В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ЮСУПОВ БАХТИЁР БАХРОМБЕК ЎҒЛИ

ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ЛОКАЛ ВА 2-ЛОКАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШЛАРИ

01.01.06 – Алгебра

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2020 йил

УДК: 512.554.38, 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ЮСУПОВ БАХТИЁР БАХРОМБЕК ЎҒЛИ

ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ЛОКАЛ ВА 2-ЛОКАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШЛАРИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM230 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар: **Аюпов Шавкат Абдуллаевич**
физика-математика фанлари доктори, профессор, академик

Расмий оппонентлар: **Арзикулов Фарходжон Нематжонович**
физика-математика фанлари доктори

Курбанбаев Туўелбай Кадирбаевич
физика-математика фанлари номзоди

Етакчи ташкилот: **Термиз давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «22» июл соат 9:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100170 Тошкент ш., Мирзо Улиғбек тумани, Мирзо Улуғбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (+998 71) 262 7544, факс: (+998 71) 262 7357, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (104 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улуғбек тумани, Мирзо Улуғбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (+998 71) 262 7544).

Диссертация автореферати 2020 йил «18» июл куни тарқатилди.
(2020 йил «18» июлдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н

А.Р.Хаётов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси ўринбосари ф.-м.ф.д.

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда алгебраик масалаларга, жумладан операторлар алгебралари назарияси масалаларига келтирилади. Алгебраик масалалар квант механикасида элементар зарраларни, қаттиқ ва кристаллар хоссаларини ўрганишда, иқтисодиётда моделлаштириш муаммоларини таҳлил қилишда, биологияда аҳоли сони билан боғлиқ муаммоларни ўрганишда кенг тадбиқ қилинади. Маълумки, квадрат матрицалар одатий кўпайтириш амалига нисбатан ассоциатив алгебраларни ташкил қилади. Кейинчалик матрицалар алгебраларида янги амалларни аниқлаш орқали бир-бири билан узвий боғлиқ бўлган алтернатив, Ли ва Йордан алгебралари назариялари яратилди ва ривожлантирилди. Ўз навбатида бу алгебралар математиканинг турли соҳалари билан хам узвий боғлиқдир. Лейбниц алгебралари Ли алгебраларининг умумлашмаси хисобланиб, Ли алгебралари назариясининг кўпгина натижалари Лейбниц алгебраларига ҳам татбиқ этилади. Лейбниц алгебралари назариясини ўрганиш билан боғлиқ тадқиқотларнинг устувор йўналишларидан бири Ли алгебралари назариясида ўринли бўлган хосса ва натижаларни Лейбниц алгебралари учун текширишдан иборатдир.

Ҳозирги кунда жаҳонда дифференциаллашлар назарияси билан бир қаторда, оператор алгебраларида локал ва 2-локал дифференциаллашлар назарияси ҳам муҳим ҳисобланади. Сўнгги йигирма йил давомида фон Нейман алгебралари, $C*$-алгебралари ва $JB*$-учликларда локал ва 2-локал дифференциаллашлар назариясини ўрганиш бўйича самарали натижаларга эришилди. Локал дифференциаллашларни ўрганиш 1990 йилда Р.В.Кадисон ва Д.Р.Ларсон, ҳамда А.Р.Сарурлар томонидан бошланган. Локал дифференциаллашларни ўрганишга бўлган қизиқиш турли хил алгебралар учун Хохшилд когомологиясини ўрганиш орқали ҳам пайдо бўлган. Р.В.Кадисон локал акслантиришлар ўзига хос хусусиятларга эга бўлган дифференциаллашларни қуришда фойдали бўлиши мумкинлигини кўрсатиб, уларни ўрганиш усулларини яратган. Жумладан, фон Нейман алгебрасининг қўшма Банах M-бимодули учун ҳар бир локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш эканлигини исботлаган. Бу натижани Б.Е.Джонсон $C*$-алгебрадаги дифференциаллашларни ўрганишга тадбиқ қилиб, $C*$-алгебранинг ихтиёрий узлуксиз локал дифференциаллашлари оддий маънода дифференциаллаш эканлиги исботлаган. Шунингдек, Б.Е.Джонсон томонидан $C*$-алгебрадаги ихтиёрий локал дифференциаллашлар узлуксиз бўлиши исботланган. 1997 йилда П.Шемрл 2-локал автоморфизм ва 2-локал дифференциаллаш тушунчаларини киритди ва у $B(H)$ - чексиз ўлчамли сепарабел H Гилберт фазосида барча чегараланган чизиқли операторлар алгебрасида ҳар бир 2-локал автоморфизм(мос равишда, 2-локал дифференциаллаш) автоморфизм(мос равишда, дифференциаллаш) бўлишини исботлади. Таъкидлаш жоизки, П.Шемрл юқоридаги теоремани H фазо чекли ўлчамли бўлганда ҳам ўринли бўлишини таъкидлаган. Кейинчалик фон Нейман алгебралари учун 2-локал дифференциаллашларни Ш.А.Аюпов, К.К.Кудайбергенов, Ф.Н.Арзикулов, С.О.Ким, Ж.С.Ким, О.Б.Нуржанов ва А.К.Алаудиновлар ўрганишган. Ноассоциатов алгебралар жумладан, Лейбниц алгебралари учун локал ва 2-локал дифференциаллашларни ўрганиш ҳозирги куннинг долзарб муаммолардан бири хисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган амалий математика, информатика, рақамли иқтисодиёт фанларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, ноассоциатив алгебралар ва уларнинг операторларига доир фундаментал тадқиқотларнинг ривожланишига хам алоҳида эътибор қаратилди. Бу фундаментал тадқиқотлар доирасида Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал дифференциаллашларини ўрганиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланган[1] қарор ижросини таъминлашда хам операторлар алгебралари дифференциаллашлар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947 «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789 «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида»ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682 «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387 «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Сўнгги йилларда классик тизимларнинг ассоциатив бўлмаган аналоглари математика ва физиканинг кўплаб соҳаларида қўлланилиб келмоқда. Ли ва Лейбниц алгебралари каби баъзи ноассоциатив алгебралар учун локал операторлар, хусусан локал ва 2-

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

локал дифференциаллашлар тушунчалари ҳам кенг ўрганила бошлади. Ушбу тушунчаларга алоқадор асосий муаммолар ҳар бир локал (ёки 2-локал) автоморфизм ва дифференциаллаш оддий маънода автоморфизм ва дифференциаллаш бўладиган шартларни топиш, шунингдек, автоморфизм бўлмаган (мос равишда дифференциаллаш) локал ва 2-локал автоморфизмга эга алгебралар синфларини аниқлашдан иборатдир. Таъкидлаш жоизки, ноассоциатив алгебралар учун локал акслантиришларни ўрганиш, 2014 йилдаги Калифорния штатида бўлиб ўтган АҚШ-Ўзбекистон конференциясидаги профессор Ш.А.Аюпов ва профессор Е.Зелмановлар (Калифорния университети, Сан-Диего) ўртасидаги сухбатдан сўнг бошланган.

Характеристикаси нолга тенг алгебраик ёпиқ майдон устида чекли ўлчамли Ли алгебраларида локал ва 2-локал дифференциаллашлар ва автоморфизмга оид юртимизда бир қатор илмий изланишлар олиб борилиб, дастлабки натижалар Ш.А.Аюпов, К.К.Кудайбергенов, И.С.Рахимовларга тегишлидир. Улар томонидан ярим содда Ли алгебрасидаги ҳар бир 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш эканлиги ва ўлчами иккидан катта ихтиёрий нилпотент Ли алгебрасида дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллаш мавжудлигини исботланган. Кейинчалик Ш.А.Аюпов ва К.К.Кудайбергеновлар ярим содда Ли алгебраларидаги ҳар бир локал дифференциаллаш хам оддий маънода дифференциаллаш эканлигини исботладилар ва дифференциаллаш бўлмаган локал дифференциаллаши мавжуд бўлган чекли ўлчамли нильпотент Ли алгебраларига мисоллар келтирдилар. Содда Ли алгебралар учун 2-локал автоморфизмлар З.Чен ва Д. Ванглар томонидан ўрганила бошланиб, улар томонидан A_l, D_l ёки $E_k, (k = 6,7,8)$ алгебралар учун ҳар қандай 2-локал автоморфизм автоморфизм эканлиги исботланган. Кейинчалик, Ш.А.Аюпов ва К.К.Кудайбергеновлар томонидан ушбу натижа умумлаштирилиб, характеристикаси нол бўлган алгебраик ёпиқ майдон устуда берилган ихтиёрий чекли ўлчамли ярим содда Ли алгебрасининг ҳар қандай 2-локал автоморфизми автоморфизм эканлигини исботланди. Бундан ташқари, ихтиёрий чекли ўлчамли нильпотент Ли алгебрасида автоморфизм бўлмаган 2-локал автоморфизм мавжудлигини кўрсатилди. Ш.А.Аюпов ва К.К.Кудайбергеновлар баъзи чекли ўлчамли содда Ли ва Лейбниц алгебраларининг локал автоморфизмларини ўрганганлар.

Ноассоциатив алгебраларда локал ва 2-локал дифференциаллашлар ва автоморфизмларни ўрганиш бўйича жаҳон миқёсида хам бир қатор изланишлар олиб борилмоқда. Жумладан, Т.Бекер, Ж.Эскобар, С.Салас ва Р.Турдибаевлар уч ўлчамли содда Ли алгебрасининг локал автоморфизмлари тўплами автоморфизмлар ва анти-автоморфизмлар группаси билан усма-уст тушишини кўрсатишган бўлса, кейинчалик, М.Костантини ихтиёрий содда Ли алгебрасидаги чизиқли акслантириш локал автоморфизм бўлиши учун унинг автоморфизм ёки анти-автоморфизм бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботлади. Ли супералгебраларидаги локал ва 2-локал автоморфизмлар ва дифференциаллашларга доир натижаларни Х.Чен, Й.Ванг ва Ж.Нанларнинг ишларида кўриш мумкин. Ш.А.Аюпов, К.К.Кудайбергенов ва Б.А.Омировлар содда Лейбниц алгебраларида локал ва 2-локал дифференциаллаш ва автоморфизмларни ўрганиб, Ли алгебраларидаги каби натижаларни исботладилар. Қайд этиш жоизки, нильпотент, ечилувчан Лейбниц алгебралари ва чексиз ўлчамли Ли алгебралари учун локал ва 2-локал дифференциаллашлар муаммоси шу пайтгача очиқ муаммо ҳисобланар эди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф4-31 “Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар” (2017-2020 йиллар) ва В.И.Романовский номидаги Математика институтининг “YoOT-Ftex-2018-79, Лейбниц алгебраларининг тасвирлари” (2018-2019 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқотлар лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал дифференциаллашларини ўрганишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

чекли ўлчамли нилпотент Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал дифференциаллашларини ўрганиш;

чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал дифференциаллашларини тасвирлаш;

чексиз ўлчамли Ли алгебраларда 2-локал дифференциаллашларни аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал дифференциаллашлари, чексиз ўлчамли Ли алгебраларининг 2-локал дифференциаллашлари.

Тадқиқотнинг предмети нилпотент Лейбниц алгебралари, ечилувчан Лейбниц алгебралари, умумлашган Витт алгебралари, Вирасоро алгебраси, дифференциаллаш, локал дифференциаллаш, 2-локал дифференциаллаш.

