V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

MADG‘OZIEV G‘ANIJON TURDIBAEVICH

KELI DARAXTIDA ANIQLANGAN HC MODELLARNING GIBBS O‘LCHOVLARI

01.01.01 – Matematik analiz
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2023

UO‘K: 517.98

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

MADG‘OZIEV G‘ANIJON TURDIBAEVICH

KELI DARAXTIDA ANIQLANGAN HC MODELLARNING GIBBS O‘LCHOVLARI

01.01.01 – Matematik analiz
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent–2023

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi 'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy ıtestatsiya komissiyasida B2022.4.PhD/FM149 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://kengash.mathinst.uz) va "ZiyoNet" Axborot ta'lim portalida (http://www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Roziqov O'tkir Abdulloevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Botirov G'olibjon Isroilovich fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
Yetakchi tashkilot:	**Namangan Davlat Universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil 13 iyun soat 17:00dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174,Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika Institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (161-raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2023 yil 26 may kuni tarqatildi.
(2023 yil 26 may dagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

A.Azamov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash rais o'rinbosari, f.-m.f.d., akademik

J.K.Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

U.U.Jamilov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash huzuridagi Ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Ma’lumki, Gibbs o‘lchovlari nazariyasi fizik va biologik sistemalarning termodinamik xossalarini tadqiq etishga qaratilgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlarda muhim o‘rin tutadi. O‘zgarmas harorat ostidagi atrof-muhit bilan issiqlik muvozanatida bo‘lgan sistemalar uchun taqsimot qonunini dastlab amerikalik olim J.Gibbs o‘rgandi va bunday taqsimotlarni Gibbs o‘lchovi deb nomladi. Panjarali sistemalarda berilgan modellar uchun Gibbs o‘lchovlari nazariyasining rivojlanishini R.L.Dobrushin, O.E.Lanford va D.Ryuelning tadqiqotlari bilan boshlangan deyish mumkin. Gibbs o‘lchovlarini tadqiq qilish termodinamika masalalaridan boshlangan bo‘lsa-da, bugungi kunda uning tatbiqlarini biologiya, genetika va xizmat ko‘rsatish kabi fanning turli sohalarida uchratish mumkin.

Oxirgi yillarda mamlakatimizda fanning amaliy tatbiqlarga ega yo‘nalishlariga, jumladan, statistik fizika va mexanika masalalarini o‘rganishning asosiy ob’ekti bo‘lgan Gibbs o‘lchovlari nazariyasini rivojlantirishga alohida e’tibor qaratildi. Ta’kidlash joizki, berilgan model uchun Gibbs o‘lchovini qurish va faza almashishlari mavjudligini tekshirish Gibbs o‘lchovlari nazariyasining muhim masalalaridan hisoblanadi. Bunda har bir aniqlangan Gibbs o‘lchoviga fizik sistemaning bitta fazasi mos keladi. Haroratning ma’lum qiymatidan boshlab o‘lchovlar sonining o‘zgarishi fizik sistema bir holatdan boshqa holatga o‘tishini anglatadi. Konfiguratsiyalar fazosiga qo‘shimcha shartlar qo‘yish yordamida xizmat ko‘rsatishga oid ba’zi masalalarning optimal yechimini topish mumkin bo‘ladi. Shu bois bunday cheklovlarga ega konfiguratsiyalar fazosida Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflash maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan o‘lchovlar nazariyasining dolzarb yo‘nalishlariga e’tibor kuchaytirilmoqda. Jumladan, oxirgi yillarda spin qiymatlari ko‘pi bilan sanoqli bo‘lgan panjarali sistemalarda aniqlangan klassik modellar uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlarini qurish hamda o‘lchovlar nazariyasining amaliy muammolarni hal etish borasida salmoqli natijalarga erishildi. “Matematik fizika, funksional analiz va o‘lchovlar nazariyasi” fanlarining ustivor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda ilmiy natijalardan ilm-fanning turdosh sohalarida foydalanish maqsadida panjarali sistemalarda berilgan, spin qiymatlari ko‘pi bilan sanoqli bo‘lgan statistik fizika modellariga mos Gibbs o‘lchovlari nazariyasini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha xarakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek,

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4387-son qarori

Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi va 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning Respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yoʻnalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot Oʻzbekiston Respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yoʻnalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning oʻrganilganlik darajasi. Gibbs oʻlchovi tushunchasining umumiy ta’rifi dastlab R.L.Dobrushin, O.E.Lanford va D.Ruellarning ilmiy ishlarida keltirilgan. Gibbs oʻlchovi tushunchasining xususiy holi boʻlgan dastlabki taqsimotlarni N.N.Bogolyubov va B.I.Xatsetlarning ilmiy tadqiqotlarida uchratish mumkin. Gibbs oʻlchovlari nazariyasi R.Bekster, X.O.Georgi, V.A. Malishov, R.A.Minlos, K.Preston, D.Ruel, Ya.G.Sinay, M.Baus, S.F.Nejero, G.Gallavotti, F.Bonetto, G.Gentile, Jin Zin-Jastin, F.Muxammedov, N.N.Gʻanixoʻjaev va Oʻ.A.Roziqovlarning ilmiy tadqiqotlarida keng yoritilgan. R.L.Dobrushin tomonidan limit Gibbs oʻlchovining mavjudligi haqidagi teorema isbotlangan. Kvant maydonlar nazariyasidagi panjarali modellar uchun bu teorema ilk bor K.X.Xinin tomonidan qoʻllangan. Fizik sistemalardagi faza almashishlar nazariyasi S.A.Pirogov, YA.G.Sinay, R.A.Minlos, N.Datta, R.Fernandes, J.Fryoxlix, A.D.Enter va M.Zaxradnik ilmiy ishlarida oʻz aksini topgan. Cheksiz sondagi spin qiymatlarga ega konfiguratsiyali modellar uchun Gibbs oʻlchovining mavjudligi haqidagi teorema J.Lebovits va E.Prezutti tomonidan isbotlangan.

HC modellari bilan bogʻliq ilmiy tadqiqotlarni G.R.Braytvell, A.E.Mazel, F.Spitser, R.Uinkler, D.Galvin, J.Kan, F.Kelli, G.Louz, R.Mitra, K.Ramanan, A.Sengupta, I.Zaydins, Yu.M.Suxov, J.Martin, Oʻ.A.Roziqov va boshqa olimlarning ilmiy ishlarida uchratish mumkin. Panjarali modellardagi har xil sinflar uchun Payerlsning kontur metodiga asoslangan holda limit Gibbs oʻlchovlarini tahlil qilish F.A.Berezin, S.A.Pirogov, Ya.G.Sinay, J.Ginibre, A.Grossman, D.Ruel, R.L.Dobrushin, V.Gersik, O.J.Xeylman, E.M.Lieb, M.Kassandro, M.D. Fano, G.Olivereri, Gʻ.I.Botirov va boshqa olimlarning ishlarida namoyon boʻlgan.

Potts modeli uchun limit Gibbs oʻlchovlari N.N.Gʻanixoʻjaev, Oʻ.A.Roziqov, F.Vagner, D.Grensing, J.Xayde, F.Y.Vu ilmiy ishlarida yoritilgan. Yuqorida sanab oʻtilgan ishlarda asosan translyatsion-invariant va davriy Gibbs oʻlchovlari toʻplami tavsiflangan boʻlsa, kuchsiz davriy Gibbs oʻlchovlari tushunchasi Oʻ.A.Roziqov va M.M.Raxmatullaev tomonidan kiritilgan. Keli daraxtida berilgan Izing modeli uchun bunday oʻlchovlar mavjudligi isbotlangan. Translyatsion-invariant va davriy Gibbs oʻlchovlarini analiz qilish boʻyicha Izing modelining umumlashmasi boʻlgan SOS modeli uchun Yu.M.Suxov, Oʻ.A.Roziqov, R.M.Xakimov, Sh.A.Shoyusupov va boshqalar ilmiy-izlanishlar olib borishgan. Aytib oʻtish joizki, yuqoridagi kabi koʻplab olimlar tomonidan ilmiy ishlar bajarilganiga qaramay, shu kungacha birorta ham model uchun limit Gibbs o‘lchovlari to‘plami to‘liq tavsiflanmagan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan ilmiy-tadqiqoqt muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi.

Dissertatsiya tadqiqoti Matematika institutining F4-FA-F013 “Noassotsiativ va operatorlar algebralari, dinamik sistemalar, hamda ularning statistik fizika va populyatsion biologiyaga tatbiqlari” (2012-2016 yillar) mavzusidagi ilmiy tadqiqot loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi Keli daraxtida spin qiymatlari soni chekli bo‘lgan HC (Hard-Core) modellari uchun limit Gibbs o‘lchovlarining mavjudligini tekshirish hamda translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

uchta holatli HC modeli uchun Gibbs o‘lchovining mavjudligini tekshirish;

ikkinchi tartibli Keli daraxti ustida o‘zaro ta’sir radiusi ikkiga teng bo‘lgan HC modeli uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlarini qurish;

to‘rtta holatli HC modeli uchun davriy Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflash.

Tadqiqotning obyekti: Keli daraxti, uchta/to‘rtta holatli HC modeli, ta’sir radiusi ikkiga teng bo‘lgan HC modeli, translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovi, davriy o‘lchovlar.

