В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АБДУРАСУЛОВ ҚОБИЛЖОН КОМИЛЖОН ЎҒЛИ

НИЛРАДИКАЛИНИНГ ТЎЛДИРУВЧИ ФАЗОСИ ҚЎШИМЧА ШАРТЛАРНИ ҚАНОАТЛАНТИРУВЧИ ЕЧИЛУВЧАН ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020

УДК: 512.554

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Абдурасулов Қобилжон Комилжон ўғли
Нилрадикалининг тўлдирувчи фазоси қўшимча шартларни қаноатлантирувчи ечилувчан Лейбниц алгебралари……............................ **3**

Абдурасулов Кобилжон Комилжон угли
Разрешимые алгебры Лейбница с ограничениями на дополняющее пространство к нильрадикалу.. **21**

Abdurasulov Kobiljon Komiljon ugli
Solvable Leibniz algebras with restrictions on the complementary space to the nilradical……………………………………………………………… **39**

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works…………………………………………………... **42**

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АБДУРАСУЛОВ ҚОБИЛЖОН КОМИЛЖОН ЎҒЛИ

НИЛРАДИКАЛИНИНГ ТЎЛДИРУВЧИ ФАЗОСИ ҚЎШИМЧА ШАРТЛАРНИ ҚАНОАТЛАНТИРУВЧИ ЕЧИЛУВЧАН ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.1.PhD/FM314 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И. Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Худойбердиев Аброр Хакимович** физика-математика фанлари доктори
	Курбанбаев Тўуелбай Кадирбаевич физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	Андижон давлат университети

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «7» январ соат 9:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174,Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (109-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2020 йил «29» декабр куни тарқатилди.
(2020 йил «29» декабр даги 2-рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.н

Б.А.Омиров
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда алгебраик масалаларга олиб келинади. Ли алгебраларини физика ва дифференциал геометриянинг турли соҳаларида қўлланилиши уларнинг турли хил умумлашмалари бўлган Ли супералгебралари, Малцев алгебралари, n-Ли алгебралари ва Лейбниц алгебраларининг пайдо бўлишига олиб келди. Лейбниц алгебраларининг Ли алгебралари ва уларнинг тасвирлари билан узвий боғлиқлиги бу назарияни ўрганиш долзарб масала эканлигини кўрсатади. Ҳозирги кунга келиб Лейбниц алгебралари замонавий алгебранинг жадал ривожланаётган тармоқларидан бирига айланди. Таъкидлаш жоизки, Лейбниц алгебраси учун Леви теоремаси ўринли бўлиб, характеристикаси нолга тенг бўлган майдондаги ихтиёрий чекли ўлчамли Лейбниц алгебраси ярим содда Ли алгебра ва ечилувчан радикалнинг тўғри йиғиндиси кўринишида ифодаланади. Ли алгебраларининг классик назариясидан маълумки, ярим содда Ли алгебралари содда идеалларнинг тўғри йиғиндисидан иборат. Бу эса чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларини ўрганиш ечилувчан алгебралар ва уларнинг тасвирларини ўрганишга олиб келади.

