В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ
В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АЛАУАДИНОВ АМИР КАДИРБЕРГЕНОВИЧ

ЎЛЧОВЛИ ОПЕРАТОРЛАР АЛГЕБРАЛАРИ ВА УНИНГ ҚИСМ АЛГЕБРАЛАРИ 2-ЛОКАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2020

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ
В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АЛАУАДИНОВ АМИР КАДИРБЕРГЕНОВИЧ

ЎЛЧОВЛИ ОПЕРАТОРЛАР АЛГЕБРАЛАРИ ВА УНИНГ ҚИСМ АЛГЕБРАЛАРИ 2-ЛОКАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2020

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.2.PhD/FM146 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://mathinst.uz/kengash/) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Рахимов Абдуғофур Абдумажидович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Эшматов Фарход Хасанович физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
Етакчи ташкилот:	**Андижон Давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «____» ____________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улуғбек тумани, Мирзо Улуғбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (+998 71) 262 7544, факс: (+998 71) 262 7357 , e-mail: kengash@mathinst.uz.)

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улуғбек тумани, Мирзо Улуғбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (+998 71) 262 7544).

Диссертация автореферати 2020 йил «____» ____________ куни тарқатилди.
(2020 йил «____» ____________ даги ____ рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш Илмий котиби,
ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

У.У.Жамилов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Ҳозирги вақтда операторлар алгебралари назарияси соф математикадаги каби амалий жиҳатдан ҳам муҳим аҳамиятга эга. Чунки операторлар алгебраларининг ҳолатлари, тасвирлашлари, автоморфизмлар гуруҳлари ва дифференциаллашлари ёрдамида квант майдони назарияси ва статистик физикада модел тизимларининг ҳусусиятларини тавсифлаш ва ўрганиш мумкин.

Дифференциаллашлар назариясининг асосий муаммолари бу дифференциаллашнинг автоматик узлуксизлигини, ички ёки фазовий дифференциаллаши эканлигини исботлаш ёки ҳар хил топологик алгебраларда ички бўлмаган ва узулишга эга дифференциаллашлар мавжудлигини кўрсатишдир.

Операторлар алгебраларида дифференциаллашлар назарияси математик физикада тадбиқига эга бўлиб, операторлар алгебраларининг умумий назариясининг муҳим ва яхши ўрганилган қисмидир. Маълумки, C^*-алгебранинг ҳар бир дифференциаллаши чегараланган (яъни, норма бўйича узлуксиздир) ва фон Нейман алгебрасининг ҳар бир дифференциаллаши ички дифференциаллаш бўлади. Чегараланган дифференциаллашлар назарияси С.Сакаининг монографияларида батафсил баён этилган. Г.Дейлснинг ҳар хил синфлардаги банах алгебралари дифференциаллашларининг автоматик узлуксизлигини ўрганишга бағишланган монографиясида, умумий банах алгебраларидаги дифференциаллашларни ўрганиш батафсил келтирилган.

Дифференциаллашлар назарияси билан бир қаторда, операторлар алгебраларида локал ва 2-локал дифференциаллашлар назарияси ҳам муҳим ҳисобланади. Сўнгги йигирма йил ичида фон Нейман алгебраларида, C^*-алгебраларида ва JB^*-учликларида ушбу дифференциаллашлар бўйича изланишлар самарали ўсди. Локал дифференциаллашларни ўрганиш 1990 йилда Р.В.Кэйдисон томонидан ҳамда ундан мустақил равишда Д.Р. Ларсон ва А.Р. Сурурлар томонидан бошланган.

Вазирлар Маҳкамасининг қарори билан «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда операторлар алгебралари дифференциаллашлар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш,

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-сонли Қарори, 2018 йил 27 апрелдаги «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойихаларни амалий жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-3682-сонли Қарори, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация Республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. 2000 йилда академик Ш.А. Аюпов томонидан фон Нейман алгебраларига нисбатан ўлчовли операторлар алгебраларида дифференциаллашларни ўрганиш масаласини қўйилди.

Австралия, АҚШ, Германия, Россия ва Ўзбекистондан бир қатор математикларининг ишлари ушбу муаммони ўрганишга бағишланган. Жумладан, А.Ф. Бер, В.И. Чилин, Ф.А. Сукочевлар ва улардан мустақил равишда А.Г. Кусраевнинг ишларида коммутатив фон Нейман алгебралари учун дастлабки натижалар олинган. Айнан коммутатив фон Нейман алгебраларига нисбатан ўлчовли операторлар алгебрасида тривиал бўлмаган дифференциаллашларнинг мавжуд бўлиши учун зарурий ва етарли шартлари аниқланганди. Кейинчалик бу масаланинг С. Альбеверио, Ш.А. Аюпов ва К.К. Кудайбергеновларнинг ишларида типи I ва типи III алгебралари учун, А.Ф. Бер, В.И. Чилин ва Ф.А. Сукочевларнинг ишларида эса хос чексиз фон Нейман алгебралар учун ечимлари топилган. 2014 йилга келиб Ш.А.Аюпов томонидан қўйилган муаммо, типи II_1 фон Нейман алгебралардан бошқа фон Нейман алгебралари учун ўз ечимини топди. Таъкидлаш жоизки, типи II_1 бўлган ҳол Р. Кэйдисон ва Ж. Лю томонидан ҳам ўрганилган. Ушбу муаммонинг тўлиқ ечими 2019 йилда А.Ф. Бер, К.К. Кудайбергенов, Ф.А. Сукочевнинг ишларида олинган.

Глисон–Кахане–Желязко ва Ковалский–Слодковский теоремаларидан илҳомланган П. Шемрл 1997 йилда 2-локал дифференциаллаш ва 2-локал автоморфизм тушунчаларини киритди. У H – сепарабел гильберт фазоси бўлган ҳолда $B(H)$ алгебрасидаги ҳар қандай 2-локал дифференциаллашнинг дифференциаллаш эканлигини исботлади. 2004 йилда С. Ким ва Ж. Кимларнинг ишида комплекс матрицалар алгебраларида ҳар қандай 2-локал дифференциаллашнинг дифференциаллаш эканлигининг исботи берилди.

Ж.Жанг ва Х.Ли ушбу натижани ихтиёрий носимметрик матрицалар алгебрасигача кенгайтирдилар ва 2×2-тартибли юқори учбурчак комплекс матрицалар алгебрасида дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллашга мисол келтиришди. Ихтиёрий H (сепарабел бўлмаган) гильберт фазоси учун $B(H)$ алгебрасининг ҳар бир 2-локал дифференциаллашининг дифференциаллаш бўлиши Ш.А.Аюпов ва К.К.Кудайбергеновлар томонидан исботланди. 2014 йилда Ш.А.Аюпов ва Ф.Н.Арзикулов юқоридаги натижаларни кенгайтириб ва бу натижани яримчекли фон Нейман алгебралари учун қисқача исботини бердилар. 2015 йили Ш.А.Аюпов ва К.К.Кудайбергенов ихтиёрий фон Нейман алгебрасида ҳар бир 2-локал дифференциаллашининг дифференциаллаш бўлишини исботлашган.

2-Локал дифференциаллаш назариясига тегишли юқоридаги барча натижаларни инобатга олган ҳолда, ўлчовли операторлар алгебралари ва уларнинг қисм алгебралари учун 2-локал дифференциаллашларнинг тузилиши ва қандай холларда ихтиёрий 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш бўлиши хақида табиий савол туғилади.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти ОТ-Ф4-82+ ОТ-Ф4-87 – «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизиқли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос»+ «Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва сиртларнинг глобал инвариантлари назарияси ва унинг механикага тадбиқлари» (2017-2019 йиллар) ва Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университетининг ОТ-4-27 «Йордан учликлари фазолари, сиғимлар фазолари тавсифлари ва функцияларни голоморф давом эттириш» (2017-2020 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади. Турли хил операторлар алгебраларида 2-локал дифференциаллашларни ўрганиш ва уларнинг дифференциаллашлар билан боғлиқликларини тадқиқ қилиш.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Коммутатив регуляр алгебраларда 2-локал дифференциаллашларни тадқиқ қилиш.

Аренс алгебраларида 2-локал дифференциаллашларни тадқиқ қилиш.

Матрицалар алгебраларида 2-локал дифференциаллашларни тадқиқ қилиш.

Локал ўлчовли операторлар алгебраларида 2-локал дифференциаллашларни тадқиқ қилиш.

Тадқиқотнинг объекти. Турли хил операторлар алгебралари ва унинг қисм алгебраларининг 2-локал дифференциаллашлари.

Тадқиқотнинг предмети. Дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллашларнинг мавжудлиги ва турли хил операторлар алгебраларида 2-

локал дифференциаллашлар билан оддий дифференциаллашларнинг боғлиқлиги масалалари.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида матрицалар назарияси, функционал анализ ва операторлар алгебралари назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Коммутатив регуляр алгебраларида дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллашнинг мавжуд бўлиши шартлари топилди;

Аренс алгебраларида иҳтиёрий 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш бўлиши исботланди;

Матрицалар алгебраларида иҳтиёрий 2-локал дифференциаллаш дифференциаллаш бўлиши исботланди;

Локал ўлчовли операторлар алгебраларида иҳтиёрий 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш бўлиши исботланди.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

Турли хил операторлар алгебраларида 2-локал дифференциаллашлар ва дифференциаллашлар орасида боғлиқлик ўрнатилди.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ усуллари, алгебра, дифференциаллашлар назарияси, шунингдек математик фикрлашнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, баъзи оператор алгебраларининг 2-локал дифференциаллашлари ва глобал дифференциаллашлари фазоларининг устма-уст тушиши исботланган, бундан ташқари, коммутатив регуляр алгебраларида дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллаш мавжудлиги шартлари топилган.