Tadqiqotning predmeti: gruppalar va graflar nazariyasi, o‘lchovlar nazariyasi, diskret vaqtli dinamik sistemalar nazariyasi, funksional analiz va Markov maydonlari nazariyasi.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot ishida o‘lchovlar nazariyasi, nochiziqli analiz, chiziqli algebra, Markov tasodifiy miqdorlar nazariyasining rekurrent tenglamalariga asoslangan usullardan hamda qisqartirib akslantirish prinsipidan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ikkinchi tartibli Keli daraxtida berilgan uchta holatli HC model uchun Gibbs o‘lchovi yagonaligining yetarli sharti topilgan;

o‘zaro ta’sir radiusi ikkiga teng bo‘lgan modeli HC modeliga keltirilgan hamda bu model uchun parametrlarning ba’zi qiymatlarida kamida uchta translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi isbotlangan;

HC modeli uchun Keli daraxti gruppaviy tasvirining indeksi ikkiga teng normal bo‘luvchisiga mos sanoqsizta davriy Gibbs o‘lchovlari mavjudligi isbotlangan va topilgan o‘lchovlarning translyatsion-invariant ham, ikki davriy ham emasligi ko‘rsatilgan;

ikkinchi tartibli Keli daraxti ustida to‘rtta holatli HC modeli uchun kamida uchta (translyatsion-invariant bo‘lmagan) ikki davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Olingan natijalar va dissertatsiyada qo‘llanilgan usullar oliy o‘quv yurtlarida magistratura talabalari va tayanch doktorantlar uchun o‘quv kurs sifatida o‘qitilishi mumkin. Bundan tashqari, Gibbs o‘lchovlari yagona bo‘lmagan modellar uchun faza almashishlari mavjudligini ta’minlaydigan parametrlar qiymatlarining aniq hisoblanganidan xizmat ko‘rsatish va axborot almashish nazariyasi masalalarini yechishda foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Funksional analiz, chiziqli algebra, Markov tasodifiy miqdorlar nazariyasi usullaridan va Maple dasturidan foydalanilganligi hamda matematik mulohazalarning qat'iyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati HC modellariga mos davriy va translyatsion-invariant Gibbs o'lchovlari to'plamini tavsiflash borasidagi ilmiy natijalar ba'zi fizik va biologik sistemalarning termodinamik xossalarini tadqiq qilishda qo'llanilganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ta'sir radiusi ikkiga teng bo'lgan cheklita spin qiymatli bir model uchun Gibbs o'lchovlarini qurish usullari parametrlarning ma'lum shartlarida Potts modeliga mos Gibbs o'lchovining mavjudligini tekshirish imkonini berganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Keli daraxtida aniqlangan HC modellari uchun Gibbs o'lchovlari bo'yicha olingan natijalar asosida:

HC modeli uchun davriy Gibbs o'lchovlarini qurish usullaridan G0003247 raqamli "Panjarali modellarning renormalizatsion gruppalariga mos xaotik va qorishma *p*-adik dinamik sistemalar" mavzusidagi xorijiy grant loyihasida Keli daraxtida berilgan raqobatlashuvchi ta'sirga ega modellarga mos yangi Gibbs o'lchovlari to'plamini tavsiflashda foydalanilgan (Birlashgan Arab Amirliklari universitetining 2023 yil 26 apreldagi ma'lumotnomasi, BAA). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi qattiq jismlar fizik sistemasi uchun faza almashishi mavjudligini tekshirish imkonini bergan.

o'zaro ta'sir radiusi ikkiga teng bo'lgan modeli HC modeliga keltirilgan hamda bu model uchun parametrlarning berilgan qiymatlarida kamida uchta translyatsion-invariant Gibbs o'lchovlarining mavjudligidan YoFA-Ftex-2018-78 raqamli "Amenabel bo'lmagan graflarda dinamik va termodinamik sistemalar" mavzusidagi fundamental loyihada o'zaro ta'sirli sanoqlita spin qiymat qabul qiluvchi Potts modeli uchun davriy Gibbs o'lchovlarini tadqiq qilishda foydalanilgan (V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining 2023 yil 1 maydagi №2/174-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo'llanilishi ikkinchi tartibli Keli daraxtida Potts modeli uchun parametrlarning ma'lum shartlarida Gibbs o'lchovining mavjudligi va yagonaligini isbotlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 2 ta xalqaro va 8 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 16 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan, 1 tasi xorijiy, 5 tasi respublika jurnallarida, shuningdek 10 ta (2 tasi xorijiy) ma'ruza tezislari ilmiy konferensiya materiallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, o'nta bo'limdan iborat uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 83 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustivor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan. Shuningdek, bu qismda dissertatsiya mavzusi bo‘yicha muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqotning maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Dastlabki ma’lumotlar va uchta holatli HC-modeli”** deb nomlanuvchi birinchi bobida dissertatsiya mavzusiga aloqador ishlar haqida qisqacha ma’lumotlar berilgan va dissertatsiya ishi bo‘yicha qo‘yilgan asosiy masala va vazifalar yoritib berilgan. Gibbs o‘lchovlari nazariyasiga oid asosiy natijalarni olishda zarur bo‘lgan muhim tushunchalar keltirilgan. Shuningdek, uchta spin qiymatli HC modelining Gibbs o‘lchovlari o‘rganilgan.

1.1-paragrafda asosiy ta’riflar, Keli daraxtida berilgan H Gamiltonian uchun limit Gibbs o‘lchovlarini qurish konstruksiyasi beriladi, shuningdek, ma’lum faktlar keltiriladi.

Ma’lumki, $\Gamma^k = (V, L) -$ k-tartibli Keli daraxti bu har bir uchidan $k+1$ ta qirra chiqadigan siklga ega bo‘lmagan grafdir. Bunda $V-$ daraxtning uchlari to‘plami, $L-$ qirralari to‘plami.

Agar x va y uchlar uchun ularni tutashtiruvchi qirra $l \in L$ mavjud bo‘lsa, bu uchlarga *yaqin qo‘shnilar* deyiladi va $l = \langle x, y\rangle$ ko‘rinishda belgilanadi.

Keli daraxtida x va y uchlar orasidagi masofa tushunchasi quyidagicha aniqlanadi:

$$d(x,y) = min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V\},$$

bu yerda $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle -$ yaqin qo‘shnilar.

Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \; V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \le n\},$$

$$L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

N.N.G‘anixo‘jaev ishlarida keltirib o‘tilgan quyidagi tasdiq o‘rinli.

1-tasdiq. $k-$tartibli Keli daraxtining uchlari to‘plami V va G_k gruppa o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud.

Bunda G_k – yasovchilari $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ bo‘lgan $k+1$ ta ikkinchi tartibli $\{e, a_i\}$ ko‘rinishdagi siklik gruppalarning erkin ko‘paytmasi bilan aniqlangan gruppa.

Aytaylik, kamida ikkita elementdan iborat chekli Φ to‘plam berilgan bo‘lsin. Quyidagi $\sigma : V \to \Phi$ akslantirishga konfiguratsiya deyiladi. V to‘plamda aniqlangan barcha konfiguratsiyalarni $\Omega_V = \Phi^V$ kabi belgilaymiz. Shuningdek, konfiguratsiyani V ning ixtiyoriy A qism to‘plamida ham aniqlash mumkin, ya’ni $\sigma_A : A \to \Phi$. A to‘plamda aniqlangan barcha konfiguratsiyalarni $\Omega_A = \Phi^A$ kabi belgilaymiz. V to‘plamning barcha chekli qism to‘plamlari oilasini K bilan belgilaymiz.

Ixtiyoriy $A \in K$ va fiksirlangan $\sigma_A \in \Omega_A$ uchun quyidagi

$$\{\sigma \in \Omega : \sigma|_A \equiv \sigma_A\},$$

to‘plamga s*ilindrik to‘plam* deyiladi.

Barcha silindrik to‘plamlar oilasidan hosil qilingan $\sigma-$algebrani **B** bilan belgilaymiz. Quyidagi konfiguratsiyani qaraymiz:

$$\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V\setminus A}(x) = \begin{cases} \sigma(x), & agar \quad x \in A, \\ \tilde{\sigma}(x), & agar \quad x \in V \setminus A. \end{cases}$$

1-ta’rif. Agar $(\Omega, \mathbf{B})$ o‘lchovli fazoda aniqlangan μ ehtimollik o‘lchovi ixtiyoriy chekli $A \subset V$ to‘plam uchun quyidagi

$$\mu\{\sigma_A \mid \tilde{\sigma}_{V\setminus A}\} = \frac{e^{-\beta H(\sigma_A|\tilde{\sigma}_{V\setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

tenglikni qanoatlantirsa, bu o‘lchovga limit Gibbs o‘lchovi deyiladi. Bunda $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ temperatura.

1.2-paragrafda uchlari $\sigma(x) \in \{0,1,2\}$ spin qiymatlarni qabul qiladigan HC (hard-core) model qaraladi. Konfiguratsiyaning qiymati $\sigma(x) = 1, 2$ ekanligi Keli daraxtida x uchning “band” ekanligini, $\sigma(x) = 0$ esa uning “bo‘sh” ekanligini bildiradi.

2-ta’rif. Agar V (V_n yoki W_n) to‘plamdagi σ konfiguratsiya barcha x va y yaqin qo‘shnilar uchun $\sigma(x)\sigma(y) \neq 1$, $\sigma(x)\sigma(y) \neq 4$ shartlarni qanoatlantirsa, bu konfiguratsiyaga joiz konfiguratsiya deyiladi.