Тадқиқотнинг усуллари: Диссертацияда ассоциатив бўлмаган алгебралар назарияси усуллари, инвариантлар назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

нол-филиформ Лейбниц алгебрасида ҳар бир 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш эканлиги исботланган;

p-филиформ Лейбниц алгебрасида дифференциаллаш бўлмагал локал ва 2-локал дифференциаллаш мавжудлиги кўрсатилган;

ечилувчан Лейбниц алгебраларининг локал дифференциаллашлари ўрганилган ва нилрадикали Абел алгебрасидан иборат бўлиб, тўлдирувчи фазонинг ўлчами максимал бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларида ҳар қандай локал дифференциаллаш дифференциаллаш эканлиги кўрсатилган;

нилрадикали модел алгебраси бўлиб, максимал тўлдирувчи фазога эга ечилувчан Лейбниц алгебраларида ҳар қандай локал ва 2-локал дифференциаллаш дифференциаллаш эканлиги кўрсатилган;

умумлашган Витт алгебралари ва Вирасоро алгебраларида ҳар қандай 2-локал дифференциаллаш дифференциаллаш эканлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Лейбниц алгебраларида локал, 2-локал диффернциаллашлар ва дифференциаллашлар ўртасида ўзаро боғлиқлик ўрнатилди.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Натижалар алгебра, дифференциаллашлар назарияси ва математик фикрлашнинг қатъий усулларидан фойдаланган ҳолда олинган. Олинган натижаларнинг исботлари математик жиҳатдан тўғри.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундаки, локал ва 2-локал дифференциаллашлар фазосининг баъзи Лейбниц алгебраларининг глобал диффернциаллашлар фазоси билан мослигини аниқлаш.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти нилпотент Лейбниц алгебраларида дифференциаллаш бўлмаган локал ва 2-локал дифференциаллашлар мавжудлигини кўрсатишдан иборат. Диссертацияда олинган натижалардан Лейбниц алгебраларини дифференциаллашлари назариясида фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Олинган натижалар қуйидаги илмий лойиҳаларида фойдаланилган:

Витт алгебрасининг ихтиёрий 2-локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлиши ҳақидаги натижа ОТ-4-27 «Йордан учликлари олд қўшма фазолари, сиғимлар фазолари тавсифлари ва функцияларни голоморф давом эттириш» лойиҳасида қўлланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 30 июндаги 89-03-2339-сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши AW^*-алгебраларининг 2-локал автоморфизмлари аниқлаш имконини берган;

ечилувчан Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал дифференциаллашлари таснифлари бўйича олинган натижалар ОТ-Ф4-82 + ОТ-Ф4-87 «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларнинг локал диффереациаллашлари ва автоморфизмлари, чизиқли бўлмаган динамик системада фазовий ўтиш ва тартибсизликлар» + «Евклид ва псевда-Евклид фазолардаги глобал эгри чизиқлар ва сиртларнинг инвариантлари назарияси ва унинг механикада қўлланилиши» лойиҳасида қўлланилиб (Ўзбекистон Республикаси фанлар Академиясининг 2020 йил 3 июлдаги 2/1255-1389-сон маълумотномаси). Натижалар ярим содда Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал автоморфизмларини тавсифлашга имкон берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 23 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 9 та мақола, жумладан, 4 таси хорижий, 5 таси республика журналларида ва 14 та тезис нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг умумий ҳажми 82 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Нилпотент Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал дифференциаллашлари”** деб номланувчи биринчи бобида диссертация ишини мазмунини ёритиш ва мавзуни тадқиқ этиш учун зарур бўлган муҳим тушунчалар келтирилган. Шунингдек, диссертация мавзуси доирасидаги тадқиқотлар бошлангунга қадар шу соҳада тадқиқ этилган ишлар ва олинган натижалар шарҳи батафсил келтириб ўтилган.

Таъриф 1. $\mathbb{F}$ майдон устида аниқланган $\mathcal{L}$ алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги Лейбниц айнияти бажарилса,

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y],$$

$\mathcal{L}$ алгебра Лейбниц алгебраси дейилади, бу ерда [-,-] – $\mathcal{L}$ алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

Таъкидлаш жоизки, ушбу таърифда келтирилган алгебра ўнг Лейбниц алгебраси бўлиб, унга симметрик бўлган чап Лейбниц алгебраси қуйидаги айнияти орқали аниқланади:

$$[[x,y],z]=[x,[y,z]]-[y,[x,z]].$$

Чап ва ўнг Лейбниц алгебралари симметрик хоссаларга эга бўлганликлари учун улардан биттасини қараш етарли. Биз ушбу ишда ўнг Лейбниц алгебрасини қараймиз.

Сўнгги йигирма беш йил давомида чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларининг таснифи ва структуравий назариясига бағишланган бир қанча илмий ишлар чоп этилди. Бу ишларда Ли алгебраларидаги кўплаб натижалар ва теоремалар Лейбниц алгебралари учун кенгайтирилди.

Ихтиёрий $\mathcal{L}$ Лейбниц алгебраси учун қуйидаги қуйи марказий ва ҳосилавий кетма-кетликларни қараймиз:

$$\mathcal{L}^1=\mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{k+1}=[\mathcal{L}^k,\mathcal{L}^1], \quad k\geq 1,$$

$$\mathcal{L}^{[1]}=\mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{[s+1]}=[\mathcal{L}^{[s]},\mathcal{L}^{[s]}], \quad s\geq 1.$$

Таьриф 2. Лейбниц алгебраси учун шундай $p\in\mathbb{N}$ $(q\in\mathbb{N})$ сон мавжуд бўлиб, $\mathcal{L}^p=0$(мос равишда, $\mathcal{L}^{[q]}=0$) бўлса у ҳолда $\mathcal{L}$ нилпотент(мос равишда, ечилувчан) Лейбниц алгебраси дейилади. Ана шундай хусусиятга эга бўлган минимал p (мос равишда, q) сони $\mathcal{L}$ алгебранинг нилпотентлик (мос равишда, ечилувчанлик) индекси дейилади.

Ихтиёрий $\mathcal{L}$ Лейбниц алгебрасининг максимал ечилувчан(нилпотент) идеали унинг радикали(нилрадикали) дейилади.

Таъриф 3. $\mathcal{L}$ нилпотент Лейбниц алгебраси берилган бўлсин, $\mathcal{L}_i=\mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}, 1\leq i\leq n-1$ ва $gr(\mathcal{L})=\mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2\oplus\ldots\oplus\mathcal{L}_{n-1}$ белгилаб оламиз. У ҳолда $[\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_j]\subseteq\mathcal{L}_{i+j}$ бўлиб, $gr(\mathcal{L})$ градуирланган алгебра бўлади. Агар $gr(\mathcal{L})$ ва $\mathcal{L}$ изоморф бўлса, у ҳолда $\mathcal{L}$ алгебра табий усулда градуирланган алгебра дейилади.

Таъриф 4. $\mathcal{L}$ Лейбниц алгебрасида $D:\mathcal{L}\rightarrow\mathcal{L}$ чизиқли акслантириш қуйидаги Лейбниц қоидасини қаноатлантирса:

$$D([x,y])=[D(x),y]+[x,D(y)] \quad \forall x,y\in\mathcal{L}$$

у ҳолда ушбу акслантиришга дифференциаллаш дейилади.

$\mathcal{L}$ Лейбниц алгебрасидаги барча дифференциаллашлар тўплами $Der(\mathcal{L})$ каби белгиланади.

$\mathcal{L}$ Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий $a\in\mathcal{L}$ элементи учун $R_a:\mathcal{L}\rightarrow\mathcal{L}$, $R_a(x)=[x,a]$ ўнгдан кўпайтириш операторини аниқлаймиз. Маълумки R_a оператор дифференциаллаш бўлиб, бундай дифференциаллашларни ички дифференциаллаш деб аталади.

Таъриф 5. Δ чизиқли акслантириш бўлиб алгебранинг ихиёрий $x\in\mathcal{L}$ элементи учун шундай $D_x:\mathcal{L}\rightarrow\mathcal{L}$ (x га боғлиқ холда) дифференциаллаш топилиб $\Delta(x)=D_x(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда Δ акслантиришга локал дифференциаллаш дейилади.

$\mathcal{L}$ даги барча локал дифференциаллашлар тўпламини $LocDer(\mathcal{L})$ билан белгилаймиз.

Таъриф 6. $\nabla:\mathcal{L}\rightarrow\mathcal{L}$ (чизиқли бўлиши шарт эмас) акслантириш бўлиб алгебранинг ихиёрий $x,y\in\mathcal{L}$ элементлари учун шундай $D_{x,y}\in Der(\mathcal{L})$ дифференциаллаш топилиб

$$\nabla(x)=D_{x,y}(x), \quad \nabla(y)=D_{x,y}(y)$$

тенгликлар бажарилса, у ҳолда ∇ акслантиришга 2-локал дифференциаллаш дейилади.

$\mathcal{L}$ даги барча 2-локал дифференциаллашлар тўпламини $TLocDer(\mathcal{L})$ билан белгилаймиз.

Равшанки, Лейбниц алгебрасида ҳар бир дифференциаллаш(мос равишда, автоморфизм) локал дифференциаллаш(мос равишда, локал автоморфизм) ва 2-локал дифференциаллаш(мос равишда, 2-локал автоморфизм) бўлади.

Энди биз муҳим инвариантлардан бири бўлган характеристик кетма-кетлик тушунчасини киритамиз. Бизга N – чекли ўлчамли нилпотент Лейбниц алгебраси берилган бўлсин. Бу алгебрадага ихтиёрий R_x чизиқли акслантиришнинг Жордан матрицаси блокларининг ўлчамларини камайиш тартибида ёзилишидан ҳосил бўлган $C(x)$ кетма-кетликни аниқлаб, $C(N)=\{C(x)\,|\,x\in N\}$ тўпламда лексикографик тартиб киритамиз.

Таьриф 7. Қуйидаги кетма-кетлик

$$\left(\max_{x\in N\setminus N^2} C(x)\right)$$

берилган нилпотент Лейбниц алгебрасининг характеристик кетма-кетлиги дейилади.

Таьриф 8. Характеристик кетма-кетлиги $C(\mathcal{L})=(n-p,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{p})$ бўлган Лейбниц алгебраси $p-$филиформ Лейбниц алгебраси дейилади.

$p=0$ бўлган ҳолда, $\mathcal{L}$ алгебрани нол-филиформ алгебра $p=1$ бўлганда филиформ алгебраси деб аталади.

Биз биринчи бобнинг иккинчи параграфида нол-филиформ ва филиформ Лейбниц алгебраларнинг локал ва 2-локал дифференциаллашларини ўрганамиз. Маълумки, ихтиёрий n-ўлчамли нол-филиформ Лейбниц алгебрасида шундай $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ базис мавжудки, бу базисда алгебранинг кўпайтмаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$NF_n:[e_i,e_1]=e_{i+1}\quad 1\le i\le n-1,$$

бу ерда қатнашмаган кўпайтмалар нолга тенг.

NF_n алгебранинг дифференциаллашларининг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$D(e_i)=i\alpha_1 e_i+\sum_{j=i+1}^{n}\alpha_{j-i+1}e_j,\quad 1\le i\le n. \qquad (1)$$

Қуйидаги теоремада биз нол-филиформ Лейбниц алгебрасининг локал дифференциаллашини таснифлаймиз.