Ҳозирги кунда жаҳонда чекли ўлчамли Лейбниц алгебралари назариясидаги асосий ҳал қилинмаган муаммо бу барча ечилувчан алгебраларнинг таснифи бўлиб, уни принципиал жиҳатдан олдиндан кўриш ва ҳал қилиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Маълумки, ечилувчан Ли алгебраларини нилрадикал ва нилрадикалнинг дифференциаллашлари махсус турлари ёрдамида қуриш методи Лейбниц алгебралари учун ҳам ўринли. Берилган нилрадикалли ечилувчан Ли алгебралари ва Лейбниц алгебраларини таснифлашга бағишланган ишлардан нилрадикални тўлдирувчи қисм фазонинг ўлчами максимал бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари умумий характеристик хусусиятларга эга эканлигини кўриш мумкин (хусусан, марказнинг тривиаллиги, қуйи тартибли когомологик группаларининг ноллигини ва ҳ.к.). Шу ўринда Сноблнинг берилган нилрадикалли ва нилрадикалнинг тўлдирувчи қисм фазосининг ўлчами максимал бўлган ечилувчан Ли алгебраси изоморфизм аниқлигида ягона бўлади деган гипотезасини эслатиб ўтиш жоиз.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинig илмий ва амалий татбиқига эга бўлган амалий математика, информатика, рақамли иқтисодиёт фанларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда чексиз ўлчамли Ли алгебралари математиканинг турли соҳаларида, айниқса геометрия, топология ва математик физикада ўзининг янги татбиқларини топишда давом этмоқда. Про-нилпотент ва про-ечилувчан Ли алгебраларига бағишланган тадқиқотлар сони кам бўлганлиги ва уларнинг тавсифида Энгел ва Ли теоремаларининг чексиз ўлчамли аналоглари йўқлиги сабабли бир қанча қийинчиликларга дуч келинади. Про-нилпотент Ли алгебраларнинг нисбатан кичикроқ бўлган мусбат градуирланган синфини таснифлаш масаласи ҳам ўта муҳим ҳисобланиб, Зельманов ҳамда Шалевлар томонидан бу масала ҳам қийин эканлиги таъкидланган. Про-нилпотент Ли алгебраларининг тавсифи чекли ўлчамли нилпотент алгебраларнинг тавсифидан фарқ қилиб, ихтиёрий мусбат градуирланган Ли алгебраси хос идеалга эга эканлиги учун у ерда содда объектлар мавжуд эмас. Охирги йилларда бундай алгебраларнинг таснифларини олиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. Вазирлар Маҳкамасининг қарори билан «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида ечилувчан Лейбниц алгебралари назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-сонли Қарори, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг Республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот Ўзбекистон Республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. 1945-йил охирида, Малцев ечилувчан Ли алгебраларини ўзининг нилрадикали ёрдамида ягона равишда аниқланишини исботлаган. Кейинчалик 1963-йилда, Мубаракзянов ечилувчан Ли алгебраларини таснифлашнинг алгебра нилрадикали ва нилрадикалнинг нил-эркли дифференциаллашларига асосланган методини яратди. Бу методдан фойдаланиб нилрадикали филиформ, квази-филиформ, Абел ва Гейзенберг алгебраларидан иборат бўлган ечилувчан Ли алгебраларининг таснифлари олинди. Маълумки, Ли алгебралари назариясидаги классик натижалар (Энгел ва Ли теоремалари, ечилувчан алгебранинг квадрати унинг нилрадикалида ётиши) Лейбниц алгебралари учун ҳам ўринли бўлади. Ушбу натижаларнинг Лейбниц алгебраларига татбиқ этилиши Мубаракзянов усулини ечилувчан Лейбниц алгебралари учун ҳам қўллашга имкон берди, яъни нилрадикал ва уларнинг ташқи дифференциаллашларининг махсус турларидан фойдаланган ҳолда ечилувчан Ли алгебраларини қуриш методи Лейбниц алгебралари учун ҳам

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

татбиқ этилди. Нилрадикали нол-филиформ, филиформ, табиий усулда градуирланган квази-филиформ алгебраларига, нол-филиформ алгебраларининг тўғри йиғиндисига ва шунга ўхшаш бир қанча нилпотент алгебраларга изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифлари олинган.

Маълумки, Витт алгебрасининг номанфий қисми $W_{\geq 0}$ про-ечилувчан Ли алгебрасига мисол бўла олади. $W_{\geq 0}$ алгебранинг максимал про-нилпотент идеали Витт алгебрасининг мусбат қисми бўлишини осонгина кўриш мумкин. Бундан ташқари, нилрадикали берилган чекли ўлчамли ечилувчан Ли алгебраларини қуриш методини ушбу чексиз ўлчамли Ли алгебралари учун қўллаш мумкин. Таъкидлаш лозимки, ечилувчан Ли алгебраларини, нилрадикали орқали ҳосил қилиш усулини тўлиқлигича қўллаш мумкин бўлган бошқа про-ечилувчан алгебралар ҳам мавжуд. Жумладан, максимал нилпотент идеали максимал синфли $\mathbb{N}$ градуирланган Ли алгебраси (чексиз ўлчамли филиформ Ли алгебраси)дан иборат бўлган про-ечилувчан Ли алгебралари учун ушбу методни қўллаш мумкин. Келтирилган барча про-ечилувчан алгебраларда тўлдирувчи қисмфазонинг максимал ўлчами, про-нилпотент идеалнинг ҳосил қилувчилари сони билан устма-уст тушади.