Диссертация ишининг амалий аҳамияти шундаки, олинган натижалардан операторлар алгебраларида дифференциаллашлар назариясида фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Олинган натижалар қуйидаги илмий лойиҳаларида фойдаланилган:

Ўлчовли операторлар алгебралари, матрицалар алгебралари ва коммутатив регуляр алгебралари 2-локал дифференциаллашлари таснифи FLl70100052 рақамли «Нокоммутатив анализнинг янги методлари» хорижий лойиҳасида ўлчовли функциялар алгебраларнинг трансляционал-инвариант дифференциаллашлари алгебрасини тавсифлаш учун фойдаланилган. (Янги Жанубий Уэлс университетининг 2020 йил 20 январдаги маълумотномаси, Австралия). Илмий натижалар ўлчовли функциялар алгебралари трансляцион-инвариант дифференциаллашларини тавсифлаш учун қўлланилган;

Ўлчовли операторлар алгебралари, матрицалар алгебралари ва коммутатив регуляр алгебралари 2-локал дифференциаллашлари таснифи FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2 рақамли «Алгебраларнинг айрим синфларининг умумлаштирилган дифференциаллашлари ва уларнинг қўлланилиши» хорижий лойиҳасида чекли ўлчовли ноассоциатив алгебраларнинг айрим синфлари дифференциаллашлари алгебрасини тавсифлаш учун фойдаланилган (МАРА Технологияси университетининг 2020 йил 10 июндаги маълумотномаси, Шах Алам, Малайзия). Илмий натижалар чекли ўлчовли ноассоциатив алгебраларнинг аниқ синфларининг дифференциаллашлари алгебрасини тавсифлаш учун қўлланилган;

Ўлчовли операторлар алгебралари ва коммутатив регуляр алгебралари 2-локал дифференциаллашлари таснифи PGC2018- 093332-B-I00 рақамли «Функционал анализ нуқтаи назардан «ҳимоячилар» ҳақидаги масала» хорижий лойиҳасида C^*-алгебралари ва фон Нейман алгебралари локал учлик, 2-локал учлик ва кучсиз 2-локал дифференциаллашларини тадқиқ қилиш учун фойдаланилган (Гранада университетининг 2010 йил 1 июндаги маълумотномаси, Испания). Илмий натижалар қўлланиши C^*-алгебралари ва фон Нейман алгебралари локал учлик, 2-локал учлик ва кучсиз 2-локал дифференциаллашларини алгебрасини тавсифлаш имконини берган;

Ўлчовли операторлар алгебралари, матрицалар алгебралари ва коммутатив регуляр алгебралари 2-локал дифференциаллашлари таснифи «Ноассоциатив алгебралар ва супералгебралар» хорижий лойиҳасида ноассоциатив алгебраларда, хусусан, Малцев алгебраларида, локал ва 2-локал дифференциаллашларини тадқиқ қилиш учун фойдаланилган (Федерал университетининг 2010 йил 5 июндаги маълумотномаси, Санто-Андре, Бразилия). Илмий натижалар ноассоциатив алгебраларида хусусан, Малцев алгебраларида локал ва 2-локал дифференциаллашлари алгебрасини тавсифлаш учун қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари иккита халқаро ва учта республика илмий-амалий анжуманларида муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 11 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 4 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 68 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Локал ўлчовли операторлар алгебраси ва унинг дифференциаллашлари»** деб номланувчи биринчи бобида ўлчовли, локал ўлчовли операторлар алгебралари ва бу алгебраларнинг дифференциаллашлари ҳақида асосий маълумотлар берилган.

Айтайлик H Гильберт фазоси, $B(H)$ эса H фазосидаги аниқланган барча чегараланган чизиқли операторларнинг $*$-алгебраси бўлсин.

$B(H)$ алгебрасининг айний операторни ўз ичига олувчи кучсиз оператор топологиясида ёпиқ бўлган M *-қисм алгебраси *фон Нейман* алгебраси дейилади.

$M \subset B(H)$ фон Нейман алгебрасини қарайлик, айтайлик $P(M) = \{p \in M : p = p^2 = p^*\}$ тўплам M алгебранинг барча проекторлари панжараси ва $P_{fin}(M)$ бу $P(M)$ панжарадаги барча чекли проекторлардан иборат тўплам бўлсин.

1-Таъриф. M фон Нейман алгебраси бўлсин, агар:

ихтиёрий нолдан фарқли $e \in P(M)$ проектор учун минимал $p \in P(M)$ мавжуд бўлиб $p \leq e$ бажарилса, *атомик;*

1 бирлик элемент чекли проектор бўлса, *чекли*;

ихтиёрий $z \in M$ марказий проектор учун нолдан фарқли $e \in P(M)$ чекли проектор мавжуд бўлиб $e \leq z$ бажарилса, *ярим-чекли*;

ихтиёрий $z \in M$ марказий проектор учун нолдан фарқли $e \in P(M)$ абел проектор мавжуд бўлиб $e \leq z$ бажарилса, *типи* I;

M ярimчекли алгебра бўлиб нолдан фарқли абел проекторларини ўз ичига олмаса, *типи* II;

M нолдан фарқли чекли проекторларини ўз ичига олмаса, – *типи* III;

M типи I чекли алгебра бўлса, *типи* I_{fin};

M типи I чекли бўлмаган алгебра бўлса, *типи* I_{∞};

M типи II чекли алгебра бўлса, *типи* II_1;

M типи II чекли бўлмаган алгебра бўлса, *типи* II_{∞};

1 бирлик элемент хос чексиз проектор бўлса, *хос чексиз*;

M типи III бўлса, *соф чексиз*

фон Нейман алгебраси дейилади.

Айтайлик, $M \subset B(H)$ ихтиёрий фон Нейман алгебраси бўлсин.

Агар M фон Нейман алгебрасининг

$$M' = \{y \in B(H) : xy = yx, \forall x \in M\}$$

коммутантидаги ҳар бир унитар u элементи учун $u(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ бажарилса, у ҳолда H Гильберт фазонинг $\mathcal{D}$ қисм фазоси M алгебрага бириктирилган дейилади ($\mathcal{D}\eta M$ каби белгиланади).

Агар $x : \mathcal{D}(x) \to H$ чизиқли оператор барча $\xi \in \mathcal{D}(x)$ ва унитар $u \in M'$ элементлар учун $\mathcal{D}(x)\eta M$ ва $u(x(\xi)) = x(u(\xi))$ муносабатларини қаноатлантирса, у ҳолда x оператор M алгебрага бириктирилган дейилади ($x\eta M$ каби белгиланади).

Агар H фазонинг $\mathcal{D}$ қисм фазоси учун

1) $\mathcal{D}\eta M$;

2) $P(M)$ да $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ проекторлар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб $p_n \uparrow \mathbf{1}$, $p_n(H) \subset \mathcal{D}$ ва барча $n \in \mathbb{N}$ учун $p_n^{\perp} = \mathbf{1} - p_n$ проекторлар M да чекли бўлса, у ҳолда $\mathcal{D}$ қисм фазо H фазода *кучли зич* дейилади.

2-Таъриф. Агар H Гильберт фазосида аниқланган x ёпиқ чизиқли оператор учун $x\eta M$ ва $\mathcal{D}(x)$ – H фазода кучли зич бўлса, у ҳолда x оператор M *фон Нейман алгебрага нисбатан ўлчовли* дейилади.

H Гильберт фазосида аниқланган M фон Нейман алгебрасига нисбатан ўлчовли бўлган барча операторлар тўпламини $S(M)$ каби белгиланади. Агар $x \in S(M)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, бу ерда $\mathbb{C}$ комплекс сонлар майдони бўлса, у ҳолда $\lambda x \in S(M)$ ва x нинг қўшмаси x^* оператор ҳам M алгебрага нисбатан ўлчовли бўлади. Бундан ташқари, агар $x, y \in S(M)$ бўлса, у ҳолда зич қисм фазоларда аниқланган $x + y$ ва xy операторлари ёпиқ бўлиб, мос равишда кучли йиғинди ва кучли кўпайтма дейилади ва улар $x\dot{+}y$ ва xy каби белгиланади. А.И.Сигал томонидан $x\dot{+}y$ ва xy операторларнинг $S(M)$ тўпламига тегишли эканлиги ва $S(M)$ тўплам алгебраик амалларга нисбатан комплекс сонлар майдони устида $\mathbf{1}$ бирлик элементга эга $*$-алгебра ташкил этиши кўрсатилган. Бунда M – $S(M)$ алгебрасининг $*$-қисм алгебраси бўлади. Бундан буён, x ва y операторларининг кучли йиғиндиси ва кучли кўпайтмаларини оддий $x + y$ ва xy каби белгилаймиз.

Агар H фазода аниқланган x ёпиқ чизиқли оператор учун $x\eta M$ ва M алгебрасида шундай $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ марказий проекторлар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб, $z_n \uparrow \mathbf{1}$ ва $z_n x \in S(M)$ бажарилса, у ҳолда x оператор M *алгебрага нисбатан локал ўлчовли* дейилади.

M алгебрага нисбатан барча локал ўлчовли операторлар тўпламини $LS(M)$ каби белгиланади.

Айтайлик, τ – M фон Нейман алгебрасидаги аниқ нормал яримчекли из бўлсин. Агар H гильберт фазосида x ёпиқ чизиқли оператор учун $x\eta M$ ва $\mathcal{D}(x)$ тўплам τ-зич бўлса, у ҳолда x оператор M фон Нейман алгебрасига нисбатан *τ-ўлчовли* дейилади, яъни $\mathcal{D}(x)\eta M$ ва $\varepsilon > 0$ берилган сон учун $p \in M$ проектор мавжуд бўлиб, $p(H) \subset \mathcal{D}(x)$ ва $\tau(p^{\perp}) < \varepsilon$ ўринли бўлади. M га нисбатан барча τ-ўлчовли операторлар тўпламини $S(M,\tau)$ билан белгиланади.

Маълумки, $S(M,\tau)$ *-алгебра $LS(M)$ алгебранинг $*$-қисм алгебраси бўлади.

Энди биз дифференциаллашлар назариясининг зарурий тушунчаларини келтирамиз.

Айтайлик, $\mathcal{A}$ алгебра ва $D:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ чизиқли оператор бўлсин. Агар барча $x, y\in\mathcal{A}$ элементлар учун $D(xy)=D(x)y+xD(y)$ (Лейбниц қоидаси) айнияти бажарилса $D:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ чизиқли оператор *дифференциаллаш* дейилади. Ассоциатив $\mathcal{A}$ алгебрада иҳтиёрий $a\in\mathcal{A}$ элемент $D_a(x)=[a,x]=ax-xa,\ x\in\mathcal{A}$ кўринишда аниқланган D_a дифференциаллашни ҳосил қилади. Бундай D_a дифференциаллашлар *ички дифференциаллашлар* дейилади. Агар D_a дифференциаллашни ҳосил қилувчи a элемент $\mathcal{A}$ ни ўз ичига олувчи каттароқ $\mathcal{B}$ алгебрага тегишли бўлса, у ҳолда D_a дифференциаллаш $\mathcal{A}$ да *фазовий дифференциаллаш* дейилади.

