashmasi bo‘lsa, o‘z navbatida chap-simmetrik algebralar assotsiativ algebralarning umumlashmasidir. Chap-simmetrik algebralar Novikov va assosimmetrik algebralarini ham o‘z ichiga olib, Li strukturasiga ega hisoblanadi. Kichik o‘lchamli algebralarni, jumladan chap-simmetrik, o‘ng-kommutativ va terminal algebralarni tavsif qilish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan funksional analiz, differentsial tenglamalar, statistik mexanika, fizika va raqamli iqtisodiyot fanlariga e’tibor kuchaytirildi. Jumladan, oxirgi yillarda algebraik obyektlar matematikaning turli sohalarida, ayniqsa geometriya, topologiya va fizikada o‘zining yangi tatbiqlarini topishda davom etmoqda. Bugungi kunga kelib turli xil ko‘philliklardagi nilpotent va yechiluvchan algebralarni, jumladan Leybnits algebralarini tasniflash va kichik o‘lchamli noassotsiativ algebralarning algebraik hamda geometrik tasnifini aniqlash bo‘yicha salmoqli natijalarga erishildi. Noassotsiativ algebralarning algebraik va geometrik tasnifiga oid ilmiy natijalar olish, ularning differensiallshlari va differensiallashlarning turli xil umumlashmalarini aniqlash, ular orqali algebralar ko‘philliklarining yangi xossalarini yopish, hamda ushbu natijalarni matematikaning boshqa sohalarida qo‘llash fanning muhim vazifalaridan hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son «O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha xarakatlar strategiyasi to‘g’risida»gi Farmoni, 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son «Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi va 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning Respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot O‘zbekiston Respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Oxirgi yillar davomida naossotsiativ algebralar nazariyasida katta ilmiy natijalarga erishildi. Jumladan, Leybnits algebralari Sh. A. Ayupov, B. A. Omirov, I. S. Raximov, A. X. Xudoyberdiev, K. K. Masutova, L. Kamacho, X. R. Gomez, M. Ladra va boshqalar tomonidan o‘rganilgan. Bundan tashqari, M. Ladra, B. A. Omirov, A. X. Xudoyberdievning ishida xarakteristik nilpotent bo‘lmagan filiform Leybnits algebralari tasniflangan.

Skjelbred va Sundlar tomonidan nilpotent Li algebralari uchun ishlab chiqilgan markaziy kengaytma usuli bir qator nilpotent algebralarning tasnifini olish imkonini berdi. Mazkur usul berilgan ko‘phillikdagi kichik o‘lchamli algebralardan foydalanib, ulardan katta o‘lchamli algebralarni tasniflashdan iborat. Markaziy kengaytma usuli yordamida nilpotent besh o‘lchamli Yordan algebralari, besh o‘lchamli kommutativ algebralar, olti o‘lchamli Malsev algebralari, olti o‘lchamli binar Li algebralari V. De-Graf, A. Xegazi, X. Abdelvaxab, A. Kalderon, A. Martin, I. Kaygorodov, Yu. Popov va boshqalarning ishlarida tasniflangan.

Yordan algebrasining umumlashmasi bo‘lgan konservativ algebralari tushunchasi 1972 yilda Kantor tomonidan kiritilgan bo‘lib, bunday algebralar qator ayniyatlar yordamida aniqlanadi. Konservativ algebralarning muhim sinflaridan biri bo‘lib, Tits-Koxer-Kantor konstruksiyasining umumiy funktorini qo‘llovchi muhim algebralar terminal algebralar hisoblanadi. Bundan tashqari, terminal algebralar ko‘philligi Li algebralari, Leybnits algebralari va boshqa algebralar ko‘philliklarini umumlashtiradi. Hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan obyektlarni o‘rganish abstrakt algebralar nazariyasining qiziqarli yo‘nalishi hisoblanadi. Ma’lumki, hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan chekli tartibli gruppa mavjud va yagona. Algebralar orasida esa nilpotent assotsiativ, Yordan, Leybnits va Zinbiel algebralari ko‘philliklari uchun ushbu masalalar o‘rganilib, bunday algebralar uchun hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan chekli o‘lchamli algebralar izomorfizm aniqligida mavjud va yagona ekanligi isbotlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti V.I.Romanovskiy nomidagi matematika institutining «Operatorlar va noassotsiativ algebralarda lokal differensiallash va avtomorfizmlar, nochiziqli dinamik sistemalarda faza almashishlar va xaos» + «Yevklid va psevdo-Yevklid fazolaridagi egri chiziqlar va sirtlarning global invariantlari nazariyasi va uning mexanikaga tatbiqlari» mavzusidagi ilmiy-tadqiqot loyihasi (OT-F4-82+OT-F4-87, 2017-2019 yy.), hamda institutining «Leybnits algebralari tasvirlari» mavzusidagi yoshlar ilmiy-tadqiqot loyihasi (YoFA-Ftex-2018-79, 2018-2019 yy.) doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi filiform Leybnits algebralarining pre-differensiallashlari hamda o‘ng-kommutativ, chap-simmetrik va hosil qiluvchisi yagona bo‘lgan terminal algebralarni tasniflashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

filiform Leybnits algebralarining pre-differensiallashlari tasniflangan hamda kuchli nilpotent bo‘lmagan filiform Leybnits algebralari mavjudligi isbotlangan;

to‘rt o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ algebralarning algebraik va geometrik tasniflanlagan hamda bunday algebralar ko‘philliklarining keltirilmas komponentalari topilgan;

to‘rt o‘lchamli nilpotent chap-simmetrik algebralarning algebraik va geometrik tasniflari keltirilgan;

hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan besh o‘lchamli nilpotent terminal algebralar tasniflangan.

Tadqiqotning obyekti filiform Leybnits algebralari; kichik o‘lchamli o‘ng-kommutativ va chap-simmetrik nilpotent algebralar; algebralarning pre-differensiallashlari; avtomorfizmlar va kogomologik gruppalardan iborat.

Tadqiqotning premeti pre-differensiallashlar; to‘rt o‘lchamli nilpotent chap-simmetrik algebralar; to‘rt o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ algebralar; besh o‘lchamli terminal algebralar.

Tadqiqotning usullari. Ishda assotsiativ bo‘lmagan algebralar nazariyasi usullari, strukturaviy va kogomologik usullar, markaziy kengaytma usuli, degeneratsiyalar, shuningdek invariantlar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

filiform Leybnits algebralarining pre-differensiallashlari tasniflangan, hamda kuchli nilpotent bo‘lmagan filiform Leybnits algebralari mavjudligi isbotlangan;

to‘rt o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ algebralar algebraik va geometrik tasniflanlagan hamda bunday algebralar ko‘philliklarining keltirilmas komponentalari topilgan;

to‘rt o‘lchamli nilpotent chap-simmetrik algebralarning algebraik va geometrik tasniflari keltirilgan;

hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan besh o‘lchamli nilpotent terminal algebralar tasniflangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Dissertatsiyada qo‘llanilgan usullar va olingan natijalardan O‘zbekiston Respublikasi oliy o‘quv yurtlari magistrantlari va doktorantlari uchun noassotsiativ algebralar bo‘yicha o‘tiladigan maxsus kurslarda foydalanish mumkin. Bundan tashqari, dissertatsiya natijalari noassotsiativ algebralarning turli sinflarini algebraik va geometrik tasniflash, berilgan algebralar ko‘philligining keltirilmas komponentalarini topishga imkon beradi.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Matematik mulohazalarning qat’iyligi, algebralarning boshqa sinflaridagi ma’lum usullaridan, kogomologiyalar nazariyasi, algebralarining strukturaviy nazariyasidagi fundamental natijalardan foydalanilganligi bilan asoslanadi. Mathematica 12 dasturlash tilida yaratilgan maxsus dasturlar yordamida kichik o‘lchamli algebralarning differensiallashlari va degeneratsiyalariga doir natijalar tekshirilgan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati noassotsiativ algebralarning algebraik va geometrik tasnifiga oid natijalardan boshqa algebralar ko‘philliklarini tadqiq qilishda foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqotning amaliy ahamiyati olingan natijalardan noassotsiativ algebralarni tasniflash va ularning kogomologik gruppalari, hamda bunday algebralar ko‘philligining keltirilmas komponentalarini o‘rganish masalalarida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Filiform Leybnits algebralarining pre-differensiallashlari va o‘ng-kommutativ va chap-simmetrik algebralarining tasniflari bo‘yicha olingan natijalar asosida:

to‘rt o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ algebralarning algebraik va geometrik tasniflanlari hamda bunday algebralar ko‘philliklarining keltirilmas komponentalaridan AP08051987 raqamli «Dinamik sistemalarning noregulyar to‘plamlari» mavzusidagi xorijiy grant loyihasida kichik o‘lchamli algebralar ko‘philliklarini algebraik va geometrik tasniflarini olishda foydalanilgan (Sulaymen Demirel universitetining 2023 yil 4 apreldagi №10.3.37/411-sonli ma’lumotnomasi, Qozog‘iston). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan besh o‘lchamli nilpotent assosimmetrik algebralarning tasnifini va bunday algebralar ko‘philligidagi keltirilmas komponentalarni topish imkonini bergan;

hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan besh o‘lchamli nilpotent terminal algebralar tasniflaridan xorijiy ilmiy maqolalarda (Journal of Algebra and its Applications, 21(2), 2022, 2250031, Algebra Colloquium, 29(3), 2022, 453-474 va Communications in Mathematics, 28(2), 2020, 231-251) kichik o‘lchamli konservativ algebralarning tasniflishda foydalanilgan. Ilmiy natijaning qo‘llanilishi kichik o‘lchamli konservativ algebralar va hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan besh o‘lchamli nilpotent bikommutativ hamda kuchsiz assotsiativ algebralarning tasniflarini olish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 2 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 13 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta maqola, jumladan, 4 tasi xorijiy, 3 tasi respublika jurnallarida, shuningdek 6 ta ma’ruza tezislari ilmiy konferensiya materiallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qism, sakkizta bo‘limga bo‘lingan uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 101 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustivor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan. Shuningdek, bu qismda dissertatsiya mavzusi bo‘yicha muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqotning maqsadi, vazifalari, ob’ekti va premeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **«Filiform Leybnits algebralarining pre-differensiallashlari»** deb nomlangan birinchi bobida noassotsiativ algebralarning strukturaviy nazariyasiga oid bo‘lgan muhim natijalar keltirilgan bo‘lib, ularning differensiallashlari, kogomologik gruppalari, hamda markaziy kengaytma usullari keltirilgan. Birinchi bobning birinchi va ikkinchi paragraflarida filiform Leybnits algebralarining pre-diffrentsiallashlari tasniflanib, ushbu algebralar uchun kuchli nilpotent bo‘lish shartlari aniqlangan.

Berilgan L algebraning ixtiyoriy $x, y \in L$ elementlari uchun $d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$ ayniyatni qanoatlantiruvchi d chiziqli akslantirishga L algebraning differensiallashi deyiladi. Algebraning barcha differensiallashlari to‘plamini $Der(L)$ kabi belgilaymiz.

Algebraning nilpotentligi tushunchasini keltirish uchun quyi markaziy qatorni aniqlaymiz:

$$L^1=L, \qquad L^{k+1} = [L^k, L] + [L^{k-1}, L^2] +\ldots+ [L^2, L^{k-1}] + [L, L^k], \qquad k \geq 1.$$

1-ta’rif. Berilgan L algebra uchun shunday $s \in N$ natural son topilib, $L^s=0$ bo‘lsa, u holda L algebra nilpotent deyiladi.

2-ta’rif. Agar L algebraning ixtiyoriy $x, y, z \in L$ elementlari uchun quyidagi Leybnits ayniyati bajarilsa,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

u holda L algebra Leybnits algebrasi deyiladi.

Quyidagi ta’rifda Leybnits algebrasining pre-differensiallashi tushunchasini kiritamiz.

3-ta’rif. Agar L Leybnits algebrasida aniqlangan $P : L \to L$ chiziqli akslantirish

$$[[x, y], z] = [[P(x), y], z] + [[x, P(y)], z] + [[x, y], P(z)], \qquad \forall\ x,y,z \in L$$

ayniyatni qanoatlantirsa, u holda ushbu chiziqli akslantirish pre-differensiallash deyiladi.

Leybnits algebralarining pre-differensiallashlari ularning differensiallash-larining umumlashmasi hisoblanadi. Barcha differensiallashlari nilpotent bo‘lgan Leybnits algebrasi *xarakteristik nilpotent* algebra deyiladi. Agarda Leybnits algebrasining ixtiyoriy pre-differensiallashi nilpotent bo‘lsa, u holda u *kuchli nilpotent* algebra deb nomlanadi. Leybnits algebrasining xar qanday differensiallashlari pre-differensiallash bo‘lganligi sababli kuchli nilpotent Leybnits algebrasi xarakteristik nilpotent bo‘ladi.

4-ta’rif. Agar L Leybnits algebrasi uchun $dim\ L^i = n - i$, $2 \le i \le n$ o‘rinli bo‘lsa, bunday algebra filiform Leybnits algebrasi deyiladi, bu yerda $n = dim\ L$.

Barcha n-o‘lchamli filiform Leybnits algebralari uchta kesishmaydigan sinflarga ajralishi X.R.Gomez va B.A.Omirovlarning ishlarida isbotlangan.

1-teorema. Har qanday n-o‘lchamli kompleks filiform Leybnits algebrasida shunday $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bazis topilib, ushbu bazisda algebraning ko‘paytmasi quyidagilardan biri kabi bo‘ladi:

$F_1(\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_n, \theta)$: $[e_1, e_1] = e_3$, $\quad [e_i, e_1] = e_{i+1}$, $\quad 2 \le i \le n-1$,

$[e_1, e_2] = \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \theta e_n$,

$[e_j, e_2] = \alpha_4 e_{j+2} + \alpha_5 e_{j+3} + \ldots + \alpha_{n+2-j} e_n$, $2 \le j \le n-2$,

$F_2(\beta_4, \beta_5, \ldots, \beta_n, \gamma)$: $[e_1, e_1] = e_3$, $\quad [e_i, e_1] = e_{i+1}$, $\quad 3 \le i \le n-1$,

$[e_1, e_2] = \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \ldots + \beta_n e_n$, $[e_2, e_2] = \gamma e_n$,

$[e_j, e_2] = \beta_4 e_{j+2} + \beta_5 e_{j+3} + \ldots + \beta_{n+2-j} e_n$, $3 \le j \le n-2$,

$F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$: $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $\quad 2 \le i \le n-1$,

$[e_1, e_i] = -e_{i+1}$, $\quad 3 \le i \le n-1$,

$[e_1, e_1] = \theta_1 e_n$, $\quad [e_1, e_2] = -e_3 + \theta_2 e_n$, $\quad [e_2, e_2] = \theta_3 e_n$,

$[e_2, e_j] = -[e_j, e_2] \in \{e_{j+2}, e_{j+3}, \ldots, e_n\}$, $\quad 3 \le j \le n-2$,

$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i] \in \{e_{i+j}, e_{i+j+1}, \ldots, e_n\}$, $3 \le i \le \left[\frac{n}{2}\right]$, $i \le j \le n-i$,

bu yerda keltirilmagan ko‘paytmalar nolga teng bo‘lib, juft n uchun $\alpha \in \{0,1\}$, toq n uchun esa $\alpha = 0$. Uchinchi sinf algebralar uchun Leybnits ayniyatini qanoatlantirish talab etiladi.

Dissertatsiya birinchi bobining ikkinchi paragrafida yuqoridagi teoremada berilgan filiform Leybnits algebralarining birinchi va ikkinchi sinflari uchun pre-diffrensiallashlarning tavsifi keltirilgan.