Теорема 1. Нол-филиформ Лейбниц алгебрасидаги Δ чизиқли акслантириш локал дифференциаллаш бўлиши учун унинг кўриниши қуйидагича бўлиши зарур ва етарли:

$$\Delta(e_i)\ =\sum_{j=i}^{n}\gamma_{j,i}e_j,\quad 1\le i\le n. \qquad (2)$$

(1) ва (2) муносабатлардан $\dim(Der(NF_n))=n$ ва $\dim(LocDer(NF_n))=\dfrac{n(n+1)}{2}$ эканлиги келиб чиқади. Бу тенгликлардан нол-филиформ Лейбниц алгебрасининг локал дифференциаллашлар фазоси дифференциаллашлар фазосидан анча катта эканлиги келиб чиқади, яъни NF_n да дифференциаллаш бўлмаган локал дифференциаллашлар мавжуд.

Қуйидаги теоремада нол-филиформ Лейбниц алгебрасининг 2-локал дифференциаллашлари ҳақидаги натижани келтирамиз.

Теорема 2. Нол-филиформ Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий 2-локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлади.

Энди биз табиий усулда градуирланган филиформ Лейбниц алгебрасидаги 2-локал дифференциаллашни кўриб чиқамиз. Маълумки ихтиёрий n-ўлчамли комплекс табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$$F_n^1 : [e_1, e_1] = e_3, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \le i \le n-1;$$

$$F_n^2 : [e_1, e_1] = e_3, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1.$$

Теорема 3. F_n^1 ва F_n^2 алгебраларда дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллашлар мавжуд.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида p-филиформ Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал дифференциаллашларини ўрганилган. Иҳтиёрий Ли бўлмаган, ёйилмайдиган ва табиий усулда градуирланган p-филиформ Лейбниц алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф эканлиги маълум $(n - p \ge 4)$:

агар $p = 2k$, у ҳолда

$$\mu_1 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-2k-1 \\ [e_1, f_j] = f_{k+j}, & 1 \le j \le k, \end{cases}$$

$$\mu_2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-2k-1, \\ [e_1, f_1] = e_2 + f_{k+1}, & \\ [e_i, f_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-2k-1, \\ [e_1, f_j] = f_{k+j} & 2 \le j \le k, \end{cases}$$

агар $p = 2k+1$, у ҳолда

$$\mu_3 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-2k-1, \\ [e_1, f_j] = f_{k+j}, & 1 \le j \le k, \\ [e_2, f_j] = f_{k+j} & 1 \le j \le k, \end{cases}$$

бу ерда $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-p}, f_1, f_2, \dots, f_p\}$ алгебранинг базиси ва иштирок этмаган кўпайтмалар нолга тенг.

Изоҳ 1. μ_1, μ_2 ва μ_3 алгебраларнинг дифференциаллашлари фазосининг ўлчами

$$\dim Der(\mu_1) = n + 2k^2 + k,$$

$$\dim Der(\mu_2) = n + 2k^2 + 1,$$

$$\dim Der(\mu_3) = n + 2k^2 + 2k + 1,$$

бу ерда $k \in \mathbb{N}$ ва $n \ge 2k+4$.

Қуйидаги теоремада μ_1 алгебранинг локал дифференциаллашларининг таснифини келтирамиз.

Теорема 4. μ_1 алгебрадаги Δ чизиқли акслантириш локал дифференциаллаш бўлиши учун унинг матритцаси қуйидаги кўринишда бўлиши зарур ва етарли:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} \end{pmatrix},$$

бу ерда

$$\Delta_{1,1} = \sum_{j=1}^{n-2k}\sum_{i=j}^{n-2k}\gamma_{i,j}e_{i,j}, \quad \Delta_{2,1} = \sum_{i=n-2k+1}^{n}\gamma_{i,1}e_{i,1} + \sum_{i=n-k+1}^{n}\gamma_{i+1,2}e_{i+1,2},$$

$$\Delta_{1,2} = \sum_{i=n-2k+1}^{n-k}\gamma_{n-2k,i}e_{n-2k,i},$$

$$\Delta_{2,2} = \begin{pmatrix} \Delta_{2,2}^{(1)} & 0 \\ \Delta_{2,2}^{(2)} & \Delta_{2,2}^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{2,2}^{(1)} = \sum_{j=n-2k+1}^{n-k}\sum_{j=n-2k+1}^{n-k}\gamma_{i,j}e_{i,j}, \quad \Delta_{2,2}^{(2)} = \sum_{j=n-2k+1}^{n-k}\sum_{j=n-k+1}^{n}\gamma_{i,j}e_{i,j},$$

$$\Delta_{2,2}^{(3)} = \sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{j=n-k+1}^{n}\gamma_{i,j}e_{i,j}.$$

Изоҳ 2. μ_1, μ_2 ва μ_3 алгебраларнинг локал дифференциаллашларининг фазосининг ўлчами

$$\dim LocDer(\mu_1) = \frac{n^2+10k^2-4kn+n+6k}{2},$$

$$\dim LocDer(\mu_2) = \frac{n^2+10k^2-4kn+n+2k+4}{2},$$

$$\dim LocDer(\mu_3) = \frac{n^2+10k^2-4kn-n+12k+4}{2},$$

бу ерда $k \in \mathbb{N}$ ва $n \geq 2k+4$.

1- ва 2-изоҳлар шуни кўрсатадики, μ_1, μ_2 ва μ_3 алгебраларнинг локал дифференциаллашлар фазосларининг ўлчамлари дифференциаллашлар фазосларининг ўлчамларидан каттароқдир. Шунинг учун, биз қуйидаги натижага эга бўламиз.

Натижа 1. μ_1, μ_2 ва μ_3 алгебраларнинг дифференциаллаш бўлмайдиган локал дифференциаллашлари мавжуд.

Бундан ташқари ушбу теоремада p-филиформ Лейбниц алгебраларининг 2-локал дифференциаллашлари хақидаги натижа келтирилган.

Теорема 5. μ_1, μ_2 ва μ_3 алгебраларнинг дифференциаллаш бўлмайдиган 2-локал дифференциаллашлари мавжуд.

Диссертациянинг **“Ечилувчан Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал дифференциаллашлари”** деб номланувчи иккинчи бобида, нилрадикаллари Абел ёки модел алгебралардан иборат бўлган ечилувчан

Лейбниц алгебраларининг локал ва 2-локал дифференциаллашлари ўрганилган.

Айтайлик a_n – n-ўлчамли Абел алгебраси, R эса нилрадикали a_n бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлсин. Маълумки, $\dim R \le 2n$ тенгсизлик ўринли. Ж.Қ.Адашев ва бошқалар томонидан бунда $\dim R = 2n$ шартни қаноатлантирувчи ечилувчан Лейбниц алгебралари тўлиқ таснифланган ва бундай алгебралар икки ўлчавли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тўғри йиғиндисига изоморф эканлиги исботланган, яъни бундай алгебраларда кўпайтма қуйидагича бўлади:

$$\mathcal{L}_t : [f_j, x_j] = f_j, \quad [x_j, f_j] = \alpha_j f_j, \quad 1 \le j \le n,$$

бу ерда $\alpha_j \in \{-1, 0\}$ ва t эса нолга тенг бўлган параметрлар сони.

Бундан ташқари, қуйидаги теоремада $\dim R = n+1$ бўлган холда ечилувчан Лейбниц алгебраларининг баъзи синфлари таснифи келтирилган.

Теорема 6. Айтайлик R нилрадикали n-ўлчамли Абел алгебрасидан иборат бўлган $(n+1)$-ўламли ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлсин. Агар R даги $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, x\}$ базис учун $ad_x|_{a_n}$ оператор Жордан формаси битта блокдан иборат бўлса, у ҳолда R қуйидаги иккита ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$R_1 : \begin{cases} [f_i, x] = f_i + f_{i+1}, & 1 \le i \le n-1, \\ [f_n, x] = f_n, \end{cases}$$

$$R_2 : \begin{cases} [f_i, x] = f_i + f_{i+1}, & 1 \le i \le n-1 \\ [f_n, x] = f_m, \\ [x, f_i] = -f_i - f_{i+1}, & 1 \le i \le -1, \\ [x, f_n] = -f_n. \end{cases}$$

Қуйидаги тасдиқларда, биз $\mathcal{L}_t$, R_1 ва R_2 алгебраларнинг диифференциаллашларининг умумий кўринишини келтирамиз.

Тасдиқ 1. $\mathcal{L}_t$ алгебранинг ихтиёрий диифференциаллаши қуйидаги кўринишда бўлади:

$$D(f_j) = a_j f_j, \quad D(x_j) = \alpha_j b_j f_j, \quad 1 \le j \le n,$$

Тасдиқ 2. R_1 ва R_2 алгебраларнинг ихтиёрий диифференциаллаши қуйидаги кўринишда бўлади:

$$Der(R_1) : D(f_i) = \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{j-i+1} f_j + \alpha_1 f_i.$$

$$Der(R_2) : \begin{cases} D(f_i) & = \sum\limits_{j=i+1}^{n} \alpha_{j-i+1} f_j + \alpha_1 f_i, \quad 1 \le i \le n, \\ D(x) & = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j f_j. \end{cases}$$

Энди биз $\mathcal{L}_t$, R_1 ва R_2 алгебраларнинг локал диифференциаллашлари ҳақидаги натижаларни келтирамиз.

Теорема 7. $\mathcal{L}_t$ алгебранинг ихтиёрий локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлади.

Теорема 8. R_1 ва R_2 алгебраларда диифференциаллаш бўлмаган локал дифференциаллашлар мажуд.

Энди биз нилрадикали Абел бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг 2-локал диифференциаллашлари ҳақидаги натижаларни келтирамиз.

Теорема 9. $\mathcal{L}_t$ алгебрада диифференциаллаш бўлмаган 2-локал диифференциаллаш мажуд.

Тасдиқ 3. R_1 алгебранинг ихтиёрий 2-локал дифференциаллаши диифференциаллаш бўлади.

Теорема 10. R_2 ечилувчан Лейбниц алгебрасида дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллаш мажуд.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида биз $R(N_{m_1,\ldots,m_s},s)$ ечилувчан Лейбниц алгебраларида локал ва 2-локал диифференциаллашларни ўрганамиз.

Характеристик кетма-кетлиги $(m_1,\ldots,m_s)$ бўлган қуйидаги нилпотент Лейбниц алгебрасини қараймиз:

$$N_{m_1,\ldots,m_s}:[e_i^t,e_1^1]=e_{i+1}^t,\ 1\le t\le s,1\le i\le m_t-1.$$

$N_{m_1,\ldots,m_s}$ алгебра одатда модел Лейбниц алгебраси деб аталади.