Иҳтиёрий $x\in\mathcal{A}$ элемент учун $\Delta(x^2)=\Delta(x)x+x\Delta(x)$ тенгликни қаноатлантирувчи чизиқли $\Delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ операторга *йордан дифференциаллаши* дейилади.

Агар $\Delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ (чизиқли бўлиши шарт эмас) оператор учун ҳар бир $x, y\in\mathcal{A}$ элементларига мос $D_{x,y}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ дифференциаллаши мавжуд бўлиб $D_{x,y}(x)=\Delta(x)$ ва $D_{x,y}(y)=\Delta(y)$ тенгликлари бажарилса, у ҳолда Δ операторига *2-локал дифференциаллаш* дейилади.

Диссертациянинг «**Коммутатив регуляр алгебраларнинг 2-локал дифференциаллашлари»** деб номланувчи иккинчи бобида коммутатив регуляр алгебралар ва уларнинг дифференциаллашлари ҳақидаги дастлабки маълумотлар келтирилган. Коммутатив регуляр алгебраларда дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллашларнинг мавжуд бўлишининг зарурий ва етарли шартлари топилган.

Айтайлик, $\mathcal{A}$ – $\mathbb{C}$ комплекс сонлар майдони устида **1** бирлик элементга эга коммутатив алгебра бўлсин. $\mathcal{A}$ алгебрадаги барча $\{e\in\mathcal{A}:e^2=e\}$ идемпотентлар тўпламини ∇ каби белгилаймиз. Агар $e, f\in\nabla$ лар учун $ef=e$ ўринли бўлса, у ҳолда $e\le f$ деб ҳисоблаймиз. Бу қисмий тартибга нисбатан $e\vee f=e+f-ef,\ e\wedge f=ef$ панжара амаллари ва $e^{\perp}=\mathbf{1}-e$ тўлдирувчига нисбатан ∇ бул алгебраси бўлади. Агар ∇ бул алгебрасидаги нолдан фарқли q элемент учун $0\ne e\le q,\ e\in\nabla$ муносабатдан $e=q$ эканлиги келиб чиқса, у ҳолда q элементни *атом* дейилади. Агар нолдан фарқли ихтиёрий $e\in\nabla$ учун $q\le e$ тенгсизлик ўринли бўладиган q атом мавжуд бўлса, у ҳолда ∇ бул алгебраси *атомик* дейилади.

Агар ихтиёрий $a\in\mathcal{A}$ элемент учун $a=aba$ тенглик бажариладиган $b\in\mathcal{A}$ элементи мавжуд бўлса, у ҳолда $\mathcal{A}$ *регуляр алгебра (фон Нейман маъносида)* дейилади.

Келгусида, $\mathcal{A}$ ни $\mathbb{C}$ устида унитал коммутатив регуляр алгебра ва ∇ ни унинг барча идемпотентларининг бул алгебраси деб қараймиз. Бу ҳолда, $a\in\mathcal{A}$ элемент учун $e\in\nabla$ идемпотент мавжуд бўлиб, $ea=a$ ва агар

$ga = a, g \in \nabla$ эканлигидан $e \le g$ келиб чиқса, у ҳолда e идемпотенти a элементнинг *ташувчиси* дейилади ва $s(a)$ каби белгиланади.

Айтайлик μ – $\mathcal{A}$ алгебра идемпотентларининг бул алгебраси ∇ да қатъий мусбат саноқли-аддитив чекли ўлчов бўлсин ва $\mathcal{A}$ алгебрада $\rho(a,b) = \mu(s(a-b)), a,b \in \mathcal{A}$ метрикани қараймиз. Эндиликда $(\mathcal{A}, \rho)$ ни тўла метрик фазо деб фараз қиламиз.

Агар $a = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, бунда $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $e_k \in \nabla, e_k e_j = 0, k \ne j, k, j = 1,...,n, n \in \mathbb{N}$ бўлса, у ҳолда $a \in \mathcal{A}$ элемент *чекли қийматли* дейилади. Агар $a = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, бунда $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $e_k \in \nabla, e_i e_j = 0, i \ne j, i \in \mathbb{N}$ (сўнги ҳолда қатор йиғиндиси ρ метрикага нисбатан тушунилади) бўлса, $a \in \mathcal{A}$ элемент *саноқли қийматли* дейилади. $\mathcal{A}$ даги барча чекли қийматли (мос равишда, саноқли қийматли) элементлар тўпламини $K(\nabla)$ (мос равишда, $K_c(\nabla)$) каби белгилаймиз. Маълумки, $\nabla \subset K(\nabla) \subset K_c(\nabla)$ муносабат ўринли, ҳамда $K(\nabla)$ сингари $K_c(\nabla)$ ҳам $\mathcal{A}$ алгебранинг регуляр қисм алгебрасидир, шу билан бирга $K(\nabla)$ нинг $(\mathcal{A}, \rho)$ даги ёпилмаси $K_c(\nabla)$ га тенг бўлади.

Эндиликда $\mathcal{A}$ ни $\mathbb{C}$ устида унитал коммутатив регуляр алгебра, μ ни эса $\mathcal{A}$ даги барча идемпотентларнинг ∇ бул алгебрасидаги қатъий мусбат саноқли-аддитив чекли ўлчов, ҳамда $\mathcal{A}$ алгебра $\rho(a,b) = \mu(s(a-b)), a,b \in \mathcal{A}$ метрика бўйича тўла деб фараз қиламиз.

$\mathcal{B}$ алгебра $\mathcal{A}$ алгебранинг унитал қисм алгебраси ва $a \in \mathcal{A}$ элементи:

агар $p \in \mathcal{B}[x]$ кўпҳад мавжуд бўлиб (яъни x нинг кўпҳади коэффициентлари $\mathcal{B}$ дан олинган) $p(a) = 0$ бажарилса, *$\mathcal{B}$ га нисбатан алгебраик*;

агар $p \in \mathcal{B}[x]$ унитар кўпҳад мавжуд бўлиб (яъни $p(x)$ да x нинг энг катта даражали ҳади коэффициенти $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$ га тенг) $p(a) = 0$ бажарилса, *$\mathcal{B}$ га нисбатан бутун*;

агар a элемент $\mathcal{B}$ га нисбатан алгебраик бўлмаса, *$\mathcal{B}$ га нисбатан трансцендент*;

агар $a \ne 0$ ва ихтиёрий нолдан фарқли $e \le s(a)$ идемпотент учун ea элемент $\mathcal{B}$ га нисбатан бутун бўлмаса, *$\mathcal{B}$ га нисбатан кучсиз трансцендент* дейилади.

$\mathcal{B}$ қисм алгебранинг бутун ёпилмаси барча $\mathcal{B}$ га нисбатан бутун элементлар тўплами бўлади ва $\mathcal{B}^{(i)}$ билан белгиланади. Маълумки, $\mathcal{B}^{(i)}$ хам $\mathcal{A}$ нинг қисм алгебрасидир.

1-Лемма. *Айтайлик $\mathcal{A}$ нинг регуляр ρ-ёпиқ қисм алгебраси $\mathcal{B}$ учун $\nabla \subset \mathcal{B} = \mathcal{B}^{(i)}$ муносабат ўринли бўлсин, бунда $\mathcal{B}^{(i)}$ – $\mathcal{B}$ нинг бутун ёпилмаси. У ҳолда хар бир $a \in \mathcal{A}$ учун шундай $e_a \in \nabla$ идемпотент мавжуд бўлиб,*

i) $e_a a \in \mathcal{B}$;

ii) *агар* $e_a \neq \mathbf{1}$, *у ҳолда* $(\mathbf{1}-e_a)a$ *элемент* $\mathcal{B}$ *га нисбатан кучсиз трансцендент бўлади.*

3-Таъриф. $x \in \mathcal{A}$ элемент учун қуйидагиларни киритамиз:

$\mathcal{A}_0 = F(x,\nabla)$ – x ва ∇ дан ҳосил бўлган $\mathcal{A}$ нинг қисм алгебраси;

$\mathcal{A}_1$ – $\mathcal{A}_0$ ни ўз ичига оливчи $\mathcal{A}$ нинг энг кичик регуляр қисм алгебраси;

$\mathcal{A}_2$ – $\mathcal{A}_1$ нинг ρ метрика бўйича ёпилмаси;

$\mathcal{A}_3$ – $\mathcal{A}_2$ нинг бутун ёпилмаси;

$\mathcal{A}_x$ – $\mathcal{A}_3$ нинг ρ метрика бўйича ёпилмаси.

2-Лемма. *Агар* $K_c(\nabla)$ *га нисбатан кучсиз трансцендент* $a \in \mathcal{A}$ *элемент мавжуд бўлиб* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a$ *ўринли бўлса, у ҳолда* $\mathcal{A}$ *да ихтиёрий 2-локал дифференциаллаш дифференциаллаш бўлади.*

3-Лемма. *Агар* $s(a) = s(b)$ *тенглик бажариладиган алгебраик эркли иккита* $a,b \in \mathcal{A}$ *элементлар мавжуд бўлса, у ҳолда* $\mathcal{A}$ *алгебрасида дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллаши мавжуд бўлади.*

Қуйидаги теоремада регуляр коммутатив алгебраларда дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллаш мавжудлигининг зарурий ва етарли шартлари келтирилган.

1-Теорема. *Айтайлик* $\mathcal{A}$ – $\mathbb{C}$ *устида унитал коммутатив регуляр алгебра,* μ *эса* $\mathcal{A}$ *даги барча идемпотентларнинг* ∇ *бул алгебрасида қатъий мусбат саноқли-аддитив чекли ўлчов ва* $\mathcal{A}$ *алгебра* $\rho(a,b) = \mu(s(a-b)), a,b \in \mathcal{A}$ *метрикага нисбатан тўла бўлсин. У ҳолда қуйидаги шартлар эквивалент бўлади:*

i) $\mathcal{A}$ *да ихтиёрий* 2*-локал дифференциаллаш дифференциаллаш бўлади;*

ii) $\mathcal{A} = K_c(\nabla)$ *ёки* $K_c(\nabla)$ *га нисбатан кучсиз трансцендент* $a \in \mathcal{A}$ *элемент мавжуд бўлиб* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a$ *бўлади.*

Энди биз коммутатив фон Нейман алгебраларига нисбатан ўлчовли операторлар алгебраларида дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллашларнинг мавжудлигини қараймиз.

1-Теоремадан фойдаланиб коммутатив ҳолда ўлчовли операторлар алгебраларида дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллашларнинг мавжудлиги масаласига қуйидаги ечимни оламиз.