$A_1^{(1)}$ ва $A_2^{(2)}$ аффин Кац-Моди алгебраларининг мусбат қисмлари бўлган $\boldsymbol{n}_1$ ва $\boldsymbol{n}_2$ алгебралар комбинаторикал айниятларда ҳам ўзининг татбиқига эга. Фиаловски ва Миллионщиковлар томонидан характеристикаси нол бўлган майдонда берилган барча табиий усулда градуирланган алгебралар аниқланган бўлиб, шу жумладан $\boldsymbol{n}_1$ ва $\boldsymbol{n}_2$ алгебралар ҳам ҳосил қилинган. Зельманов ва Шалевлар томонидан кенглиги чекли бўлган Ли алгебраларини таснифлаш масаласи жуда муҳим ва қийин масала деб эътироф этилган. Мусбат градуирланган чекли ўлчамли Ли алгебралар синфи Миллионщиков томонидан таснифлаган бўлиб, ҳозирги вақтда чексиз ўлчамли ҳолатда фақатгина кенглиги 3/2 бўлган синфнинг тўлиқ таснифи олинган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номидаги математика институтининг “Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизикли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос” + “Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва сиртларнинг глобал инвариантлари назарияси ва унинг механикага татбиқлари” (ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87, 2017-2019 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида ҳамда математика институтининг «Ярим содда ва нилпотент алгебраларининг когомологик группалари», (ЁФА-Фтех-2018-77, 2018-209 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади нилрадикали берилган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлаш, ҳамда кенглиги 3/2 га тенг бўлган максимал про-нилпотент идеалга эга максимал про-ечилувчан Ли алгебраларини қуриш ва уларнинг кичик тартибли когомологик группаларини тадқиқ этишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

нилрадикали берилган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлаш;

нилрадикалнинг тўлдирувчи фазосига қўшимча шартлар қўйилган максимал ечилувчан кенгайтмали Ли алгебраларини таснифлаш;

кенглиги 3/2 га тенг бўлган максимал про-нилпотент идеалга эга максимал про-ечилувчан Ли алгебраларининг тузилишини ўрганиш.

Тадқиқотнинг объекти ечилувчан Лейбниц алгебралари, про-ечилувчан Ли алгебралари, дифференциаллашлар ва когомологик группалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети: Нилрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари; нилрадикалнинг тўлдирувчи фазосига қўшимча шартлар қўйилган максимал ечилувчан кенгайтмали нилпотент Лейбниц алгебралари; максимал про-нилпотент идеалга эга максимал про-ечилувчан Ли алгебралари.

Тадқиқотнинг усуллари: Ишда ассоциатив бўлмаган алгебралар назарияси, структуравий ва когомологик усуллар, шунингдек, чексиз ўлчамли алгебралар усуллари ва инвариантлар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

нилрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ алгебраларга изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган;

нилрадикални тўлдирувчи фазонининг ўлчами, нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари тавсифланган, шенингдек бундай алгебраларнинг тўлиқлиги исботланган;

кенглиги 3/2 га тенг бўлган максимал про-нилпотент идеалга эга максимал про-ечилувчан Ли алгебраларининг таснифи олинган;

про-ечилувчан Ли алгебраларнинг биринчи ва иккинчи тартибли когомологик группалари таснифланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Диссертацияда қўлланилган усуллар ва олинган натижаларни Ўзбекистон Республикаси олий ўқув юртлари магистрантлари ва докторантлари учун махсус курсларда қўллаш мумкин. Бундан ташқари, диссертация натижалари ҳар хил типдаги нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифларига, нилрадикалнинг тўлдирувчи фазосининг ўлчами, нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган шартдаги ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифларига, баъзи про-ечилувчан Ли алгебраларининг 2-группа когомологияларини ҳисоблашга, про-ечилувчан Ли алгебралари ва ечилувчан Лейбниц алгебраларида баъзи гипотезаларнинг тўғрилигини текширишга имкон беради.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Алгебраларнинг бошқа синфлари учун маълум тадқиқот усулларидан фойдаланиш ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган. Олинган натижалар математик жиҳатдан тўғри исботланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, ишда олинган илмий натижалар алгебраларнинг бошқа кўпхилликларини кейинги тадқиқотлари учун ишлатилиши мумкин. Хусусан, ушбу диссертацияда ишлаб чиқилган техника ва усуллардан нилрадикали бошқа синфлардан олинган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлашда фойдаланилади. Нилрадикални тўлдирувчи фазонинг ўлчами нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифлари Снобл гипотезасини исботлашда, бундан ташқари, бундай Лейбниц алгебраларининг тўлиқлиги, ихтиёрий нилпотент Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларини тўлиқлигини ўрганишда қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти шундаки, олинган натижалардан Лейбниц алгебраларини таснифлаш масалаларида ва Ли алгебраларининг когомологиялар хоссаларини аниқлашда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Нилрадикалининг тўлдирувчи фазоси қўшимча шартларни қаноатлантирувчи ечилувчан Лейбниц алгебралари бўйича олинган натижалар асосида:

нилрадикалнинг ко-ўлчами нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифлари ва уларнинг тўлиқлигидан FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2 рақамли хорижий лойиҳасида баъзи чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг дифференциаллашларини таснифлашда фойдаланилган (MAPA Технология университетининг 2020 йил 27 ноябрдаги маълумотномаси, Малайзия). Илмий натижаларнинг қўлланилиши баъзи ечилувчан Лейбниц алгебраларининг когомологик қаттиқлиги масалаларини ҳал қилиш имконини берган;

нилрадикалнинг тўлдирувчи фазоси максимал бўлган ечилувчан Ли алгебраларининг таснифлари ва уларнинг тўлиқлигидан ЁФА-Фтех-2018-79 рақамли фундаментал лойиҳасида Ли алгебраларини таснифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг 2020 йил 3декабрдаги 2/1255-2719-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши нилрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ Ли алгебраларининг таснифи ва уларнинг дифференциаллашлари тавсифи олиш имконини берган;

нилрадикалнинг ко-ўлчами нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ечилувчан Ли алгебраларининг таснифлари ва уларнинг тўлиқлиги ҳамда бундай алгебраларнинг ягоналигидан ОТ-Ф4-31 рақамли фундаментал лойиҳасида Ли алгебраларининг когомологик фазоларини таснифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим Вазирлигининг 2020 йил 30 ноябрдаги 89-03-4997-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши баъзи ечилувчан Лейбниц алгебраларининг биринчи ва иккинчи тартибли когомологик фазоларини таснифлашда фойдаланилган ва уларнинг тривиал эканлиги кўрсатиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 2 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 13 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий, 5 таси республика журналларида, 2 та www.arxiv.org да нашрда, шунингдек 5 та маъруза тезислари илмий конференция материалларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, ўнта бўлимга бўлинган учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 114 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертациянинг **«Нилрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари»**, деб номланувчи биринчи бобида Ли алгебралари ва Лейбниц алгебралари назарияларидан зарур тушунчалар ва ёрдамчи натижалар келтирилган. Нилрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ алгебрасига изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари тавсифланган.

1-таъриф. $\mathbb{F}$ майдон устида аниқланган G алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги айниятлар бажарилса,

$[x, x] = 0$ – антикоммутативлик айнияти,

$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ –Якоби айнияти,

у холда G алгебра *Ли алгебраси* дейилади, бу ерда [-,-] –G алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

2-таъриф. $\mathbb{F}$ майдон устида аниқланган L алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги Лейбниц айнияти бажарилса,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

L алгебра *Лейбниц алгебраси* дейилади, бу ерда [-,-] – L да аниқланган кўпайтириш амали.

Маълумки, Лейбниц алгебрасида антикоммутативлик айниятининг ўринли бўлишини талаб қилсак, у ҳолда Лейбниц ва Якоби айниятлари устма-уст тушади. Шунинг учун, Лейбниц алгебралари Ли алгебраларининг умумлашмаси ҳисобланади. Лейбниц алгебралари соҳасидаги сўнгги натижалар шуни кўрсатадики, Ли алгебраларининг бошқа умумлашмаларидан кўра айнан Лейбниц алгебралари Ли алгебраларига яқинроқ бўлади.

Кейинги келадиган таъриф ва тушунчаларни фақатгина Лейбниц алгебралари учун келтириб, уларни Ли алгебралари учун ҳам (агар бошқача келтирилмаган бўлса) амал қилишидан фойдаланиб кетамиз.