Barcha joiz konfiguratsiyalar to‘plamini Ω^a ($\Omega^a_{V_n}$ i $\Omega^a_{W_n}$) bilan belgilaymiz.

Agar $x, y, z \in V$ uchlar uchun $\langle x, y \rangle$ yaqin qo‘shnilar va $\langle y, z \rangle$ yaqin qo‘shnilar bo‘lsa, $\langle x, y, z \rangle$ kabi yozuvdan foydalanamiz.

$P_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)}-$ $\{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\}$ joiz konfiguratsiyalarga mos ehtimollik bo‘lsin, bu yerda $P_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} \geq 0$, $\sum\limits_{\sigma(x),\sigma(y),\sigma(z)} P_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} = 1$ berilgan sonlar.

Quyidagi matritsani aniqlaymiz:

$$P_m=(P_{mij})_{i,j=0}^2=\begin{pmatrix}P_{m00} & P_{m01} & P_{m02}\\ P_{m10} & P_{m11} & P_{m12}\\ P_{m20} & P_{m21} & P_{m22}\end{pmatrix},\quad m=0,1,2.$$

Joiz konfiguratsiyali HC model uchun quyidagi matritsalar hosil boʻladi:

$$P_0=\begin{pmatrix}P_{000} & P_{001} & P_{002}\\ P_{010} & 0 & P_{012}\\ P_{020} & P_{021} & 0\end{pmatrix},\ P_1=\begin{pmatrix}P_{100} & P_{101} & P_{102}\\ 0 & 0 & 0\\ P_{120} & P_{121} & 0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}P_{200} & P_{201} & P_{202}\\ P_{210} & 0 & P_{212}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

HC-modelning Gamiltoniani ushbu formula orqali aniqlanadi:

$$H(\sigma)=\begin{cases}-\sum\limits_{\langle x,y,z\rangle;x,y,z\in V}\ln P_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)}, & agar\quad \sigma\in\Omega^a,\\ +\infty, & agar\quad \sigma\notin\Omega^a.\end{cases}$$

$z_l: l\in L\mapsto z_l\in R_+^7$ – funksiya V da berilgan vektor funksiya boʻlsin, bu yerda $z_l=(z_{\varepsilon,\delta,l},\ \varepsilon,\delta=0,1,2,\ \varepsilon\delta\neq1,\ \varepsilon\delta\neq4)$. Natural $n=1,2,...$ sonlar uchun $\Omega^a_{V_n}$ toʻplamda

$$\mu^{(n)}(\sigma_n)=\frac{1}{Z_n}\prod_{\langle x,y,z\rangle,x,y,z\in V_n}P_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)}\prod_{l=\langle x,y\rangle:x\in W_{n-1},y\in S(x)}z_{\sigma(x),\sigma(y),l}\qquad(1)$$

koʻrinishda aniqlangan $\mu^{(n)}$ ehtimollik oʻlchovini qaraymiz, bu erda Z_n - normallovchi kattalik.

$\mu^{(n)}$ ehtimollik oʻlchovlari ketma-ketligi har qanday $n\geq2$ natural son va $\sigma_{n-1}\in\Omega^a{}_{V_{n-1}}$ konfiguratsiya uchun quyidagi

$$\sum_{\omega_n\in\Omega_{W_n}}\mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n)1(\sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega^a_{V_n})=\mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}),$$

tenglikni qanoatlantirsa, bunday ketma-ketlikka *muvofiqlashgan ketma-ketlik* deyiladi.

Bunda

$$1(\sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega^a_{V_n})=\begin{cases}1, & agar,\quad \sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega^a_{V_n},\\ 0, & agar,\quad \sigma_{n-1}\vee\omega_n\notin\Omega^a_{V_n}.\end{cases}$$

Bu holda muvofiqlashgan ketma-ketliklar uchun Kolmogorovning oʻlchovni davom ettirish haqidagi teoremasiga koʻra $(\Omega^a,\mathbf{B})$ oʻlchovli fazoda aniqlangan shunday yagona μ oʻlchov mavjudki, uning uchun quyidagi tenglik oʻrinli boʻladi:

$$\mu\left(\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}\right) = \mu^{(n)}(\sigma_n).$$

1-teorema. (1) ko‘rinishda aniqlangan $\mu^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$, ehtimollik o‘lchovlari ketma-ketligi muvofiqlashgan bo‘lishi uchun har qanday $x \in V \setminus \{x_0\}$ uchda quyidagi tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir:

$$z_{01,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{P_{010} z_{10,y} + P_{012} z_{12,y}}{P_{000} + P_{001} z_{01,y} + P_{002} z_{02,y}},$$

$$z_{02,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{P_{020} z_{20,y} + P_{021} z_{21,y}}{P_{000} + P_{001} z_{01,y} + P_{002} z_{02,y}},$$

$$z_{10,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{P_{100} + P_{101} z_{01,y} + P_{102} z_{02,y}}{P_{000} + P_{001} z_{01,y} + P_{002} z_{02,y}},$$

$$z_{12,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{P_{120} z_{20,y} + P_{121} z_{21,y}}{P_{000} + P_{001} z_{01,y} + P_{002} z_{02,y}},$$

$$z_{20,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{P_{200} + P_{201} z_{01,y} + P_{202} z_{02,y}}{P_{000} + P_{001} z_{01,y} + P_{002} z_{02,y}},$$

$$z_{21,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{P_{210} z_{10,y} + P_{212} z_{12,y}}{P_{000} + P_{001} z_{01,y} + P_{002} z_{02,y}},$$

bu yerda $z_{\varepsilon\delta,y} = \dfrac{z_{\varepsilon,\delta,<x,y>}}{z_{0,0,<x,y>}}$, $\varepsilon, \delta = 0,1,2.$

1.3-paragrafda ba’zi xususiy hollarda Gibbs o‘lchovining yagonalik sharti topilgan.

Dissertatsiyaning **“Ta’sir radiusi ikkiga teng bo‘lgan bir model uchun Gibbs o‘lchovlari”** deb nomlangan ikkinchi bobida Keli daraxtida aniqlangan $\lambda > 0$ faollikka ega o‘zaro ta’sir radiusi ikkiga teng bo‘lgan HC model o‘rganilgan. Bu model uchun Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflash masalasi funksional tenglamalar sistemasini yechishga keltirilgan hamda translyatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari topilgan.

$A \subset V$ chekli to‘plam bo‘lsin. $|A|$ bilan A to‘plamning elementlari sonini belgilaymiz.

Umumlashgan Kroneker simvoli quyidagicha aniqlanadi:

$$U(\sigma_A) : \Omega_A \to \{|A|-1, |A|-2, \ldots, |A| - min\{|A|, |\Phi|\}\}$$

$$U(\sigma_A) = |A| - |\sigma_A \cap \Phi|,$$

bu yerda $A \subset V$ va $|\sigma_A \cap \Phi| - \sigma_A(x), x \in A$ konfiguratsiyaning turli qiymatlari soni.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobida $\Phi = \{-1,1\}$ va $|A| = 4$ ga teng bo‘lgan hol qaralgan. M to‘plam bilan $b(x) = \{y \in V : d(x,y) \leq 1\}$ radiusi 1 ga teng bo‘lgan barcha sharlar to‘plamini belgilaymiz.

Quyidagicha aniqlangan Gamiltonianni qaraymiz:

$$H(\sigma) = -J \sum_{b \in M} U(\sigma_b), \tag{2}$$

bu yerda $J > 0$.

Asosiy masala (2) ko‘rinishda berilgan Gamiltonian uchun Gibbs o‘lchovlarni o‘rganishdan iborat. Keli daraxtida aniqlangan Izing modeli uchun bu masala to‘liq hal etilgan. Bu model O‘.A.Roziqov ishlarida kontur metod bilan o‘rganilgan.

$x \in V$ uch uchun quyidagi belgilashni kiritamiz: $x_{\downarrow} = \{y \in V : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$, bu yerda $S(x) - x \in V$ uchning “*birinchi avlodlari*” to‘plami.

$b(x) = \{x, xa_1, xa_2, xa_3\}$ va $\sigma_{b(x)} = \{\sigma(x), \sigma(xa_1), \sigma(xa_2), \sigma(xa_3)\}$ bo‘lsin. Ω_{V_n} fazoda quyidagicha aniqlangan $\mu^{(n)}$ ehtimollik o‘lchovini qaraymiz:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{b(x),\sigma_{b(x)}}^{\sigma_{b(x_\downarrow)}}\right\}, \tag{3}$$

bu yerda $Z_n -$ normallovchi kattalik.

Quyidagi teorema $\mu^{(n)}$, ko‘rinishdagi o‘lchovlar uchun muvofiqlashtirish shartini ifodalaydi.