1-tasdiq. $F_1(\alpha_4, \ldots, \alpha_n, \theta)$ sinfdagi filiform Leybnits algebralarining pre-differensiallashlari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$P(e_1) = \sum_{t=1}^{n} a_t e_t, \quad P(e_2) = (a_1 + a_2)e_2 + \sum_{t=3}^{n-2} a_t e_t + b_{n-1}e_{n-1} + b_n e_n, \quad P(e_3) = \sum_{t=2}^{n} c_t e_t,$$

$$P(e_{2i}) = ((2i-1)a_1 + a_2)e_{2i} + \sum_{t=2i+1}^{n} (a_{t-2i+2} + (2i-2)a_2\alpha_{t-2i+3})e_t, \quad 2 \le i \le \left[\frac{n}{2}\right],$$

$$P(e_{2i+1}) = c_2 e_{2i} + ((2i-2)a_1 + c_3)e_{2i+1} + \sum_{t=2i+2}^{n} (c_{t-2i+2} + (2i-2)a_2\alpha_{t-2i+2})e_t, \ 2 \le i \le \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

bu yerdagi koeffitsientlar quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$(1 + (-1)^n)c_2 = 0, \ (a_1 - a_2)\alpha_4 = 0, \ (3a_1 - c_3)\alpha_4 = 0, \ c_2\alpha_t = 0, \qquad 4 \le t \le n-1,$$

$$\sum_{t=3}^{k} (a_{2k-2t+3} - c_{2k-2t+4} + a_2\alpha_{2k-2t+4})\alpha_{2t-2} = 0, \qquad 3 \le k \le \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

$$(2a_1 + a_2 - c_3)\alpha_{2k} = \sum_{t=3}^{k} (a_{2k-2t+4} - c_{2k-2t+5} + a_2\alpha_{2k-2t+5})\alpha_{2t-2}, \qquad 3 \le k \le \left[\frac{n}{2}\right] - 1,$$

$$(a_2 - (k-3)a_1)\alpha_k = \frac{k-1}{2} a_2 \sum_{t=5}^{k} \alpha_{t-1}\alpha_{k-t+4}, \qquad 5 \le k \le n-2,$$

$$(a_2-(n-4)a_1)\alpha_{n-1}=a_2\sum_{t=3}^{\frac{n-2}{2}}(2t-3)\alpha_{n-2t+3}\alpha_{2t-1}+\sum_{t=2}^{\frac{n-2}{2}}(c_{n-2t+2}-a_{n-2t+1}+(2t-3)a_2\alpha_{n-2t+2})\alpha_{2t},$$

$$n-toq,$$

$$(2a_1-c_3-(n-6)a_1)\alpha_{n-1}=a_2\sum_{t=3}^{\frac{n-1}{2}}(2t-3)\alpha_{n-2t+3}\alpha_{2t-1}+\sum_{t=2}^{\frac{n-3}{2}}(c_{n-2t+2}-a_{n-2t+1}+(2t-3)a_2\alpha_{n-2t+2})\alpha_{2t},$$

$$n-juft.$$

2-tasdiq. $F_2(\beta_4, \ldots, \beta_n, \gamma)$ sinfdagi filiform Leybnits algebralarining pre-differensiallashlari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi*:*

$$P(e_1)=\sum_{t=1}^{n}a_te_t,\qquad P(e_2)=b_2e_2+b_{n-1}e_{n-1}+b_ne_n,\qquad P(e_3)=\sum_{t=2}^{n}c_te_t,$$

$$P(e_{2i})=(2i-1)a_1e_{2i}+\sum_{t=2i+1}^{n}(a_{t-2i+2}+(2i-2)a_2\beta_{t-2i+3})e_t,\qquad 2\le i\le\left[\frac{n}{2}\right],$$

$$P(e_{2i+1})=((2i-2)a_1+c_3)e_{2i+1}+\sum_{t=2i+2}^{n}(c_{t-2i+2}+(2i-2)a_2\beta_{t-2i+2})e_t,\ 2\le i\le\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

bu yerdagi koeffitsientlar quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$(c_3-2a_1)\beta_4=0,\quad (b_2-2a_1)\beta_4=0,\quad c_2\beta_t=0,\qquad 4\le t\le n-1,$$

$$\sum_{t=3}^{k}(a_{2k-2t+3}-c_{2k-2t+4}+a_2\beta_{2k-2t+4})\beta_{2t-2}=0,\qquad 3\le k\le\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

$$(c_3-2a_1)\beta_{2k}=\sum_{t=3}^{k}(a_{2k-2t+4}-c_{2k-2t+5}+a_2\beta_{2k-2t+5})\beta_{2t-2},\qquad 3\le k\le\left[\frac{n}{2}\right]-1,$$

$$(b_2-(k-2)a_1)\beta_k=\frac{k-1}{2}a_2\sum_{t=5}^{k}\beta_{t-1}\beta_{k-t+4},\qquad 5\le k\le n-2,$$

$$(b_2-c_3-(n-5)a_1)\beta_{n-1}=a_2\sum_{t=3}^{\frac{n-1}{2}}(2t-3)\beta_{n-2t+3}\beta_{2t-1}+\sum_{t=2}^{\frac{n-3}{2}}(c_{n-2t+2}-a_{n-2t+1}+(2t-3)a_2\beta_{n-2t+2})\beta_{2t},$$

$$n\quad -toq,$$

$$(b_2-(n-3)a_1)\beta_{n-1}=a_2\sum_{t=3}^{\frac{n-2}{2}}(2t-3)\beta_{n-2t+3}\beta_{2t-1}+\sum_{t=2}^{\frac{n-2}{2}}(c_{n-2t+2}-a_{n-2t+1}+(2t-3)a_2\beta_{n-2t+2})\beta_{2t},$$

$$n\quad -juft.$$

Birinchi bobning uchinchi paragrafida kuchli nilpotent bo‘lmagan barcha filiform Leybnits algebralarining tasnifi keltirilgan.

3-tasdiq. Aytaylik, $L(\alpha_4, \ldots, \alpha_n, \theta)$ birinchi sinfdan olingan kuchli nilpotent bo‘lmagan filiform Leybnits algebrasi bo‘lib $\alpha_4=\ldots=\alpha_{n-1}=0$ bo‘lsin, u holda L quyidagi o‘zaro izomorf bo‘lmagan algebralardan biriga izomorf bo‘ladi:

$F_1(0, \ldots, 0, 0, 0)$, $F_1(0, 0\ldots, 0, 0, 1)$, $F_1(0, \ldots, 0, 1, 0)$, $F_1(0, \ldots, 0, 1, 1)$.

Qandaydir i $(4\le i\le n-1)$ uchun $\alpha_i\neq 0$ bo‘lgan holatda quyidagi natijani olamiz.

2-teorema. Aytaylik, L algebra $F_1(\alpha_4, \ldots, \alpha_n, \theta)$ sinfdan olingan algebra bo‘lib, n juft son bo‘lsin. L algebra kuchli nilpotent bo‘lishi uchun $(\alpha_4, \ldots, \alpha_n, \theta)$ parametrlar quyidagi qiymatlardan birini qabul qilishi zarur va yetarli:

i) $\alpha_4 \neq 0$ va $\alpha_k = (-1)^k C_{k-3}^2 \alpha_4^{k-3}, \quad 5 \leq k \leq n-2$;

ii) $\begin{cases} \alpha_{(2s-3)t+3} = (-1)^{t+1} C_t^{2s-2} \alpha_{2s}^t, & 3 \leq s \leq \dfrac{n-2}{2} \qquad 1 \leq t \leq \left[\dfrac{n-5}{2s-3}\right], \\ \alpha_j = 0, & j \neq (2s-3)t+3, \quad 4 \leq j \leq n-2; \end{cases}$

iii) $\alpha_{2i} = 0,\ 2 \leq i \leq \dfrac{n-2}{2}$;

bu yerda $C_n^p = \dfrac{1}{(p-1)n+1}\begin{pmatrix} pn \\ n \end{pmatrix}$ p – Katalan sonlari.

Ikkinchi sinf filiform Leybnits algebralari uchun ham yuqoridagi kabi natijalar olingan bo‘lib, $\beta_4, \beta_5, \ldots, \beta_n, \gamma$ parametrlarning qanday qiymatida $F_2(\beta_4, \beta_5, \ldots, \beta_n, \gamma)$ sinfdan olingan algebra kuchli nilpotent bo‘lishi aniqlangan.

4-tasdiq. Aytaylik, $L(\beta_4, \ldots, \beta_n, \gamma)$ ikkinchi sinfdan olingan kuchli nilpotent bo‘lmagan filiform Leybnits algebrasi bo‘lib $\beta_4 = \ldots = \beta_{n-1} = 0$ bo‘lsin, u holda L quyidagi o‘zaro izomorf bo‘lmagan algebralardan biriga izomorf bo‘ladi:

$$F_2(0, \ldots, 0, 0, 0),\ F_2(0, 0\ldots, 0, 0, 1),\ F_2(0, \ldots, 0, 1, 0).$$

3-teorema. Aytaylik, L algebra $F_2(\beta_4, \ldots, \beta_n, \gamma)$ sinfdan olingan kuchli nilpotent bo‘lmagan filiform Leybnits algebrasi bo‘lib, qandaydir i $(4 \leq i \leq n-1)$ uchun $\beta_i \neq 0$ bo‘lsin. Agar n juft son bo‘lsa, u holda quyidagi algebralardan biriga izomorf bo‘ladi:

$$F^{2s}_2(0, \ldots, 0, \beta_{2s}, 0, \ldots, 0, \beta_{n-1}, \beta_n, \gamma),\ \beta_{2s} = 1,\ 2 \leq s \leq \frac{n-2}{2},$$

$$F_2(0, \beta_5, 0, \beta_7, 0, \ldots, 0, \beta_{n-1}, \beta_n, \gamma).$$

Dissertatsiyada birinchi va ikkinchi sinfga tegishli bo‘lgan kuchli nilpotent bo‘lmagan filiform Leybnits algebralarining n toq son bo‘lgan holda ham tasniflari keltirilgan. Bundan tashqari, uchinchi sinf filiform Leybnits algebralari uchun $L(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ algebraning kuchli nilpotent bo‘lish masalasi $L(0, 0, 0)$ Li algebrasining kuchli nilpotentligini aniqlash masalasiga keltirilgan.

Dissertatsiyaning **«O‘ng-kommutativ va chap-simmetrik algebralarning algebraik va geometrik tasnifi»** nomli ikkinchi bobida 4 o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ va chap-simmetrik algebralarni markaziy kengaytma usulidan foydalangan holda tasniflangan, hamda bunday algebralar ko‘philligining barcha keltirilmas komponentalari topilgan.

5-ta’rif. Agar B algebraning $\forall x, y, z \in B$ elementlari uchun $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot y$ ayniyat o‘rinli bo‘lsa, u holda B algebra o‘ng-kommutativ algebra deyiladi.

6-ta’rif. Agar N algebraning ixtiyoriy $x, y, z \in N$ elementlari uchun quyidagi ayniyat o‘rinli bo‘lsa,

$$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z - y \cdot (x \cdot z),$$

u holda N algebra chap-simmetrik algebra deyiladi.

O‘ng-kommutativ va chap-simmetrik algebralarning kesishmasi Novikov algebrasidan iborat ekanligini ta’kidlash joiz.

G.Kantor 1972 yilda konservativ algebralarning bir qismi bo‘lgan terminal algebralarni kiritgan.

7-ta’rif. Agar T algebraning ixtiyoriy $a, b, x, y \in$ T elementlari uchun quyidagi ayniyatlar bajarilsa:

$$b \cdot (a \cdot (x \cdot y) - (a \cdot x) \cdot y - x \cdot (a \cdot y)) - a \cdot ((b \cdot x) \cdot y) + a \cdot (b \cdot x)) \cdot y +$$
$$+ (b \cdot x) \cdot (a \cdot y) - a \cdot (x \cdot (b \cdot y)) + (a \cdot x) \cdot (b \cdot y) + x \cdot (a \cdot (b \cdot y)) =$$
$$= -(\tfrac{2}{3}a \cdot b + \tfrac{1}{3}b \cdot a) \cdot (x \cdot y) + ((\tfrac{2}{3}a \cdot b + \tfrac{1}{3}b \cdot a) \cdot x) \cdot y + x \cdot ((\tfrac{2}{3}a \cdot b + \tfrac{1}{3}b \cdot a) \cdot y),$$

u holda T algebra terminal algebra deyiladi.

Aytaylik, $(A,\cdot)$ algebra va V – vektor fazo berilgan bo‘lsin. O‘ng-kommutativ (chap-simmetrik, terminal) algebralar uchun kotsikl tushunchasi mos ravishda quyidagi ayniyatlarni qanoatlantiruvchi $\theta : A\times A\rightarrow$ V bichiziqli akslantirishlar sifitida aniqlanadi:

- o‘ng-kommutativ algebralar uchun: $\theta (x\, y, z) = \theta (x\, z, y)$,
- chap-simmetrik algebralar uchun:

$$\theta (x\, y, z) - \theta (x, y\, z) = \theta (y\, x, z) - \theta (\mathrm{y}, x\, z),$$

- terminal algebralar uchun:

$$\theta (b, a \cdot (x \cdot y) - (a \cdot x) \cdot y - x \cdot (a \cdot y)) - \theta (a, (b \cdot x) \cdot y) + \theta (a \cdot (b \cdot x), y) +$$
$$+ \theta (b \cdot x, a \cdot y) - \theta (a, x \cdot (b \cdot y)) + \theta (a \cdot x, b \cdot y) + \theta (x, a \cdot (b \cdot y) =$$
$$- \theta (P^*(\mathrm{a}, b), x \cdot y) + \theta (P^*(\mathrm{a}, b) \cdot x, y) + \theta (x, P^*(a, b) \cdot y),$$

bu yerda $P^*(\mathrm{a}, b)= 2/3\ a \cdot b+ 1/3\ b \cdot a$.

Barcha kotsikllar fazosini $Z^2(A,\mathrm{V})$ kabi belgilaymiz.

Berilgan $f : A\rightarrow$V chiziqli almashtirish uchun $\delta f : A\times A\rightarrow$V bichiziqli akslantirishni $\delta f(x, y) = f(x\, y)$ kabi aniqlaymiz. Bunday δf bichiziqli akslantirishlar kochegaralar deyiladi va kochegaralar fazosi $\mathrm{B}^2(A,\mathrm{V})$ kabi belgilanadi.

Ta’kidlash joizki, $\mathrm{B}^2(A,\mathrm{V}) \subseteq \mathrm{Z}^2(A,\mathrm{V})$ va $\mathrm{H}^2(A,\mathrm{V}) = \mathrm{Z}^2(A,\mathrm{V}) / \mathrm{B}^2(A,\mathrm{V})$ faktor fazo ikkinchi kogomologik gruppa deyiladi.

Aytaylik, $Aut(A)$ berilgan A algebraning avtomorfizmlari gruppasi bo‘lsin. $Aut(A)$ gruppaning $\mathrm{Z}^2(A,\mathrm{V})$ dagi ta’sirini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\phi\theta(x, y) = \theta(\phi(x), \phi(y)), \quad \phi \in Aut(A), \quad \theta \in \mathrm{Z}^2(A,\mathrm{V}).$$

Mazkur ta’sirga nisbatan $\mathrm{B}^2(A,\mathrm{V})$ fazo invariant bo‘lib, bu orqali $Aut(A)$ gruppaning $\mathrm{H}^2(A,\mathrm{V})$ da ta’siri aniqlanadi.

Aytaylik, A – m o‘lchamli o‘ng-kommutativ (chap-simmetrik, terminal) algebra bo‘lsin, V esa k o‘lchamli vektor fazo bo‘lsin. Berilgan θ bichiziqli akslantirish va $A_\theta = A \oplus$ V chiziqli fazo uchun $[-, -]_\theta$ bichiziqli ko‘paytmani quyidagicha aniqlaymiz:

$$[x + u, y + v]_\theta = x \cdot y + \theta(x, y), \text{ ixtiyoriy } x, y \in A, \ u, v \in \mathrm{V}.$$

Ushbu A_θ algebraning o‘ng-kommutativ (chap-simmetrik, terminal) algebra bo‘lishi uchun $\theta \in \mathrm{Z}^2(A,\mathrm{V})$ bo‘lishi zarur va yetarli. Hosil qilingan A_θ algebraga A algebraning V fazo bo‘yicha olingan k o‘lchamli markaziy kengaytmasi deyiladi.