Ихтиёрий L Лейбниц алгебраси учун қуйидаги кетма-кетликларни аниқлаймиз:

$$L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}]; \qquad L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k, L^1], \qquad k \geq 1.$$

3-таъриф. Лейбниц алгебраси учун шундай $s \in \mathbb{N}$ сон мавжуд бўлиб, $L^{[s]}=0$ (мос равишда, $L^s=0$) бўлса, у ҳолда L *ечилувчан* (мос равишда, *нилпотент*) Лейбниц алгебраси дейилади.

Ихтиёрий Лейбниц алгебрасининг максимал нилпотент идеали унинг *нилрадикали* дейилади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

- $Ann_r(L)=\{x \in L \mid [L, x]=0\}$ – алгебранинг ўнг аннулятори;

- $Center(L)=\{x\in L \mid [x, L]=[L, x]=0\}$ –алгебранинг маркази.

4-таъриф. Айтайлик d–L Лейбниц алгебрасининг чизиқли алмаштириши бўлсин. Агар ихтиёрий $x, y\in L$ лар учун қуйидаги тенглик бажрилса

$$d([x, y])=[d(x), y]+[x, d(y)],$$

у ҳолда d чизиқли алмаштиришга L Лейбниц алгебрасининг *дифференциаллаши* дейилади.

Лейбниц айниятидан келиб чиқадики, алгебранинг x элементи учун ўнг томондан кўпайтириш операторлари R_x дифференциаллаш бўлади. Бундай дифференциаллашлар *ички дифференциаллашлар* деб аталади.

5-таъриф. Айтайлик L – ўлчами n га тенг бўлган Лейбниц алгебраси бўлсин. Агар $L^{n-2}\neq 0$ ва $L^{n-1}=0$ бўлса, у ҳолда L *квази-филиформ* Лейбниц алгебраси дейилади.

Айтайлик L чекли сондаги нолдан фарқли фазолардан ташкил топган $\mathbb{Z}$-градуирланган Лейбниц алгебраси бўлсин, яъни $L=\oplus_{i\in Z}V_i$, бу ерда ихтиёрий $i, j\in \mathbb{Z}$ учун $[V_i,V_j]\subseteq V_{i+j}$ бўлади.

Агар $L=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus\ldots\oplus V_{k_t}$ да барча i ($k_1\leq i\leq k_t$) лар учун $V_i\neq 0$ бўлса, L нилпотент Лейбниц алгебраси *боғлиқли градуоровкага эга* дейилади.

$len(L)=k_t-k_1+1$ сонига L Лейбниц алгебрасининг узунлиги дейилади.

6-таъриф. Агар $l(L)=dimL$ бўлса, у ҳолда L Лейбниц алгебраси *максимал узунликдаги алгебра* дейилади.

Максимал узунликдаги квази-филиформ Ли бўлмаган Лейбниц алгебралари Л.М.Камачо ва бошқалар томонидан таснифланган.

1-теорема. Максимал узунликдаги ҳар қандай n-ўлчамли ($n\geq 6$) квази-филиформ Ли бўлмаган Лейбниц алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморфдир:

$$M^{1,\delta}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_n, & [e_{n-1},e_1]=e_2, \quad [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 2\leq i\leq n-3,\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\delta e_4, & [e_i,e_{n-1}]=\delta e_{i+3}, \quad \delta\in\{0,1\}, \quad 2\leq i\leq n-5,\end{cases}$$

$$M^{2\lambda}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\leq i\leq n-3,\\ [e_1,e_{n-1}]=\lambda e_n, & \lambda\in\mathbb{C},\end{cases}$$

$$M^{3,\alpha}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_2, & [e_3,e_3]=\alpha e_6,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & [e_1,e_i]=-e_{i+1}, \quad 3\leq i\leq n-1,\end{cases}$$

$$M^4:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\leq i\leq n-3,\\ [e_1,e_{n-1}]=e_n,\end{cases}$$

бу ерда $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ алгебрадаги базис; $M^{3,\alpha}$ алгебрада агар $n>6$ бўлса, $\alpha=0$ ва агар $n>6$ бўлса, $\alpha\in\{0,1\}$.

Нилрадикали N ва тўлдирувчи фазосининг ўлчами s га тенг бўлган барча ечилувчан Лейбниц алгебралари оиласини $R(N, s)$ билан белгилаймиз.