2-teorema. $k = 2$ bo‘lsin. (3) ko‘rinishda aniqlangan $\mu^{(n)}$, $n = 1,2,...$ o‘lchovlar ketma-ketligi muvofiqlashgan bo‘lishi uchun har qanday $a \in M$ sharda quyidagi tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir:

$$y_{a,0} = y_{a,6} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},$$

$$y_{a,1} = y_{a,7} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},$$

$$y_{a,2} = y_{a,8} = \frac{y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},$$

$$y_{a,3} = y_{a,9} = \frac{\lambda y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}} \cdot \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},$$

$$y_{a,4}=y_{a,10}=\frac{\lambda y_{c,3}+y_{c,4}+1}{y_{c,0}+y_{c,1}+y_{c,2}},\quad y_{a,5}=1,$$

bu yerda $\lambda=\exp\{J\beta\},\ \beta=1/T,\quad y_{a,i}=\exp(h_{a,i}-h_{a,11}),\ i=\overline{0,10}.$

2.3-paragrafda (1) ko‘rinishda berilgan modelga mos translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari to‘plamining tasnifi keltirilgan. 2-teoremadagi tenglamalarning barcha $a\in M$ sharlar va $i=0,1,2,3,4$ indekslar uchun $y_{a,i}=y_i$ ko‘rinishdagi yechimlariga mos kelgan o‘lchovlarga *translyatsion-invariant (TI) Gibbs o‘lchovlar* deyiladi.

3-teorema. $k=2$ bo‘lsin. (2) model uchun shunday $\lambda_{cr}\,(\approx 1{,}8055)$ soni mavjud bo‘lib, $\frac{11-\sqrt{21}}{8}<\lambda<\lambda_{cr}$ bo‘lganda kamida bitta, $\lambda=\lambda_{cr}$ bo‘lganda kamida ikkita, $\lambda_{cr}<\lambda<\frac{11+\sqrt{21}}{8}$ bo‘lganda esa kamida uchta (TI) Gibbs o‘lchovlar mavjud.

4-teorema. $\lambda_{cr}\le\lambda<\frac{11+\sqrt{21}}{8}$ bo‘lganda kontinuumta translyatsion-invariant bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlari mavjud.

Faraz qilaylik,

$$y_{a,0}=y_{a,3},\quad y_{a,1}=y_{a,4},\quad y_{a,2}=1,\quad \forall a\in M, \tag{4}$$

bo‘lsin. U holda 2-teoremadagi tenglamalardan $y^3+(1-\lambda)y^2-1=0$ ko‘rinishdagi tenglamaga ega bo‘lamiz.

μ_0 bilan $y^3+(1-\lambda)y^2-1=0$ tenglamaning echimiga mos TI Gibbs o‘lchovini belilaymiz.

2.4-paragrafda μ_0 o‘lchovning chetki bo‘lmaslik sharti tasnifi beriladi. Quyidagi teorema μ_0 o‘lchovning chetki bo‘lmaslik shartini ifodalaydi.

5-teorema. (2) model uchun (4) shartlar bajarilganda shunday $\lambda'(\approx 2.6639)$ soni mavjudki, $\lambda>\lambda'$ bo‘lganda μ_0 chetki bo‘lmagan TI Gibbs o‘lchov bo‘ladi.

2.5-paragrafda $y_{a,0}=y_{a,3},\quad y_{a,1}=y_{a,4},\quad y_{a,2}=1,\quad \forall a\in M$ shartlar ostida davriy Gibbs o‘lchovlari tasnifi keltirilgan.

3-ta’rif. $H_0\subset G_k$ bo‘lsin. Agar $h_{ya,i}=h_{a,i},\ i=0{,}1$ tenglik har qanday $a\in G_k$ va $y\in H_0$ elementlar uchun bajarilsa, $h=\{h_a=(h_{a,0},h_{a,1}):a\in G_k\}$ vektorga H_0-davriy vektor deyiladi.

4-ta’rif. H_0-davriy vektorlar to‘plamiga mos Gibbs o‘lchoviga H_0-davriy Gibbs o‘lchovi deyiladi.

G_k gruppaning uzunligi juft bo‘lgan so‘zlardan tashkil topgan qism gruppasini $G_k^{(2)}$ kabi belgilaymiz. N.N.G‘anixo‘jaevning ishlarida $G_k^{(2)}$ qism gruppaning indeksi 2 ga teng bo‘lishi keltirilgan.

6-teorema. (2) model uchun barcha $\lambda > 0$ va (4) shartlar bajarilganda yagona $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovi mavjud. Bundan tashqari bu o‘lchov translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovi bilan ustma-ust tushadi.

$\omega_x(a_i)$ bilan x so‘zdagi qisqarmaydigan $a_i,\ i=\overline{1,k+1}$ elementlar sonini belgilaymiz.

$\varnothing \neq A \subset N_2 = \{1,2,3\}$ va $H_A = \{x \in G_2 : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{juft}\}$ bo‘lsin.

7-teorema. (2) model uchun (4) shartlar bajarilganda sanoqsizta H_0- davriy Gibbs o‘lchovi mavjud. Bundan tashqari, bu o‘lchovlar tranlyatsion-invariant bo‘lmagan va $G_2^{(2)}$-davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlari bo‘ladi.

Dissertatsiyaning **“Keli daraxtida aniqlangan bitta HC model uchun Gibbs o‘lchovining yagonalik sharti”** deb nomlangan uchinchi bobi Keli daraxtida aniqlangan to‘rtta holatli HC modeli uchun Gibbs o‘lchovning yagonalik sharti va davriy Gibbs o‘lchovlarini tadqiq etishga bag‘ishlangan. D.Gandolfo, O‘.A.Roziqov, J.Ruizlar tomonidan bu model uchun tranlyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari to‘plami qisman tavsiflangan.

3.1-paragarafda asosiy ta’riflar keltirilgan. Spin qiymatlari $\Phi = \{0, 1, 2, 3\}$ to‘plamdan olinadigan unumdor grafning uchta tipini qaraymiz:

$$G_{tayoq} = \{(0, 1), (0, 3), (2, 3)\}$$

$$G_{kalit} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2)\}$$

$$G_{umuml.\ kalit} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2)\}.$$

5-ta’rif. Agar V to‘plamdan olingan x, y uchlar uchun $\{\sigma(x), \sigma(y)\} - G$ grafda qirra bo‘lsa, u holda Keli daraxtida aniqlangan σ konfiguratsiya G-joiz konfiguratsiya deyiladi.

Barcha $G-$joiz konfiguratsiyalar to‘plamini Ω^a bilan belgilaymiz.

6-ta’rif. Agar shunday P faollik topilib, unga mos Gamiltonian uchun kamida 2 ta tranlyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari mavjud bo‘lsa, bunday grafga *unumdor graf* deyiladi.

Quyidagi matritsani qaraymiz:

$$P=\begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{pmatrix},$$

bu yerda $P_{i,\ j}>0$, agar $(i,\ j)\in G$; $P_{i,\ j}=0$, agar $(i,\ j)\notin G$ va $\sum\limits_{j\in\Phi}P_{i,\ j}=1.$

G graf va P matritsa uchun HC-modelning Gamiltoniani quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma)=\begin{cases}\sum\limits_{<x,\ y>}\log P_{\sigma(x),\sigma(y)}, & agar \quad \sigma\in\Omega^{a},\\ \infty, & agar \quad \sigma\notin\Omega^{a}.\end{cases}$$

$t: x\in V\to t_x=(t_{i,x}, i\in\Phi)\in R_+^4-V$ to‘plamda aniqlangan vektor qiymatli funksiya bo‘lsin.

$\Omega_{V_n}^{a}$ da quyidagicha aniqlangan $\mu^{(n)}, n=1,2,...$ ehtimollik o‘lchovlari ketma-ketligini qaraymiz:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n)=\frac{1}{Z_n}\prod_{\langle x,y\rangle\in V_n}P_{\sigma_n(x),\sigma_n(y)}\prod_{x\in W_n}t_{\sigma_n(x),x},\tag{5}$$

D.Gandolfo, O‘.A.Roziqov, J.Ruizlarning ishlarida quyidagi teorema isbotlangan.

8-teorema. (5) ko‘rinishda aniqlangan $\mu^{(n)},\ n=1, 2, 3,...$ ehtimollik o‘lchovlari ketma-ketligi muvofiqlashgan bo‘lishi uchun har qanday $x\in V\setminus\{x_0\}$ uchda quyidagi tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir:

$$z_{i,x}=\prod_{y\in S(x)}\frac{P_{i,0}+P_{i,1}z_{1,y}+P_{i,2}z_{2,y}+P_{i,3}z_{3,y}}{P_{0,0}+P_{0,1}z_{1,y}+P_{0,2}z_{2,y}+P_{0,3}z_{3,y}},\tag{6}$$

bu yerda $z_{i,x}=t_{i,x}/t_{0,x}, \quad i=1, 2, 3.$

3.2 -paragrafda $G_{umuml.\ kalit}=\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2)\}$ hol uchun Gibbs o‘lchovining yagonalik sharti topilgan.

Endi $G_{\text{tayoq}}, G_{kalit}, G_{umuml.\ kalit}$ hollar uchun davriy Gibbs o‘lchovlarining mavjudligini keltiramiz.

9-teorema. Agar $k^2\alpha(1-\beta)>1$ bo‘lsa, u holda HC-modelining G_{tayoq} holatiga mos kamida 3 ta $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o‘lchovlari mavjud.

10-teorema. $\alpha = \beta$ bo‘lsin. Agar $k^2\alpha^2 > 1$ bo‘lsa, u holda HC-modelining G_{kalit} holatiga mos kamida 3 ta $G_k^{(2)}$- davriy Gibbs o‘lchovlari mavjud.

11-teorema. $\alpha = \beta$ bo‘lsin. Agar $k^2(\alpha - d)^2 > 1$ bo‘lsa, u holda HC-modelining $G_{umuml.kalit}$ holatiga mos kamida 3 ta $G_k^{(2)}$- davriy Gibbs o‘lchovlari mavjud.