O‘ng-kommutativ, chap-simmetrik va terminal algebralari uchun kotsikllar fazolari mos ravishda $Z^2_R(N,\mathbb{C})$, $Z^2_L(N,\mathbb{C})$, $Z^2_T(N,\mathbb{C})$ kabi belgilanadi.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida markaziy kengaytma orqali barcha to‘rt o‘lchamli o‘ng-kommutativ algebralarning tasnifi keltirilgan. Buning uchun o‘lchami to‘rtdan kichik bo‘lgan nilpotent algebralarning barcha markaziy kengaytmalarini topish zarur. O‘ng-kommutativ algebralar Novikov algebralarni o‘z ichiga olganligi hamda barcha nilpotent 4 o‘lchamli Novikov algebralari I. Karimjanov, I. Kaygorodov va A.Xudoyberdiyev tomonidan to‘liq tasniflanganligi uchun Novikov algebrasi bo‘lmaydigan o‘ng-kommutativ algebralarning tasnifini keltirish yetarli.

Bir o‘lchamli notrivial nilpotent o‘ng-kommutativ algebralar mavjud emas. Ikki o‘lchamli notrivial nilpotent o‘ng-kommutativ algebralari esa izomorfizm aniqligida yagona bo`lib, quyidagi ko‘paytma bilan beriluvchi algebraga izomorfdir:

$$N_0: e_1e_1=e_2.$$

Ushbu algebraning ixtiyoriy ikki o‘lchamli kengaytmasi Novikov algebrasi bo‘lishini tekshirish qiyin emas, shuning uchun Novikov bo‘lmagan 4 o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ algebralarni olish uchun 3 o‘lchamli algebralarni kengaytirish yetarli. Ixtiyoriy uch o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ algebralari esa quyidagi algebralardan biriga izomorf bo‘ladi:

$$N_1: e_1e_1=e_2, \qquad N_2: \quad e_1e_1=e_3,\ e_2e_2=e_3,$$
$$N_3: e_1e_2=e_3,\ e_2e_1=-e_3, \qquad N_4(\lambda): e_1e_1=\lambda e_3,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_3,$$
$$N_5: e_1e_1=e_2,\ e_2e_1=e_3, \qquad N_6(\lambda): e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=e_3,\ e_2e_1=\lambda e_3.$$

Uch o‘lchamli o‘ng-kommutativ algebralar bir vaqtning o‘zida Novikov algebrasi ham bo‘lganligi uchun bu algebralarning markaziy kengaytmalarini aniqlashda Novikov algebrasi bo‘lmaydiganlarini hosil bo‘lishiga alohida ahamiyat qaratish kerak bo‘ladi. Buning uchun qiyidagi belgilashlarni kiritib olamiz.

Aytaylik, N Novikov (hususan, o‘ng-kommutativ) algebrasi va $\theta\in Z^2_R(N,\mathbb{C})$ bo‘lsin. U holda N_θ algebra Novikov algebrasi bo‘lishi uchun quyidagi ayniyat o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli:

$$\theta(x\cdot y, z)-\theta(x, y\cdot z)=\theta(y\cdot x, z)-\theta(y, x\cdot z), \quad x,y,z\in N.$$

Berilgan N o‘ng-kommutativ algebraning ikkinchi kogomologik gruppasini $\mathrm{H}^2_R(N)$ yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchilarini esa $\mathrm{H}^2_N(N)$ kabi belgilaylik.

Aytaylik, A nilpotent algebraning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisi berilgan bo‘lsin. U holda $\Delta_{ij}(e_l, e_m)=\delta_{il}\,\delta_{jm}$ kabi aniqlangan Δ_{ij}: $A\times A\to\mathbb{C}$ bichiziqli formalar to‘plami A dagi bichiziqli formalar fazosining bazisi bo‘lib, har qanday $\theta\in Z^2(A,\mathbb{C})$ element yagona tarzda $\theta=\sum\limits_{1\le i,j\le n} c_{ij}\Delta_{ij}$ kabi yoziladi, bu yerda $c_{ij}\in\mathbb{C}$.

Quyidagi jadvalda uch o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ algebralarning ikkinchi kogomologik gruppasining tasnifini keltiramiz (bu yerda $N_1=N_0\oplus\mathbb{C}$).

N	$\mathrm{H}^2_N(N)$	$\mathrm{H}^2_R(N)$
N_1	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{13}], [\Delta_{21}], [\Delta_{31}], [\Delta_{33}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_1)\oplus\langle[\Delta_{32}]\rangle$
N_2	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_2)\oplus\langle[\Delta_{13}], [\Delta_{23}]\rangle$
N_3	$\langle[\Delta_{11}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_3)\oplus\langle[\Delta_{13}], [\Delta_{23}]\rangle$
$N_4(\lambda)_{\lambda\neq0}$	$\langle[\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_4(\lambda))\oplus\langle[\Delta_{13}], [\Delta_{23}]\rangle$

$N_4(0)$	$\langle[\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{13}–\Delta_{31}–\Delta_{32}], [\Delta_{23}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_4(0)) \oplus\langle[\Delta_{31}+ \Delta_{32}]\rangle$
N_5	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{13}–\Delta_{31}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_5) \oplus \langle[\Delta_{31}]\rangle$
$N_6(\lambda)_{\lambda\neq0}$	$\langle[\Delta_{21}], [(2– \lambda) \Delta_{13}+ \lambda (\Delta_{22}+\Delta_{31}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_6(\lambda)) \oplus \langle[\Delta_{22}+\Delta_{31}–\Delta_{13}]\rangle$
$N_6(0)$	$\langle[\Delta_{21}], 2[\Delta_{13}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_6(0)) \oplus \langle[\Delta_{22}+\Delta_{31}–\Delta_{13}],[\Delta_{32}]\rangle$

4-teorema. Aytaylik, *N* Novikov bo‘lmagan to‘rt o‘lchamli o‘ng-kommutativ algebra bo‘lsin, u holda N o‘zaro izomorf bo‘lmagan R_1 – R_{31} algebralardan biriga izomorf bo‘ladi (1-ilovaga qarang).

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi ikkinchi paragrafida esa barcha nilpotent to‘rt o‘lchamli chap-simmetrik algebralarning tasnifi olingan. O‘lchami to‘rtdan kichik bo‘lgan barcha nilpotent chap-simmetrik algebralar ham Novikov algebrasi bo‘lib, to‘rt o‘lchamli chap-simmetrik algebralarning tasnifini olish uchun yuqorida berilgan uch o‘lchamli algebralarning Novikov algebrasi bo‘lmaydigan chap-simmetrik kengaytmalarini topish kerak bo‘ladi.

Quyidagi jadvalda uch o‘lchamli nilpotent chap-simmetrik algebralarning ikkinchi kogomologik gruppasining tasnifini keltiramiz.

N	$\mathrm{H}^2_N(N)$	$\mathrm{H}^2_L(N)$
N_1	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{13}], [\Delta_{21}], [\Delta_{31}], [\Delta_{33}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_1) \oplus \langle[\Delta_{23}]\rangle$
N_2	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_2) \oplus\langle [\Delta_{31}], [\Delta_{32}]\rangle$
N_3	$\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_3) \oplus\langle [\Delta_{31}–2\Delta_{13}], [\Delta_{32}–2\Delta_{23}]\rangle$
$N_4(\lambda)_{\lambda\neq0}$	$\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_4(\lambda)) \oplus \langle [\Delta_{13}–\Delta_{31}–\Delta_{32}],$ $[\Delta_{23}+\lambda\Delta_{31}]\rangle$
$N_4(0)$	$\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{13}–\Delta_{31}–\Delta_{32}], [\Delta_{23}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_4(0))$
N_5	$\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{13}–\Delta_{31}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_5) \oplus \langle [\Delta_{22}+\Delta_{31}], [\Delta_{23}]\rangle$
$N_6(\lambda)$	$\langle [\Delta_{21}], [(2– \lambda) \Delta_{13}+ \lambda (\Delta_{22}+\Delta_{31}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_6(\lambda)) \oplus \langle [\Delta_{22}+\Delta_{13}–\Delta_{31}]\rangle$

Dissertatsiya ikkinchi bobining ikkinchi paragrafining asosiy natijasi quyidagi teoremada keltiriladi.

5-teorema. Aytaylik, *N* to‘rt o‘lchamli Novikov bo‘lmagan chap-simmetrik algebra bo‘lsin, u holda *N* o‘zaro izomorf bo‘lmagan L_1 – $L_{24}(\lambda)$ algebralardan biriga izomorf bo‘ladi (2-ilovaga qarang).

Mazkur bobning uchinchi paragrafida nilpotent to‘rt o‘lchamli o‘ng-kommutativ va chap-simmetrik algebralar ko‘philliklarining barcha keltirilmas komponentalari topilgan.

Ushbu $GL_n(\mathbb{C})$ gruppaning barcha *n* o‘lchamli algebralar to‘plami $Alg_n(\mathbb{C})$ *ga* ta’sirini quyidagicha aniqlaymiz:

$$[x,y]_g:=g\,[g^{-1}x, g^{-1}y],$$

bu yerda $g\in GL_n(F)$ va $x,\ y\in L$. Berilgan L algebraning mazkur ta’sir ostidagi orbitasini $Orb(L)$ kabi uning Zarisskiy topologiyasi bo‘yicha yopilmasini $\overline{Orb(L)}$ kabi belgilaymiz.

8-ta’rif. Agar *M* algebra *L* algebraning orbitasi yopilmasida yotsa, u holda *L* algebra *M* algebraga degeneratsiyalanadi deyiladi va $L\to M$ kabi belgilanadi.

Agar ko‘phillikni qism to‘plamini ikkita notrivial yopiq qism to‘plamlar birlashmasi sifitida tasvirlash mumkin bo‘lmasa, u holda bunday qism to‘plam ko‘phillikning komponentasi deyiladi. Ko‘phillikning maksimal keltirilmas yopiq qism to‘plami keltirilmas komponentasi deyiladi. Ma’lumki, ixtiyoriy affin ko‘philligini yagona ravishda chekli sondagi keltirilmas komponentalarning birlashmasi sifatida yozish mumkin. Berilgan ko‘phillikdagi keltirilmas komponentalarni topish masalasi esa ushbu ko‘phillikdagi algebralar uchun tuzulgan degeneratsiyalar grafida eng yuqori satxda turivchi algebralarni aniqlashga ekvivalentdir.

Mazkur paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremalarda keltirilgan.

6-teorema. To‘rt o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ algebralar ko‘philligi $R_{12}(\lambda)$, $R_{18}(\alpha)$, $R_{27}(\lambda,\alpha)$, $R_{29}(\alpha)$ va $N_{20}(\alpha)$ sinflar orqali aniqlangan beshta keltirilmas komponentaga ega.

Boshqacha qilib aytganda to‘rt o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ algebralar ko‘philligining keltirilmas komponentalari quyidagilardan iborat bo‘ladi

$$\overline{\bigcup_{\lambda} Orb(R_{12}(\lambda))},\ \overline{\bigcup_{\alpha} Orb(R_{18}(\alpha))},\ \overline{\bigcup_{\lambda,\alpha} Orb(R_{27}(\lambda,\alpha))},$$

$$\overline{\bigcup_{\alpha} Orb(R_{29}(\alpha))},\ \overline{\bigcup_{\alpha} Orb(N_{20}(\alpha))}.$$

7-teorema. To‘rt o‘lchamli nilpotent chap-simmetrik algebralar ko‘philligi $L_{12}(\lambda)$, $L_{21}(\lambda)$ va $L_{23}(\lambda,\alpha)$ sinflar orqali aniqlangan uchta keltirilmas komponentaga ega, ya’ni to‘rt o‘lchamli nilpotent chap-simmetrik algebralar ko‘philligining keltirilmas komponentalari quyidagilardan iborat bo‘ladi

$$\overline{\bigcup_{\lambda} Orb(L_{12}(\lambda))},\ \overline{\bigcup_{\lambda} Orb(L_{21}(\lambda))},\ \overline{\bigcup_{\lambda,\alpha} Orb(L_{23}(\lambda,\alpha))}.$$

Dissertatsiyaning **«Hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan besh o‘lchamli nilpotent terminal algebralarning tasnifi»** deb nomlangan uchinchi bobida hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan barcha to‘rt va besh o‘lchamli nilpotent terminal algebralari to‘liq tasniflangan. Terminal algebralar barcha chap Leybnits algebralarini o‘z ichiga olganligini hisobga olib, ularni tasniflashda Leybnits algebrasi bo‘lmaganlarini keltirish kifoya.

Dastlab, hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan to‘rt o‘lchamli terminal algebralarining tasnifini olingan bo‘lib, ular ikki va uch o‘lchamli terminal algebralarning markaziy kengaytmasi orqali topilgan. Ma’lumki, hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan ikki va uch o‘lchamli nilpotent terminal algebralar quyidagi algebralarga izomorf:

$$\mathbf{T}_{01}^{2}: e_1e_1 = e_2,$$

$$\mathbf{T}_{01}^{3}: e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_3,$$

$$\mathbf{T}_{02}^{3}(\lambda): e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = \lambda e_3,\ e_2e_1 = e_3.$$

Quyidagi jadvalda hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan uch o‘lchamli nilpotent terminal algebralarning avtomorfizmlari gruppalari va ikkinchi kogomologik gruppalarining to‘liq tasnifi keltirilgan.

A	Aut(**A**)	$Z_T^2(\mathbf{A})$	$H_T^2(\mathbf{A})$
$\mathbf{T}_{01}^3$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x^2 & 0 \\ z & xy & x^3 \end{pmatrix}$	$\left\langle \begin{array}{l} \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \\ \Delta_{21}, \Delta_{22} - 3\Delta_{31} \end{array} \right\rangle$	$\langle [\Delta_{13}], [\Delta_{21}], \Delta_{22}] - 3[\Delta_{31}] \rangle$
$\mathbf{T}_{02}^3(\lambda)_{\lambda \neq 0}$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x^2 & 0 \\ z & (\lambda+1)xy & x^3 \end{pmatrix}$	$\left\langle \begin{array}{l} \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13} + \Delta_{22}, \\ \Delta_{21}, \dfrac{1-\lambda}{3}\Delta_{22} + \Delta_{31} \end{array} \right\rangle$	$\left\langle \begin{array}{l} [\Delta_{12}], [\Delta_{13}] + [\Delta_{22}], \\ \dfrac{1-\lambda}{3}[\Delta_{22}] + [\Delta_{31}] \end{array} \right\rangle$
$\mathbf{T}_{02}^3(0)$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x^2 & 0 \\ z & xy & x^3 \end{pmatrix}$	$\left\langle \begin{array}{l} \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13} + \Delta_{22}, \\ \Delta_{21}, \dfrac{1}{3}\Delta_{22} + \Delta_{31}, \Delta_{23} \end{array} \right\rangle$	$\left\langle \begin{array}{l} [\Delta_{12}], [\Delta_{13}] + [\Delta_{22}], \\ \dfrac{1}{3}[\Delta_{22}] + [\Delta_{31}], [\Delta_{23}] \end{array} \right\rangle$

Quyidagi teoremada hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan to‘rt o‘lchamli nilpotent terminal algebralarning tasnifini keltiramiz.