2-Теорема. *Айтайлик* M *коммутатив фон Нейман алгебраси бўлсин. Қуйидаги шартлар эквивалент бўлади:*

(i) M *нинг* $P(M)$ *проекторлар панжараси атомик эмас;*

(ii) $S(M)$ *алгебрада дифференциаллаш бўлмаган* 2*-локал дифференциаллаш мавжуд.*

«**Локал ўлчовли операторлар алгебралари ва унинг қисм алгебраларининг 2-локал дифференциаллашлари**» деб номланган диссертациянинг учинчи бобида Аренс алгебралари, матрицалар алгебралари ва локал ўлчовли операторлар алгебраларининг 2-локал дифференциаллашларини ўрганамиз.

Айтайлик, M аниқ нормал яримчекли τ изга эга ихтиёрий яримчекли фон Нейман алгебраси бўлсин. Ҳар бир $p \geq 1$ сони учун $L^p(M,\tau) = \{x \in S(M,\tau) : \tau(|x|^p) < \infty\}$ тўпламни қарайлик. Маълумки,

$$\|x\|_p = (\tau(|x|^p))^{1/p}, \quad x \in L^p(M,\tau)$$

нормага нисбатан $L^p(M,\tau)$ банах фазоси бўлади.

Қуйидаги кесишмани қарайлик

$$L^\omega(M,\tau) = \bigcap_{p\geq 1} L^p(M,\tau).$$

Р.З.Абдуллаевнинг ишида $L^\omega(M,\tau)$ фазонинг $\{\|\cdot\|_p\}_{p\geq 1}$ нормалар системаси ҳосил бўлган t топологияга нисбатан локал қаварик тўла метрик *-алгебра бўлиши исботланган.

$L^\omega(M,\tau)$ алгебра нокоммутатив *Аренс алгебраси* дейилади. $L^\omega(M,\tau)$ алгебра $S(M,\tau)$ нинг *-қисмалгебраси бўлади ва агар τ чекли из бўлса, у ҳолда $M \subset L^\omega(M,\tau)$ бўлади.

Энди ушбу

$$L_2^\omega(M,\tau) = \bigcap_{p\geq 2} L^p(M,\tau)$$

ва

$$M + L_2^\omega(M,\tau) = \{x + y : x \in M, y \in L_2^\omega(M,\tau)\}$$

фазоларни қараймиз. С.Албеверио, Ш.А.Аюпов ва К.К.Кудайбергеновлар $L_2^\omega(M,\tau)$ ва $M + L_2^\omega(M,\tau)$ фазоларнинг $*$-алгебралар бўлишини хамда $L^\omega(M,\tau)$ алгебранинг $M + L_2^\omega(M,\tau)$ алгебрада идеал бўлишини исботлашган.

Агар $\tau(1) < \infty$ бўлса, у ҳолда қуйидаги муносабатлар ўринлидир

$$M + L_2^\omega(M,\tau) = L_2^\omega(M,\tau) = L^\omega(M,\tau).$$

Қуйида келтириладиган теоремани исботлаш учун бизга Аренс алгебраси ярим бошланғич эканлигини кўрсатувчи лемма керак бўлади.

4-Лемма. *$L^\omega(M,\tau)$ алгебра ярим бошланғич бўлади, яъни агар $a \in L^\omega(M,\tau)$ ва $aL^\omega(M,\tau)a = \{0\}$ бўлса, у ҳолда $a = 0$ бўлади.*

Қуйидаги теорема учинчи бобнинг асосий натижаларидан бири ҳисобланади.

3-Теорема. *Айтайлик, M аниқ нормал яримчекли τ изга эга ихтиёрий яримчекли фон Нейман алгебраси бўлсин. У ҳолда, $L^\omega(M,\tau)$ да ихтиёрий 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш бўлади ва бирор $a \in M + L_2^\omega(M,\tau)$ учун $D(x) = ax - xa$, $x \in L^\omega(M,\tau)$ кўринишига эга.*

Ушбу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1-Натижа. *Айтайлик, M аниқ нормал яримчекли τ изга эга коммутатив фон Нейман алгебраси бўлсин. У ҳолда, $L^\omega(M,\tau)$ даги ихтиёрий 2-локал дифференциаллаш айнан нолга тенг бўлади.*

Аслида, 3-теоремани исботлаш усулини $\{\tau_i : i \in I\}$ нормал чекли излар оиласига эга фон Нейман алгебраларидаги 2-локал дифференциаллашлар ҳолига осонликча ўтказиш мумкин. Иҳтиёрий чекли фон Нейман алгебрасида нормал чекли излар оиласи мавжуддир ва фон Нейман алгебраларидаги барча дифференциаллашлар ички бўлганлиги сабабли, биз П. Шемрл теоремасининг чекли фон Нейман алгебралари учун қуйидаги кенгайтмасига эга бўламиз.

4-Теорема. *Чекли фон Нейман алгебрасида ҳар бир* 2*-локал дифференциаллаш ички дифференциаллаш бўлади.*

Айтайлик, $M_n(\mathcal{A})$ унитал коммутатив регуляр алгебра $\mathcal{A}$ устидаги барча $n \times n$ матрицалар алгебраси бўлсин. Ш.А.Аюпов ва К.К.Кудайбергеновлар томонидан ички дифференциаллаш хоссасига эга бўлган унитал ярим бошланғич Банах алгебраси $\mathcal{A}$ қаралган ва $M_{2^n}(\mathcal{A})$, $n \geq 2$ алгебраларида иҳтиёрий 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш бўлиши исботланган. Ушбу натижа AW^*-алгебраларига қўлланилган ва ихтиёрий AW^*-алгебрада ҳар бир 2-локал дифференциаллаш дифференциаллаш бўлиши исботланган. У.Хуанг, Ж.Ли ишларида $M_n(\mathcal{A})$ алгебрани $M_n(\mathcal{M})$, $n \geq 2$ га акслантирувчи дифференциаллашлар ва 2-локал дифференциаллашлар тавсифланган, бунда $\mathcal{A}$ алгебра $\mathbb{C}$ устида унитал алгебра $\mathcal{M}$ эса унитал $\mathcal{A}$-бимодул. Улар $\mathcal{A}$ унитал Банах алгебрасидан ихтиёрий $\mathcal{A}$-бимодул $\mathcal{M}$ га ихтиёрий Йордан дифференциаллаши ички дифференциаллаш бўладиган ҳолни қараб, $\mathcal{A}$ коммутатив ва $\mathcal{M}$ билан коммутатив бўлганда $M_n(\mathcal{A})$ ни $M_n(\mathcal{M})$, $(n \geq 3)$ га акслантирувчи ҳар бир 2-локал дифференциаллашнинг дифференциаллаш эканлигини исботлашган.

Айтайлик, $\mathcal{A}$ унитал Банах алгебраси бўлиб, $\mathcal{A}$ алгебрасидан ихтиёрий $\mathcal{A}$-бимодул $\mathcal{M}$ га ҳар бир Йордан дифференциаллаши дифференциаллаш бўлсин.

Агар $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 2-локал дифференциаллаш бўлса, у ҳолда таърифдан Δ нинг биржинсли эканлиги осон келиб чиқади. Айни пайтда, ҳар бир $x \in \mathcal{A}$ учун

$$\Delta(x^2) = \Delta(x)x + x\Delta(x),$$

ўринли бўлади. Бу эса, аддитив 2-локал дифференциаллашнинг Йордан дифференциаллаши эканлигини англатади.

Биз қуйидаги хоссаларга эга алгебраларни қараймиз:

(J): *$\mathcal{A}$ алгебрани ихтиёрий $\mathcal{A}$-бимодул $\mathcal{M}$ га ўтказувчи ихтиёрий Йордан дифференциаллаши дифференциаллаш бўлсин.*

Бу **(J)** хоссасига эга алгебраларда 2-локал дифференциаллаш $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ нинг дифференциаллаш эканлигини иботлаш учун $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ нинг аддитив бўлишини исботлаш етарлидир.

Қуйидаги теорема учинчи бобнинг асосий теоремаларидан бири ҳисобланади.

5-Теорема. *Айтайлик $\mathcal{A}$ алгебра **(J)** хоссасига эга унитал Банах алгебраси, $\mathcal{M}$ унитал $\mathcal{A}$-бимодул ва $M_n(\mathcal{A})$ эса $\mathcal{A}$ устида барча* $n \times n$-

матрицалар алгебраси бўлсин, бунда $n \geq 3$. *У ҳолда,* $M_n(\mathcal{A})$ *алгебрани* $M_n(\mathcal{M})$ *алгебрага ўтказувчи ихтиёрий 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш бўлади.*

Учинчи бобнинг яна бир асосий теоремаси.

6-Теорема. *Айтайлик,* M *абел тўғри йиғиндиларига эга бўлмаган ихтиёрий фон Нейман алгебраси ва* $LS(M)$ *эса* M *га нисбатан барча локал ўлчовли операторлар алгебраси бўлсин. У ҳолда,* M *алгебрани* $LS(M)$ *алгебрага ўтказувчи ихтиёрий бир 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш бўлади.*

Абел фон Нейман алгебрасида ихтиёрий дифференциаллаш тривиал эканлигини ҳисобга олсак, 6-теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

2-Натижа. *Айтайлик* M *ихтиёрий фон Нейман алгебраси бўлсин. У ҳолда,* M *алгебрада ихтиёрий 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш бўлади.*

5-Лемма. *Айтайлик* $\mathcal{B} - LS(M)$ *нинг шундай қисм алгебрасики* $M \subseteq \mathcal{B}$, *ҳамда* $\Delta : \mathcal{B} \to LS(M)$ *2-локал дифференциаллаши учун* $\Delta|_M \equiv 0$ *бўлсин. У ҳолда,* $\Delta \equiv 0$.

7-Теорема. *Айтайлик* M *абел тўғри йиғиндиларига эга бўлмаган ихтиёрий фон Нейман алгераси ва* $\mathcal{B}$ *эса* $LS(M)$ *нинг қисмалгебраси бўлсин, бунда* $M \subseteq \mathcal{B}$. *У ҳолда* $\mathcal{B}$ *алгебрада ихтиёрий 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш бўлади.*

1-Эслатма. *1-Теоремада коммутатив регуляр алгебраларда дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллаш мавжудлигининг зарурлик ва етарли шартлари берилган эди. Хусусий ҳолда, атомик бўлмаган* $P(M)$ *панжарали абел фон Нейман алгебраси учун* $S(M) \equiv LS(M)$ *алгебрасида дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллашлар мавжуд бўлади.*

Типи II_1 фон Нейман M алгебраси учун $S(M) \equiv LS(M)$ алгебрада дифференциаллашларнинг тузилишини тавсифлаш 2019 йилгача очиқ муаммо бўлиб келди.