Теорема 11. Айтайлик R нилрадикали $N_{m_1,\ldots,m_s}$ ва $\dim R-\dim N_{m_1,\ldots,m_s}=s$ шартни қаноатлантирувчи ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлсин, у холда R қуйидаги алгебрага изоморф бўлади:

$$R(N_{m_1,\ldots,m_s},s):\begin{cases}[e_i^t,e_1^1]=e_{i+1}^t, & 1\le t\le s, \quad 1\le i\le m_t-1,\\ [e_i^1,x_1]=ie_i^1, & 1\le i\le m_1,\\ [e_i^t,x_1]=(i-1)e_i^t, & 2\le t\le s, \quad 2\le i\le m_t,\\ [e_i^t,x_t]=e_i^t, & 2\le t\le s, \quad 1\le i\le m_t,\\ [x_1,e_1^1]=-e_1^1,\end{cases}$$

бу ерда $\{x_1,\ldots x_s\}$лар тўлдирувси фазонинг базислари.

Тасдиқ 4. $Der(R(N_{m_1,\ldots,m_s},s))$ алгебранинг дифференциаллашларининг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned}
&D(e_i^1)=i\alpha_1e_i^1+\alpha_2e_{i+1}^1, && 1\le i\le m_1-1,\\
&D(e_{m_1}^1)=m_1\alpha_1e_{m_1}^1,\\
&D(e_i^t)=((i-1)\alpha_1+\beta_t)e_i^t+\alpha_2e_{i+1}^t, && 2\le t\le s,\ \ 1\le i\le m_t-1,\\
&D(e_{m_1}^t)=((m_t-1)\alpha_1+\beta_t)e_{m_1}^1, && 2\le t\le s,\\
&D(x_1)=-\alpha_2e_1^1.
\end{aligned}$$

Изоҳ 3. $R(N_{m_1,\ldots,m_s},s)$ ечилувчан Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий дифференциаллаши ички дифференциаллаш бўлади.

Теорема 12. $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ ечилувчан Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлади.

Теорема 13. $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ ечилувчан Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий 2-локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлади.

Диссертациянинг учинчи боби **“Чексиз ўлчамли Ли алгебраларининг 2-локал дифференциаллашлари”** деб номланиб, биз ушбу бобда умумлашган Витт, Вирасоро ва “юпқа” алгебраларининг 2-локал дифференциаллашларини ўрганамиз.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида характеристикаси нол бўлган алгебраик ёпиқ майдон устида аниқланган умумлашган Витт алгебралари 2-локал дифференциаллашларини ўрганилган.

Айтайлик $\mathcal{A}$ Абел группаси, $\mathbb{F}$ эса нол характеристикали майдон ва T ушбу майдон устидаги вектор фазо бўлсин. $\mathcal{A}$ группасининг $\mathbb{F}$ майдон устидаги $t^J, J\in\mathcal{A}$ шаклдаги элементлари орқали ҳосил қилинган группавий алгебраси $\mathbb{F}\mathcal{A}$ даги кўпайтма $t^Jt^K=t^{J+K}$ орқали аниқланади. $\mathbb{F}\mathcal{A}$ алгебранинг бирлик елементи бу t^0.

Ушбу тензор кўпайтмани қарайлик

$$W=\mathbb{F}\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{F}}T=span_{\mathbb{F}}\left\{t^J\otimes\partial : J\in\mathcal{A},\partial\in T\right\}.$$

W нинг элементлари $t^J\otimes\partial:=t^J\partial$ кўринишда белгиланади. Агар $(\partial,J)\to\partial(J):T\otimes A\to\mathbb{F}$ акслантириши биринчи ўзгарувчи бўйича $\mathbb{F}$-чизиқли бўлиб, иккинчи ўзгарувчи бўйича аддитив бўлса, у ҳолда

$$\left[t^J\partial_1,t^K\partial_2\right]:=t^{J+K}\left(\partial_1(K)\partial_2-\partial_2(J)\partial_1\right),\, J,\,K\in\mathcal{A},\,\partial_1,\,\partial_2\in T \tag{3}$$

шаклдаги кўпайтма чексиз ўлчамли Ли алгебрасини аниқлайди. (3) кўпайтмали W Ли алгебраси $\mathcal{A}$ Абел группа орқали градиурланган T вектор фазо устидаги умумлашган Витт алгебраси дейилади.

Агар $\mathcal{A}=\mathbb{Z}^n$ аддитив группаси бўлса, у ҳолда $\mathbb{F}\mathcal{A}$ группавий алгебра $\mathbb{F}$ майдон устидаги $\mathbb{F}[t_1^{\pm1},\dots,t_n^{\pm1}]$ Лоран кўпҳадлари алгебрасига изоморф бўлади. $J=\left(j_1,\dots,j_n\right)\in\mathbb{Z}^n$ n-жуфтлик учун биз қуйидагини ёзамиз $t^J=t_1^{j_1}\cdots t_n^{j_n}$. Айтайлик T бу $\partial_i=t^i\dfrac{\partial}{\partial t_i}$ операторларнинг $T=\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{F}\partial_i$ чизиқли қобиги бўлсин. Агар $(\partial,J)\to\partial(J):T\otimes\mathcal{A}\to\mathbb{F}$ акслантириш $\partial_i(J)=j_i$ тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда унга мос $W=W_n(\mathbb{F})$ умумлашган Wитт алгебраси $\mathbb{F}$ майдон устидаги $\mathbb{F}[t_1^{\pm1},\dots,t_n^{\pm1}]$ Лоран кўпҳадлари алгебрасининг дифференциаллашларининг $Der_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{F}[t_1^{\pm1},\dots,t_n^{\pm1}]\right)$ Ли алгебраси каби аниқланиб, бу алгебра Лоран кўпҳадлари вектор майдонларидан иборат

$$w(J;i)=w(j_1,\dots,j_n;i)=t_1^{j_1}\cdots t_n^{j_n}\frac{\partial}{\partial t_i},$$

бу ерда $(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{F}^n$ эса $\mathbb{F}^n$ нинг каноник координаталари. Лоран кўпҳадлари вектор майдонларининг $W_n(\mathbb{F})$ Ли алгебрасига изоморф бўлган

Ли алгебра $\mathbb{F}^n$ вектор фазо устидаги Витт алгебраси дейилади. $W_n(\mathbb{F})$ Ли алгебраси $\{w(\mathbf{a},i):\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^n, i\in I\}$ шаклдаги базисга эга бўлиб, бу базис учун (3) кўпайтма қоидаси қуйидагича ёзилади

$$\left[w(\mathbf{a},i),w(\mathbf{b},j)\right]=\mathbf{a}_j w(\mathbf{a}+\mathbf{b},i)-\mathbf{b}_i w(\mathbf{a}+\mathbf{b},j), \qquad (4)$$

бу ерда $i,j\in I$ ва $\mathbf{a}=(\mathbf{a}_i),\mathbf{b}=(\mathbf{b}_i)\in\mathbb{Z}^n$.

Теорема 14. $W_n(\mathbb{F})$ алгебранинг ихтиёрий ∇ 2-локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлади.

Энди нол характеристикали алгебраик ёпиқ $\mathbb{F}$ майдон устидаги $W=W(G,I)$ умумлашган Витт алгебрасининг 2-локал дифференциаллашларни қараймиз, бу ерда I чексиз индекслар тўплами ва $G=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}=\left\{\mathbf{a}=(\mathbf{a}_i)_{i\in I}:\mathbf{a}_i=0 \text{ чекли сондаги индекслар учун } i\in I\right\}$.

Таъкидлаш жоизки, $W(G,I)$ Ли алгебраси $\{w(\mathbf{a},i):\mathbf{a}\in G, i\in I\}$ шаклдаги базисга эга ва $W(G,I)$ да кўпайтириш қоидаси худди (4) кабидир.

Теорема 15. $W(G,I)$ алгебранинг ихтиёрий ∇ 2-локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлади.

Нихоят нол характеристикали алгебраик ёпиқ $\mathbb{F}$ майдон устидаги $W=W(G,I)$ умумлашган Витт алгебрасини Борел қисм-алгебраларининг 2-локал дифференциаллашларни ўрганамиз.

Айтайлик $\mathbb{Z}_+$ манфий бўлмаган бутун сонлар тўплами бўлсин. Қуйидагича белгилаш киритамиз

$$B(\mathbb{Z}^n,I)=span\left\{w(a,i):\mathbf{a}\in\mathbb{Z}_+^n\right\}.$$

Биз $W_n(\mathbb{F})$ алгебранинг стандарт Борел қисмалгебраси деб номланувчи алгебрани оламиз. $B(\mathbb{Z}^n,I)$ мукаммал алгебра, яъни, у тривиал марказли алгебра ва барча дифференциаллашлари ички эканлиги яхши маълум.

Теорема 16. Айтайлик $B(\mathbb{Z}^n,I)$ нол характеристикали майдон устида аниқланган $W_n(\mathbb{F})$ умумлашган Витт алгебрасининг Борел қисм алгебраси бўлсин. У ҳолда $B(\mathbb{Z}^n,I)$ алгебрасининг ихтиёрий 2-локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлади.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида биз характеристикаси нол бўлган алгебраик ёпиқ $\mathbb{F}$ майдон устида аниқланган Вирасоро алгебрасини 2-локал дифференциаллашларини ўрганамиз.

W Витт алгебрасининг ягона бир ўлчамли нотривиал марказий кенгайтмаси $Vir=W\oplus\mathbb{C}\overline{c}$ Ли алгебрасига изоморф. Бунда $\{c\}\cup\{e_n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ кенгайтманинг базиси, бу ерда $c\in\mathbb{C}\overline{c}$, шунинг учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$[e_i,c] \quad =0, \quad \text{for } i\in\mathbb{Z},$$

$$[e_i,e_j] \quad =(i-j)e_{i+j}+\delta_{i,-j}\frac{1}{12}(i^3-i)c, \quad \text{for } i,j\in\mathbb{Z},$$

бу ерда $\delta_{i,-j}$ – Кронекер символи.

Кенгайтирилган Vir Ли алгебраси Вирасоро алгебраси дейилади.

Энди биз Вирасоро алгебрасида дифференциаллаш ва 2-локал диифференциаллашлари ҳақидаги натижаларни келтирамиз.

Теорема 17. Vir алгебранинг ҳар бир дифференциаллаш ичкидир.

Теорема 18. Вирасоро Vir алгебрасининг ҳар бир 2-локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлади.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида биз чексиз ўлчамли Ли алгебрасида 2-локал дифференциаллаш бўлиб лекин (глобал) дифференциаллаш бўлмайдиган мисол келтирамиз.

Айтайлик чексиз ўлчамли Ли алгебрасида $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ базис бўлиб, кўпайтиришлар жадвали қуйидагича бўлсин:

$$\mathcal{L}_1 : [e_1, e_n] = e_{n+1}, \quad n \geq 2.$$

$$\mathcal{L}_2 : [e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad i \geq 2 \text{ ва } [e_2, e_j] = e_{j+2}, \quad j \geq 3.$$

Theorem 19. $\mathcal{L}_1$ ва $\mathcal{L}_2$ алгебраларида дифференциаллаш бўлмайдиган 2-локал дифференциаллаш мавжуд.