XULOSA

Mazkur dissertatsiya Keli daraxtida aniqlangan HC modellar uchun Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflashga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Keli daraxtida aniqlangan uchta spin qiymatli HC modeli Gamiltonianining aniq ko‘rinishi topilgan. Bu modelga mos Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflash masalasi funksional tenglamalar sistemasining barcha echimlari to‘plamini tavsiflashga keltirilgan. Ba’zi xususiy hollarda Gibbs o‘lchovi yagona bo‘lishining yetarli shartlari topilgan;
2. Keli daraxtida aniqlangan o‘zaro ta’sir radiusi ikki bo‘lgan model yaqin qo‘shni ta’sirli HC-modelni o‘rganishga keltirilgan. Bu modelga mos Gamiltonianning aniq ko‘rinishi topilgan hamda parametrlarning ba’zi shartlarida kamida uchta translyasion-invariant Gibbs o‘lchovlari mavjudligi ko‘rsatilgan;
3. Sanoqsizta H_A-davriy Gibbs o‘lchovi mavjudligi isbotlangan;
4. Keli daraxtida aniqlangan to‘rtta xolatli HC modeli uchun Gibbs o‘lchovning yagonalik sharti topilgan va davriy Gibbs o‘lchovlari mavjudligi ko‘rsatilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАДГОЗИЕВ ГАНИЖОН ТУРДИБАЕВИЧ

ГИББСОВСКИЕ МЕРЫ ДЛЯ НС МОДЕЛЕЙ ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

01.01.01 – математик анализ

АВТОРЕФЕРАТ диссертации доктора философии (PhD) по ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образавания, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за №B2022.4.PhD/FM149.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И. Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Кудейбергенов Каримберген Кадирбергенович** доктор физико-математических наук, профессор
	Ботиров Голибжон Исроилович доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	Наманганский Государственный Университет

Защита диссертации состоится «13» июня 2023 года в 17:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 161). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «26» мая 2023 года.
(протокол рассылки № 2 от «26» мая 2023 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

А.Азамов
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н, старший научный сотрудник

У.У.Жамилов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Известно, что теория мер Гиббса играет важную роль во многих научных и практических исследованиях, направленных на изучение термодинамических свойств физических и биологических систем. Закон распределения для систем, находящихся в тепловом равновесии с окружающей средой при постоянной температуре, впервые был изучен американским ученым Дж. Гиббсом, и такие распределения получили название меры Гиббса. Можно сказать, что развитие теории мер Гиббса для данных моделей на решетчатых системах началось с исследований Р.Л.Добрушина, О.Е.Ланфорда и Д.Рюэля. Хотя изучение меры Гиббса началось с термодинамических проблем, сегодня их приложения можно найти в различных областях науки, таких как биология, генетика и сервисная инженерия.

В последние годы в нашей стране особое внимание уделяется направлениям науки с практическими приложениями, в том числе развитию теории гиббсовских мер, являющейся основным объектом изучения проблем статистической физики и механики. Следует отметить, что построение меры Гиббса для данной модели и проверка наличия фазовых переходов являются основными задачами теории гиббсовских мер. В этом случае каждой определенной мере Гиббса соответствует одна фаза физической системы. Изменение числа мер от определенного значения температуры означает, что физическая система переходит из одного состояния в другое. Накладывая дополнительные условия на конфигурационное пространство, можно найти оптимальное решение некоторых вопросов работоспособности. Поэтому описание множества мер Гиббса в пространстве конфигураций с такими ограничениями является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране уделяется внимание современным направлениям теории мер с научным и практическим применением фундаментальных наук. В частности, в последние годы были достигнуты значительные результаты в плане построения трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для классических моделей, определенных на решетчатых системах с не более чем счетными значениями спина, и решения практических задач теории меры. В качестве основных задач и направлений деятельности математической науки определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «математическая физика, функциональный анализ и теория мер»[1]. Важно разработать теорию мер Гиббса, соответствующих моделям статистической физики, заданным в решетчатых системах, со значениями спина не более счетных значений, чтобы использовать научные результаты в смежных областях науки для обеспечения

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

реализации решения.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV “Математика, механика и информатика”.

Степень изученности проблемы. Общее определение понятия меры Гиббса первоначально было дано в научных работах Р. Л. Добрушина, О. Э. Ланфорда и Д. Руэля. Исходные распределения, являющиеся частным случаем понятия меры Гиббса, можно найти в научных исследованиях Н.Н.Боголюбова и Б.И.Хатсета. Теория мер Гиббса была изучена в научных исследованиях Р. Бекстера, Х. О. Георги, В. А. Малышова, Р. А. Минлоса, К. Престона, Д. Рюэля, Я. Г. Синая, М. Бауса, С. Ф. Неджеро, Г. Галлавотти, Ф. Бонетто, Г. Джентиле, Джин Зин-Джастина, Ф. Мухаммедова, Н. Н. Ганиходжаева и У. А. Розикова. Р. Л. Добрушин доказал теорему о существовании предельной меры Гиббса. Впервые эта теорема была использована К. Х. Хининым для решетчатых моделей в квантовой теории поля. Теория фазовых переходов в физических системах отражена в научных трудах С. А. Пирогова, Я. Г. Синая, Р. А. Минлоса, Н. Датта, Р. Фернандеса, Ж. Фриоклича, А. Д. Энтер и М. Захрадника.

Теорема о существовании меры Гиббса для конфигурационных моделей с бесконечным числом значений спина была доказана Дж. Лебовицем и Э. Презутти. Научные исследования, связанные с моделями НС, представлены Г. Р. Брайтуэллом, А. Э. Мазелем, Ф. Спитцером, Р. Винклером, Д. Галвином, Дж. Каном, Ф. Келли, Г. Лоусом, Р. Митрой, К. Рамананом и встречаются в научных трудах А.Сенгупта, И.Зайдинса, Ю.М.Сухова, Дж.Мартина, У.А.Розикова и других ученых. Анализ предельных мер Гиббса для различных классов решетчатых моделей на основе метода контуров Пайерлса дан в работах Ф. А. Березина, С. А. Пирогова, Я. Г. Синая, Дж. Джинибре, А. Гроссмана, Д. Рюэля, Р. Л. Добрушина, В. Герцика, О. Дж. Хейлмана, Э. М. Лиеба, М. Кассандро, М.Д.Фано, Г.Оливерери, Г.Ботирова и других ученых.

Предельные меры Гиббса для модели Поттса освещены в научных работах Н.Н.Ганиходжаева, У.А.Розикова, Ф.Вагнера, Д.Гренсинга, Дж.Хайде, Ф.Ю.Ву. Трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса изучались в основном в упомянутых выше работах. Понятие слабо периодических мер

Гиббса было введено У.А.Розиковым и М.М.Рахматуллаевым. Доказано, что такие меры существуют для модели Изинга на дереве Кэли. Ю.М.Сухов, У.А.Розиков, Р.М.Хакимов, Ш.А.Шоюсупов и др. провели научные исследования для модели SOS, являющейся обобщением модели Изинга для анализа трансляционно-инвариантных и периодических гиббсовских мер. Следует отметить, что, несмотря на научные исследования в этом направлении многих ученых, как указано выше, множество предельных мер Гиббса для любой модели не было полностью описано.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательского учреждения, в котором выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановыми темами научно-исследовательских работ Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» (2012-2016 гг).

Цель исследования являются проверить существование предельных мер Гиббса для моделей HC (Hard-Core) с конечным числом значений спина и описать множества трансляционно-инвариантных и периодических гиббсовских мер.

Задачи исследования:

проверить существование меры Гиббса для модели HC с тремя состояниями;

построить трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели HC с радиусом взаимодействия два на дереве Кэли второго порядка;

дать описывающий набор периодических мер Гиббса для модели HC с четырьмя состояниями.

Объектом исследования. Дерево Кэли, HC-модели с тремя/четырьмя состояниями, HC-модель с радиусом взаимодействия два, трансляционно-инвариантная мера Гиббса, периодические меры.

Предмет исследования теория групп и графов, теория мер, теория динамических систем с дискретным временем, функциональный анализ и теория марковских полей.

Методы исследования. В работе использовались методы, основанные на теории марковских случайных величин и рекуррентных уравнениях этой теории. Также использовались теория мер, нелинейный анализ, линейная алгебра и принципы сжимающего отображения.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

найдено достаточное условие единственности меры Гиббса для модели HC с тремя состояниями, заданной на дереве Кэли второго порядка;

исследована модель с радиусом взаимодействия два для изучения модели HC, при этом показано наличие не менее трех трансляционно-инвариантных мер Гиббса в некоторых значениях параметров;

для модели HC доказано, что существует несчетное число периодических мер Гиббса, соответствующих нормальному делителю индекса два в группового представления дерева Кэли. Кроме того, доказано, что эти меры не являются трансляционно-инвариантными и два периодическими;

доказано существование не менее трех мер Гиббса два периодических (не трансляционно-инвариантных) для модели HC с четырьмя состояниями на дереве Кэли второго порядка.