Таъкидлаш жоизки, 7-теорема ушбу алгебрада дифференциаллашларнинг умумий шакли ҳақида маьлумотга эга бўлмаган ҳолда 2-локал дифференциаллашлар бўйича илк натижалардан биридир.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация ҳар хил оператор алгебралардаги 2-локал дифференциаллашларни ўрганишга ва уларнинг дифференциаллашлар билан боғлиқликларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Коммутатив регуляр алгебраларда дифференциаллаш бўлмаган 2-локал дифференциаллаш мавжудлигининг зарурий ва етарли шартлари келтирилди.

2. Аренс алгебрасида ҳар бир 2-локал дифференциаллашнинг дифференциаллаш бўлиши исботланди.

3. $M_n(\mathcal{A})$ дан $M_n(\mathcal{M})$ $(n \geq 3)$ га ихтиёрий 2-локал дифференциаллашнинг дифференциаллаш бўлиши исботланди, бунда $\mathcal{A}$ – шундай унитал алгебраки, $\mathcal{A}$ дан $\mathcal{A}$-бимодул $\mathcal{M}$ га ихтиёрий Йордан дифференциаллаши оддий маънода дифференциаллаш бўлади.

4. Абел тўғри йиғиндиларига эга бўлмаган ихтиёрий фон Нейман алгебрасига нисбатан ўлчовли операторлар алгебрасида ихтиёрий 2-локал дифференциаллашнинг дифференциаллаш эканлиги исботланди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

АЛАУАДИНОВ АМИР КАДИРБЕРГЕНОВИЧ

2-ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ АЛГЕБРЫ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЕЁ ПОДАЛГЕБР

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ - 2020

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.2.PhD/FM146.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице по адресу http://mathinst.uz/kengash/ и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Рахимов Абдугофур Абдумажидович** доктор физико-математических наук, профессор
	Эшматов Фарход Хасанович доктор философии по физико-математическим наукам (PhD)
Ведущая организация:	**Андижанский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2020 года в ____ на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институт Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81. Тел.: (+998 71) 262 7544, факс: (+998 71) 262 7357, e-mail: kengash@mathinst.uz.)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81. Тел.: (+998 71) 262 7544).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2020 года.

(протокол рассылки №________ от «____» _______________2020 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.К.Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, к.ф.-м.н., старший научный
сотрудник

У.У.Жамилов
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший научный
сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В настоящее время теория операторных алгебр играет важную роль как в чисто математических, так и прикладных аспектах. Это обусловлено тем фактом, что в терминах операторных алгебр, их состояний, представлений, групп автоморфизмов и дифференцирований возможно описать и исследовать свойства модельных систем в квантовой теории поля и статистической физике.

Основные проблемы, рассматриваемые в теории дифференцирований, состоят в том, чтобы доказать автоматическую непрерывность, внутренность или пространственность дифференцирований или показать существование внешних и разрывных дифференцирований на различных топологических алгебрах.

Теория дифференцирований в операторных алгебрах является важной и хорошо изученной частью общей теории операторных алгебр с приложениями в математической физике. Хорошо известно, что каждое дифференцирование C^*-алгебры ограничено (т.е. является непрерывной по норме), и что каждое дифференцирование алгебры фон Неймана является внутренним. Подробное изложение теории ограниченных дифференцирований приведены в монографиях С.Сакаи. Подробное исследование дифференцирований в общих банаховых алгебрах дано в монографии Х.Дейлса, посвященной изучению автоматической непрерывности дифференцирований на различных классах банаховых алгебр.

Наряду с теорией дифференцирований также важной считается и теория локальных и 2-локальных дифференцирований на операторных алгебрах. В последние двадцать лет произошел плодотворный рост исследований таких отображений на алгебрах фон Неймана, C^*-алгебрах и JB^*-тройках. Исследования локальных дифференцирований были начаты Р.В.Кэйдисоном, и независимо Д.Р.Ларсоном и А.Р.Суруром в 1990 году.

Проведение научных исследований на международном уровне по важным направлениям специальности «Алгебра и функциональный анализ» рассматривается как основная задача фундаментальных исследований[1]. Развитие теории дифференцирований операторных алгебрах играют важную роль при исполнении следующих постановлений:

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 “О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан” от 18 мая 2017 года.

Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В 2000 году академик Ш.А.Аюпов выдвинул проблему исследования дифференцирований на алгебре измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана.

Исследованию проблемы Ш.А.Аюпова были посвящены работы математиков из Австралии, Германии, Нидерландов, России, США, Узбекистана и других стран. Первые результаты были получены для коммутативных алгебр фон Неймана в работе А.Ф.Бера, В.И.Чилина и Ф.А.Сукочева и независимо от них А.Г.Кусраева. А именно, были получены необходимые и достаточные условия существования нетривиальных дифференцирований на алгебре измеримых операторов относительно коммутативных алгебр фон Неймана. Далее для алгебр фон Неймана типа I и III решения были получены в работах С.Альбеверио, Ш.А.Аюпова и К.К.Кудайбергенова и для собственно бесконечных алгебр фон Неймана в работах А.Ф.Бера, В.И.Чилина и Ф.А.Сукочева. К 2014 году проблема Ш.А.Аюпова была решена для алгебр фон Неймана, кроме алгебр фон Неймана типа II_1. Отметим, что случай типа II_1 также была переформулирована Р.Кэйдисоном и Ж.Лю. Полное решение проблемы Ш.А.Аюпова было получено недавно в работе А.Ф.Бера, К.К.Кудайбергенова, Ф.А.Сукочева.

Вдохновленный теоремами Глисона–Кахане–Желязко и Ковальского–Слодковского в 1997 году П.Шемрл ввел понятия 2-локального дифференцирования и 2-локального автоморфизма. Он доказал, что всякое 2-локальное дифференцирование на алгебре $B(H)$, где H – сепарабельное гильбертово пространство, является дифференцированием. В 2004 году С.Ким и Ж.Ким дали краткое доказательство того, что каждое 2-локальное дифференцирование на конечномерной алгебре комплексных матриц является дифференцированием. Ж.Жанг и Х.Ли расширили этот результат на произвольные симметричные матричные алгебры и построили пример 2-локального дифференцирования не являющимся дифференцированием на алгебре верхне-треугольных комплексных 2×2-матриц. Доказательство факта, что каждое 2-локальное дифференцирование на $B(H)$, где H – произвольное гильбертово пространство (не допускается сепарабельность), является дифференцированием, было реализовано новым методом в работе Ш.А.Аюпова и К.К.Кудайбергенова. В 2014 году в работе Ш.А.Аюпов и Ф.Н.Арзикулов расширили приведенные выше результаты и дали краткое доказательство для произвольных полуконечных алгебр фон Неймана. В 2015 году Ш.А.Аюпов и К.К.Кудайбергенов показали, что каждое 2-локальное дифференцирование на произвольной алгебре фон Неймана является дифференцированием.

Учитывая все вышеперечисленные результаты касающиеся 2-локальных дифференцирований на операторных алгебрах естественно возникает вопрос о структуре 2-локальных дифференцирований на алгебре измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана и её различных подалгебр.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научных проектов ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87–«Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в нелинейных динамических системах»+«Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в Евклидовом и псевдо-Евклидовом пространствах и её приложения в механике» института Математики имени В.И.Романовкокого (2017-2019 гг.) и ОТ-4-27 «Описание предуальных пространств йордановых троек, пространства емкостей и голоморфное продолжение функции», Каракалпакского Государственного университета им. Бердаха (2017-2020 гг.).

Цель исследования – изучение 2-локальных дифференцирований на различных операторных алгебрах и исследование их связей с дифференцированиями.

Задачи исследования:

– исследование 2-локальных дифференцирований на коммутативных регулярных алгебрах;

– исследование 2-локальных дифференцирований на алгебрах Аренса;

– исследование 2-локальных дифференцирований на матричных алгебрах.

– исследование 2-локальных дифференцирований на алгебрах локально измеримых операторов.

Объект исследования – 2-локальные дифференцирования на различных операторных алгебрах и их подалгебрах.

Предмет исследования – вопросы существования 2-локальных дифференцирований не являющегося дифференцированием и связь 2-локального дифференцирования и дифференцирования на различных операторных алгебрах.

Методы исследования. В работе используется методы теории матриц, функционального анализа и теории операторных алгебр.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

– найдены условия существования 2-локальных дифференцирований, не являющихся дифференцированиями на коммутативных регулярных алгебрах;

– доказано, что каждое 2-локальное дифференцирование на алгебре Аренса является дифференцированием;

– доказано, что каждое 2-локальное дифференцирование на матричных алгебрах и алгебрах измеримых операторов является дифференцированием;

– доказано, что каждое 2-локальное дифференцирование на алгебре локально измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана без абелевых прямых слагаемых является дифференцированием.