ХУЛОСА

Диссертация иши Лейбниц алгебраларида локал ва 2-локал дифференциаллашларни ўрганишга бағишланади.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Нол-филиформ Лейбниц алгебраларида барча 2-локал дифференциаллашларни дифференциаллаш эканлиги исботланган. Филиформ Лейбниц алгебраларида дифференциаллаш бўлмайдиган 2-локал дифференциаллашга мисол келтирилган. Нол-филиформ Лейбниц алгебраларида дифференциаллаш бўлмайдиган локал дифференциаллаш мавжуд эканлиги исботланган;

2. p-филиформ Лейбниц алгебраларида дифференциаллаш бўлмайдиган локал ва 2-локал дифференциаллаш мавжуд эканлиги исботланган;

3. Абел нилрадикалли, тўлдирувчи фазонинг ўлчами максимал бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларида иҳтиёрий локал дифференциаллаш дифференциаллаш бўлиши кўрсатилган. Абел нилрадикалли, бир ўлчамли тўлдирувчи фазоли ечилувчан Лейбниц алгебрасининг дифференциаллаш бўлмайдиган локал дифференциаллаши мавжуд эканлиги кўрсатилган. Шунингдек, бу алгебраларнинг 2-локал дифференциаллашлари учун шунга ўхшаш масала ўрганилган ва дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллашларга эга ечилувчан Лейбниц алгебраларига мисол келтирилган;

4. Модел нилрадикалли, тўлдирувчи фазонинг ўлчами максимал, бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг ихтиёрий локал ва 2-локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлиши кўрсатилган;

5. Умумлашган Витт алгебрасининг ихтиёрий 2-локал дифференциаллаши дифференциаллаш бўлиши исботланган. Юнқа Ли алгебралари

учун 2-локал дифференциаллашлар ўрганилган ва юпқа Ли алгебраларида дифференциаллаш бўлмайдиган 2-локал дифференциаллаш мавжуд эканлиги кўрсатилган.

SCIENTIFIC COUNCIL DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
in V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

YUSUPOV BAKHTIYOR BAKHROMBEK UGLI

LOCAL AND 2-LOCAL DERIVATIONS ON LEIBNIZ ALGEBRAS

01.01.06- Algebra

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2020 year

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM230.

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website website http://kengash.mathinst.uz and in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Ayupov Shavkat Abdullaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician
Official opponents:	**Arziqulov Farxodjon Nematovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Kurbanbayev Tuuelbay Kadirbayevich Candidat of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Termiz State University**

Defense will take place on “22” july 2020 at 9:00 at the meeting of Scientific Council DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.l. Romanovsky Institute of Mathematics (Address: Mirzo Ulugbek str. 81, Mirzo Ulugbek area, Tashkent, 100170, Uzbekistan, Ph.: (99871) 262-75-44, fax: (9987 l) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz.)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at institute of Mathematics named alter V.I. Romanovsky (registered for No. 104). (Address: Mirzo Ulugbek str. 81, Mirzo Ulugbek area, Tashkent, 100170, Uzbekistan, Ph.: (99871) 262-75-44).

Abstract of dissertation sent out on «18» july 2020 year
(Mailing report № 2 on «18» july 2020 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

A.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

A.R.Hayotov
Deputy-Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S.

Introduction (abstract of doctoral dissertation)

Actuality and demand of the theme of dissertation. A great amount of scientific and applied research in the world is focused to the theory of algebraic systems and operator algebras. Algebraic instruments are very useful in the study of elementary particles in quantum mechanics, the properties of solids and crystals, in the analysis of model problems of the economics, in the problems of population biology, etc. Since associative algebras defined by specific identity, have been considered when identifying properties of closeness with respect to the usual multiplication of square matrices, further development of algebras leads to the theory of alternative, Lie and Jordan algebras, which are very closely related to each others and have many connections with different areas of mathematics. Since Leibniz algebras are generalizations of Lie algebras, many results of the theory of Lie algebras have been extended to Leibniz algebras. One of the priority directions of research related to this subject is to prove analogues of theorems of the Lie algebras theory in the Leibniz algebras case and to investigate of the inherent properties of Leibniz algebras which are not valid for Lie algebras.

Nowadays in the world, along with the theory of derivation, the theory of local and 2-local derivations on operator algebras is also considered to be important. The last twenty years witnessed a fruitful growth of the theory of local and 2-local derivations on von Neumann algebras, C^*-algebras, and JB^*-triples. The studies on local derivations were formally started by R.V.Kadison and D.R.Larson and A.R.Sourour in 1990. The motivation to study local derivations have appeared in another context: the study of Hochschild cohomology for various operator algebras. These maps arise naturally when looking for sufficient conditions to ensure that a map is a derivation. R.V.Kadison set out a program of study for local maps, suggesting that local derivations could prove useful in building derivations with particular properties. R.V.Kadison proved that each continuous local derivation of a von Neumann algebra M into a dual Banach M-bimodule is derivation. This theorem gave way to a cascade of results and studies on derivations on C^*-algebras, culminating with a definitive contribution due to B.E.Johnson, which asserts that every continuous local derivation of a C^*-algebra A into a Banach A-bimodule is a derivation. In the just quoted paper, B.E.Johnson also gives an automatic continuity result proving that local derivations of a C^*-algebra A into a Banach A-bimodule are continuous even if not assumed a priori to be so. In 1997, P. Šemrl introduced the concepts of 2-local automorphisms and 2-local derivations and he described 2-local derivations and 2-local automorphisms on the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on the infinite-dimensional separable Hilbert space H by proving that every 2-local automorphism (respectively, 2-local derivation) on $B(H)$ is an automorphism (respectively, a derivation). Note that P.Šemrl states that the conclusion of the above theorem also holds when H is finite-dimensional. Later on, 2-local derivations on von Neumann algebras have been studied by Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov, F.N.Arzikulov, S.O.Kim, J.S.Kim, O.B.Nurjanov and A.K.Alauadinov.

In our country, intensified attention has been paid to applied mathematics, computer science, digital economy, which have scientific and practical application of fundamental sciences. In particular, special attention was paid to the development of fundamental research on non-associative algebras and their operators. Within the framework of this fundamental research, significant results have been obtained in the study of local and 2-local derivation of Leibniz algebras. In ensuring the implementation of decisions identified as the main tasks and areas of activity, to conduct research[1] at the level of international standards in the priority areas of "Algebra and Functional Analysis" is also important in the development of the theory of derivation of operators algebras.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees of the President of the Republic of Uzbekistan UP-4947 of February 7, 2017 "On the strategy of action for the further development Of the Republic of Uzbekistan", UP-2789 dated February 17, 2017 "On measures to further improvement of the activities of the Academy of Sciences, organization, management and financing of research activities", PP-3682 from April 27, 2018 "On measures to further improve the system of practical implementation of innovative ideas, technologies and projects" and PP-4387 from July 9, 2019 "On measures to further development of mathematical education and science, and also root improvement of the activity of the Uzbekistan Academy of Sciences V.I.Romanovsky Institute of Mathematics", as well as in other regulations related to basic science.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, "Mathematics, Mechanics and Computer Science" .

The degree of scrutiny of the problem. In recent years non-associative analogues of classical constructions become of interest in connection with their applications in many branches of mathematics and physics. The notions of local and 2-local derivations (automorphisms) have also become popular for some non-associative algebras such as Lie and Leibniz algebras. The main problems concerning these notions are to find conditions under which every local (or 2-local) automorphism or derivation automatically becomes an automorphism (respectively, a derivation), and also to present examples of algebras with local and 2-local automorphisms (respectively, derivations) that are not automorphisms (respectively, derivations). The investigation of local maps on non-associative algebras came out from discussions between professor Sh.A.Ayupov and professor E.Zelmanov (University of California, San Diego) during USA-Uzbekistan Conference held at the California State University, Fullerton, on May, 2014.

The first results concerning local and 2-local derivations and automorphisms on finite-dimensional Lie algebras over algebraically closed field of zero

---

[1] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017 year 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

characteristic were obtained by Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov, I.S.Rakhimov, Z.Chen and D.Wang. Namely, Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov and I.S.Rakhimov proved that every 2-local derivation on a semi-simple Lie algebra $\mathcal{L}$ is a derivation and that each finite-dimensional nilpotent Lie algebra with dimension larger than two admits 2-local derivation which is not a derivation. Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov proved that every local derivation on semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations which are not derivations. Concerning 2-local automorphism, Z.Chen and D.Wang proved that if $\mathcal{L}$ is a simple Lie algebra of type A_l, D_l or $E_k, (k = 6,7,8)$ over an algebraically closed field of characteristic zero, then every 2-local automorphism of $\mathcal{L}$ is an automorphism. Finally, Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov generalized this result of Z.Chen and D.Wang and proved that every 2-local automorphism of a finite-dimensional semi-simple Lie algebra over an algebraically closed field of characteristic zero is an automorphism. Moreover, they show also that every nilpotent Lie algebra with finite dimension larger than two admits 2-local automorphisms that are not automorphisms. Local automorphisms of certain finite-dimensional simple Lie and Leibniz algebras are investigated by Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov.

Concerning local automorphism, T.Becker, J.Escobar, C.Salas and R.Turdibaev established that the set of local automorphisms $LAut(sl_2)$ coincides with the group $Aut^{\pm}(sl_2)$ of all automorphisms and anti-automorphisms. Later M.Costantini proved that a linear map on a simple Lie algebra is a local automorphism if and only if it is either an automorphism or an anti-automorphism. Similar results concerning local and 2-local derivations and automorphisms on Lie superalgebras algebras were obtained H.Chen, Y.Wang and J.Nan. Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov, B.A.Omirov proved similar results concerning local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras. It should be noted that similar problems for local and 2-local derivation of solvable Leibniz algebras and infinite-dimensional Lie algebras still remain open.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The dissertation research is done in accordance with the planned theme of scientific research OT-Ф4-31 “Non-commutative modules, Leibniz algebras and polynomial cascades on simplexes” in National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (2017-2020 yy) and “YoOT-Ftex-2018-79, Representation of Leibniz Algebras” V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (2018-2019 yy).

The aim of research work the study of local and 2-local derivations on Leibniz algebras.

Research problems:

to investigate local and 2-local derivations on finite-dimensional nilpotent Leibniz algebras;

to describe local and 2-local derivations on finite-dimensional solvable Leibniz algebras;

to investigate 2-local derivations on certain classes of infinite-dimensional Lie algebras.

The research object local and 2-local derivations on Leibniz algebras, 2-local derivations on infinite-dimensional Lie algebras.

The research subject nilpotent Leibniz algebras, solvable Leibniz algebras, generalized Witt algebras, Virasoro algebras, derivation, local derivation, 2-local derivation.

Research methods: In the dissertation the methods of the theory of non-associative algebras, the methods of invariant theory are applied.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

it is proved that every 2-local derivation on null-filiform Leibniz algebra is a derivation;

it is shown that any p-filiform Leibniz algebra has a local and 2-local derivations which are not derivations;

local derivations on the solvable Leibniz algebras are investigated and it is proved that any local derivation of solvable Leibniz algebras with abelian nilradicals of maximal codimension is a derivation;

it is shown that every local and 2-local derivation on the solvable Leibniz algebras with model nilradicals of maximal codimension is a derivation;

it is shown that any 2-local derivation on generalized Witt algebras and also on Virasoro algebras is a derivation.

Practical results of the research. The interrelation between local, 2-local derivations and derivations on Leibniz algebras is established.

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using the methods of algebra, derivation theory, as well as the rigor of mathematical reasoning. The proofs of obtained results are mathematically correct.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the research results is finding whether the spaces of local and 2-local derivations coincide with the space of global derivations for some Leibniz algebras, and also proof of the existence of local and 2-local derivations that are not derivations on nilpotent Leibniz algebras. The practical significance of the thesis is that the results can be used in the theory of derivation of Leibniz algebras.