8-teorema. Hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan ixtiyoriy to‘rt o‘lchamli nilpotent terminal algebrasi quyidagi o‘zaro izomorf bo‘lmagan algebralardan biriga izomorf bo‘ladi:

$\mathbf{T}_{01}^4$: $\quad e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_4,\ e_2e_1 = e_3,$

$\mathbf{T}_{02}^4(\alpha)$: $\quad e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_3,\ e_1e_3 = \alpha e_4,\ e_2e_2 = e_4,\ e_3e_1 = -3e_4,$

$\mathbf{T}_{03}^4$: $\quad e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_3,\ e_1e_3 = e_4,$

$\mathbf{T}_{04}^4$: $\quad e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_3,\ e_1e_3 = e_4,\ e_2e_1 = e_4,$

$\mathbf{T}_{05}^4(\lambda,\alpha)$: $\quad e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = \lambda e_3, e_1e_3 = \alpha e_4, e_2e_1 = e_3,\ e_2e_2 = (\alpha + \dfrac{1-\lambda}{3})e_4,$
$e_3e_1 = e_4,$

$\mathbf{T}_{06}^4(\lambda)$: $\quad e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = \lambda e_3 + e_4,\ e_1e_3 = \dfrac{2\lambda^2+5\lambda-1}{6}e_4,\ e_2e_1 = e_3,$
$e_2e_2 = \dfrac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{6}e_4,\ e_3e_1 = e_4,$

$\mathbf{T}_{07}^4(\lambda)$: $\quad e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = \lambda e_3,\ e_1e_3 = e_4,\ e_2e_1 = e_3,\ e_2e_2 = e_4,$

$\mathbf{T}_{08}^4$: $\quad e_1e_1 = e_2,\ e_2e_1 = e_3,\ e_2e_3 = e_4,$

$\mathbf{T}_{09}^4$: $\quad e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_4,\ e_2e_1 = e_3,\ e_2e_3 = e_4,$

$\mathbf{T}_{10}^4(\alpha)$: $\quad e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = \alpha e_4,\ e_2e_1 = e_3,\ e_2e_2 = \dfrac{1}{3}e_4,\ e_2e_3 = e_4,\ e_3e_1 = e_4.$

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan besh o‘lchamli nilpotent terminal algebrasi to‘liq tasniflangan. Buning uchun dastlab, uch o‘lchamli $\mathbf{T}_{01}^3$ va $\mathbf{T}_{02}^3(\lambda)$ algebralarning barcha ikki o‘lchamli markaziy kengaytmalari topilgan. Yuqorida aniqlangan to‘rt o‘lchamli $\mathbf{T}_{01}^4$, $\mathbf{T}_{02}^4(\alpha)$, $\mathbf{T}_{03}^4$, $\mathbf{T}_{04}^4$, $\mathbf{T}_{05}^4(\lambda,\alpha)$, $\mathbf{T}_{06}^4(\lambda)$, $\mathbf{T}_{07}^4(\lambda)$, $\mathbf{T}_{08}^4$, $\mathbf{T}_{09}^4$, $\mathbf{T}_{10}^4(\alpha)$ terminal algebralarining bir o‘lchamli markaziy kengaytmalarini aniqlash orqali esa besh o‘lchamli nilpotent terminal algebrasining to‘liq ro‘yhati aniqlangan. Buning uchun ushbu algebralarning avtomorfizmlari gruppalari va ikkinchi kogomologik gruppalarining tasnifi olinib, markaziy kengaytma orqali qiyudagi teorema hosil qilingan.

9-teorema. Aytaylik, **A** hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan besh o‘lchamli terminal algebra bo‘lsin. U holda **A** algebra o‘zaro izomorf bo‘lmagan $\mathbf{T_1} - \mathbf{T_{79}}$ algebralardan biriga izomorf bo‘ladi (3-ilovaga qarang).

XULOSA

Mazkur dissertatsiya filiform Leybnits algebralarining pre-differensiallashlari, hamda o‘ng-kommutativ va chap-simmetrik algebralarni bag’ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Filiform Leybnits algebralarining birinchi va ikkinchi sinflarining pre-differensiallashlari tasniflangan, hamda ularning kuchli nilpotent bo‘lish shartlari topilgan. Bu shartlar asosida kuchli nilpotent bo‘lmagan filiform Leybnits algebralari tasniflangan.
2. To‘rt o‘lchamli nilpotent o‘ng-kommutativ algebralarning algebraik va geometrik tasnifi olingan.
3. To‘rt o‘lchamli nilpotent cham-chimmetrik algebralarning algebraik va geometrik tasnifi olingan.
4. Besh o‘lchamli hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan nilpotent terminal algebralarning algebraik tasnifi olingan. Uch o‘lchamli hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan nilpotent algebralarning bir va ikki o‘lchamli markaziy kengaytmalari, hamda to‘rt o‘lchamli bunday algebralarning tasnifi olingan.
5. Hosil qiluvchisi bitta bo‘lgan to‘rt o‘lchamli nilpotent terminal algebralarning ikkinchi gruppa kogomologiyalari fazolari va bunday algebralarning bir o‘lchamli markaziy kengaytmalari keltirilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

САТТАРОВ АЛОБЕРДИ МУМИНЖОН УГЛИ

ПРЕД-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФИЛИФОРМНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА И КЛАССИФИКАЦИЯ ПРАВО-КОММУТАТИВНЫХ И ЛЕВО-СИММЕТРИЧНЫХ АЛГЕБР

01.01.06 – Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ диссертации доктора философии (PhD) по ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образавания, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за № B2022.4.PhD/FM442.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И. Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://kengash.mathinst.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Худойбердиев Аброр Хакимович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Арзикулов Фарходжон Нематжонович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
	Курбанбаев Тууелбай Кадирбаевич кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Новый университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «23» мая 2023 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 159). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «10» мая 2023 года.
(протокол рассылки № 2 от «10» мая 2023 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Б.А.Омиров
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и необходимость темы диссертации. На сегодняшний день большая часть научных и практических исследований, проводимых в мировом масштабе, посвящена исследованию основ фундаментальной алгебры. Повышенный интерес к классификации неассоциативных алгебр основан на том, что их алгебраическая и геометрическая классификации позволяют определить структуру алгебр и неприводимые компоненты многообразий таких алгебр. Метод центрального расширения, который использует алгебраическую классификацию неассоциативных алгебр малых размерностей, является одним из наиболее широко используемых методов в структурной теории алгебр, а проблемы структурной теории. Классификации неассоциативных алгебр являются одним из важных задач алгебры.

В настоящее время большое значение имеют разные типы неассоциативных алгебр, которые являются обобщениями классических алгебр, таких как ассоциативные, лиевые и йордановые. Алгебра Лейбница является обобщением алгебры Ли, а лево-симметричные алгебры в свою очередь обобщают ассоциативные алгебры. Лево-симметричные алгебры содержат в себе как подкласс алгебры Новикова и ассосимметричные алгебры и более того они являются Ли допустимыми алгебрами. В связи с этим: описание лево-симметричных, право-коммутативных и терминальных алгебр в малых размерностях является одним из целевых направлений научных исследований.

В нашей стране уделяется особое внимание задачам алгебр, функционального анализа, дифференциальной геометрии, статистической механики, физики и цифровой экономики, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, в последние годы алгебры продолжают находить новые приложения в различных областях математики, особенно в геометрии, топологии и физике. На сегодняшний день были достигнуты значительные результаты по классификации нильпотентных и разрешимых алгебр Лейбница и алгебраической и геометрической классификации неассоциативных алгебр малых размерностей. Получение научных результатов, связанных с алгебраической и геометрической классификацией неассоциативных алгебр и описания дифференцирований, определение различных обобщений их дифференцирований, а также изучение новых свойств многообразий неизвестных алгебр и применение данных результатов в другие области математики являются важными задачами науки.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии

Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологии в Республике Узбекистан «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В последние годы в теории неассоциативных алгебр были достигнуты большие научные результаты. В частности, изучением алгебр Лейбница, а именно исследованием филиформных алгебр Лейбница занимались Ш. А. Аюпов, Б. А. Омиров, И. С. Рахимов, А. Х. Худойбердиев, К. К. Масутова, Л. Камачо, Х. Р. Гомез, М. Ладра и другие. Кроме этого, в работе М. Ладра, Б. А. Омирова, А. Х. Худойбердиева были классифицированы филиформные алгебры Лейбница, которые не являются характеристически нильпотентными.

Метод центрального расширения нильпотентных алгебр Ли, разработанный Шельбердом и Сундом, позволил получить классификацию ряда нильпотентных алгебр. Этот метод дает возможность классифицировать алгебры большой размерности с помощью алгебр малой размерности из данного многообразия. Применяя метод центрального расширения, были получены нильпотентные пятимерные йордановы алгебры, пятимерные антикоммутативные алгебры, пятимерные коммутативные алгебры, шестимерные алгебры Мальцева, шестимерные бинарные алгебры Ли в работах В. Де-Граф, А. Хегази, Х. Абдельвахаб, А. Кальдерона, А. Мартина, И. Кайгородова, Ю. Попова и других.

Понятие консервативной алгебры, которое является обобщением йордановой алгебры, была введена Кантором в 1972 году, и такие алгебры определяются с помощью ряда тождеств. Одним из важных подклассов консервативных алгебр являются класс терминальных алгебр, использующих обобщенный функтор конструкции Титса-Кохера-Кантора. Кроме этого, многообразие терминальных алгебр содержит в себе многообразия алгебр Ли, алгебр Лейбница и другие. Исследование однопорожденных объектов является интересным направлением в теории абстрактной алгебры. Известно, что существует только одна однопорожденная группа конечного порядка. В случае алгебр имеются некоторые аналогичные результаты в многообразиях нильпотентных ассоциативных, йордановых алгебр, а также алгебры Лейбница и Зинбиля.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательского учреждения, в котором выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования «Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в нелинейных динамических системах» + «Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в Евклидовом и псевдо-Евклидовом пространствах и ее приложения в механике» Института Математики (ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87, 2017-2019 гг.); «Представления алгебр Лейбница» Института Математики (ЕФА-Фтех-2018-79, 2018-2019 гг.).

Целью исследования является классификация пред-дифференцирований филиформных алгебр Лейбница, а также алгебраическая и геометрическая классификация право-коммутативных, лево-симметричных и однопорожденных терминальных алгебр.

Задачи исследования: классификация пред-дифференцирований филиформных алгебр Лейбница и классификация филиформных алгебр Лейбница не являющихся сильно нильпотентными;

алгебраическая классификация четырехмерных нильпотентных лево-симметричных алгебр и описание всех неприводимых компонент данных многообразий;

алгебраическая и геометрическая классификация четырехмерных нильпотентных право-коммутативных алгебр;

классификация однопорожденных пятимерных нильпотентных терминальных алгебр.

Объект исследования. Филиформные алгебры Лейбница, право-коммутативные и лево-симметричные нильпотентные алгебры в малых размерностях, пред-дифференцирования и автоморфизмы алгебр и когомологические группы.

Предмет исследования. Описание пред-дифференцирований филиформных алгебр Лейбница, четырехмерные нильпотентные право-коммутативные алгебры, четырехмерные нильпотентные лево-симметричные алгебры, пятимерные терминальные алгебры.

Методы исследования: в исследовании использованы методы теории неассоциативных алгебр, структурные и когомологические методы, методы центрального расширения, вырождения, а также методы теории инвариантов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

описываются пред-дифференцирования филиформных алгебр Лейбница и доказано существование не сильно нильпотентных филиформных алгебр Лейбница;

даны алгебраическая и геометрическая классификации четырехмерных нильпотентных право-коммутативных алгебр и найдены неприводимые компоненты многообразий таких алгебр;

даны алгебраическая и геометрическая классификации четырехмерных нильпотентных лево-симметричных алгебр;

классифицированы однопорожденные пятимерные нильпотентные терминальные алгебры.

Практические результаты исследования. Методы, использованные в диссертации и полученные результаты могут быть использованы в спецкурсах по неассоциативным алгебрам для магистров и докторантов высших учебных заведений Республики Узбекистан. Кроме того, результаты диссертации позволяют проводить алгебраическую и геометрическую классификацию неассоциативных алгебр, находить неприводимые компоненты многообразий заданных алгебр.

Достоверность результатов исследования. Строгость математических рассуждений основана на использовании некоторых методов других классов алгебр, теории когомологий, фундаментальных результатов структурной теории алгебр. Результаты по пред-дифференцированиям, второй группы когомологии алгебр в малых размерностях, вычисление для получения непересекающихся орбит проверялись с помощью специальных программ, созданных на языке программирования Mathematica 12.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что результаты алгебраической и геометрической классификации неассоциативных алгебр могут быть использованы при исследовании многообразий других алгебр.

Практическая значимость исследования объясняется тем, что полученные результаты могут быть использованы при классификации неассоциативных алгебр и их когомологических групп, а также при изучении неприводимых компонент многообразий таких алгебр.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных результатов о пред-дифференцированиях филиформных алгебр Лейбница, классификации право-коммутативных и лево-симметричных алгебр:

результаты, полученные в диссертации о классификации четырехмерных нильпотентных право-коммутативных и лево-симметричных алгебр были применены в исследовательском проекте «Нерегулярное множества в динамических системах», № AP08051987, проведенной в университете им. Сулеймана Демиреля (Казахстан) в период 2020-2022 гг. (Справка университета им. Сулеймана Демиреля от 4-апреля 2023 года, № 10.3.37/411) Использование научного результата обеспечило получить классификацию пятимерных однопорожденных нильпотентных ассосимметричных алгебр и позволили обнаружить неприводимые компоненты многообразий таких алгебр;

результаты одномерных центральных расширения терминальных алгебр были использованы в зарубежных научных статьях (Journal of Algebra and its Applications, 21(2), 2022, 2250031, Algebra Colloquium, 29(3), 2022, 453-474 и Communications in Mathematics, 28(2), 2020, 231-251) при классификации консервативных алгебр малых размерностей. Данные результаты позволили классифицировать консервативные алгебры малых размерностей и все пятимерные однопорожденные нильпотентные бикоммутативные алгебры и описать слабо-ассоциативных алгебр.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 2 международных и 4 республиканских научных конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, из них 7 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 4 опубликованы в зарубежном журнале, 3 – в республиканских научных изданиях и 6 тезисов докладов в материалах научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на восемь параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 101 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе, названной «**Пред-дифференцирование филиформных алгебр Лейбница**» приведены предварительные сведения и необходимые понятия из структурной теории неассоциативных алгебр, их дифференцирования, группа когомологии, а также метод центрального расширения. Во втором и третьем параграфах первой главы описаны пред-дифференцирования филиформных алгебр Лейбница и найдены условия сильно нильпотентности таких алгебр.

Отметим, что дифференцирование алгебры L есть линейное преобразование, такое что $d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$, для любых $x, y \in L$. Множество всех дифференцирований алгебры L обозначим через $Der(L)$.

Для определения понятия нильпотентности алгебры определим *нижний центральный* ряд:

$$L^1=L, \quad L^{k+1} = [L^k, L] + [L^{k-1}, L^2] +\ldots+ [L^2, L^{k-1}] + [L, L^k], \qquad k \geq 1.$$

Определение 1. *Алгебра L называется нильпотентной, если существует $s \in N$ такой, что $L^s=0$.*

Определение 2. *Алгебра L называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество*

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] – [[x, z], y].$$

В следуюшем определении приведен определение понетия пред-дифференцирования.

Определение 3. *Линейное преобразование $P : L \to L$ алгебры Лейбница L называется пред-дифференцированием, если для любых $x, y, z \in L$ имеет место*

$$P ([[x, y], z] =[[P(x), y], z] + [[x, P(y)], z] + [[x, y], P(z)].$$

Пред-дифференцирования алгебр Лейбница являются обобщением дифференцирований. Нильпотентная алгебра Лейбница называется *характеристически нильпотентной,* если все ее дифференцирования нильпотентные. Отметим, что алгебра Лейбница называется *сильно нильпотентной,* если её любое пред-дифференцирование нильпотентно.

Так как всякое дифференцирование алгебры Лейбница является пред-дифференцированием, то сильно нильпотентная алгебра Лейбница является характеристически нильпотентной.

Определение 4. *Алгебра Лейбница L называется филиформной, если* $\dim L^i = n - i$, *где* $n=\dim L$ *и* $2 \le i \le n$.

В работе Х.Р.Гомеза и Б.А.Омирова доказана, что множество всех n-мерных филиформных алгебр Лейбница разлагается на три непересекающихся класса.