Практические результаты исследования – установлена связь 2-локальных дифференцирований и дифференцирований на различных операторных алгебрах.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов функционального анализа, алгебры, теории дифференцирования, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что доказано совпадение пространств 2-локальных и глобальных дифференцирований некоторых операторных алгебр, кроме того найдены условия существования 2-локальных дифференцирований, не являющихся дифференцированиями на коммутативных регулярных алгебр.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты могут быть использованы в теории дифференцировании операторных алгебрах.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты были использованы в следующих научных проектах:

2-локальных дифференцирований на алгебре измеримых операторов, на матричных алгебрах и коммутативных регулярных алгебр использованы в зарубежном проекте под номером FL170100052 «Новейшие методы для некоммутативного анализа» для описания алгебры трансляционно-инвариантных дифференцирований на алгебрах измеримых функций (Справка от 20 января 2020 года Университета Нового Южного Уэльса, Австралия). Научные результаты были применены для описания трансляционно-инвариантных дифференцирований алгебры измеримых функций;

2-локальные дифференцирования на алгебре измеримых операторов, матричных алгебрах и коммутативных регулярных алгебрах использованы в зарубежном проекте под номером FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2 «Обобщенные дифференцирования некоторых классов алгебр и их приложения» Министерство высшего образования Малайзии (2016-2019), для описания алгебры дифференцирования некоторых классов конечномерных неассоциативных алгебр (Справка от 10 июня 2020 года

Университета Технологи МАРА, Шах Алам, Малайзия). Научные результаты были применены для описания алгебры дифференцирований конкретных классов конечномерных неассоциативных алгебр;

2-локальные дифференцирования на алгебре измеримых операторов и коммутативных регулярных алгебр использованы в зарубежном проекте под номером PGC2018-093332-B-I00 «Задачи о сохранения с точки зрения функционального анализа» Ministerio de Ciencia, Innovacion y Universidades (2019-2021) для исследования локальных тройных, 2-локальных тройных и слабо 2-локальных дифференцирований на C^*-алгебрах и алгебрах фон Неймана. (Справка от 1 июня 2020 года Университета Гранада, Испания). Применение научных результатов дало возможность описания локальных тройных, 2-локальных тройных и слабо 2-локальных дифференцирований C^*-алгебр и алгебр фон Неймана;

2-локальные дифференцирования на алгебре измеримых операторов, на матричных алгебрах и коммутативных регулярных алгебр использованы в зарубежном проекте «Неассоциативные алгебры и супералгебры» для исследования локальных и 2-локальных дифференцирований на неассоциативных алгебрах, в частности для алгебр Мальцева. (Справка от 5 июня 2020 года Федеральный университет Санто-Андре, Бразилия). Научные результаты были применены для локальных и 2-локальных дифференцирований неассоциативных алгебр, в частности, алгебр Мальцева.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на двух международных и в трех республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, из которых 4 опубликованы в зарубежных журналах и 2 в республиканском научном издании.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 68 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Алгебры локально измеримых операторов и их дифференцирования»**, приведены основные сведения об алгебрах измеримых, локально измеримых операторов и дифференцированиях этих алгебр.

Пусть H – гильбертово пространство и $B(H)$ – $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов на H.

Замкнутая в слабой операторной топологии *-подалгебра M в $B(H)$ содержащее тождественный оператор называется алгеброй фон Неймана.

Рассмотрим алгебру фон Неймана $M \subset B(H)$, и пусть $P(M) = \{p \in M : p = p^2 = p^*\}$ решетка всех проекторов M и $P_{fin}(M)$ множество всех конечных проекторов в $P(M)$.

Определение 1. Алгебра фон Неймана M называется

– *атомической,* если для любого ненулевого проектора $e \in P(M)$ существует такой минимальный проектор $p \in P(M)$, что $p \leq e$;

– *конечной,* если **1** – конечный проектор;

– *полуконечной,* если для любого центрального проектора $z \in M$ существует такой ненулевой конечный проектор $e \in P(M)$, что $e \leq z$;

– *типа* I, если для любого центрального проектора $z \in M$ существует такой ненулевой абелев проектор $e \in P(M)$, что $e \leq z$;

– *типа* II, если M – полуконечная алгебра, не содержащая ненулевых абелевых проекторов;

– *типа* III, если M не содержит ненулевых конечных проекторов;

– *типа* I_{fin}, если M – конечная алгебра типа I;

– *типа* I_∞, если M – не конечная алгебра типа I;

– *типа* II_1, если M – конечная алгебра типа II;

– *типа* II_∞, если M – не конечная алгебра типа II;

– *собственно бесконечной,* если **1** – собственно бесконечный проектор;

– *чисто бесконечной,* если M – типа III.

Пусть $M \subset B(H)$ – произвольная алгебра фон Неймана.

Линейное подпространство $\mathcal{D}$ в H называется *присоединенным* к M (обозначается как $\mathcal{D}\eta M$), если $u(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ для каждого унитарного u из коммутанта

$$M' = \{y \in B(H) : xy = yx, \forall x \in M\}$$

алгебры фон Неймана M.

Линейный оператор $x : \mathcal{D}(x) \to H$, где область определение $\mathcal{D}(x)$ данного оператора и линейное подпространство в H, называется *присоединенным* M (обозначается как $x\eta M$), если $\mathcal{D}(x)\eta M$ и $u(x(\xi)) = x(u(\xi))$ для всех $\xi \in \mathcal{D}(x)$ и для каждого унитарного $u \in M'$.

Линейное подпространство $\mathcal{D}$ в H называется *сильно плотным* в H относительно алгебры фон Неймана M, если

1) $\mathcal{D}\eta M$;

2) существует последовательность проекторов $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $P(M)$ такой, что $p_n \uparrow \mathbf{1}$, $p_n(H) \subset \mathcal{D}$ и $p_n^{\perp} = \mathbf{1} - p_n$ конечна в M для всех $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Замкнутый линейный оператор x, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *измеримым* относительно алгебры фон Неймана M, если $x\eta M$ и $\mathcal{D}(X)$ сильно плотно в H.

Обозначим через $S(M)$ множество всех линейных операторов на H, измеримых относительно алгебры фон Неймана M. Если $x \in S(M)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, то $\lambda x \in S(M)$ и оператор x^*, сопряженный с x, также измерим относительно M. Более того, если $x, y \in S(M)$, то операторы $x + y$ и xy определены на плотных подпространствах и допускают замыкания, которые называются соответственно сильной суммой и сильным произведением операторов x и y и обозначаются $x \dot{+} y$ и xy. А.И.Сигал показал, что $x \dot{+} y$ и xy принадлежат $S(M)$, и относительно алгебраических операций $S(M)$ образуют $*$-алгебру с единицей $\mathbf{1}$ над полем $\mathbb{C}$. Здесь M является $*$-подалгеброй $S(M)$. В дальнейшем сильная сумма и сильное произведение операторов x и y будем обозначать так же, как и обычные операции, на $x + y$ и xy.

Замкнутый линейный оператор x в H называется *локально измеримым* относительно алгебры фон Неймана M, если $x\eta M$ и существует последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов в M, для которых $z_n \uparrow \mathbf{1}$ и $z_n x \in S(M)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $LS(M)$ множество всех линейных операторов, локально измеримых относительно M.

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на M. Напомним, что замкнутый линейный оператор x называется τ*-измеримым* относительно алгебры фон Неймана M, если $x\eta M$ и $\mathcal{D}(x)$ является τ-плотным в H, т.е. $\mathcal{D}(x)\eta M$ и заданного $\varepsilon > 0$ существует проектор $p \in M$ такое, что $p(H) \subset \mathcal{D}(x)$ и $\tau(p^{\perp}) < \varepsilon$. Обозначим через $S(M, \tau)$ множество всех τ-измеримых операторов относительно M.

Хорошо известно, что $S(M, \tau)$ являются $*$-подалгебрами в $LS(M)$.

Теперь мы изложим основные понятия из теории дифференцирований.

Для алгебры $\mathcal{A}$, линейный оператор $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется *дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ для всех $x, y \in \mathcal{A}$ (правило Лейбница). Каждый элемент $a \in \mathcal{A}$ порождает дифференцирование D_a на ассоциативной алгебре $\mathcal{A}$, который определяется как $D_a(x) = [a, x] = ax - xa,\ x \in \mathcal{A}$. Такие дифференцирования D_a называются *внутренними дифференцированиями*. Если элемент a, порождающий дифференцирование D_a, принадлежит более большой алгебре $\mathcal{B}$, содержащей $\mathcal{A}$, тогда D_a называется *пространственным дифференцированием* на $\mathcal{A}$.

Для алгебры $\mathcal{A}$, аддитивный (линейный) оператор $\Delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ называется *йордановым дифференцированием*, если $\Delta(x^2)=\Delta(x)x+x\Delta(x)$ для всех $x\in\mathcal{A}$.

Оператор $\Delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ (не обязательно линейный) называется *2-локальным дифференцированием*, если для каждого $x,y\in\mathcal{A}$, существует дифференцирование $D_{x,y}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ такое, что $D_{x,y}(x)=\Delta(x)$ и $D_{x,y}(y)=\Delta(y)$.

Во второй главе диссертации, названной **«2-Локальные дифференцирования коммутативных регулярных алгебр»**, приведены предварительные сведения из теории коммутативных регулярных алгебр и их дифференцирований. Получены необходимые и достаточные условия допустимости 2-локальных дифференцирований, не являющихся дифференцированиями на коммутативных регулярных алгебрах.

Пусть $\mathcal{A}$ – коммутативная алгебра с единицей $\mathbf{1}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Обозначим через ∇ множество $\{e\in\mathcal{A}:e^2=e\}$ всех идемпотентов в $\mathcal{A}$. Для $e,f\in\nabla$ мы устанавливаем $e\le f$, если $ef=e$. В отношении этого частичного порядка, к решеточным операциям $e\vee f=e+f-ef$, $e\wedge f=ef$ и дополнение $e^{\perp}=\mathbf{1}-e$, множество ∇ является булевой алгеброй. Не нулевой элемент q из булевой алгебры ∇ называется *атомом*, если из $0\ne e\le q, e\in\nabla$, следует, что $e=q$. Если задано любое ненулевое $e\in\nabla$ то существует такой атом q, что $q\le e$, тогда булевая алгебра ∇ называется *атомической*.

Алгебра $\mathcal{A}$ называется *регулярной* (в смысле фон Неймана), если для любого $a\in\mathcal{A}$ существует $b\in\mathcal{A}$ такое, что $a=aba$.

Далее, мы всегда будем предполагать, что $\mathcal{A}$ является унитальной коммутативной регулярной алгеброй над $\mathbb{C}$ и что ∇ является булевой алгеброй всех ее идемпотентов. В этом случае для элемента $a\in\mathcal{A}$ существует идемпотент $e\in\nabla$ такой, что $ea=a$, и если $ga=a,\ g\in\nabla$, тогда $e\le g$. Это идемпотент называется *носителем* a и обозначается символом $s(a)$.

Предположим, что μ является строго положительной счетно-аддитивной конечной мерой на булевой алгебре ∇ идемпотентов в $\mathcal{A}$ и рассмотрим метрику $\rho(a,b)=\mu(s(a-b)), a,b\in\mathcal{A},$ на алгебре $\mathcal{A}$. Теперь будем предполагать, что $(\mathcal{A},\rho)$ является полным метрическим пространством.

Мы говорим, что элемент $a\in\mathcal{A}$ *конечнозначным* (соответственно, *счетнозначным*), если $a=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$, где $\alpha_k\in\mathbb{C}$, $e_k\in\nabla, e_ie_j=0, i\ne j, i,j=1,...,n, n\in\mathbb{N}$ (соответственно, $a=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$, где $\alpha_k\in\mathbb{C}$,

$e_k \in \nabla, e_i e_j = 0, i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$, в последнем случае сходимость рядов понимается относительно метрики ρ). Обозначим через $K(\nabla)$ (соответственно $K_c(\nabla)$) множество всех конечнозначных (соответственно счетнозначных) элементов в $\mathcal{A}$. Известно, что $\nabla \subset K(\nabla) \subset K_c(\nabla)$, как $K(\nabla)$, так и $K_c(\nabla)$ являются регулярными подалгебрами в $\mathcal{A}$, и кроме того, замыкание $K(\nabla)$ в $(\mathcal{A}, \rho)$ совпадает с $K_c(\nabla)$.