Implementation of the research results. The results were used in the following scientific studies:

the results obtained in the dissertation about the arbitrary 2-local derivation of Witt algebra being a derivation were used in the project OT-4-27 “Description of predual spaces of Jordan triples, spaces of capacities and holomorphic continuation of functions” (reference of the Ministry of higher and secondary special education, № 89-03-2339, 30.06.2020). The application of the scientific result allowed to find the description 2-local automorphisms of AW^*-algebras;

the obtained results in the dissertation, about the classification of local and 2-local derivations of solvable Leibniz algebras are used in the project OT-F4-82 + OT-F4-87 “Local derivations and automorphisms of operator and non-associative algebras, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems” + “The theory of global invariants of curves and surfaces in Euclidean and pseudo-

Euclidean spaces and its applications in mechanics" (reference of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated July 3, 2020, № 2/1255-1389). These results allowed to find the description of local and 2-local automorphisms of semi-simple Leibniz algebras.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 3 international and 5 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation, 23 scientific papers were published, 9 of which are included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of theses of the Doctor of Philosophy, including 4 of them published in foreign journals and 5 in national scientific journals and 14 abstracts.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of the introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The general volume of the thesis is 82 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In introduction the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic are given, we present a review of international research on the theme of the dissertation and degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we give the theoretical and practical importance of the obtained results, and also give information on the implementation of the research results, the published works and the structure of dissertation.

In the first chapter of the thesis, titled "**Local and 2-local derivation on nilpotent Leibniz algebras**" we give main definitions and important insights necessary to cover the dissertation and research the subject, it also provides a detailed overview of the studies and results obtained in this area before the research on the topic.

Definition 1. A vector space with a bilinear bracket $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$ is called a Leibniz algebra if for any $x,y,z\in\mathcal{L}$ the so-called Leibniz identity

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y],$$

holds.

Here, we adopt the right Leibniz identity; since the bracket is not skew-symmetric, there exists the version corresponding to the left Leibniz identity,

$$[[x,y],z]=[x,[y,z]]-[y,[x,z]].$$

Leibniz algebras present a "non antisymmetric" extension of Lie algebras. In last decades a series of papers have been devoted to the structure theory and classification of finite-dimensional Leibniz algebras. Several classical theorems from Lie algebras theory have been extended to the Leibniz algebras case.

For a Leibniz algebra $\mathcal{L}$ consider the following central lower and derived sequences:

$$\mathcal{L}^1=\mathcal{L},\quad \mathcal{L}^{k+1}=[\mathcal{L}^k,\mathcal{L}^1],\quad k\geq 1,$$

$$\mathcal{L}^{[1]} = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{[s+1]} = [\mathcal{L}^{[s]}, \mathcal{L}^{[s]}], \quad s \geq 1.$$

Definition 2. A Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is called nilpotent (respectively, solvable), if there exists $p \in \mathbb{N}$ $(q \in \mathbb{N})$ such that $\mathcal{L}^p = 0$ (respectively, $\mathcal{L}^{[q]} = 0$). The minimal number p (respectively, q) with such property is said to be the index of nilpotency (respectively, of solvability) of the algebra $\mathcal{L}$.

Note that any Leibniz algebra $\mathcal{L}$ contains a unique maximal solvable (resp. nilpotent) ideal, called the radical (resp. nilradical) of the algebra.

Definition 3. Given a nilpotent Leibniz algebra $\mathcal{L}$, put $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i / \mathcal{L}^{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$, and $gr(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{n-1}$. Then $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subseteq \mathcal{L}_{i+j}$ and we obtain the graded algebra $gr(\mathcal{L})$. If $gr(\mathcal{L})$ and $\mathcal{L}$ are isomorphic, then we say that an algebra $\mathcal{L}$ is naturally graded.

Definition 4. A derivation on a Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is a linear map $D: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ which satisfies the Leibniz rule:

$$D([x,y]) = [D(x), y] + [x, D(y)] \text{ for any } x, y \in \mathcal{L}.$$

The set of all derivations of a Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is a Lie algebra with respect to commutation operation and it is denoted by $Der(\mathcal{L})$.

Let a be an element of a Leibniz algebra $\mathcal{L}$. Consider the operator of right multiplication $R_a : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, defined by $R_a(x) = [x, a]$. The Leibniz identity which characterizes Leibniz algebras exactly means that every right multiplication operator R_a is a derivation. Such derivations are called inner derivation on $\mathcal{L}$.

Definition 5. A linear operator Δ is called a local derivation if for any $x \in \mathcal{L}$, there exists a derivation $D_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = D_x(x)$.

The set of all local derivations on $\mathcal{L}$ we denote by $LocDer(\mathcal{L})$.

Definition 6. A map $\nabla : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (not necessary linear) is called 2-local derivation if for any $x, y \in \mathcal{L}$ there exists a derivation $D_{x,y} \in Der(\mathcal{L})$ such that

$$\nabla(x) = D_{x,y}(x), \quad \nabla(y) = D_{x,y}(y).$$

The set of all 2-local derivations on $\mathcal{L}$ we denote by $TLocDer(\mathcal{L})$.

It is obvious that every derivation (respectively, automorphism) of a Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is a local derivation (respectively, local automorphism) and a 2-local derivation (respectively, 2-local automorphism).

Now we define the notion of characteristic sequence, which is one of the important invariants. For a finite-dimensional nilpotent Leibniz algebra N and for the matrix of the linear operator R_x denote by $C(x)$ the descending sequence of its Jordan blocks' dimensions. Consider the lexicographical order on the set $C(N) = \{C(x) \mid x \in N\}$.

Definition 7. The sequence

$$\left(\max_{x \in N \setminus N^2} C(x) \right)$$

is said to be the characteristic sequence of the nilpotent Leibniz algebra N.

Definition 8. A Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is called a p-filiform, if the characteristic sequence is $C(\mathcal{L}) = (n - p, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p})$.

Note that in case of $p = 0$, we say that $\mathcal{L}$ is null-filifrom, and 1-filiform algebras we call just a filiform.

In the second section of chapter one, we study local and 2-local derivation on null-filiform and filiform Leibniz algebras. Note that an arbitrary n-dimensional null-filiform Leibniz algebra has a basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ such that the multiplication in the algebra has the form:

$$NF_n : [e_i, e_1] = e_{i+1} \quad 1 \le i \le n-1,$$

where the omitted products are equal to zero.

Any derivation D of the algebra NF_n has the following form:

$$D(e_i) = i\alpha_1 e_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{j-i+1} e_j, \quad 1 \le i \le n. \tag{1}$$

In the following theorem we give the description of local derivations of null-filiform Leibniz algebra NF_n.

Theorem 1. Let Δ be a linear operator on NF_n. Then Δ is a local derivation, if and only if it has the lower triangle form:

$$\Delta(e_i) \quad = \sum_{j=i}^{n} \gamma_{j,i} e_j, \quad 1 \le i \le n. \tag{2}$$

From (1) and (2) it implies that $\dim(Der(NF_n)) = n$ and $\dim(LocDer(NF_n)) = \frac{n(n+1)}{2}$. Thus, there exist a local derivation on NF_n which is not an arbitrary derivation.

Now we investigate 2-local derivations on NF_n.

Theorem 2 Any 2-local derivation on the null-filiform Leibniz algebra NF_n is a derivation.

Now we consider 2-local derivations on naturally graded filiform Leibniz algebras. It is known that any complex n-dimensional naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebra is isomorphic to one of the following non isomorphic algebras:

$$F_n^1 : [e_1, e_1] = e_3, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \le i \le n-1;$$

$$F_n^2 : [e_1, e_1] = e_3, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1.$$

Theorem 3. The algebras F_n^1 and F_n^2 admit 2-local derivations which are not derivations.

In the third section of chapter one, we study local and 2-local derivation on p-filiform Leibniz algebras.

It is known that any naturally graded indecomposable non-Lie p-filiform Leibniz algebra is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras $(n - p \ge 4)$:

if $p = 2k$, then

$$\mu_1 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-2k-1 \\ [e_1, f_j] = f_{k+j}, & 1 \le j \le k, \end{cases}$$

$$\mu_2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-2k-1, \\ [e_1, f_1] = e_2 + f_{k+1}, & \\ [e_i, f_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-2k-1, \\ [e_1, f_j] = f_{k+j} & 2 \le j \le k, \end{cases}$$

if $p = 2k+1$, then

$$\mu_3 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-2k-1, \\ [e_1, f_j] = f_{k+j}, & 1 \le j \le k, \\ [e_2, f_j] = f_{k+j} & 1 \le j \le k, \end{cases}$$

where $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-p}, f_1, f_2, \dots, f_p\}$ is the basis of the algebra and the omitted products are equal to zero.

Remark 1. The dimensions of the space of derivations of the algebras μ_1, μ_2 and μ_3 are

$$\dim Der(\mu_1) = n + 2k^2 + k,$$

$$\dim Der(\mu_2) = n + 2k^2 + 1,$$

$$\dim Der(\mu_3) = n + 2k^2 + 2k + 1,$$

where $k \in \mathbb{N}$ and $n \ge 2k+4.$

In the following theorems we obtain the descriptions of local derivations of the algebras μ_1, μ_2 and μ_3.

Theorem 4. Let Δ be a linear operator on μ_1. Then Δ is a local derivation, if and only if its matrix has the form:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} \end{pmatrix},$$

where

$$\Delta_{1,1} = \sum_{j=1}^{n-2k} \sum_{i=j}^{n-2k} \gamma_{i,j} e_{i,j}, \quad \Delta_{2,1} = \sum_{i=n-2k+1}^{n} \gamma_{i,1} e_{i,1} + \sum_{i=n-k+1}^{n} \gamma_{i+1,2} e_{i+1,2},$$

$$\Delta_{1,2} = \sum_{i=n-2k+1}^{n-k} \gamma_{n-2k,i} e_{n-2k,i},$$

$$\Delta_{2,2} = \begin{pmatrix} \Delta_{2,2}^{(1)} & 0 \\ \Delta_{2,2}^{(2)} & \Delta_{2,2}^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{2,2}^{(1)} = \sum_{j=n-2k+1}^{n-k} \sum_{j=n-2k+1}^{n-k} \gamma_{i,j} e_{i,j}, \quad \Delta_{2,2}^{(2)} = \sum_{j=n-2k+1}^{n-k} \sum_{j=n-k+1}^{n} \gamma_{i,j} e_{i,j},$$

$$\Delta_{2,2}^{(3)} = \sum_{j=n-k+1}^{n} \sum_{j=n-k+1}^{n} \gamma_{i,j} e_{i,j}.$$

Remark 2. The dimensions of the space of local derivations of algebras μ_1, μ_2 and μ_3 are

$$\dim LocDer(\mu_1) = \frac{n^2 + 10k^2 - 4kn + n + 6k}{2},$$

$$\dim LocDer(\mu_2) = \frac{n^2 + 10k^2 - 4kn + n + 2k + 4}{2},$$

$$\dim LocDer(\mu_3) = \frac{n^2 + 10k^2 - 4kn - n + 12k + 4}{2},$$

where $k \in \mathbb{N}$ and $n \geq 2k + 4$.

Remarks 1 and 2 show that the dimensions of the spaces of all local derivations of the algebras $\mu_i,\ i = 1,2,3,$ are strictly greater than the dimensions of the space of all derivations of μ_i. Therefore, we have the following result.