Практические результаты исследования. Полученные результаты и методы, использованные в диссертации, могут быть использованы в качестве учебного курса для магистрантов и базовых докторантов в высших учебных заведениях. Кроме того, точное вычисление значений параметров, обеспечивающих наличие фазовых переходов для моделей с неединственными мерами Гиббса, может быть использовано для решения задач теории обслуживания и теории информации.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов функционального анализа, теории марковских случайных полей и компьютерной программы Maple, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что научные результаты по описанию множества периодических и трансляционно-инвариантных мер Гиббса, соответствующих HC-моделям, используются при исследовании термодинамических свойств некоторых физических и биологических систем.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что методы построения мер Гиббса для модели с конечным значением спина и радиусом взаимодействия два, позволяют проверить существование меры Гиббса, соответствующей модели Поттса, при определенных условиях параметров.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Методы построения периодических мер Гиббса для HC модели использовались в зарубежном грантовом проекте № G0003247 «Хаотические и смешанные p-адические динамические системы, связанные с ренормированными группами решетчатых моделей» для описания нового множества гиббсовских мер для моделей с конкурирующими взаимодействиями (Справка Университета Объединенных Арабских Эмиратов, от 26 апреля 2023 года, ОАЭ). Применение научных результатов позволило изучить термодинамические свойства некоторых физических и биологических систем.

Методы описания множества гиббсовских мер для модели с конечным спинами и радиусом конкурирующего взаимодействия равным двум, были использованы в фундаментальном проекте ЁОТ-Фтех-2-18-78 «Динамические и термодинамические системы в неаменабельных графах», при исследованиях периодических мер Гиббса для модели Поттса со счетном множеством спина (справка Института математики им. В.И. Романовского от 1 мая №2/174 2023 г.). Применение научного результата позволило доказать существование и единственность меры Гиббса при определенных условиях параметров для модели Поттса на дереве Кэли второго порядка.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 2 международной и 8 республиканских научных конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 1 опубликована в зарубежном журнале, 5 – в республиканских научных изданиях и 10 тезисов докладов в материалах научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на одинадцать параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 83 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоритическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения и HC-модель с тремя состояниями»**, дан краткий обзор работ, примыкающих к теме диссертации, излагаются постановка задачи и проблемы, которые решены в диссертации. Приведены важные понятия, необходимые для получения основных результатов, связанных с теорией мер Гиббса. Кроме того, в этой главе изучены меры Гиббса для HC- модели с тремя значениями спина.

В параграфе 1.1 приведены необходимые определения, конструкция предельных гиббсовских мер, ассоциированных с данным гамильтонианом H, определенным на дереве Кэли $\Gamma^k(V,L)$, и некоторые известные факты.

Известно, что дерево Кэли $\Gamma^k(V,L)$ порядка k есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, здесь $V-$множество вершин и $L-$множество ребер.

Вершины x и y называются ближайшими соседями, если существует ребро $l\in L$ и соединяющие их, т.е $l=\langle x,y\rangle$.

Расстояние $d(x,y),\ x,y\in V,$ на дереве определяется формулой

$$d(x,y) = min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y\in V\},$$

где $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle$ – ближайшие соседи.

Для фиксированного $x^0 \in V$ введём обозначение

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, \ V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m = \{x \in V : d(x^0, x) \le n\},$$

$$L_n = \{\langle x, y\rangle \in L : x, y \in V_n\}.$$

Из работы Н.Н.Ганиходжаева известно следующее утверждение.

Утверждение 1. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k.

Здесь группа G_k является свободным произведением $k+1$ циклических групп $\{e, a_i\}$ второго порядка с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$.

Пусть $2 \le |\Phi| < +\infty$. Отображение $\sigma : V \to \Phi$ называется конфигурацией. Множество всех конфигураций на V обозначается через $\Omega_V = \Phi^V$.

Аналогично можно определить конфигурации на любом подмножестве A множества V, т.е $\sigma_A : A \to \Phi$, и множество всех конфигурацией на A обозначается через $\Omega_A = \Phi^A$.

Пусть $K-$семейство всех конечных подмножеств множества V.

Для любого $A \in K$ и фиксированного $\sigma_A \in \Omega_A$ определим $\{\sigma \in \Omega : \sigma|_A \equiv \sigma_A\}$ которое называется *цилиндирическим* множеством.

$\sigma-$алгебра, порожденная цилиндирическими множествами, обозначается через $\mathbf{B}$. Рассмотрим конфигурацию

$$\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V\setminus A}(x) = \begin{cases} \sigma(x), & \textit{если} \ \ x \in A, \\ \tilde{\sigma}(x), & \textit{если} \ \ x \in V \setminus A. \end{cases}$$

Определение 1. Вероятностная мера μ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathbf{B})$ называется предельной мерой Гиббса, если для любого конечного $A \subset V$ имеет место

$$\mu\{\sigma_A \mid \tilde{\sigma}_{V\setminus A}\} = \frac{e^{-\beta H(\sigma_A | \tilde{\sigma}_{V\setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

где $\beta = \dfrac{1}{T}$, $T > 0-$температура.

В параграфе 1.2 мы рассмотрим HC (hard-core)- модель, в которой каждой вершине x ставится в соответствнно одно из значений $\sigma(x) \in \{0,1,2\}$. Значения $\sigma(x) = 1, 2$ показывают, что вершина x "занята" , а значение $\sigma(x) = 0$ что вершина x "вакантна".

Определение 2. Конфигурация σ называется допустимой если (на дереве в V_n или W_n), $\sigma(x)\sigma(y) \ne 1, \sigma(x)\sigma(y) \ne 4$ для всех ближайших соседей x, y.

Обозначим множество всех допустимых конфигураций через Ω^a ($\Omega^a_{V_n}$ и $\Omega^a_{W_n}$).

Введем обозначение $\langle x, y, z\rangle$, если $\langle x, y\rangle$, $\langle y, z\rangle$, $x, y, z \in V$.

Пусть $P_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)}$ – вероятность допустимой конфигурации $\{\sigma(x),\ \sigma(y),\ \sigma(z)\}$, где $P_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} \geq 0$, $\sum\limits_{\sigma(x),\sigma(y),\sigma(z)} P_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} = 1$ заданные числа.

Определим матрицу

$$P_m = (P_{mij})_{i,j=0}^{2} = \begin{pmatrix} P_{m00} & P_{m01} & P_{m02} \\ P_{m10} & P_{m11} & P_{m12} \\ P_{m20} & P_{m21} & P_{m22} \end{pmatrix}, \quad m = 0,1,2.$$

Для HC- модели с допустимостью конфигурации получим

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{000} & P_{001} & P_{002} \\ P_{010} & 0 & P_{012} \\ P_{020} & P_{021} & 0 \end{pmatrix},\ P_1 = \begin{pmatrix} P_{100} & P_{101} & P_{102} \\ 0 & 0 & 0 \\ P_{120} & P_{121} & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} P_{200} & P_{201} & P_{202} \\ P_{210} & 0 & P_{212} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан HC- модели определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = \begin{cases} -\sum\limits_{\langle x,y,z\rangle; x,y,z\in V} \ln P_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)}, & \text{если} \quad \sigma \in \Omega^a, \\ +\infty, & \text{если} \quad \sigma \notin \Omega^a. \end{cases}$$

Пусть $z_l : l \in L \mapsto z_l \in R^7_+$ – векторнозначная функция на V, где $z_l = (z_{\varepsilon,\delta,l},\ \varepsilon,\delta = 0,1,2,\ \varepsilon\delta \neq 1,\ \varepsilon\delta \neq 4)$

Для $n = 1,2,...$ рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на $\Omega^a_{V_n}$, определноное как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{\langle x,y,z\rangle, x,y,z\in V_n} P_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} \prod_{l=\langle x,y\rangle: x\in W_{n-1}, y\in S(x)} z_{\sigma(x),\sigma(y),l}, \qquad (1)$$

где Z_n – нормирующая константа.

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для любых $n \geq 2$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega^a{}_{V_{n-1}}$ верно равенство:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) 1(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^a_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}),$$

где

$$1(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^a_{V_n}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^a_{V_n}, \\ 0, & \text{если} \quad \sigma_{n-1} \vee \omega_n \notin \Omega^a_{V_n}. \end{cases}$$

В этом случае, по теореме Колмогорова, существует единственная мера μ на пространстве (Ω^a, B), такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Omega^a_{V_n}$

$$\mu(\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n).$$

Теорема 1. Последовательность вероятностнных мер $\mu^{(n)}$, $n=1,2,...$, в (1) является согласованной тогда и только тогда, когда для любого $x\in V\setminus\{x_0\}$ имеют место следующие равенства:

$$z_{01,x}=\prod_{y\in S(x)}\frac{P_{010}z_{10,y}+P_{012}z_{12,y}}{P_{000}+P_{001}z_{01,y}+P_{002}z_{02,y}},$$
$$z_{02,x}=\prod_{y\in S(x)}\frac{P_{020}z_{20,y}+P_{021}z_{21,y}}{P_{000}+P_{001}z_{01,y}+P_{002}z_{02,y}},$$
$$z_{10,x}=\prod_{y\in S(x)}\frac{P_{100}+P_{101}z_{01,y}+P_{102}z_{02,y}}{P_{000}+P_{001}z_{01,y}+P_{002}z_{02,y}},$$
$$z_{12,x}=\prod_{y\in S(x)}\frac{P_{120}z_{20,y}+P_{121}z_{21,y}}{P_{000}+P_{001}z_{01,y}+P_{002}z_{02,y}},$$
$$z_{20,x}=\prod_{y\in S(x)}\frac{P_{200}+P_{201}z_{01,y}+P_{202}z_{02,y}}{P_{000}+P_{001}z_{01,y}+P_{002}z_{02,y}},$$
$$z_{21,x}=\prod_{y\in S(x)}\frac{P_{210}z_{10,y}+P_{212}z_{12,y}}{P_{000}+P_{001}z_{01,y}+P_{002}z_{02,y}},$$

где $z_{\varepsilon\delta,y}=\dfrac{z_{\varepsilon,\delta,<x,y>}}{z_{0,0,<x,y>}}$, $\varepsilon,\delta=0,1,2.$

В параграфе 1.3 изучено в некоторых частных случаях условие единственности меры Гиббса.