Теорема 1. В любой n-мерной комплексной филиформной алгебре Лейбница существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ такой, что ее умножение в этом базисе имеет один из следующих видов:

$F_1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$: $[e_1, e_1] = e_3$, $\quad [e_i, e_1] = e_{i+1}$, $\quad 2 \le i \le n-1$,
$[e_1, e_2] = \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \theta e_n$,
$[e_j, e_2] = \alpha_4 e_{j+2} + \alpha_5 e_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} e_n$, $\quad 2 \le j \le n-2$,

$F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$: $[e_1, e_1] = e_3$, $\quad [e_i, e_1] = e_{i+1}$, $\quad 3 \le i \le n-1$,
$[e_1, e_2] = \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \dots + \beta_n e_n$, $\quad [e_2, e_2] = \gamma e_n$,
$[e_j, e_2] = \beta_4 e_{j+2} + \beta_5 e_{j+3} + \dots + \beta_{n+2-j} e_n$, $\quad 3 \le j \le n-2$,

$F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$: $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $\quad 2 \le i \le n-1$,
$[e_1, e_i] = -e_{i+1}$, $\quad 3 \le i \le n-1$,
$[e_1, e_1] = \theta_1 e_n$, $\quad [e_1, e_2] = -e_3 + \theta_2 e_n$, $\quad [e_2, e_2] = \theta_3 e_n$,
$[e_2, e_j] = -[e_j, e_2] \in \{e_{j+2}, e_{j+3}, \dots, e_n\}$, $\quad 3 \le j \le n-2$,
$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i] \in \{e_{i+j}, e_{i+j+1}, \dots, e_n\}$, $\quad 3 \le i \le \left[\frac{n}{2}\right]$, $i \le j \le n-i$,

отсутствующие произведения равны нулю и $\alpha \in \{0,1\}$ для четного n и $\alpha = 0$ для нечетного n. Для третьего класса требуется справедливость тождества Лейбница.

Во втором параграфе первой главы диссертации приведено описание пред-дифференцирований первого и второго классов алгебр теоремы 1.

Предложение 1. *Пред-дифференцирования филиформных алгебр Лейбница из класса* $F_1(\alpha_4, \dots, \alpha_n, \theta)$ *имеют следующий вид:*

$$P(e_1) = \sum_{t=1}^{n} a_t e_t, \qquad P(e_2) = b_2 e_2 + b_{n-1} e_{n-1} + b_n e_n, \qquad P(e_3) = \sum_{t=2}^{n} c_t e_t,$$

$$P(e_{2i}) = (2i-1) a_1 e_{2i} + \sum_{t=2i+1}^{n} (a_{t-2i+2} + (2i-2) a_2 \beta_{t-2i+3}) e_t, \qquad 2 \le i \le \left[\frac{n}{2}\right],$$

$$P(e_{2i+1}) = ((2i-2) a_1 + c_3) e_{2i+1} + \sum_{t=2i+2}^{n} (c_{t-2i+2} + (2i-2) a_2 \beta_{t-2i+2}) e_t, \; 2 \le i \le \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

где коэффициетны удовлетворяют следующие соотношения:

$(1 + (-1)^n) c_2 = 0, \; (a_1 - a_2)\alpha_4 = 0, \; (3a_1 - c_3)\alpha_4 = 0, \; c_2 \alpha_t = 0, \qquad 4 \le t \le n-1,$

$$(2a_1+a_2-c_3)\alpha_{2k} = \sum_{t=3}^{k}(a_{2k-2t+4}-c_{2k-2t+5}+a_2\alpha_{2k-2t+5})\alpha_{2t-2}, \qquad 3\le k\le \left[\frac{n}{2}\right]-1,$$

$$(a_2-(k-3)a_1)\alpha_k = \frac{k-1}{2}a_2\sum_{t=5}^{k}\alpha_{t-1}\alpha_{k-t+4}, \qquad 5\le k\le n-2,$$

$$(a_2-(n-4)a_1)\alpha_{n-1} = a_2\sum_{t=3}^{\frac{n-2}{2}}(2t-3)\alpha_{n-2t+3}\alpha_{2t-1}+\sum_{t=2}^{\frac{n-2}{2}}(c_{n-2t+2}-a_{n-2t+1}+(2t-3)a_2\alpha_{n-2t+2})\alpha_{2t},$$

$n-$нечетный,

$$(2a_1-c_3-(n-6)a_1)\alpha_{n-1} = a_2\sum_{t=3}^{\frac{n-1}{2}}(2t-3)\alpha_{n-2t+3}\alpha_{2t-1}+\sum_{t=2}^{\frac{n-3}{2}}(c_{n-2t+2}-a_{n-2t+1}+(2t-3)a_2\alpha_{n-2t+2})\alpha_{2t},$$

$n-$четный.

Предложение 2. *Пред-дифференцирования филиформных алгебр Лейбница из класса $F_2(\beta_4, \ldots, \beta_n, \gamma)$ имеют следующий вид:*

$$P(e_1)=\sum_{t=1}^{n}a_te_t, \quad P(e_2)=(a_1+a_2)e_2+\sum_{t=3}^{n-2}a_te_t+b_{n-1}e_{n-1}+b_ne_n, \quad P(e_3)=\sum_{t=2}^{n}c_te_t,$$

$$P(e_{2i})=((2i-1)a_1+a_2)e_{2i}+\sum_{t=2i+1}^{n}(a_{t-2i+2}+(2i-2)a_2\alpha_{t-2i+3})e_t, \quad 2\le i\le\left[\frac{n}{2}\right],$$

$$P(e_{2i+1})=c_2e_{2i}+((2i-2)a_1+c_3)e_{2i+1}+\sum_{t=2i+2}^{n}(c_{t-2i+2}+(2i-2)a_2\alpha_{t-2i+2})e_t,\ 2\le i\le\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

где коэффициетны удовлетворяют следующие соотношения:

$$(c_3-2a_1)\beta_4=0, \quad (b_2-2a_1)\beta_4=0, \quad c_2\beta_t=0, \qquad 4\le t\le n-1,$$

$$\sum_{t=3}^{k}(a_{2k-2t+3}-c_{2k-2t+4}+a_2\beta_{2k-2t+4})\beta_{2t-2}=0, \qquad 3\le k\le\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

$$(c_3-2a_1)\beta_{2k}=\sum_{t=3}^{k}(a_{2k-2t+4}-c_{2k-2t+5}+a_2\beta_{2k-2t+5})\beta_{2t-2}, \qquad 3\le k\le\left[\frac{n}{2}\right]-1,$$

$$(b_2-(k-2)a_1)\beta_k=\frac{k-1}{2}a_2\sum_{t=5}^{k}\beta_{t-1}\beta_{k-t+4}, \qquad 5\le k\le n-2,$$

$$(b_2-c_3-(n-5)a_1)\beta_{n-1}=a_2\sum_{t=3}^{\frac{n-1}{2}}(2t-3)\beta_{n-2t+3}\beta_{2t-1}+\sum_{t=2}^{\frac{n-3}{2}}(c_{n-2t+2}-a_{n-2t+1}+(2t-3)a_2\beta_{n-2t+2})\beta_{2t},$$

$n-$нечетный,

$$(b_2-(n-3)a_1)\beta_{n-1}=a_2\sum_{t=3}^{\frac{n-2}{2}}(2t-3)\beta_{n-2t+3}\beta_{2t-1}+\sum_{t=2}^{\frac{n-2}{2}}(c_{n-2t+2}-a_{n-2t+1}+(2t-3)a_2\beta_{n-2t+2})\beta_{2t},$$

$n-$четный

В третьем параграфе данной главы приведено описание всех не сильно нильпотентных филиформных алгебр Лейбница.

Предложение 3. *Пусть $L(\alpha_4, \ldots, \alpha_n, \theta)$ – не сильно нильпотентная филиформная алгебра Лейбница из первого класса и пусть $\alpha_4 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, тогда L* изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$F_1(0, \ldots, 0, 0, 0)$, $F_1(0, 0\ldots, 0, 0, 1)$, $F_1(0, \ldots, 0, 1, 0)$, $F_1(0, \ldots, 0, 1, 1)$.

В случай, когда $\alpha_i \neq 0$ для некоторого $i\,(4 \leq i \leq n{-}1)$ получим следующий результат.

Теорема 2. *Пусть L – филиформная алгебра Лейбница из класса $F_1(\alpha_4, \ldots, \alpha_n, \theta)$ и n – четно. L не является сильно нильпотентной тогда и только тогда, когда параметры $(\alpha_4, \ldots, \alpha_n, \theta)$ принимают один из следующих значений:*

i) $\alpha_4 \neq 0$ и $\alpha_k = (-1)^k C_{k-3}^2 \alpha_4^{k-3}, \quad 5 \leq k \leq n-2$;

ii) $\begin{cases} \alpha_{(2s-3)t+3} = (-1)^{t+1} C_t^{2s-2} \alpha_{2s}^t, & 3 \leq s \leq \dfrac{n-2}{2} \qquad 1 \leq t \leq \left[\dfrac{n-5}{2s-3}\right], \\ \alpha_j = 0, & j \neq (2s-3)t+3, \quad 4 \leq j \leq n-2; \end{cases}$

iii) $\alpha_{2i} = 0$, для $2 \leq i \leq \dfrac{n-2}{2}$;

где $C_n^p = \dfrac{1}{(p-1)n+1}\begin{pmatrix} pn \\ n \end{pmatrix}$ – число Каталана степени p.

Для второго класса филиформных алгебр Лейбница $F_2(\beta_4, \ldots, \beta_n, \gamma)$ определены условия на параметры $\beta_4, \ldots, \beta_n, \gamma$, при которых они являются не сильно нильпотентными.

Предложение 4. Пусть $L(\beta_4, \ldots, \beta_n, \gamma)$ не сильно нильпотентная алгебра из второго класса филиформных алгебр Лейбница и пусть $\beta_4 = \ldots = \beta_{n-1} = 0$, тогда L изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$F_2(0, \ldots, 0, 0, 0)$, $F_2(0, 0\ldots, 0, 0, 1)$, $F_2(0, \ldots, 0, 1, 0)$.

Теорема 3. Пусть L не сильно нильпотентная филиформная алгебра Лейбница из класса $F_2(\beta_4, \ldots, \beta_n, \gamma)$ и пусть для некоторого $i\,(4 \leq i \leq n{-}1)$ $\beta_i \neq 0$. Если n четное, тогда она изоморфна одной из следующих алгебр:

$$F^{2s}{}_2(0, \ldots, 0, \beta_{2s}, 0, \ldots, 0, \beta_{n-1}, \beta_n, \gamma),\ \beta_{2s} = 1,\ 2 \leq s \leq \frac{n-2}{2},$$

$$F_2(0, \beta_5, 0, \beta_7, 0, \ldots, 0, \beta_{n-1}, \beta_n, \gamma).$$

В диссертации также дается описание не сильно нильпотентных филиформных алгебр первого и второго классов для нечетного n. Кроме этого, для третьего класса филиформных алгебр сильно нильпотентность алгебры $L(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ сводиться к задаче сильно нильпотентности алгебры Ли $L(0, 0, 0)$.

Во второй главе диссертации, названной «**Алгебраическое и геометрическое описание право-коммутативных и лево-симметричных алгебр**» приведена классификация 4-мерных комплексных нильпотентных право-коммутативных и лево-симметричных алгебр, а также описаны неприводимые компоненты многообразии таких алгебр.

Определение 5. *Алгебра B называется право-коммутативной алгеброй, если выполняется следующие тождества:*

$$(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot y, \qquad \forall x, y, z \in B.$$

Определение 6. *Алгебра N называется лево-симметричной, если для любых $x, y, z \in N$ выполняются следующие тождества:*

$$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z - y \cdot (x \cdot z).$$

Отметим, что пересечение право-коммутативной и лево-симметричной алгебр является алгеброй Новикова.

В 1972 году Кантор ввел класс терминальных алгебр, который является подклассом класса консервативных алгебр.

Определение 7. Если для элементов a, b, x, y алгебры T *выполняется следующее тождество:*

$$b \cdot (a \cdot (x \cdot y) - (a \cdot x) \cdot y - x \cdot (a \cdot y)) - a \cdot ((b \cdot x) \cdot y) + a \cdot (b \cdot x)) \cdot y +$$
$$+ (b \cdot x) \cdot (a \cdot y) - a \cdot (x \cdot (b \cdot y)) + (a \cdot x) \cdot (b \cdot y) + x \cdot (a \cdot (b \cdot y)) =$$
$$= -(\tfrac{2}{3}a \cdot b + \tfrac{1}{3}b \cdot a) \cdot (x \cdot y) + ((\tfrac{2}{3}a \cdot b + \tfrac{1}{3}b \cdot a) \cdot x) \cdot y + x \cdot ((\tfrac{2}{3}a \cdot b + \tfrac{1}{3}b \cdot a) \cdot y),$$

тогда такая алгебра называется терминальной алгеброй.

Пусть $(A,\cdot)$ алгебра и V –векторное пространство. *Коциклы* для право-коммутативных (лево-симметричных, терминальных) алгебр определяются как множество всех билинейных отображений $\theta : A \times A \to V$ такое что:

- для право-коммутативной алгебры: $\theta(x\,y, z) = \theta(x\,z, y)$,
- для лево-симметричной алгебры:
$$\theta(x\,y, z) - \theta(x, y\,z) = \theta(y\,x, z) - \theta(y, x\,z),$$
- для терминальной алгебры:

$$\theta(b, a \cdot (x \cdot y) - (a \cdot x) \cdot y - x \cdot (a \cdot y)) - \theta(a, (b \cdot x) \cdot y) + \theta(a \cdot (b \cdot x), y) +$$
$$+ \theta(b \cdot x, a \cdot y) - \theta(a, x \cdot (b \cdot y)) + \theta(a \cdot x, b \cdot y) + \theta(x, a \cdot (b \cdot y) =$$
$$- \theta(P^*(a, b), x \cdot y) + \theta(P^*(a, b) \cdot x, y) + \theta(x, P^*(a, b) \cdot y),$$

где $P^*(a, b) = \frac{2}{3}P(a, b) + \frac{1}{3}P(b, a)$.

Пространство всех коциклов обозначается через $Z^2(A,V)$.

Для линейного отображения $f : A \to V$, определим $\delta f : A \times A \to V$, такое, что

$$\delta f(x, y) = f(xy).$$

Такие билинейные отображения δf называются кограницами и пространство всех таких кограниц обозначается через $B^2(A,V)$.

Надо отметить, что $B^2(A,V) \subseteq Z^2(A,V)$ и фактор пространство

$$H^2(A,V) = Z^2(A,V) / B^2(A,V)$$

называется второй группой когомологии.

Пусть $Aut(A)$ является группой автоморфизмов алгебры A. Определим действие группы $Aut(A)$ в $Z^2(A,V)$ следующим образом

$$\phi\theta(x, y) = \theta(\phi(x), \phi(y)), \quad \phi \in Aut(A), \quad \theta \in Z^2(A,V).$$

Отметим, что $B^2(A,V)$ является инвариантным под данным действием и следовательно, имеется действие $Aut(A)$ в $H^2(A,V)$.

Пусть A является право-коммутативной (лево-симметричной, терминальной) алгеброй размерности m и V есть векторное пространство размерности k. Для билинейного отображения θ и линейное пространство $A_\theta = A \oplus V$ определим билинейное произведение $[-, -]_\theta$ следующим образом:

$$[x + x', y + y']_\theta = x \cdot y + \theta(x, y) \text{ для всех } x, y \in A,\ x', y' \in \mathrm{V}.$$

Алгебра A_θ называется *k-мерным центральным расширением* A по V. Легко проверить, что A_θ является право-коммутативной (лево-симметричной) алгеброй тогда и только тогда, когда $\theta \in \mathrm{Z}^2(A,\mathrm{V})$.

Пространства коциклов для право-коммутативных, лево-симметричных и терминальных алгебр используем обозначения $Z^2{}_R(N,\mathbb{C})$, $Z^2{}_L(N,\mathbb{C})$, $Z^2{}_T(N,\mathbb{C})$.

В первом параграфе второй главы классифицированы 4-мерные право-коммутативные алгебры с помощью метода центрального расширения. Для этого необходимо найти всевозможные центральные расширения алгебр размерности меньше 4. Поскольку право-коммутативные алгебры включают в себя алгебры Новикова и 4-мерные алгебры Новикова классифицированы И.Каримжановым, И.Кайгородовым и А.Худойбердиевым, то достаточно привести описание право-коммутативных алгебр не являющихся алгебрами Новикова.