Corollary 1. The algebras $\mu_1,\ \mu_2$ and μ_3 admit local derivations which are not derivations.

Now we examine 2-local derivations of p-filiform Leibniz algebras.

Theorem 5. The algebras $\mu_1,\ \mu_2$ and μ_3 admit 2-local derivations which are not derivations.

The second chapter, titled "**Local and 2-local derivation on solvable Leibniz algebras"** is devoted to study of local and 2-local derivations on solvable Leibniz algebras with abelian and model nilradicals.

Let a_n be the n-dimensional abelian algebra and let R be a $n+k$ dimensional solvable Leibniz algebra with nilradical a_n. By J.Q.Adashev and others such solvable algebras in case of $k = n$ are classified and it is proved that any $2n$-dimensional solvable Leibniz algebra with nilradical a_n is isomorphic to the direct sum of two dimensional algebras, i.e., isomorphic to the algebra

$$\mathcal{L}_t : [f_j, x_j] = f_j, \quad [x_j, f_j] = \alpha_j f_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

where $\alpha_j \in \{-1, 0\}$ and t is the number of zero parameters α_j.

Moreover, in the following theorem the classification of $(n+1)$-dimensional solvable Leibniz algebras with n-dimensional abelian nilradical is given.

Theorem 6. Let R be a $(n+1)$-dimensional solvable Leibniz algebra with n-dimensional abelian nilradical. If R has a basis $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, x\}$ such that the operator $ad_x|_{a_n}$ has Jordan block form, then it is isomorphic to one of the following two non-isomorphic algebras:

$$R_1 : \begin{cases} [f_i, x] = f_i + f_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [f_n, x] = f_n, \end{cases}$$

$$R_2:\begin{cases} [f_i,x]=f_i+f_{i+1}, & 1\le i\le n-1\\ [f_n,x]=f_m, & \\ [x,f_i]=-f_i-f_{i+1}, & 1\le i\le -1,\\ [x,f_n]=-f_n. & \end{cases}$$

In the following propositions, we present the general form of derivations of the algebras $\mathcal{L}_t$, R_1 and R_2.

Proposition 1. Any derivation D of the algebra $\mathcal{L}_t$ has the following form:

$$D(f_j)=a_jf_j,\quad D(x_j)=\alpha_jb_jf_j,\quad 1\le j\le n,$$

Proposition 2. Any derivation D of the algebras R_1 and R_2 has the following form:

$$Der(R_1):D(f_i)=\sum_{j=i+1}^{n}\alpha_{j-i+1}f_j+\alpha_1f_i.$$

$$Der(R_2):\begin{cases} D(f_i) & =\sum\limits_{j=i+1}^{n}\alpha_{j-i+1}f_j+\alpha_1f_i,\quad 1\le i\le n,\\ D(x) & =\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_jf_j. \end{cases}$$

Now we shall give the result concerning local derivations on solvable Leibniz algebras with abelian nilradicals.

Theorem 7. Any local derivation on the algebra $\mathcal{L}_t$ is a derivation.

In the following theorem, we show that $(n+1)$-dimensional solvable Leibniz algebras with abelian nilradical have a local derivation which is not a derivation.

Theorem 8. $(n+1)$-dimensional solvable Leibniz algebras R_1 and R_2, admit a local derivation which is not a derivation.

Now we shall give the result concerning of 2-local derivations of solvable Leibniz algebras with abelian nilradical.

Theorem 9. The algebra $\mathcal{L}_t$ admits a 2-local derivation which is not a derivation.

Proposition 3. Any 2-local derivation of the algebra R_1 is a derivation.

Theorem 10. Solvable Leibniz algebra R_2 admits a 2-local derivation which is not a derivation.

The second section of chapter two, we shall study local and 2-local derivations of solvable Leibniz algebra $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$.

Consider a nilpotent Leibniz algebra with the characteristic sequence $(m_1,\dots,m_s)$, and multiplication table

$$N_{m_1,\dots,m_s}:[e_i^t,e_1^1]=e_{i+1}^t,\ 1\le t\le s,1\le i\le m_t-1.$$

The algebra $N_{m_1,\dots,m_s}$ usually is said to be model Leibniz algebra.

Theorem 11. Any solvable Leibniz algebra R with nilradical $N_{m_1,\dots,m_s}$ such that $\dim R - \dim N_{m_1,\dots,m_s} = s$, is isomorphic to the algebra:

$$R(N_{m_1,\dots,m_s}, s): \begin{cases} [e_i^t, e_1^1] = e_{i+1}^t, & 1 \le t \le s, \quad 1 \le i \le m_t - 1, \\ [e_i^1, x_1] = ie_i^1, & 1 \le i \le m_1, \\ [e_i^t, x_1] = (i-1)e_i^t, & 2 \le t \le s, \quad\ 2 \le i \le m_t, \\ [e_i^t, x_t] = e_i^t, & 2 \le t \le s, \quad\ 1 \le i \le m_t, \\ [x_1, e_1^1] = -e_1^1, \end{cases}$$

where $\{x_1,\dots x_s\}$ is a basis of complementary vector space.

Proposition 4. Any derivation D of the algebra $Der(R(N_{m_1,\dots,m_s}, s))$ has the following form:

$$\begin{aligned} &D(e_i^1) = i\alpha_1 e_i^1 + \alpha_2 e_{i+1}^1, && 1 \le i \le m_1 - 1, \\ &D(e_{m_1}^1) = m_1\alpha_1 e_{m_1}^1, \\ &D(e_i^t) = ((i-1)\alpha_1 + \beta_t)e_i^t + \alpha_2 e_{i+1}^t, && 2 \le t \le s, \quad 1 \le i \le m_t - 1, \\ &D(e_{m_1}^t) = ((m_t - 1)\alpha_1 + \beta_t)e_{m_1}^t, && 2 \le t \le s, \\ &D(x_1) = -\alpha_2 e_1^1. \end{aligned}$$

Remark 3. Any derivation on the solvable Leibniz algebra $R(N_{m_1,\dots,m_s}, s)$ is an inner derivation.

Theorem 12. Any local derivation on the solvable Leibniz algebra $R(N_{m_1,\dots,m_s}, s)$ is a derivation.

Now we give the result concerning of the 2-local derivations of solvable Leibniz algebra $R(N_{m_1,\dots,m_s}, s)$.

Theorem 13. Any 2-local derivation of the solvable Leibniz algebra $R(N_{m_1,\dots,m_s}, s)$ is a derivation.

In the third chapter of the thesis titled "**2-local derivation on infinite-dimensional Lie algebras**" we study 2-local derivations on infinite-dimensional Lie algebras, such as generalized Witt, Virasoro and thin algebras.

In the first section of chapter three we study 2-local derivations on the generalized Witt algebras over an algebraically closed field $\mathbb{F}$ of characteristic zero.

Let $\mathcal{A}$ be an abelian group, $\mathbb{F}$ be a field with $char(\mathbb{F}) = 0$ and let T be a vector space over $\mathbb{F}$. The group algebra $\mathbb{F}\mathcal{A}$ of $\mathcal{A}$ over $\mathbb{F}$ generated by the basis elements $t^J, J \in \mathcal{A}$, and the multiplication of $\mathbb{F}\mathcal{A}$ is defined by $t^J t^K = t^{J+K}$. The unit of $\mathbb{F}\mathcal{A}$ is the element t^0.

Let us consider the tensor product

$$W = \mathbb{F}\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} T = span_{\mathbb{F}}\left\{t^J \otimes \partial : J \in \mathcal{A}, \partial \in T\right\}.$$

The element of W is also denoted as $t^J \otimes \partial := t^J \partial$. Now, if a given map $(\partial, J) \to \partial(J) : T \otimes A \to \mathbb{F}$ is $\mathbb{F}$-linear in the first variable and additive in the second variable, then the bracket

$$\left[t^J\partial_1, t^K\partial_2\right] := t^{J+K}\left(\partial_1(K)\partial_2 - \partial_2(J)\partial_1\right), J, K \in \mathcal{A}, \partial_1, \partial_2 \in T, \tag{3}$$

defines an infinite dimensional Lie algebra on W. The Lie algebra W with the Lie multiplication (3) is called a generalized Witt algebra over the vector space T graded by the abelian group $\mathcal{A}$.

If $\mathcal{A}$ is the additive group of $\mathbb{Z}^n$ with $n > 0$, then the group algebra $\mathbb{F}\mathcal{A}$ is isomorphic to the Laurent polynomial algebra $\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ over $\mathbb{F}$. For an n-tuple $J = \left(j_1, \ldots, j_n\right) \in \mathbb{Z}^n$, we write $t^J = t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n}$. Let T be the linear span $T = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{F}\partial_i$ of the operators $\partial_i = t^i \dfrac{\partial}{\partial t_i}$. If the map $(\partial, J) \to \partial(J) : T \otimes \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ satisfies $\partial_i(J) = j_i$ then the corresponding generalized Witt algebra $W = W_n(\mathbb{F})$ can be identified with the Lie algebra $Der_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]\right)$ of derivations of the Laurent polynomial algebra $\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ over $\mathbb{F}$, consisting of the Laurent polynomial vector fields

$$w(J; i) = w(j_1, \ldots, j_n; i) = t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n} \frac{\partial}{\partial t_i},$$

where $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{F}^n$ are the canonical coordinates in $\mathbb{F}^n$. A Lie algebra which is isomorphic to the Lie algebra $W_n(\mathbb{F})$ of Laurent polynomial vector fields is called Witt algebra over the vector space $\mathbb{F}^n$. The Lie algebra $W_n(\mathbb{F})$ has a basis $\{w(\mathbf{a}, i) : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, i \in I\}$ such that the multiplication rule (3) can be rewritten as

$$\left[w(\mathbf{a}, i), w(\mathbf{b}, j)\right] = \mathbf{a}_j w(\mathbf{a} + \mathbf{b}, i) - \mathbf{b}_i w(\mathbf{a} + \mathbf{b}, j), \tag{4}$$

where $i, j \in I$ and $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i), \mathbf{b} = (\mathbf{b}_i) \in \mathbb{Z}^n$.

Theorem 14. Any 2-local derivation ∇ on $W_n(\mathbb{F})$ is a derivation.

We also study 2-local derivations on the generalized Witt algebra $W = W(G, I)$ over an algebraically closed field $\mathbb{F}$ of characteristic zero, where I is an infinite index set and $G = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} = \left\{\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i)_{i \in I} : \mathbf{a}_i = 0 \text{ except for a finite number of } i \in I\right\}$.

Note that the Lie algebra $W(G, I)$ has a basis $\{w(\mathbf{a}, i) : \mathbf{a} \in G, i \in I\}$ and the multiplication rule of $W(G, I)$ is similar to (4).

Theorem 15. Any 2-local derivation ∇ on $W(G, I)$ is a derivation.

Further we study the 2-local derivations of Borel subalgebras of the generalized Witt algebra over an algebraically closed field $\mathbb{F}$ of characteristic zero.

Let $\mathbb{Z}_+$ be the set of non-negative integers. Setting

$$B(\mathbb{Z}^n, I) = span\left\{w(a, i) : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$$

we obtain so-called standard Borel subalgebra of $W_n(\mathbb{F})$. It is known that $B(\mathbb{Z}^n, I)$ is complete, that is, it is a centerless algebra and all derivations are inner.