Далее предполагаем, что $\mathcal{A}$ является унитальной коммутативной регулярной алгеброй над $\mathbb{C}$, а μ – строго положительная счетно-аддитивная конечномерная мера на булевой алгебре ∇ всех идемпотентов в $\mathcal{A}$. Предположим, что $\mathcal{A}$ полна в метрике $\rho(a,b) = \mu(s(a-b)), a,b \in \mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – унитальная подалгебра в алгебре $\mathcal{A}$. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется:

– *алгебраическим относительно* $\mathcal{B}$, если существует полином $p \in \mathcal{B}[x]$ (т. е. многочлен от x с коэффициентами из $\mathcal{B}$), что $p(a) = 0$;

– *целым относительно* $\mathcal{B}$, если существует унитарный многочлен $p \in \mathcal{B}[x]$ (т. е. коэффициент наибольшей степени x в $p(x)$ равно $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$), что $p(a) = 0$;

– *трансцендентным относительно* $\mathcal{B}$, если a не является алгебраическим относительно $\mathcal{B}$;

– *слабо трансцендентным относительно* $\mathcal{B}$, если $a \neq 0$ и для любого ненулевого идемпотента $e \leq s(a)$ элемент ea не является целым относительно $\mathcal{B}$.

Целое замыкание подалгебры $\mathcal{B}$ это множеством всех элементов целые относительно $\mathcal{B}$; обозначается как $\mathcal{B}^{(i)}$. Известно, что $\mathcal{B}^{(i)}$ также является подалгеброй в $\mathcal{A}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{B}$ – регулярная ρ-замкнутая подалгебра в $\mathcal{A}$ такая, что $\nabla \subset \mathcal{B} = \mathcal{B}^{(i)}$, где $\mathcal{B}^{(i)}$ является целым замыканием $\mathcal{B}$. Тогда для каждого $a \in \mathcal{A}$ существует идемпотент $e_a \in \nabla$ такой, что*

i) $e_a a \in \mathcal{B}$;

ii) если $e_a \neq \mathbf{1}$, тогда элемент $(\mathbf{1} - e_a)a$ является слабо трансцендентным относительно $\mathcal{B}$.

Определение 3. Для $x \in \mathcal{A}$ обозначим:

$\mathcal{A}_0 = F(x, \nabla)$ – подалгебра в $\mathcal{A}$, порожденная x и ∇;

$\mathcal{A}_1$ – наименьшая регулярная подалгебра в $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{A}_0$;

$\mathcal{A}_2$ – замыкание $\mathcal{A}_1$ метрикой ρ;

$\mathcal{A}_3$ – целым замыкание $\mathcal{A}_2$;

$\mathcal{A}_x$ – замыкание $\mathcal{A}_3$ метрикой ρ.

Имеет место следующая

Лемма 2. *Если существует элемент $a \in \mathcal{A}$, слабо трансцендентный относительно $K_c(\nabla)$ такой, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a$, где*

$\mathcal{A}_a$ – подалгебра, построенная по a, по определению 3, то любое 2-локальное дифференцирование на $\mathcal{A}$ является дифференцированием.

Лемма 3. *Если существуют два алгебраически независимых элемента $a,b \in \mathcal{A}$ с $s(a) = s(b)$, то алгебра $\mathcal{A}$ допускает 2-локальное дифференцирование, которое не является дифференцированием.*

В следующей теореме приведены необходимые и достаточные условия допустимости 2-локальные дифференцирований, не являющихся дифференцированиями на коммутативных регулярных алгебрах.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная коммутативная регулярная алгебра над $\mathbb{C}$ и μ – строго положительная счетно-аддитивная конечная мера на булевой алгебре ∇ всех идемпотентов в $\mathcal{A}$. Предположим, что $\mathcal{A}$ полна в метрике $\rho(a,b) = \mu(s(a-b)), a,b \in \mathcal{A}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) любое 2-локальное дифференцирование на $\mathcal{A}$ является дифференцированием;

ii) либо $\mathcal{A} = K_c(\nabla)$, либо существует элемент a слабо трансцендентный относительно $K_c(\nabla)$, такое, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a$, где $\mathcal{A}_a$ – подалгебра, построенная по a согласно Определению 3.

Теперь мы можем рассмотреть вопрос о существовании 2-локальных дифференцирований, не являющихся дифференцированиями на алгебрах измеримых операторов относительно коммутативных алгебр фон Неймана.

Используя теорему 1, получим следующее решение задачи о существовании 2-локальных дифференцирований, не являющихся дифференцированиями на алгебрах измеримых операторов в коммутативном случае.

Теорема 2. *Пусть M – коммутативная алгебра фон Неймана. Следующие условия эквивалентны:*

(i) решетка $P(M)$ проекторов в M не является атомической;

(ii) алгебра $S(M)$ допускает 2-локальное дифференцирование, не являющийся дифференцированием.

В третьей главе диссертации, названной **«2-Локальные дифференцирования алгебры локально измеримых операторов и их подалгебр»**, изучаются 2-локальные дифференцирования алгебр Аренса, на матричных алгебрах и алгебры локально измеримых операторов.

Пусть M – произволная полуконечная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. Для $p \geq 1$ обозначим $L^p(M,\tau) = \{x \in S(M,\tau) : \tau(|x|^p) < \infty\}$. Известно, что $L^p(M,\tau)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x\|_p = (\tau(|x|^p))^{1/p}, \quad x \in L^p(M,\tau).$$

Рассмотрим пересечение

$$L^\omega(M,\tau) = \bigcap_{p\geq 1} L^p(M,\tau).$$

В работе Р.З.Абдуллаева доказано, что $L^{\omega}(M,\tau)$ – локально выпуклая полная метризуемая $*$-алгебра относительно топологии t, порожденной семейством норм $\{\|\cdot\|_p\}_{p\geq 1}$. Алгебра $L^{\omega}(M,\tau)$ называется некоммутативной *алгеброй Аренса*. Заметим, что $L^{\omega}(M,\tau)$ является $*$-подалгеброй в $S(M,\tau)$ и если τ конечный след, то $M \subset L^{\omega}(M,\tau)$.

Далее рассмотрим следующие пространства

$$L_2^{\omega}(M,\tau) = \bigcap_{p\geq 2} L^p(M,\tau)$$

и

$$M + L_2^{\omega}(M,\tau) = \{x + y : x \in M, y \in L_2^{\omega}(M,\tau)\}.$$

С.Альбеверио, Ш.А.Аюпов и К.К.Кудайбергенов доказали, что $L_2^{\omega}(M,\tau)$ и $M + L_2^{\omega}(M,\tau)$ являются $*$-алгебрами и $L^{\omega}(M,\tau)$ – идеал в $M + L_2^{\omega}(M,\tau)$.

Заметим, что если $\tau(1) < \infty$, тогда

$$M + L_2^{\omega}(M,\tau) = L_2^{\omega}(M,\tau) = L^{\omega}(M,\tau).$$

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится лемма которая показывает, что алгебра Аренса является полупервичной.

Лемма 4. *Алгебра* $L^{\omega}(M,\tau)$ *является полупервичной, т.е. если* $a \in L^{\omega}(M,\tau)$ *и* $aL^{\omega}(M,\tau)a = \{0\}$, *тогда* $a = 0$.

Следующая теорема является одним из основных результатов третьей главы.

Теорема 3. *Пусть* M *– алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом* τ. *Тогда всякое 2-локальное дифференцирование* Δ *на алгебре* $L^{\omega}(M,\tau)$ *является дифференцированием и имеет вид* $D(x) = ax - xa$, $x \in L^{\omega}(M,\tau)$, *для некоторого* $a \in M + L_2^{\omega}(M,\tau)$.

Из этой теоремы следует

Следствие 1. *Пусть* M *– коммутативная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом* τ. *Тогда любое* 2*-локальное дифференцирование* Δ *на алгебре* $L^{\omega}(M,\tau)$ *тождественно равно нулю.*

На самом деле метод доказательства теоремы 3 можно легко модифицировать до случая 2-локального дифференцирования на алгебрах фон Неймана с разделяющим семейством нормальных конечных следов $\{\tau_i : i \in I\}$. Так как каждая конечная алгебра фон Неймана имеет разделяющее семейство нормальных конечных следов и все дифференцирования на алгебрах фон Неймана являются внутренними, мы получим следующее расширение теоремы П.Шемрла к конечным алгебрам фон Неймана.

Теорема 4. *Каждое* 2*-локальное дифференцирование на конечной алгебре фон Неймана является внутренним дифференцированием.*

Пусть $M_n(\mathcal{A})$ – алгебра всех $n \times n$ матриц над унитальной коммутативной регулярной алгеброй $\mathcal{A}$. Ш.А.Аюповым и К.К.Кудайбергеновым было рассмотрено унитальная полупервичная банахова алгебра $\mathcal{A}$ со свойством внутреннего дифференцирования и доказано, что любое 2-локальное дифференцирование на алгебре $M_{2^n}(\mathcal{A})$, $n \geq 2$, является дифференцированием. Этот результат был применен к AW^*-алгебрам и доказано, что любое 2-локальное дифференцирование на произвольной AW^*-алгебре является дифференцированием. В работе У.Хуанга, Ж.Ли были охарактеризованы дифференцирования и 2-локальные дифференцирования из $M_n(\mathcal{A})$ в $M_n(\mathcal{M})$, $n \geq 2$, где $\mathcal{A}$ является унитальной алгеброй над $\mathbb{C}$ и $\mathcal{M}$ является унитальным $\mathcal{A}$-бимодулем. Они рассмотрели унитальную банахову алгебру такую, что любое йорданово дифференцирование из алгебры $\mathcal{A}$ в любой $\mathcal{A}$-бимодуль $\mathcal{M}$ является внутренним дифференцированием и доказали, что любое 2-локальное дифференцирование из алгебры $M_n(\mathcal{A})$ в $M_n(\mathcal{M})$ $(n \geq 3)$ является дифференцированием, когда $\mathcal{A}$ коммутативно и коммутирует с $\mathcal{M}$.