Известно, что не существует нетривиальных 1-мерных нильпотентных право-коммутативных алгебр. Существует только одна ненулевая 2-мерная нильпотентная право-коммутативная алгебра:

$$N_0 : e_1e_1=e_2.$$

Двумерное центральное расширение является алгеброй Новикова, поэтому для получения 4-мерных нильпотентных право-коммутативнзых алгебр достаточно расширить трехмерные алгебры. Произвольная трехмерная нильпотентная право-коммутативная алгебра изоморфна одной из следующих алгебр:

$N_1 : e_1e_1=e_2$, $\quad N_2 : e_1e_1=e_3,\ e_2e_2=e_3$,

$N_3 : e_1e_2=e_3,\ e_2e_1=-e_3$, $\quad N_4(\lambda) : e_1e_1= \lambda e_3,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_3$,

$N_5 : e_1e_1= e_2,\ e_2e_1=e_3$, $\quad N_6(\lambda) : e_1e_1= e_2,\ e_1e_2=e_3,\ e_2e_1= \lambda e_3$.

Из списка трехмерных право-коммутативных алгебр разделим алгебры, которые являются алгеброй Новикова и не являются таковыми. При расширении алгебр Новикова находим только право-коммутативные алгебры, не являющиеся алгеброй Новикова.

Пусть N алгебра Новикова (в частности, право-коммутативная) и $\theta \in Z^2{}_R(R,\mathbb{C})$. Тогда N_θ является алгеброй Новикова тогда и только тогда, когда

$$\theta(x \cdot y, z) - \theta(x, y \cdot z) = \theta(y \cdot x, z) - \theta(y, x \cdot z)$$

для всех $x, y, z \in N$.

Обозначим через $\mathrm{H}^2{}_N(N)$ группу когомологий право-коммутативной алгебры N удовлетворящий вышеприведенному условию.

Пусть A нильпотентная алгебра с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда через Δ_{ij} обозначим билинейную форму Δ_{ij}: $\mathrm{A}\times\mathrm{A}\to\mathbb{C}$ где $\Delta_{ij}(e_l, e_m) = \delta_{il}\, \delta_{jm}$. Множество $\{\Delta_{ij} : 1 \le i, j \le n\}$ является базисом для линейного пространства билинейных форм в A, и любая $\theta \in Z^2(A,\mathrm{V})$ может быть написано единственным образом $\theta = \sum_{1\le i,j\le n} c_{ij}\Delta_{ij}$, где $c_{ij} \in \mathbb{C}$.

В следующей таблице даем описание пространств вторых групп когомологий 3-мерных нильпотентных право-коммутативных алгебр (где $N_1 = N_0 \oplus \mathbb{C}$).

N	$\mathrm{H}^2_N(N)$	$\mathrm{H}^2_R(N)$
N_1	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{13}], [\Delta_{21}], [\Delta_{31}], [\Delta_{33}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_1) \oplus \langle[\Delta_{32}]\rangle$
N_2	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_2) \oplus \langle[\Delta_{13}], [\Delta_{23}]\rangle$
N_3	$\langle[\Delta_{11}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_3) \oplus \langle[\Delta_{13}], [\Delta_{23}]\rangle$
$N_4(\lambda)_{\lambda\neq 0}$	$\langle[\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_4(\lambda)) \oplus \langle[\Delta_{13}], [\Delta_{23}]\rangle$
$N_4(0)$	$\langle[\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{13}-\Delta_{31}-\Delta_{32}], [\Delta_{23}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_4(0)) \oplus \langle[\Delta_{31}+ \Delta_{32}]\rangle$
N_5	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{13}-\Delta_{31}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_5) \oplus \langle[\Delta_{31}]\rangle$
$N_6(\lambda)_{\lambda\neq 0}$	$\langle[\Delta_{21}], [(2-\lambda)\,\Delta_{13}+ \lambda\,(\Delta_{22}+\Delta_{31}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_6(\lambda)) \oplus \langle[\Delta_{22}+\Delta_{31}-\Delta_{13}]\rangle$
$N_6(0)$	$\langle[\Delta_{21}], 2[\Delta_{13}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_6(0)) \oplus \langle[\Delta_{22}+\Delta_{31}-\Delta_{13}],[\Delta_{32}]\rangle$

Теорема 4. Пусть N комплексная 4-мерная нильпотентная право-коммутативная алгебра. Тогда N алгебра Новикова или изоморфно одной из следующих попарно неизоморфных алгебр $R_1 - R_{31}$ (см. Приложение 1).

Во втором параграфе второй главы получена классификация 4-мерных нильпотентных лево-симметричных алгебр. Все 4-мерные нильпотентные лево-симетричные алгебры размерности меньше четырех являются алгебрами Новикова, поэтому рассмотрено расширение трехмерных лево-симметричных алгебр не являющихся алгеброй Новикова.

В следующей таблице даем описание пространства вторых групп когомологий 3-мерных нильпотентных лево-симметричных алгебр.

N	$\mathrm{H}^2_N(N)$	$\mathrm{H}^2_L(N)$
N_1	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{13}], [\Delta_{21}], [\Delta_{31}], [\Delta_{33}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_1) \oplus \langle[\Delta_{23}]\rangle$
N_2	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_2) \oplus \langle[\Delta_{31}], [\Delta_{32}]\rangle$
N_3	$\langle[\Delta_{11}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_3) \oplus\langle[\Delta_{31}-2\Delta_{13}],[\Delta_{32}-2\Delta_{23}]\rangle$
$N_4(\lambda)_{\lambda\neq 0}$	$\langle[\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_4(\lambda)) \oplus \langle[\Delta_{13}-\Delta_{31}-\Delta_{32}],$ $[\Delta_{23}+\lambda\Delta_{31}]\rangle$
$N_4(0)$	$\langle[\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{13}-\Delta_{31}-\Delta_{32}],[\Delta_{23}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_4(0))$
N_5	$\langle[\Delta_{12}], [\Delta_{13}-\Delta_{31}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_5) \oplus \langle[\Delta_{22}+\Delta_{31}], [\Delta_{23}]\rangle$
$N_6(\lambda)$	$\langle[\Delta_{21}], [(2-\lambda)\,\Delta_{13}+ \lambda\,(\Delta_{22}+\Delta_{31}]\rangle$	$\mathrm{H}^2_N(N_6(\lambda)) \oplus \langle[\Delta_{22}+\Delta_{13}-\Delta_{31}]\rangle$

Основным результатом второго параграфа второй главы является следующая теорема.

Теорема 5. Пусть N комплексная 4-мерная нильпотентная лево-симметричная алгебра. Тогда N алгебра Новикова или изоморфно одной из следующих попарно неизоморфных алгебр $L_1 - L_{24}$ (см. Приложение 2).

В третьем параграфе второй главы диссертации найдены неприводимые компоненты нильпотентных четырехмерных право-коммутативных и лево-симметричных алгебр.

Определим действие группы $GL_n(F)$ на множестве n мерных алгебр $Alg_n(F)$ *следующим образом:*

$$[x, y]_g: = g\,[g^{-1}x, g^{-1}y],$$

где $g\in GL_n(F)$ и $x,\ y\in L.$ Через $Orb(L)$ обозначим орбиту алгебры L при этом действии и через $\overline{Orb(L)}$ замыкание в топологии Зарисского.

Определение 8. Будем говорить, что алгебра L вырождается в алгебру Лейбница M, если M лежит в замыкании орбиты алгебры L. В этом случае мы будем обозначать $L\to M$.

Напомним, что подмножество многообразия называется неприводимым, если оно не может быть представлено как объединение двух нетривиальных замкнутых подмножеств. Максимальное неприводимое замкнутое подмножество многообразия называется *неприводимой компонентой*. Хорошо известно, что любое аффинное многообразие можно единственным образом представить как объединений его конечное число неприводимых компонент. Задача нахождения неприводимых компонент эквивалентно задаче определения алгебр, стоящих на верхних уровнях графа вырождений.

Основной результат данного параграфа приведен в следующей теореме.

Теорема 6. Многообразие 4-мерных нильпотентных право-коммутативных алгебр состоит из неприводимых компонент определенных классами алгебр $R_{12}(\lambda)$, $R_{18}(\alpha)$, $R_{27}(\lambda,\alpha)$, $R_{29}(\alpha)$ va $N_{20}(\alpha)$.

Другими словами, неприводимые компоненты право-коммутативных алгебр имеют следующий вид:

$$\overline{\bigcup_{\lambda} Orb(R_{12}(\lambda))},\ \overline{\bigcup_{\alpha} Orb(R_{18}(\alpha))},\ \overline{\bigcup_{\lambda,\alpha} Orb(R_{27}(\lambda,\alpha))},$$

$$\overline{\bigcup_{\alpha} Orb(R_{29}(\alpha))},\ \overline{\bigcup_{\alpha} Orb(N_{20}(\alpha))}.$$

Теорема 7. Многообразие 4-мерных нильпотентных лево-симметричных алгебр состоит из неприводимых компонент определенных классами алгебр $L_{12}(\lambda)$, $L_{21}(\lambda)$ и $L_{23}(\lambda,\alpha)$, т.е. неприводимые компоненты 4-мерных нильпотентных лево-симметричных алгебр имеют следующий вид:

$$\overline{\bigcup_{\lambda} Orb(L_{12}(\lambda))},\ \overline{\bigcup_{\lambda} Orb(L_{21}(\lambda))},\ \overline{\bigcup_{\lambda,\alpha} Orb(L_{23}(\lambda,\alpha))}.$$

Третья глава диссертации, названной «**Классификация однопорожденных пятимерных нильпотентных терминальных алгебр**» посвящена алгебраической классификации однопорожденных четырехмерных и пятимерных нильпотентных терминальных алгебр. Поскольку терминальные алгебры вкючают в себя левые алгебры Лейбница, то при классификации пятимерных нильпотентных терминальных алгебр приведем те терминальные алгебры, которые не является алгеброй Лейбница.

В первом параграфе третьей главы были классифицированы однопорожденные 4-мерные терминальные алгебры, с помощью центральным расширением двумерных и трехмерных терминальных алгебр.

Известно, что однопорожденные двумерные и трехмерные нильпотентные терминальные алгебры изоморфны следующим алгебрам:

$$\mathbf{T}_{01}^2 : e_1e_1 = e_2,$$

$$\mathbf{T}_{01}^3 : e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_3,$$

$$\mathbf{T}_{02}^3(\lambda) : e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = \lambda e_3,\ e_2e_1 = e_3.$$

В следующей таблице даем описание групп автоморфизмов и вторые группы когомологий 3-мерных однопорожденных нильпотентных терминальных алгебр.

$\mathbf{A}$	$\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$	$\mathrm{Z}_T^2(\mathbf{A})$	$\mathrm{H}_T^2(\mathbf{A})$
$\mathbf{T}_{01}^3$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x^2 & 0 \\ z & xy & x^3 \end{pmatrix}$	$\left\langle \begin{matrix} \Delta_{11},\Delta_{12},\Delta_{13}, \\ \Delta_{21},\Delta_{22}-3\Delta_{31} \end{matrix} \right\rangle$	$\langle [\Delta_{13}],[\Delta_{21}],\Delta_{22}]-3[\Delta_{31}] \rangle$
$\mathbf{T}_{02}^3(\lambda)_{\lambda\neq 0}$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x^2 & 0 \\ z & (\lambda+1)xy & x^3 \end{pmatrix}$	$\left\langle \begin{matrix} \Delta_{11},\Delta_{12},\Delta_{13}+\Delta_{22}, \\ \Delta_{21},\frac{1-\lambda}{3}\Delta_{22}+\Delta_{31} \end{matrix} \right\rangle$	$\left\langle \begin{matrix} [\Delta_{12}],[\Delta_{13}]+[\Delta_{22}], \\ \frac{1-\lambda}{3}[\Delta_{22}]+[\Delta_{31}] \end{matrix} \right\rangle$
$\mathbf{T}_{02}^3(0)$	$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x^2 & 0 \\ z & xy & x^3 \end{pmatrix}$	$\left\langle \begin{matrix} \Delta_{11},\Delta_{12},\Delta_{13}+\Delta_{22}, \\ \Delta_{21},\frac{1}{3}\Delta_{22}+\Delta_{31},\Delta_{23} \end{matrix} \right\rangle$	$\left\langle \begin{matrix} [\Delta_{12}],[\Delta_{13}]+[\Delta_{22}], \\ \frac{1}{3}[\Delta_{22}]+[\Delta_{31}],[\Delta_{23}] \end{matrix} \right\rangle$

В следующей теореме приведем классификацию однопорожденных 4-мерных нильпотентных терминальных алгебр.

Теорема 8. Произвольная однопорожденная 4-мерная нильпотентная терминальая алгебра изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$\mathbf{T}_{01}^4$: $e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_4,\ e_2e_1 = e_3,$

$\mathbf{T}_{02}^4(\alpha)$: $e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_3,\ e_1e_3 = \alpha e_4,\ e_2e_2 = e_4,\ e_3e_1 = -3e_4,$

$\mathbf{T}_{03}^4$: $e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_3,\ e_1e_3 = e_4,$

$\mathbf{T}_{04}^4$: $e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_3,\ e_1e_3 = e_4,\ e_2e_1 = e_4,$

$\mathbf{T}_{05}^4(\lambda,\alpha)$: $e_1e_1 = e_2, e_1e_2 = \lambda e_3, e_1e_3 = \alpha e_4, e_2e_1 = e_3,\ e_2e_2 = (\alpha + \frac{1-\lambda}{3})e_4, e_3e_1 = e_4,$

$\mathbf{T}_{06}^4(\lambda)$: $e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = \lambda e_3 + e_4,\ e_1e_3 = \frac{2\lambda^2+5\lambda-1}{6}e_4,\ e_2e_1 = e_3,$
$e_2e_2 = \frac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{6}e_4,\ e_3e_1 = e_4,$

$\mathbf{T}_{07}^4(\lambda)$: $e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = \lambda e_3,\ e_1e_3 = e_4,\ e_2e_1 = e_3,\ e_2e_2 = e_4,$

$\mathbf{T}_{08}^4$: $e_1e_1 = e_2,\ e_2e_1 = e_3,\ e_2e_3 = e_4,$

$\mathbf{T}_{09}^4$: $e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = e_4,\ e_2e_1 = e_3,\ e_2e_3 = e_4,$

$\mathbf{T}_{10}^4(\alpha)$: $e_1e_1 = e_2,\ e_1e_2 = \alpha e_4,\ e_2e_1 = e_3,\ e_2e_2 = \frac{1}{3}e_4,\ e_2e_3 = e_4,\ e_3e_1 = e_4.$

Во втором параграфе третьей главы полностью классифицированы однопорожденные пятимерные нильпотентные терминальные алгебры. Для этой цели, сначала найдены двумерное центральное расширение трехмерных алгебр $\mathbf{T}_{01}^3$ и $\mathbf{T}_{02}^3(\lambda)$. Определяя одномерное центральное расширение полученных 4-мерных алгебр $\mathbf{T}_{01}^4$, $\mathbf{T}_{02}^4(\alpha)$, $\mathbf{T}_{03}^4$, $\mathbf{T}_{04}^4$, $\mathbf{T}_{05}^4(\lambda,\alpha)$, $\mathbf{T}_{06}^4(\lambda)$, $\mathbf{T}_{07}^4(\lambda)$, $\mathbf{T}_{08}^4$, $\mathbf{T}_{09}^4$, $\mathbf{T}_{10}^4(\alpha)$ получен полный список пятимерных нильпотентных терминальных алгебр. В следующей теореме дана классификация таких алгебр посредством групп автоморфизмов и описание вторых групп когомологий алгебр.