Theorem 16. Let $B(\mathbb{Z}^n, I)$ be a Borel subalgebra of the generalized Witt algebra $W_n(\mathbb{F})$ over a field of characteristic zero. Then any 2-local derivation on $B(\mathbb{Z}^n, I)$ is a derivation.

In the second section of chapter three, we study derivation and 2-local derivations on the Virasoro algebra over an algebraically closed field $\mathbb{F}$ of characteristic zero.

The Witt algebra W has a unique nontrivial one-dimensional central extension $Vir = W \oplus \mathbb{C}\overline{c}$ up to Lie algebra isomorphism. This extension has a basis $\{c\} \cup \{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ where $c \in \mathbb{C}\overline{c}$, such that the following relations are satisfied:

$$[e_i, c] \quad = 0, \quad \text{for } i \in \mathbb{Z},$$

$$[e_i, e_j] \quad = (i-j)e_{i+j} + \delta_{i,-j}\frac{1}{12}(i^3 - i)c, \quad \text{for } i, j \in \mathbb{Z},$$

where $\delta_{i,-j}$ is the Kronecker symbol.

The extended Lie algebra Vir is called the Virasoro algebra.

Now, we shall give the main result concerning derivations and 2-local derivations on Virasoro algebras.

Theorem 17. Any derivation of the algebra Vir is inner.

Theorem 18. Any 2-local derivation on the Virasoro algebra is a derivation.

The third section of chapter three, we give an example of infinite-dimensional Lie algebra that admits a 2-local derivation which is not a derivation.

Let us consider the following infinite-dimensional Lie algebras with a basis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ and the following table of multiplications:

$$\mathcal{L}_1 : [e_1, e_n] = e_{n+1}, \quad n \geq 2.$$

$$\mathcal{L}_2 : [e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad i \geq 2 \text{ and } [e_2, e_j] = e_{j+2}, \quad j \geq 3.$$

Theorem 19. The algebras $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ admits a 2-local derivations which are not derivations.

CONCLUSION

The thesis is devoted to the study of local and 2-local derivation on Leibniz algebras.

The main results of the research are as follows:

1. We prove that all 2-local derivations on null-filiform Leibniz algebras is derivations. We give an example of an filiform Leibniz algebra with a 2-local derivation which is not a derivation. We proved that any null-filiform Leibniz algebra admits a local derivation which is not a derivation;

2. We show that p-filiform Leibniz algebras admit local derivations and 2-local derivations which are not derivations;

3. We show that any local derivation on the solvable Leibniz algebras with abelian nilradicals, whose the dimension of complementary space is maximal is a derivation. We show that solvable Leibniz algebras with abelian nilradicals, which have 1-dimension complementary space, admit local derivations which are not derivations. Moreover, similar problem concerning 2-local derivations of such

algebras are investigated and it is given examples of solvable Leibniz algebra such that any 2-local derivation on it is a derivation, and algebras admitting 2-local derivations which are not derivations;

4. We show that any local and 2-local derivation on the solvable Leibniz algebras with model nilradicals, whose the dimension of complementary space is maximal is a derivation;

5. We prove that every 2-local derivation on the generalized Witt algebra is a derivation. We show that thin Lie algebras as a rule admit 2-local derivations which are not derivations.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО
ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ЮСУПОВ БАХТИЁР БАХРОМБЕК УГЛИ

ЛОКАЛЬНЫЕ И 2-ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

01.01.06 –Алгебр

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2020 год.

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.PhD/FM230.

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский(резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** доктор физико-математических наук, профессор, академик.
Официальные оппоненты:	**Арзикулов Фарходжон Нематжонович** доктор физико-математических наук
	Курбанбаев Тууелбай Кадирбаевич кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Термезский государственный университет**

Защита диссертации состоится «22» июля 2020 года в 9:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институт Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81. Тел.: (+998 71) 262 7544, факс: (+998 71) 262 7357, e-mail: kengash@mathinst.uz.)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 104). (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81. Тел.: (+998 71) 262 7544).

Автореферат диссертации разослан «18» июля 2020 года.
(протокол рассылки № 2 от «18» июля 2020 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по
присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.К.Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, к.ф.-м.н

А.Р.Хаётов
Заместитель председателя научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Целью исследования является исследование локальных и 2-локальных дифференцирований алгебр Лейбница.

Объект исследования локальные и 2-локальные дифференцирования алгебр Лейбница, 2-локальные дифференцирования на бесконечномерных алгебрах Ли.

Научная новизна исследования состоит из следующих:

доказано, что каждое 2-локальное дифференцирование на нуль-филиформной алгебре Лейбница является дифференцированием;

показано, что любая p-филиформная алгебра Лейбница имеет локальные и 2-локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированием;

исследуются локальные дифференцирования на разрешимых алгебрах Лейбница и доказывается, что любое локальное дифференцирование разрешимых алгебр Лейбница с абелевым нильрадикалом и максимальной размерностью дополнительного пространства является дифференцированием;

показано, что каждое локальное и 2-локальное дифференцирование на разрешимых алгебрах Лейбница с модельным нильрадикалом и максимальной размерностью дополнительного пространства является дифференцированием;

показано, что любое 2-локальное дифференцирование на обобщенных алгебрах Витта, а также на алгебрах Вирасоро является дифференцированием.

Внедрение результатов исследования. Результаты были использованы в следующих научных исследованиях:

результаты, полученные в диссертации о произвольном 2-локальном дифференцировании алгебры Витта, являются дифференцированием, использованным в проекте ОТ-4-27 «Описание предуальных пространств йордановых троек, пространства емкостей и голоморфное продолжение функции» (справка Министерства высшего и среднего специального образования, № 89-03-2339, 30.06.2020). Применение научного результата позволило описать 2-локальные автоморфизмы AW^*-алгебр;

полученные результаты в диссертации о классификации локальных и 2-локальных дифференцирований разрешимых алгебр Лейбница, использованных в проекте ОТ-F4-82 + ОТ-F4-87 «Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фаза переходы и хаос в нелинейных динамических системах »+« Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах и ее приложения в механике»(справка Академии наук Республики Узбекистан от 3 июля 2020 г., № 2/1255-1389). Эти результаты позволили описать локальные и 2-локальные автоморфизмы полупростых алгебр Лейбница.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованных литературы. Общий объем диссертации составляет 82 страниц.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (part I ; I часть)

1. Аюпов Ш.А., Кудайбергенов К.К., Юсупов Б.Б. Локальные и 2-локальные дифференцирования некоторых филиформных алгебр // Узбекский математический журнал. 2017. № 1. с. 44-54. (01.00.00; №6).
2. Аюпов Ш.А., Юсупов Б.Б. Локальные и 2-локальные дифференцирования квази-филиформных алгебр Лейбница // Вестник НУУз. 2017. № 2/1. с. 74-82. (01.00.00; №8).
3. Yusupov B. B. 2-local derivations on Witt algebras // Uzbek Mathematical Journal. 2018. № 2. p. 160-166. (01.00.00; №6).
4. Yusupov B. B. Local and 2-local derivations of some solvable Leibniz algebras // Uzbek Mathematical Journal. 2019. № 2. p. 154-166. (01.00.00; №6).
5. Ayupov Sh. A., Yusupov B. B. 2-local derivations on Virasoro algebras // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2019. Vol.2. p. 217-230. (01.00.00; №8).
6. Ayupov Sh. A., Yusupov B. B. 2-Local derivations of infinite-dimensional Lie algebras // Journal of Algebra and Its Applications. 2020. Vol. 19, № 5. p. 1-12. (3. Scopus IF=0.57)
7. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B. 2-Local derivations on generalized Witt algebras // Linear and Multilinear Algebra. 2020. DOI: 10.1080/03081087.2019.1708846. (3. Scopus IF=1.13)
8. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B. Local and 2-local derivations of p-filiform Leibniz algebras // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245, № 3, p. 359-367. (3. Scopus IF=0.28)
9. Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A. Kh., Yusupov B. B. Local and 2-local derivations of solvable Leibniz algebras // International Journal of Algebra and Computation. 2020. DOI: 10.1142/S021819672050037X (3. Scopus IF=0.52)

II бўлим (part II; II часть)

10. Yusupov B. B. Tabiiy usulda graduirlangan filiform Leibniz algebralarining lokal differensiallashi // Matematikaning dolzarb muammolari. Andijon, 17 may 2016. b. 308-310.
11. Юсупов Б.Б. 2-локальные дифференцирования квази-филиформных алгебр Лейбница // Актуальные проблемы динамических систем и их приложений, Ташкент, 1-3 мая 2017 й, с. 256-258.
12. Юсупов Б.Б. Локальные и 2-локальные дифференцирования некоторых филиформных алгебр Лейбница // Matematika, mexanika va informatika

fanlarining rivojida istedodli yoshlarning o‘rni, O‘zMU magistrlar to‘plami, 2017 y, b. 102-104.

13. Xudayberdiyev A.X., Yusupov B.B. Tabiiy usulda graduirlangan filiform Leibniz algebrasida 2-local differensiallash// Amaliy matematuka va informatsion texnologiyalarning dolzarb muammolari-Al-Xorazmiy 2016. Buxoro, 9-10 noyabr 2016 y, b. 320-321.
14. Кудайбергенов К.К., Юсупов Б.Б. Локальные и 2-локальные дифференцирования 2-филиформных алгебр Лейбница // Замонавий топология муаммолари ва тадбиқлари, Тошкент, 11-12 май 2017 й, b. 210-212
15. Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B., 2-local derivations on Witt algebras // The second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical phisics. Khorazm, 8-12 August, 2017 y. p. 25-26.
16. Kudaybergenov K. K., Alauadinov A. K., Yusupov B. B. 2-local derivations on infinite-dimensional Lie algebras // International conference Mathematical Analysis and its Applications to the Mathematical Physics, Part I. Samarkand, 17-20 September 2018 y. p. 98-99.
17. Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B., 2-local derivations on Witt algebras // Modern problems of the applied mathematics and information technology-Al-Khorezmiy 2018. Tashkent, 13-15 September, 2018 y. p. 144-145.
18. Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B., p-filiform Leibniz algebrasining local differensiallashi // Yosh matematiklarning yangi teoremalari 2018. Namangan, 18-19 Oktabr, 2018 y. b. 69-71.
19. Ayupov Sh. A., Yusupov B. B., 2-local derivations of polynomial Witt algebras // Abstracts of the Joint International Conference STEMM. Bukhara -Samarkand -Tashkent, 13-17 May, 2019 y. p. 23-24.
20. Yusupov B. B., On the derivation of positive Witt algebras // Tahlilning dolzarb muammolari va tatbiqlari. Qarshi, 4-5 oktabr, 2019 y, b. 236-237.
21. Ayupov Sh. A., Yusupov B. B., 2-local derivations on Virasoro algebra // V Scientific-applied conference “Statistics and its Applications”. Tashkent, 17-18 octember, 2019 y. p. 188-191.
22. Ayupov Sh. A., Yusupov B. B., Local and 2-local derivations of some solvable Leibniz algebras // Non-classical equations of mathematical physics and their applications. Uzbek - Russian Scientific Conference Tashkent, October 24-26, 2019 y, p. 192-194.
23. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B. 2-local derivations on generalized Witt algebras // The Eighth School-Conference on Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory. Moscow, January 27 - February 1, 2020 y, p. 73-75.