Во второй главе диссертации, названной **«Меры Гиббса для одной модели с радиусом взаимодействия два»**, изучена модель НС с радиусом взаимодействия два на дереве Кэли, с активностью $\lambda>0$. Задача описания гиббсовских мер рассматриваемой модели сведена к решению системы функциональных уравнений. Для этой модели найдены трансляционно-инвариантная и периодическая меры Гиббса.

Пусть $\Phi-$конечное множество. Известно, что конфигурация σ на V определяется как функция $x\in V\to\sigma(x)\in\Phi.$ Обозначим через $\Omega=\Phi^V$ множество всех конфигураций, определенных в множестве V.

Пусть $A\subset V$. Через $|A|$ обозначим число элементов множества A.

Обобщенный символ Кронекера как функцию

$$U(\sigma_A):\Omega_A\to\{|A|-1,|A|-2,\ldots,|A|-min\{|A|,|\Phi|\}\}$$

определим следующим образом:

$$U(\sigma_A)=|A|-|\sigma_A\cap\Phi|,$$

где $A\subset V$ и $|\sigma_A\cap\Phi|-$число различных значений $\sigma_A(x),x\in A.$

Такие модели известны из работ У. А. Розикова.

В второй главе диссертации рассмотрен случай, когда $\Phi=\{-1,1\}$ и $|A|=4$. Обозначим через M множество всех шаров $b(x)=\{y\in V: d(x,y)\le 1\}$ радиусом 1.

Гамильтониан определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = -J\sum_{b\in M} U(\sigma_b), \tag{2}$$

где $J>0$.

Основная проблема для данного (2) гамильтониана - это описание отвечающих ему мер Гиббса. Для модели Изинга на дереве Кэли эта задача изучена достаточно полно. Эта модель контурным методом изучена в работе У. А. Розикова.

Для $x\in V$ положим $x_{\downarrow} = \{y\in V : \langle x,y\rangle\}\setminus S(x)$, где $S(x)-$множество "прямых потомков" точки $x\in V$.

Пусть $b(x) = \{x, xa_1, xa_2, xa_3\}$ и $\sigma_{b(x)} = \{\sigma(x), \sigma(xa_1), \sigma(xa_2), \sigma(xa_3)\}$.

Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1}\exp\left\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{b(x),\sigma_{b(x)}}^{\sigma_{b(x_{\downarrow})}}\right\}. \tag{3}$$

Следующая теорема выражает условие согласованности для мер вида $\mu^{(n)}(\sigma_n)$.

Теорема 2. Пусть $k=2$. Последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$, $n=1,2,...$ в (3) является согласованной тогда и только тогда, когда для любого $a\in M$ выполняются следующие равенства:

$$y_{a,0} = y_{a,6} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}\cdot\frac{\lambda y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},$$

$$y_{a,1} = y_{a,7} = \frac{\lambda y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}\cdot\frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},$$

$$y_{a,2} = y_{a,8} = \frac{y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}\cdot\frac{y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},$$

$$y_{a,3} = y_{a,9} = \frac{\lambda y_{b,3} + y_{b,4} + 1}{y_{b,0} + y_{b,1} + y_{b,2}}\cdot\frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}},$$

$$y_{a,4} = y_{a,10} = \frac{\lambda y_{c,3} + y_{c,4} + 1}{y_{c,0} + y_{c,1} + y_{c,2}}, \quad y_{a,5} = 1,$$

где $\lambda = \exp\{J\beta\}$, $\beta = 1/T$, $y_{a,i} = \exp(h_{a,i} - h_{a,11})$, $i = \overline{0,10}$.

В параграфе 2.3 представлена классификация трансляционно-инвариантных мер Гиббса модели, заданной в виде (1).

Меры, соответствующие решениям вида $y_{a,i} = y_i$ для всех $a\in M$ и $i = 0, 1, 2, 3, 4$ уравнений в теореме 2, называются трансляционно-инвариантными (ТИ) мерами Гиббса.

Теорема 3. Пусть $k=2$. Для модели (2) существует $\lambda_{cr}(\approx 1{,}8055)$ такое, что при $\frac{11-\sqrt{21}}{8} < \lambda < \lambda_{cr}$ существует не менее одной ТИ меры Гиббса, при $\lambda = \lambda_{cr}$ не менее двух, а при $\lambda_{cr} < \lambda < \frac{11+\sqrt{21}}{8}$ существует не менее трех ТИ мер Гиббса.

Теорема 4. При $\lambda_{cr} \le \lambda < \frac{11+\sqrt{21}}{8}$ существует континуум нетрансляционно- инвариантных мер Гиббса.

Предположим, что

$$y_{a,0} = y_{a,3}, \quad y_{a,1} = y_{a,4}, \quad y_{a,2} = 1, \quad \forall a \in M. \tag{4}$$

Тогда из уравнений теоремы 2 получаем уравнение вида $y^3 + (1-\lambda)y^2 - 1 = 0$. Через μ_0 обозначается ТИ мера Гиббса, соответствующая решению уравнения $y^3 + (1-\lambda)y^2 - 1 = 0.$

В параграфе 2.4 приведена классификация условий некрайности мер μ_0. Следующая теорема дает некрайности условий меры μ_0.

Теорема 5. Для модели (2) при выполнении условий (4) существует $\lambda' \ (\approx 2.6639)$ такое, что при $\lambda > \lambda'$ мера μ_0 не является крайней.

В параграфе 2.5 при некоторых условиях $y_{a,0} = y_{a,3}, \quad y_{a,1} = y_{a,4}, \quad y_{a,2} = 1, \quad \forall a \in M$ представлена классификация периодических мер Гиббса .

Определение 3. Пусть H_0-подгруппа группы G_k. Совокупность векторов $h = \{h_a = (h_{a,0}, h_{a,1}) : a \in G_k\}$ называется H_0-периодической, если $h_{ya,i} = h_{a,i}$ для любых $a \in G_k$ и $y \in H_0$, $i = 0,1$.

Определение 4. Мера Гиббса, соответствующая H_0-периодической совокупности векторов , называется H_0-периодической.

Пусть $G_k^{(2)}$ - подгруппа группы G_k, состоящая из слов четной длины. В работах Н.Н.Ганиходжаева указано, что индекс группы $G_k^{(2)}$ является индексом подгруппы 2.

Теорема 6. Для модели (2) при всех $\lambda > 0$ и выполнении условия (4) существует единственная $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса. Более того, эта мера совпадает с ТИ- мерой Гиббса.

Число букв $a_i, i = \overline{1, k+1}$, участвующих в несократимой записи слова x, обозначим $\omega_x(a_i)$.

Пусть $\varnothing \ne A \subset N_2 = \{1,2,3\}$ и $H_A = \{x \in G_2 : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{четное число}\}$.

Теорема 7. Для модели (2) при условии (4) существует несчетное число

H_A -периодических мер Гиббса. Более того, эти меры не являются ТИ-мерами и $G_k^{(2)}$ -периодическими.

В третьей главе диссертации, названной **«Условия единственности меры Гиббса для одной НС-модели на дереве Кэли»**, изучены условие единственности меры Гиббса и периодические меры Гиббса для НС – модели с четырьмя состояниями на дереве Кэли. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для этой модели изучены Д. Гандольфо, У. А. Розиковым и Дж. Руизом.

В параграфе 3.1 даны необходимые определения и некоторые известные факты.

Рассмотрим три типа плодородных графов с четырьмя вершинами $\Phi = \{0, 1, 2, 3\}$, которые имеют следующий вид

$$G_{палка} = \{(0, 1), (0, 3), (2, 3)\}$$
$$G_{ключ} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2)\}$$
$$G_{обобщ\ ключ} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2)\}.$$

Определение 5. Конфигурация σ называется G-допустимой конфигурацией на дереве Кэли, если $(\sigma(x), \sigma(y))\}$ – ребро G для любой ближайшей пары соседей x, y из V.

Обозначим множество всех допустимых G конфигураций через Ω^a.

Определение 6. Граф называется плодородным, если существует набор активности P такой, что для соответствующего гамильтониана имеется не менее двух трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Рассмотрим матрицу

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{pmatrix},$$

где $P_{i,\,j} > 0$, если $(i, j) \in G$; $P_{i,\,j} = 0$, если $(i, j) \notin G$ и $\sum\limits_{j\in\Phi} P_{i,\,j} = 1$.

Для G и P Гамильтониан НС- модели определяется следующим образом

$$H(\sigma) = \begin{cases} \sum\limits_{<x,\, y>} \log P_{\sigma(x),\sigma(y)}, & если \quad \sigma \in \Omega^a, \\ \infty, & если \quad \sigma \notin \Omega^a. \end{cases}$$

Пусть $t : x \in V \to t_x = (t_{i,x}, i \in \Phi) \in R_+^4$ – векторнозначная функция на V.