Теорема 9. Пусть **A** однопорожденная пятимерная нильпотентная терминальная алгебра. Тогда **A** изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_{79}$ (см. Приложение 3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена описании пред-дифференцирований филиформных алгебр Лейбница, а также право-коммутативным и лево-симметричным алгебрам.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Получено описание пред-дифференцирований филиформных алгебр Лейбница первого и второго классов и найдены условия при которых такие алгебры являются сильно нильпотентными. На основе полученных условий сильно нильпотентности классифицированы не сильно нильпотентные филиформные алгебр Лейбница.
2. Алгебраически и геометрически классифицированы нильпотентные 4-мерные право-коммутативные алгебры.
3. Получена алгебраическая и геометрическая классификация нильпотентных 4-мерных лево-симметричных алгебр.
4. Приведена алгебраическая классификация комплексных пятимерных однопорожденных нильпотентных терминальных алгебр. Найдены все одномерные и двумерные центральные расширения трехмерных однопорожденных терминальных алгебр и получена классифиция комплексных 4-мерных однопорожденных терминальных алгебр.
5. Описаны пространства вторых групп когомологий 4-мерных однопорожденных терминальных алгебр и найдены одномерное центральное расширение таких алгебр.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

SATTAROV ALOBERDI MOMINJON UGLI

PRE-DERIVATION OF LEIBNIZ FILIFORM ALGEBRAS AND CLASSIFICATION OF RIGHT-COMMUTATIVE AND LEFT-SYMMETRIC ALGEBRAS

01.01.06 – algebra

ABSTRACT OF DISSERTATION of the doctor of philosophy (PHD) on PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2022.4.PhD/FM442.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Khudoyberdiev Abror Khakimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Arzikulov Farhodjon Nematjonovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
	Qurbanbaev Tuuelbay Qadirbayevich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent
Leading organization:	**New Uzbekistan University**

Defense will take place «23» May 2023 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered № 159). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «10» May 2023 year
(Mailing report № 2 on «10» May 2023 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.-M.S.,
Senior researcher

B.A. Omirov
Chairman of the scientific seminar
at the Scientific Council for the
award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is the classification of pre-derivations of filiform Leibniz algebras, as well as the algebraic and geometric classification of right-commutative, left-symmetric and one-generated terminal algebras.

The objects of research are filiform Leibniz algebras, right-commutative and left-symmetric nilpotent algebras in small dimensions, pre-derivations of algebras, and cohomological groups.

The scientific novelty of the research is as follows:

pre-derivations of filiform Leibniz algebras are described and the existence of non strongly nilpotent filiform Leibniz algebras is proved;

algebraic and geometric classifications of four-dimensional nilpotent right-commutative algebras are given and irreducible components of varieties of such algebras are found;

algebraic and geometric classifications of four-dimensional nilpotent left-symmetric algebras are given;

one-generated five-dimensional nilpotent terminal algebras are classified.

Implementation of the research results. Based on the obtained results on pre-derivations of filiform Leibniz algebras, classifications of right-commutative and left-symmetric algebras:

the results obtained in the dissertation on the classification of four-dimensional nilpotent right-commutative and left-symmetric algebras were applied in the foreign project No. AP08051987 «Irregular sets in dynamical systems» for classification of five-dimensional one-generated nilpotent asymmetrical algebras (Reference of the University named after Suleyman Demirel dated April 4, 2023, Kazakhstan). The use of the scientific result made it possible to discover the irreducible components of the varieties of such algebras;

the results of one-dimensional central extensions of terminal algebras have been used in foreign scientific articles (Journal of Algebra and its Applications, 21(2), 2022, 2250031, Algebra Colloquium, 29(3), 2022, 453-474 and Communications in Mathematics, 28(2), 2020, 231-251) in the classification of conservative algebras of small dimensions. These results allowed classifying conservative algebras of small dimensions and all five-dimensional one-generated nilpotent bicommutative algebras and describing weakly associative algebras.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, divided into eight paragraphs, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 101 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I бўлим (I часть; part I)

1. Adashev J., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., Sattarov A., The algebraic and geometric classification of nilpotent right commutative algebras // Results in Mathematics, 2021, 76(1), 24. (№ 3. Scopus IF=0,74)
2. Adashev J., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., Sattarov A., The algebraic and geometric classification of nilpotent left symmetric algebras // Journal of Geometry and Physics, 2021 (167)104287. ((№ 3. Scopus IF=0,55)
3. Abdurasulov K.K., Khudoyberdiyev A.K., Ladra M., Sattarov A.M, Pre-derivations and description of non-strongly nilpotent filiform Leibniz algebras // Communications in Mathematics, 2021, 29(2), p. 187-213. ((№ 3. Scopus IF=0,21)
4. Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A.Kh., Sattarov A.M., One-generated nilpotent terminal algebras // Communications in Algebra, 2020, 48 (10), p. 4355-4390. (№ 3. Scopus IF=0,58)
5. Худойбердиев А.Х., Абдурасулов К.К., Саттаров А.М. Описание алгебр второго уровня в многообразии комплексных конечномерных нильпотентных алгебр Лейбница // Вестник НУУз, 2016, № 34, с. 61-67. (01.00.00; № 8)
6. Khudoyberdiyev A.Kh., Sattarov A. M.// On Leibniz-derivation of order k of the nilpotent Leibniz algebras // Bulletin of the Institute of Mathematics, 2018, № 2, p.32-39. (01.00.00; № 17)
7. Sattarov A.M. Classification of non-strongly nilpotent filiform Leibniz algebras of dimension 11 and 12 // Uzbek mathematical journal, 2019, № 2, p. 113-123. (01.00.00; № 6)

II бўлим (II часть; part II)

8. Худойбердиев А.Х., Саттаров А.М., Описание алгебр Лейбница уровня два. «Проблемы современной топологии и её приложения». Тезисы докладов конференции с участием зарубежных учёных. Ташкент, 5-6 май 2016 г. – с. 198-199.
9. Juvonov Q.R., Sattarov A.M., Aliboyeva N.I., 2-filiform Leybnits algebralarining bir o'lchovli markaziy kengaytmasi. Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2016». 9-10 ноябрь 2016 г. Бухара, Узбекистан. – с. 234-236.
10. Sattarov A.M., The algebraic classification of 4-dimensional nilpotent left symmetric algebras. «Sarymsakov Readings». 2021, 16-18 September. Tashkent, – p. 271-273.

11. Sattarov A.M., Classification of non-strongly nilpotent filiform Leibniz algebras of dimension 11. The Republican scientific conference «Actual problems and applications of Analysis». 2019, 4-5 October. Karshi. – p. 230-232.
12. Sattarov A.M., Abdimuminova M., One-dimensional extension of four-dimensional filiform Leibniz algebra. Scientific online conference «Modern problems of mathematics: problems and solutions», 2020, 21-23 October. Termez. – p. 24-26.
13. Муратова Х.А., Саттаров А.М., Разрешимые супералгебры Лейбница с некоторыми филиформными нильрадикалами. «Десятая школа-конференция: Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Москва, 28 января − 2 февраля 2023 г. – с. 40-42.

1-Ilova (Приложение 1)

Список четырехмерных нильпотентных право-коммутативных алгебр

R_1: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_4$, $e_3e_2=e_4$,
R_2: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=e_4$, $e_3e_2=e_4$,
R_3: $e_1e_1=e_2$, $e_2e_1=e_4$, $e_3e_2=e_4$,
R_4: $e_1e_1=e_2$, $e_3e_2=e_4$,
R_5: $e_1e_1=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_2=e_3$,
R_6: $e_1e_1=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_4$, $e_2e_2=e_3$,
R_7: $e_1e_1=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=ie_4$,
R_8: $e_1e_1=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_4$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=ie_4$,
R_9: $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=-e_3$,
R_{10}: $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=-e_3$, $e_2e_2=e_4$,
$R_{11}(\lambda)_{\lambda\neq 0}$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$,
$R_{12}(\lambda)_{\lambda\neq 0}$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_3+e_4$, $e_2e_2=e_3$,
$R_{13}(\lambda)_{\lambda\neq 0}$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_3=2\lambda e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_3=(1-\sqrt{1-4\lambda})e_4$,
$R_{14}(\lambda)_{\lambda\neq 0}$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_3=2\lambda e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=(1+\sqrt{1-4\lambda})e_4$,
$R_{15}(\lambda)_{\lambda\neq 0}$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_3=2\lambda e_4$, $e_2e_1=e_3+2\lambda e_4$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=(1-\sqrt{1-4\lambda})e_4$,
$R_{16}(\lambda)_{\lambda\neq 0}$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_3=2\lambda e_4$, $e_2e_1=e_3+2\lambda e_4$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=(1+\sqrt{1-4\lambda})e_4$.
R_{17}: $e_1e_2=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=e_4$,
$R_{18}(\alpha)_{\alpha\neq 0}$: $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_2e_1=e_3+e_4$, $e_2e_2=e_3$, $e_3e_1=(1-\alpha)e_4$, $e_3e_2=(1-\alpha)e_4$,
$R_{19}(\alpha)_{\alpha\neq 0}$: $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_3e_1=(1-\alpha)e_4$, $e_3e_2=(1-\alpha)e_4$,
$R_{20}(\alpha)$: $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_2e_1=e_3+e_4$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=\alpha e_4$, $e_3e_1=(1-\alpha)e_4$, $e_3e_2=(1-\alpha)e_4$,
$R_{21}(\alpha)$: $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=\alpha e_4$, $e_3e_1=(1-\alpha)e_4$, $e_3e_2=(1-\alpha)e_4$,
R_{22}: $e_1e_2=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=e_4$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=e_4$,
R_{23}: $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=e_4$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=e_4$,
R_{24}: $e_1e_2=e_4$, $e_2e_1=e_3+e_4$, $e_2e_2=e_3$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=e_4$,
R_{25}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_3e_1=e_4$,
$R_{26}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_3e_1=(1-\alpha)e_4$.
$R_{27}(\lambda,\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=(\alpha(2-\lambda)-1)e_4$, $e_2e_1=\lambda e_3$, $e_2e_2=(\alpha\lambda+1)e_4$, $e_3e_1=(\alpha\lambda+1)e_4$,
$R_{28}(\lambda)_{\lambda\neq 0,1}$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=4e_4$, $e_2e_1=\lambda e_3+(\lambda^2-\lambda^3)e_4$, $e_2e_2=2(\lambda+\lambda^2)e_4$, $e_3e_1=2(\lambda+\lambda^2)e_4$,
$R_{29}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=2e_4$, $e_2e_1=\alpha e_4$, $e_3e_2=e_4$,
R_{30}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_2e_1=e_4$, $e_3e_2=e_4$,
R_{31}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_3e_2=e_4$.

2-Ilova (Приложение 2)

Список четырехмерных нильпотентных лево-симметричных алгебр

L_1: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_2e_3=e_4$, $e_3e_1=e_4$,
L_2: $e_1e_1=e_2$, $e_2e_3=e_4$, $e_3e_1=e_4$,
L_3: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_2e_3=e_4$,
L_4: $e_1e_1=e_2$, $e_2e_3=e_4$,
L_5: $e_1e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_3e_1=e_4$,
L_6: $e_1e_1=e_3$, $e_1e_2=e_4$, $e_2e_2=e_3$, $e_3e_1=e_4$,
L_7: $e_1e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=ie_4$,
L_8: $e_1e_1=e_3$, $e_1e_2=e_4$, $e_2e_2=e_3$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=ie_4$,
L_9: $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=-2e_4$, $e_2e_1=-e_3$, $e_3e_1=e_4$,
L_{10}: $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=-2e_4$, $e_2e_1=-e_3$, $e_2e_2=e_4$, $e_3e_1=e_4$,
$L_{11}(\lambda)$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=e_4$, $e_3e_1=\lambda e_4$,
$L_{12}(\lambda)$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_2=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=e_4$, $e_3e_1=\lambda e_4$,
$L_{13}(\lambda)$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_3=2\lambda e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=(1-\sqrt{1-4\lambda})e_4$,
$e_3e_1=-\lambda(1+\sqrt{1-4\lambda})e_4$, $e_3e_2=-2\lambda e_4$,
$L_{14}(\lambda)$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_3=2\lambda e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3+e_4$, $e_2e_3=(1-\sqrt{1-4\lambda})e_4$,

$e_3e_1=-\lambda(1+\sqrt{1-4\lambda})e_4$, $e_3e_2=-2\lambda e_4$,

$L_{15}(\lambda)$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_3=2\lambda e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3$, $e_2e_3=(1+\sqrt{1-4\lambda})e_4$,

$e_3e_1=-\lambda(1-\sqrt{1-4\lambda})e_4$, $e_3e_2=-2\lambda e_4$,

$L_{16}(\lambda)$: $e_1e_1=\lambda e_3$, $e_1e_3=2\lambda e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_3+e_4$, $e_2e_3=(1+\sqrt{1-4\lambda})e_4$,

$e_3e_1=-\lambda(1-\sqrt{1-4\lambda})e_4$, $e_3e_2=-2\lambda e_4$,

$L_{17}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_4$, $e_3e_1=(1-\alpha)e_4$,

L_{18}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_1e_3=-e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_4$, $e_3e_1=2e_4$,

L_{19}: $e_1e_1=e_2$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_3=e_4$,

L_{20}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_3=e_4$, $e_3e_1=-e_4$,

$L_{21}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_3=e_4$, $e_3e_1=-\alpha e_4$,

$L_{22}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=(2\alpha+1)e_4$, $e_2e_1=e_4$, $e_2e_2=e_4$, $e_3e_1=-e_4$,

$L_{23}(\lambda,\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=((2-\lambda)\alpha+1)e_4$, $e_2e_1=\lambda e_3$, $e_2e_2=(\lambda\alpha+1)e_4$, $e_3e_1=(\lambda\alpha-1)e_4$,

$L_{24}(\lambda)_{\lambda\notin\{0:1\}}$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=2(3-\lambda)e_4$, $e_2e_1=\lambda e_3+e_4$, $e_2e_2=2(\lambda^2+\lambda)e_4$, $e_3e_1=4\lambda e_4$.

3-Ilova (Приложение 3)

Список пятимерных однопорожденных нильпотентных терминальных алгебр

T_1: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_5$,

$T_2(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=\alpha e_5$, $e_2e_1=e_4$, $e_2e_2=e_5$, $e_3e_1=-3e_5$,,

T_3: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_2=e_5$, $e_3e_1=-3e_5$,

T_4: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_2=e_5$, , $e_2e_1=e_4$, $e_3e_1=-3e_5$,

$T_5(\lambda)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\lambda e_3+e_4$, $e_1e_3=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_5$,

$T_6(\alpha,\lambda)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\lambda e_3+e_4$, $e_1e_3=\alpha e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=(\alpha+\frac{1-\lambda}{3})e_5$, $e_3e_1=e_5$,

$T_7(\lambda)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\lambda e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_4+\frac{1-\lambda}{3}e_5$, $e_3e_1=e_5$,

$T_8(\lambda)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\lambda e_3+e_5$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_4+\frac{1-\lambda}{3}e_5$, $e_3e_1=e_5$,

T_9: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_5$,

T_{10}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_5$, $e_2e_3=e_5$, $e_3e_1=3e_5$,

T_{11}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_4$, $e_2e_3=e_5$,

T_{12}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_5$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_4$, $e_2e_3=e_5$

$T_{13}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\alpha e_5$, $e_1e_3=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_4+e_5$, $e_2e_3=e_5$, $e_3e_1=3e_4$

$T_{14}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=(1+\alpha)e_4$, $e_2e_3=e_5$, $e_3e_1=3e_4$

$T_{15}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=(1+\alpha)e_4$, $e_2e_3=e_5$, $e_3e_1=3e_4$

$T_{16}(\alpha,\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\beta e_4+e_5$, $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=(1+\alpha)e_4$, $e_2e_3=e_5$, $e_3e_1=3e_4$

$T_{17}(\alpha,\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\alpha e_5$, $e_2e_3=e_5$, $e_3e_1=(3\alpha+\beta)e_5$, $e_4e_1=\beta e_5$

$T_{18}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\alpha e_5$, $e_2e_3=e_5$, $e_3e_1=(3\alpha+1)e_5$, $e_4e_1=e_5$

$T_{19}(\alpha,\beta,\gamma)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_1e_4=\beta e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=(\alpha+\gamma)e_5$, $e_3e_1=(3\gamma+1)e_5$, $e_4e_1=e_5$, $(\alpha,\gamma)\neq(0;-\frac{1}{3})$

$T_{20}(\alpha,\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_4$, $e_1e_3=\alpha e_5$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=(\alpha+\beta)e_5$, $e_3e_1=3\beta e_5$, $(\alpha,\beta)\neq(0;0)$