Предположим, что $\mathcal{A}$ является унитальной банаховой алгеброй такая, что любое йорданово дифференцирование из алгебры $\mathcal{A}$ в любой $\mathcal{A}$-бимодуль $\mathcal{M}$ является дифференцированием.

Если $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ является 2-локальным дифференцированием, то из определения легко следует, что Δ является однородным. В то же время,

$$\Delta(x^2) = \Delta(x)x + x\Delta(x),$$

для каждого $x \in \mathcal{A}$. Это означает, что аддитивное 2-локальное дифференцирование является йордановым дифференцированием.

Мы будем рассматривать алгебры со следующими свойствами:

(J): *любое йорданово дифференцирование из алгебры* $\mathcal{A}$ *в любой* $\mathcal{A}$*-бимодуль* $\mathcal{M}$ *является дифференцированием.*

Итак, в случае алгебр со свойством **(J)** и чтобы доказать, что 2-локальное дифференцирование $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ являлась дифференцированием достаточно, доказать, что $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ является аддитивным.

Следующая теорема является одним из основных результатов третьей главы.

Теорема 5. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– унитальная банахова алгебра со свойством* ***(J)***, $\mathcal{M}$ *– унитальный* $\mathcal{A}$*-бимодуль и пусть* $M_n(\mathcal{A})$ *– алгебра всех* $n \times n$*-матриц над* $\mathcal{A}$, *где* $n \geq 3$. *Тогда любое 2-локальное дифференцирование* Δ *из* $M_n(\mathcal{A})$ *в* $M_n(\mathcal{M})$ *является дифференцированием.*

Еще одним из основных результатов третьей главы является следующая

Теорема 6. *Пусть* M *– произвольная алгебра фон Неймана без абелевых прямых слагаемых и пусть* $LS(M)$ *– алгебра всех локально измеримых операторов относительно* M. *Тогда любое 2-локальное дифференцирование* Δ *из* M *в* $LS(M)$ *является дифференцированием.*

Принимая во внимание, что любое дифференцирование на абелевой алгебре фон Неймане тривиальна, из теоремы 6 следует следующий результат.

Следствие 2. *Пусть M – произвольная алгебра фон Неймана. Тогда любое 2-локальное дифференцирование Δ на M является дифференцированием.*

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{B}$ – подалгебра в $LS(M)$ такая, что $M \subseteq \mathcal{B}$ и пусть $\Delta : \mathcal{B} \to LS(M)$ будет 2-локальным дифференцированием таким, что $\Delta|_M \equiv 0$. Тогда $\Delta \equiv 0$.*

Теорема 7. *Пусть M – произвольная алгебра фон Неймана без абелевых прямых слагаемых и пусть $\mathcal{B}$ – подалгебра в $LS(M)$ такая что $M \subseteq \mathcal{B}$. Тогда любое 2-локальное дифференцирование Δ на $\mathcal{B}$ является дифференцированием.*

Замечание 1. *В теореме 1 было даны необходимые и достаточные условия, допускающие 2-локальные дифференцирования на коммутативных регулярных алгебрах, которые не являются дифференцированиями. В частности, для абелевой алгебры фон Неймана M с не атомической решеткой $P(M)$ алгебра $S(M) \equiv LS(M)$ допускает 2-локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями.*

Для типа II_1 алгебры фон Неймана M описание структуры дифференцирований на алгебре $S(M) \equiv LS(M)$ до 2019 года оставалось открытой проблемой.

В связи с этим следует отметить, что Теорема 7 является одним из первых результатов о 2-локальных дифференцированиях, которая была получена в случае отсутствия информации об общем виде дифференцирований на этих алгебрах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению 2-локальных дифференцирований на различных операторных алгебрах и исследованию их связей с дифференцированиями.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Даны необходимые и достаточные условия на коммутативной регулярной алгебре допускающие 2-локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями.

2. Доказано, что каждое 2-локальное дифференцирование на алгебре Аренса является дифференцированием.

3. Доказано, что всякое 2-локальное дифференцирование из алгебры $M_n(\mathcal{A})$ в $M_n(\mathcal{M})$ $(n \geq 3)$ является дифференцированием, где $\mathcal{A}$ – унитальная банахова алгебра такая, что любое йорданово дифференцирование из $\mathcal{A}$ в любой $\mathcal{A}$-бимодуль $\mathcal{M}$ является дифференцированием.

4. Показано, что любое 2-локальное дифференцирование на алгебре локально измеримых операторов относительно алгебры фон Неймана без прямых абелевых слагаемых является дифференцированием.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ALAUADINOV AMIR KADIRBERGENOVICH

2-LOCAL DERIVATIONS ON ALGEBRAS OF MEASURABLE OPERATORS AND ITS SUBALGEBRAS

01.01.01- Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.2.PhD/FM146.

Dissertation has been prepared at Uzbekistan Academy of Sciences V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://mathinst.uz/kengash/ and in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Raximov Abdug’ofur Abdumajidovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Eshmatov Farkhod Khasanovich Doctor of philosophy (PhD) physical and mathematical sciences
Leading organization:	**Andijan State University**

Defense will take place on “____” _________________ 2020 at ____ at the meeting of Scientific Council DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky (Address: Mirzo Ulugbek str. 81, Mirzo Ulugbek area, Tashkent, 100170, Uzbekistan, Ph.: (99871) 262-75-44, fax: (99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz.)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky (registered for No.____). (Address: Mirzo Ulugbek str. 81, Mirzo Ulugbek area, Tashkent, 100170, Uzbekistan, Ph.: (99871) 262-75-44).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2020 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2020 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

U.U.Jamilov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is to study of 2-local derivations on various operator algebras and their relations with derivations**.**

The object of the research work is 2-local derivations on various operator algebras and their subalgebras**.**

Scientific novelty of the research work: is as follows:

conditions for the existence of 2-local derivations that are not derivation on commutative regular algebras are found;

it is proved that every 2-local derivation on the Arens algebra is a derivation;

it is proved that every 2-local derivation on matrix algebras is a derivation;

it is proved that every 2-local derivation on the algebra of locally measurable operators is a derivation.

Implementation of the research results. The results were used in the following scientific studies:

2-local derivations of the algebra of measurable operators, matrix algebras and commutative regular algebras have been used in the research project: «Breakthrough methods for non-commutative calculus», Project ID: FLl70100052, to describe the translation invariant derivations on algebras of measurable functions (Certificate of University of New South Wales, Australia on January 20, 2020). Scientific results have been applied to describe the translation invariant derivations on algebras of measurable functions;

2-local derivations of the algebra of measurable operators, matrix algebras and commutative regular algebras have been used in the research project: «Generalized derivations of some classes of algebras and their applications», Project ID: FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2, Ministry of Higher Education of Malaysia (2016-2019) to describe the derivation algebras of certain classes of finite-dimensional non associative algebras (Certificate of University Teknologi MARA , Shah Alam, Malaysia on June 10, 2020). Scientific results have been applied to describe the derivation algebras of certain classes of finite-dimensional non associative algebras;

2-local derivations of the algebra of measurable operators, matrix algebras, and commutative regular algebras have been used in the research project: «Problemas sobre "Preservers" desde la perspectiva del Analisis Funcional». Project ID: Grant, No. PGC2018- 093332-B-I00, Ministerio de Ciencia, Innovacion y Universidades (2019-2021) for investigation of local triple, 2-local triple and weak-2-local derivations on $C*$-algebras and von Neumann algebras (Certificate of Universidad de Granada, Spain on June 10, 2020). The application of scientific results made it possible to investigation of local triple, 2-local triple and weak-2-local derivations on $C*$-algebras and von Neumann algebras;

2-local derivations of the algebra of measurable operators, matrix algebras, and commutative regular algebras have been used in the research project: «Non-associative algebras and superalgebras» for investigation of local and 2-local derivations on non-associative algebras, in particular for Malcev algebras (Certificate of Universidade Federal do ABC, Santo Andre, Brazil on June 5, 2020). Scientific results have been applied to investigation of local and 2-local derivations on non-associative algebras, in particular, for Malcev algebras.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 68 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Alauadinov A.K. 2-Local derivations on matrix algebras over commutative regular algebras // Linear Alg. Appl. –2013. – Volume 439, – P. 1294–1311. (3. Scopus IF=1.1).
2. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Alauadinov A.K. 2-Local derivations on algebras of locally measurable operators // Ann. Funct. Anal. –2013. – Volume 4, – P. 110–117. (3. Scopus IF=0.88).
3. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Nurjanov B.O., Alauatdinov A.K. Local and 2-local derivations on noncommutative Arens algebras // Mathematica Slovaca. –2014. – Volume 64, – P. 423–432. (3. Scopus IF=0.5).
4. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Alauadinov A.K. 2-Local derivations on matrix algebras and algebras of measurable operators // Adv. Oper. Theory. – 2018. – Volume 3, –P. 17–28. (3. Scopus IF=0.83).
5. Алауадинов А.К. 2-локальные дифференцирования на алгебрах Аренса // Доклады Академии наук Республики Узбекистан, – 2012, № 1. С. 6–8. (01.00.00; №7).
6. Kudaybergenov K.K., Alauadinov A.K. 2-local derivations on algebras of measurable operators // Science and Education in Karakalpakstan.– 2017 – Volume 2, –P. 15–18. (01.00.00; №11).

II бўлим (II часть; part II)

7. Аюпов Ш.А., Кудайбергенов К.К., Алауадинов А.К. 2-локальное дифференцирования алгебры локально измеримых операторов // Тезисы докладов Международный научной конференции «Операторные алгебры и смежные проблемы», – Ташкент, 12–14 сентября 2012 года. – С.103–104.
8. Алауадинов А.К. 2-локальное дифференцирования на алгебрах Аренса // Материалы Республиканской научной конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа», – Нукус, 11–12 мая 2012 года. – С. 25–26.
9. Алауадинов А.К. Описание 2-локальных дифференцирований алгебры локально измеримых операторов // Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математического анализа», Ургенч, 9–10 ноября 2012 года. – С. 29.
10. Алауадинов А.К. 2-Локальные дифференцирования алгебры 2×2 верхнетреугольных матриц // Тезисы докладов Республиканской научной конференции «Актуальные вопросы комплексного анализа», Ташкент, 19–21 сентября 2013 года. – С. 49–50.
11. Kudaybergenov K.K., Alauadinov A.K. 2-Local derivations on semifinite JW-algebras // Abstracts of the Second USA-Uzbekistan conference on «Analysis and Mathematical Physics», Urgench, august 8–12, 2017. – P. 25.