Для $n = 1,2,...$ рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{\langle x,y\rangle \in V_n} P_{\sigma_n(x),\sigma_n(y)} \prod_{x\in W_n} t_{\sigma_n(x),x}. \qquad (5)$$

Из работы Д. Гандольфо, У. А. Розикова и Дж. Руизам известна следующая теорема.

Теорема 8. Последовательность вероятностнных мер $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, 3,...$ в

(5)- согласованная тогда и только тогда, когда для любого $x \in V \setminus \{x_0\}$ имеют место следующие равенства:

$$z_{i,x} = \prod_{y\in S(x)} \frac{P_{i,0} + P_{i,1}z_{1,y} + P_{i,2}z_{2,y} + P_{i,3}z_{3,y}}{P_{0,0} + P_{0,1}z_{1,y} + P_{0,2}z_{2,y} + P_{0,3}z_{3,y}}, \qquad (6)$$

где $z_{i,x} = t_{i,x} / t_{0,x}, \quad i = 1, 2, 3.$

В параграфе 3.2 найдено условие единственности меры Гиббса для случая $G_{обобщ\ ключ} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2)\}$.

Теперь представим существование периодических измерений Гиббса для случаев $\mathrm{G}_{\text{палка}}, G_{ключ}, G_{обобщ\ ключ}$.

Теорема 9. Если $k^2\alpha(1-\beta) > 1$, то для НС- модели случае $\mathrm{G}_{\text{палка}}$ существуют по меньшей мере три $G_k^{(2)}$ периодические меры Гиббса.

Теорема 10. Пусть $\alpha = \beta$. Если $k^2\alpha^2 > 1$, то для НС- модели случае $\mathrm{G}_{\text{ключ}}$ существуют по меньшей мере три $G_k^{(2)}$- периодические меры Гиббса.

Теорема 11. Пусть $\alpha = \beta$. Если $k^2(\alpha - d)^2 > 1$, то для НС- модели случие $\mathrm{G}_{\text{обобщ ключ}}$ существуют по меньшей мере три $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению меры Гиббса для НС-моделей на дереве Кэли.

Основные результаты исследования следующие:

1. Найдено точное представление гамильтониана НС-модели с тремя значениями спина, определенными на дереве Кэли. Задача изучения мер Гиббса этой модели состоит в решении системы функциональных уравнений. В некоторых частных случаях найдено достаточное условие единственности меры Гиббса.
2. Вводится модель с радиусом взаимодействия два, определенным на дереве Кэли, для изучения НС-модели с взаимодействиями ближайшего соседа. Найдено точное представление гамильтониана этой модели и показано существование не менее трех трансляционно-инвариантных мер Гиббса при некоторых параметрических условиях.
3. Доказано, что существует несчетное число H_A-периодических мер Гиббса.
4. Изучено условие единственности меры Гиббса и периодических мер Гиббса для НС- модели с четырьмя состояниями, определенных на дереве Кэли.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MADGOZIEV GANIJON TURDIBAYEVICH

GIBBS MEASURES FOR HC MODELS ON A CAYLEY TREE

01.01.01 – **Mathematical analysis**

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2022.4.PhD/FM149.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Rozikov Utkir Abdulloyevich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
Official opponents:	**Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
	Botirov Golibjon Isroilovich Doctor of physical and mathematical sciences, senior researcher
Leading organization:	**Namangan State University**

Defense will take place "13" June 2023 at 17:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered № 161). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «26» May 2023 year
(Mailing report № 2 on «26» May 2023 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

A.Azamov
Deputy Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Academician

A.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

U.U. Jamilov
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., senior researcher

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to check the existence of limiting Gibbs measures for HC (Hard-Core) models with a finite number of spin values and to describe the sets of translational-invariant and periodic Gibbs measures.

The objects of research are Cayley tree, HC-models with three/four states, HC-model with interaction radius two, translation-invariant Gibbs measure, periodic measures.

The scientific novelty of the research is as follows:

a sufficient condition for the uniqueness of the Gibbs measure for the HC model with three states given on a second-order Cayley tree is found;

in order to study HC model it has been studied a model with an interaction radius of two and it has been shown the existence at least three translation-invariant Gibbs measures for the model on some values of the parameters;

for the model HC it is proved that there are uncountable number of periodic Gibbs measures corresponding to a normal subgroup of index two. Moreover, it is proved that these measures are not translation-invariant and periodic;

the existence of at least three periodic (non translation-invariant) Gibbs measures for the four-state HC model on a second-order Cayley tree is proved.

Implementation of research results. The results obtained in the dissertation were used in the following research projects:

the methods for constructing of periodic Gibbs measures for the HC model were used in the foreign grant project No. G0003247 "Chaotic and mixed p-adic dynamical systems associated with renormalized groups of lattice models" to describe a new set of Gibbs measures for models with competing interactions (Certificate of the University of the United Arab Emirates dated April 26, 2023, UAE). The application of scientific results made it possible to study the thermodynamic properties of some physical and biological systems;

the methods for describing the set of all Gibbs measures for a model with finite spins and a radius of competing interaction two were used in the fundamental project YoOT-Ftex-2018-78 "Dynamical and thermodynamic systems in non-amenable graphs", in the study of periodic Gibbs measures for the Potts model with countable spin set (Certificate of the V.I. Romanovsky Institute of Mathematics dated may 1, 2023). The application of the scientific result made it possible to prove the existence and uniqueness of the Gibbs measure under certain parameter conditions for the Potts model in the second-order Cayley tree.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters divided into eleven paragraphs, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 83 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Розиков У.А., Мадгозиев Г.Т. Неединственность меры Гиббса для одного гамильтониана с радиусом взаимодействия два // ДАН РУз. Ташкент. 2010. – №4. – С. 3–5. (01.00.00; № 7).
2. Розиков У.А., Мадгозиев Г.Т. Неединственность меры Гиббса для одной модели на дереве Кэли // Теор. и мат. физ, Москва. 2011. – Т.167. – №2. – С. 311–322. (3.Scopus. IF=0.371)
3. Мадгозиев Г.Т. Условие единственности меры Гиббса для одной HC-модели на дереве Кэли. // УзМЖ, 2012. – №2. – С. 68–76. (01.00.00; № 6).
4. Мадгозиев Г.Т. О двух HC-моделях с четырьмя состояниями на дереве Кэли. // УзМЖ, 2013. – №2. – С. 44–50. (01.00.00; № 6).
5. Мадгозиев Г.Т. Периодические меры Гиббса с периодом два для HC-моделей на дереве Кэли. // УзМЖ, 2015. – №2. – С. 74–83. (01.00.00; № 6).
6. Мадгозиев Г.Т. Условия некрайности гиббсовской меры для одной HC-модели. // Бюллетень Института Математики, 2021. Vol 4– №6. – С. 92–99. (01.00.00; № 17).

II бўлим (II часть; part II)

7. Мадгозиев Г.Т. Неединственность меры Гиббса для одной модели на дереве Кэли // «Ёш математикларнинг янги теоремалари -2009». Тезис докладов конференции-Наманган, 2009.- 16–17 ноября. – С. 12–14.
8. Мадгозиев Г.Т. Меры Гиббса для одной модели на дереве Кэли // «Ҳозирги замон математикаси ва уни ўқитишни долзарб муаммолари». Олий ўқув юртларини илмий амалий конференцияси. ТДПУ.Ташкент, 2010. – Б. 92.
9. Мадгозиев Г.Т. Периодические меры Гиббса для одного гамильтониана на дереве Кэли // «Современные проблемы математики». Тезис докладов Республиканской научной конференции – Карши, 2011, 22-23 апреля.- С. 119-122.
10. Мадгозиев Г.Т. Несчетное число периодических мер Гиббса для одного гамильтониана // «Предельные теоремы вероятностей и их приложения». Тезис докладов Республиканской научной конференции-Фергана, 2011, 10-12 мая.-С. 225-228.
11. Мадгозиев Г.Т. О мере Гиббса для одной HC-модели на дереве Кэли. // «Операторные алгебры и смежные проблемы». Тезис докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных

ученых.-Ташкент, 2012.- 12–14 сентября. – С. 174–176.

12. Мадгозиев Г.Т. Периодические меры Гиббса для одной НС-модели на дереве Кэли. // «Проблемы современной топологии и ее приложения ».Тезисы докладов Международной конференции. Ташкент- 2013.- 20–24 мая. – С. 184–187.
13. Мадгозиев Г.Т. Периодические меры Гиббса для одной НС-модели на дереве Кэли. // «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения». Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием из стран СНГ.Тошкент.,2013.,21-23 ноября.-С.315-316.
14. Мадгозиев Г.Т. Изучение не крайности гиббсовской меры для одной модели. // Современные методы математической физики и их приложения. Тезис докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. Тошкент,2015 ,15-17 апреля.-С. 46-48.
15. Мадгозиев Г.Т. Изучение не крайности гиббсовской меры для НС-модели. // «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа». Тезис докладов Республиканской научно- конференции и зарубежных учением. Бухара, 2021, 4-5 ноября.-С. 82-83.
16. Madgoziev G.T. On four state HC model on a Cayley tree. // «Limit theorems of probability theory and mathematical statistics». Tezis International conference -Tashkent, 2022.- 26–28 September. – P. 69–71.

Avtoreferat «O‘zbekiston matematika jurnali» tahririyatida o‘zbek, rus va ingliz tillardagi nusxalari tahrirdan o‘tkazilib, matnlari o`zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 29/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.