$T_{21}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_2=e_4$, $e_2e_3=2e_5$, $e_3e_1=-3e_4$, $e_3e_2=-3e_5$

$T_{22}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=\alpha e_4+e_5$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_2=e_4$, $e_2e_3=2e_5$, $e_3e_1=-3e_4$, $e_3e_2=-3e_5$

$T_{23}(\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=6e_4$, $e_1e_4=\beta e_5$, $e_2e_2=e_4$, $e_2e_3=(2\beta+1)e_5$, $e_3e_1=-3e_4$,

$e_3e_2=-3(\beta+1)e_5$, $e_4e_1=e_5$,

$T_{24}(\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=6e_4+e_5$, $e_1e_4=\beta e_5$, $e_2e_2=e_4$, $e_2e_3=(2\beta+1)e_5$, $e_3e_1=-3e_4$,

$e_3e_2=-3(\beta+1)e_5$, $e_4e_1=e_5$,

$T_{25}(\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=6e_4+\beta e_5$, $e_1e_4=-2e_5$, $e_2e_1=e_5$, $e_2e_2=e_4$, $e_2e_3=-3e_5$, $e_3e_1=-3e_4$,

$e_3e_2=3e_5$, $e_4e_1=e_5$,

T_{26}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_2=e_5$, $e_2e_3=-3e_5$, $e_3e_1=-3e_5$,

T_{27}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_1e_4=e_5$,

T_{28}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_5$,

$T_{29}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_4$, $e_2e_2=\alpha e_5$, $e_3e_1=3(1-\alpha)e_5$, $\alpha\neq1$,

$T_{30}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4+\alpha e_5$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_4$, $e_2e_2=e_5$,

$T_{31}(\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3+\beta e_5$, $e_1e_3=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_4=e_5$
T_{32}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3+e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_4=e_5$,
T_{33}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_2e_1=e_3$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_4=e_5$,
$T_{34}(\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\beta e_5$, $e_1e_3=\frac{1}{3}e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\frac{2}{3}e_4$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_4=e_5$, $e_2e_3=e_5$, $e_2e_4=e_5$,
$e_3e_1=e_4$, $e_3e_3=e_5$
T_{35}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=\frac{1}{3}e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\frac{2}{3}e_4$, $e_2e_4=e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_3=e_5$,
T_{36}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=\frac{1}{3}e_4$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\frac{2}{3}e_4$, $e_2e_4=e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_3=e_5$,
$T_{37}(\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=-\frac{2}{3}e_4+e_5$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=-\frac{1}{3}e_4+e_5$, $e_2e_3=\beta e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_3=e_5$,
$T_{38}(\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=-\frac{2}{3}e_4$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=-\frac{1}{3}e_4$, $e_2e_3=\beta e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_3=e_5$,
$T_{39}(\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=-\frac{1}{5}e_4+e_5$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\frac{1}{15}e_4+e_5$, $e_2e_3=\beta e_5$, $e_3e_1=e_4$,
$e_3e_2=-\frac{2}{5}e_5$, $e_4e_1=-\frac{7}{2}e_5$,
$T_{40}(\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_3=-\frac{1}{5}e_4$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\frac{2}{15}e_4$, $e_2e_3=\beta e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=-\frac{2}{5}e_5$, $e_4e_1=-\frac{7}{2}e_5$,
$T_{41}(\alpha,\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=-e_3$, $e_1e_4=\beta e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=(\alpha+\frac{2}{3})e_4+e_5$, $e_2e_3=(\frac{3\alpha+1}{3}-\frac{3\alpha+4}{3}\beta)e_5$,
$e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=(\beta-\frac{3\alpha+1}{2})e_5$, $e_4e_1=e_5$,
$T_{42}(\alpha,\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=-e_3$, $e_1e_3=\alpha e_4$, $e_1e_4=\beta e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=(\alpha+\frac{2}{3})e_4$,
$e_2e_3=(\frac{3\alpha+1}{3}-\frac{3\alpha+4}{3}\beta)e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=(\beta-\frac{3\alpha+1}{2})e_5$, $e_4e_1=e_5$,
$T_{43}(\alpha,\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=-e_3$, $e_1e_3=\alpha e_4+\beta e_5$, $e_1e_4=-\frac{3\alpha+5}{4}e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=(\alpha+\frac{2}{3})e_4+\beta e_5$,
$e_2e_3=\frac{3\alpha^2+13\alpha+8}{4}e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=-\frac{9\alpha+7}{2}e_5$, $e_4e_1=e_5$, $\alpha\neq-\frac{2}{3}$,
T_{44}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=-e_3+e_5$, $e_1e_3=-\frac{2}{3}e_4$, $e_1e_4=-\frac{3}{4}e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_3=\frac{1}{6}e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=-\frac{1}{4}e_5$, $e_4e_1=e_5$,
T_{45}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=-e_3$, $e_1e_3=-\frac{2}{3}e_4+e_5$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_5$, $e_2e_3=-\frac{2}{3}e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=e_5$,
$T_{46}(\lambda,\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\lambda e_3$, $e_1e_3=\frac{4\lambda-1}{5-2\lambda}e_4+e_5$, $e_1e_4=\frac{4\lambda-1}{5-2\lambda}e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\frac{(2\lambda+1)(\lambda+2)}{3(5-2\lambda)}e_4+\beta e_5$,
$e_2e_3=\frac{2(2\lambda+1)(3\lambda^2+1)}{3\lambda(5-2\lambda)^2}e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=\frac{(2\lambda+1)}{(5-2\lambda)}e_5$, $e_4e_1=e_5$, $\lambda\neq1,-2,-\frac{1}{2},\frac{5}{2}$
$T_{47}(\lambda,\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\lambda e_3$, $e_1e_3=\frac{4\lambda-1}{5-2\lambda}e_4+e_5$, $e_1e_4=\beta e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\frac{(2\lambda+1)(\lambda+2)}{3(5-2\lambda)}e_4+e_5$,
$e_2e_3=\frac{\beta(4\lambda^2-2\lambda+7)+2(\lambda-1)^2}{3\lambda(5-2\lambda)}e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=(\beta-\frac{2(\lambda-1)}{(5-2\lambda)})e_5$, $e_4e_1=e_5$, $\lambda\neq1,\frac{5}{2}$,
$T_{47}(\lambda,\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\lambda e_3$, $e_1e_3=\frac{4\lambda-1}{5-2\lambda}e_4+e_5$, $e_1e_4=\beta e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\frac{(2\lambda+1)(\lambda+2)}{3(5-2\lambda)}e_4+e_5$,
$e_2e_3=\frac{\beta(4\lambda^2-2\lambda+7)+2(\lambda-1)^2}{3\lambda(5-2\lambda)}e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=(\beta-\frac{2(\lambda-1)}{(5-2\lambda)})e_5$, $e_4e_1=e_5$, $\lambda\neq1,\frac{5}{2}$,
$T_{48}(\lambda,\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=\lambda e_3$, $e_1e_3=\frac{4\lambda-1}{5-2\lambda}e_4$, $e_1e_4=\beta e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\frac{(2\lambda+1)(\lambda+2)}{3(5-2\lambda)}e_4$,
$e_2e_3=\frac{\beta(4\lambda^2-2\lambda+7)+2(\lambda-1)^2}{3\lambda(5-2\lambda)}e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=(\beta-\frac{2(\lambda-1)}{(5-2\lambda)})e_5$, $e_4e_1=e_5$, $\lambda\neq0,\frac{5}{2}$,
T_{49}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3+e_5$, $e_1e_3=e_4$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_4$, $e_2e_3=e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=e_5$, $e_4e_1=e_5$,
T_{50}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=e_3$, $e_1e_3=e_4+e_5$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_4+e_5$, $e_2e_3=e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=e_5$, $e_4e_1=e_5$,
$T_{51}(\beta,\gamma)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=-2e_3+e_5$, $e_1e_3=-e_4+\beta e_5$, $e_1e_4=\gamma e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=\beta e_5$, $e_2e_3=-\frac{3\gamma+2}{6}e_5$,
$e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=\frac{3\gamma+2}{3}e_5$, $e_4e_1=e_5$,
$T_{52}(\beta)$: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=-2e_3+\beta e_5$, $e_1e_3=-e_4+e_5$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_5$, $e_2e_3=-\frac{1}{2}e_5$,
$e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=e_5$,
T_{53}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=-\frac{1}{2}e_3$, $e_1e_3=-\frac{1}{2}e_4+e_5$, $e_1e_4=-\frac{1}{2}e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=e_5$,
T_{54}: $e_1e_1=e_2$, $e_1e_2=-\frac{1}{2}e_3$, $e_1e_3=-\frac{1}{2}e_4+e_5$, $e_1e_4=e_5$, $e_2e_1=e_3$, $e_2e_2=e_5$, $e_2e_3=-e_5$, $e_3e_1=e_4$, $e_3e_2=e_5$,

$T_{54}(\alpha,\lambda)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=\lambda e_3,\ e_1e_3=\alpha\, e_4+e_5,\ e_1e_4=e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=(\alpha+\frac{1-\lambda}{3})e_4+e_5,\ e_2e_3=\frac{3\alpha-2(\lambda-1)}{3\lambda}e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=e_5,\ \alpha\neq\frac{2\lambda^2+5\lambda-1}{6},$

$T_{56}(\lambda,\alpha)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=\lambda e_3,\ e_1e_3=\alpha e_4,\ e_1e_4=e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=\alpha+\frac{1-\lambda}{3}e_4,\ e_2e_3=\frac{3\alpha-2(\lambda-1)}{3\lambda}e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=e_5,\ \lambda\neq0,$

$T_{56}(\lambda,\alpha)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=\lambda e_3,\ e_1e_3=\alpha e_4,\ e_1e_4=e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=\alpha+\frac{1-\lambda}{3}e_4,\ e_2e_3=\frac{3\alpha-2(\lambda-1)}{3\lambda}e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=e_5,\ \lambda\neq0,$

T_{57}: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-2e_3,\ e_1e_3=-\frac{1}{2}e_4+e_5,\ e_1e_4=e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=-\frac{1}{2}e_4+e_5,\ e_2e_3=-\frac{3}{4}e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=e_5,$

$T_{58}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-2e_3+e_5,\ e_1e_3=\alpha e_4,\ e_1e_4=e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=(\alpha+1)e_4,\ e_2e_3=-\frac{\alpha+2}{2}e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=e_5,$

$T_{59}(\beta)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=e_3+e_4,\ e_1e_3=e_4,\ e_1e_4=\beta e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_4-e_5,\ e_2e_3=\beta e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=\beta e_5,\ e_4e_1=3e_5,$

$T_{60}(\beta)_{\beta\neq0}$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=e_3+e_4,\ e_1e_3=e_4,\ e_1e_4=3e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_4-e_5,\ e_2e_3=3e_5,$
$e_3e_1=e_4+\beta e_5,\ e_3e_2=3e_5,\ e_4e_1=3e_5,$

$T_{61}(\beta)_{\beta\neq0}$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=e_3+e_4+\beta e_5,\ e_1e_3=e_4,\ e_1e_4=3e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_4-e_5,\ e_2e_3=3e_5,$
$e_3e_1=e_4-6e_5,\ e_3e_2=3e_5,\ e_4e_1=3e_5,$

$T_{62}(\beta)_{\beta\neq0}$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-e_3+e_4,\ e_1e_3=-\frac{2}{3}e_4+\beta e_5,\ e_1e_4=3e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=\beta e_5,\ e_2e_3=-2e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=3e_5,$

$T_{63}(\beta)_{\beta\neq0}$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-e_3+e_4+\beta e_5,\ e_1e_3=-\frac{2}{3}e_4-e_5,\ e_1e_4=9e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=3e_5,\ e_2e_3=-2e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=3e_5,\ e_4e_1=-12e_5,$

$T_{64}(\beta,\gamma)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-e_3+e_4,\ e_1e_3=-\frac{2}{3}e_4+(\beta+2)e_5,\ e_1e_4=3(\gamma-1)e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=\beta e_5,$
$e_2e_3=-2\gamma e_5,\ e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=3\gamma e_5,\ e_4e_1=6e_5,$

$T_{65}(\beta)_{\beta\neq0}$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-\frac{1}{2}e_3+e_4,\ e_1e_3=-\frac{1}{2}e_4+\beta e_5,\ e_1e_4=e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=\beta e_5,\ e_2e_3=-e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=e_5,$

$T_{66}(\beta)_{\beta\neq0}$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-\frac{1}{2}e_3+e_4+\beta e_5,\ e_1e_3=-\frac{1}{2}e_4+3e_5,\ e_1e_4=-3e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_4e_1=6e_5,$

$T_{67}(\beta,\gamma)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-\frac{1}{2}e_3+e_4,\ e_1e_3=-\frac{1}{2}e_4+(\beta+2)e_5,\ e_1e_4=(\gamma-3)e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=\beta e_5,$
$e_2e_3=-\gamma e_5,\ e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=\gamma e_5,\ e_4e_1=6e_5,$

$T_{68}(\beta)_{\beta\neq0}$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-2e_3+e_4+\beta e_5,\ e_1e_3=-\frac{1}{2}e_4,\ e_1e_4=4e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=\frac{1}{2}e_4, e_2e_3=-3e_5,$
$e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=4e_5,$

$T_{69}(\lambda)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=\lambda e_3+e_4,\ e_1e_3=\frac{2\lambda^2+5\lambda-1}{6}e_4,\ e_1e_4=6\lambda e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=\frac{(2\lambda+1)(\lambda+1)}{6}e_4,$
$e_2e_3=(2\lambda^2+5\lambda-1)e_5,\ e_3e_1=e_4,\ e_3e_2=6\lambda e_5,$

$T_{70}(\lambda,\alpha)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=\lambda e_3+\alpha e_5,\ e_1e_3=e_4,\ e_1e_4=\lambda e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_4+(1-\lambda)e_5,\ e_2e_3=e_5,\ e_3e_1=3e_5,$

$T_{71}(\lambda)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=\lambda e_3+e_5,\ e_1e_3=e_4,\ e_1e_4=\lambda e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_4,\ e_2e_3=e_5,$

$T_{72}(\lambda)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=\lambda e_3,\ e_1e_3=e_4,\ e_1e_4=\lambda e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_4,\ e_2e_3=e_5,$

$T_{73}(\alpha,\beta)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-e_3+e_5,\ e_1e_3=e_4,\ e_1e_4=\alpha e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_4+2\beta e_5,\ e_2e_3=(2-\alpha)e_5,\ e_3e_1=3\beta e_5,$
$e_3e_2=-3e_5,\ e_4e_1=e_5,$

$T_{74}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-e_3,\ e_1e_3=e_4,\ e_1e_4=\alpha e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_4+2e_5,\ e_2e_3=(2-\alpha)e_5,\ e_3e_1=3e_5,$
$e_3e_2=-3e_5,\ e_4e_1=e_5,$

$T_{75}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=-e_3,\ e_1e_3=e_4,\ e_1e_4=\alpha e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_4,\ e_2e_3=(2-\alpha)e_5,\ e_3e_2=-3e_5,\ e_4e_1=e_5,$

$T_{76}(\alpha,\beta)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_2=e_5,\ e_1e_3=\alpha e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=(\alpha+\beta)\, e_5,\ e_2e_3=e_4,\ e_2e_4=e_5,\ e_3e_1=3\beta e_5,$

$T_{77}(\alpha)$: $e_1e_1=e_2,\ e_1e_3=e_5,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=(\alpha+1)\, e_5,\ e_2e_3=e_4,\ e_2e_4=e_5,\ e_3e_1=3\alpha e_5,$

T_{78}: $e_1e_1=e_2,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_2=e_5,\ e_2e_3=e_4,\ e_2e_4=e_5,\ e_3e_1=3e_5,$

T_{79}: $e_1e_1=e_2,\ e_2e_1=e_3,\ e_2e_3=e_4,\ e_2e_4=e_5.$

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi nusxalari 2023-yil 24-aprel tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillardagi matnlari o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,75. Adadi 100 dona. Buyurtma № 35/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.