Сноблнинг нилрадикали берилган максимал ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари ҳақидаги гипотезасини келтирамиз. (Snobl L., On the structure of maximal solvable extensions and of Levi extensions of nilpotent Lie algebras, J. Phys.

A 43 (2010), 505202 (17 pp).)

Гипотеза. Айтайлик N – комплекс нилпотент (характеристик нилпотент бўлмаган нилпотент) Ли алгебраси бўлсин. L, L' – нилрадикали N бўлган максимал ўлчамли ечилувчан Ли алгебраси бўлсин, яъни булардан катта ўлчамли ечилувчан Ли алгебраси мавжуд бўлмасин. У ҳолда L ва L' алгебралар изоморф бўлади.

Кац-Моди аффин алгебралари чексиз ўлчамли Ли алгебраларининг энг яхши ўрганилган синфларидан биридир. Нилрадикали берилган, ко-ўлчамли максимал бўлган чекли ўлчамли ечилувчан Ли алгебраларини таҳлил қилиш натижасида ушбу структура чексиз ўлчамли ҳолат учун ўринли бўладами деган савол қўйиш мумкин. Ушбу саволга жавоб беришда энг аввало бу методни про-ечилувчан ва про-нилпотент деб номланувчи Ли алгебралари учун текшириш зарурияти туғилади.

7-таъриф. Айтайлик L чексиз ўлчамли Ли алгебраси бўлсин. Агар $i\geq 1$учун $\bigcap_{j=1}^{\infty} L^{[j]}=0$ ва $\dim L/L^{[i]}<\infty$ (мос равишда, $\bigcap_{j=1}^{\infty} L^{j}=0$ ва $\dim L/L^{i}<\infty$) бўлса, у ҳолда L Ли алгебраси *про-ечилувчан* (мос равишда, *про-нилпотент*) дейилади.

Миллионшчиков ўз ишида қуйидаги про-нилпотент Ли алгебраларини рўйхатини келтирган:

$\boldsymbol{m}_0$: $[e_i, e_1] = e_{i+1},\ i\geq 2.$

$\boldsymbol{m}_2$: $[e_1, e_i] = e_{i+1},\ i\geq 2,\quad [e_2, e_j] = e_{j+2},\ j\geq 3,$

$$\mathbf{n}_1: \quad [e_i,e_j]=c_{i,j}e_{i+j}, \quad i,j\in\mathbb{N}, \quad c_{i,j}=\begin{cases}1, & агар \quad i-j\equiv 1 \bmod 3,\\ 0, & агар \quad i-j\equiv 0 \bmod 3,\\ -1, & агар \quad i-j\equiv -1 \bmod 3.\end{cases}$$

$$\mathbf{n}_2: \quad [f_q, f_l]=d_{q,l}f_{q+l}, \quad q,l\in\mathbb{N},$$

$\{f_{8i+1}, f_{8i+2}, f_{8i+3}, f_{8i+4}, f_{8i+5}, f_{8i+6}, f_{8i+7}, f_{8i+8}\}, i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ базисда кўпайтма қуйидаги жадвалда келтирилган:

	f_{8j}	f_{8j+1}	f_{8j+2}	f_{8j+3}	f_{8j+4}	f_{8j+5}	f_{8j+6}	f_{8j+7}
f_{8i}	0	1	−2	−1	0	1	2	−1
f_{8i+1}	−1	0	1	1	−3	−2	0	1
f_{8i+2}	2	−1	0	0	0	1	−1	0
f_{8i+3}	1	−1	0	0	3	−1	1	−2
f_{8i+4}	0	3	0	−3	0	3	0	−3
f_{8i+5}	−1	2	−1	1	−3	0	0	1
f_{8i+6}	−2	0	1	−1	0	0	0	1
f_{8i+7}	1	−1	0	2	3	−1	1	0

,

бу ерда i, j нолдан фарқли бутун сонлар.

L Ли алгебраси учун $n\geq 0$ да қуйидаги белгилашни оламиз: $C^n(L,L) := Hom(\wedge^n L, L)$.

$d^n: C^n(L, L) \to C^{n+1}(L, L)$ – чизиқли акслантириш қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$(d^n f)(x_1,...,x_{n+1}) := \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}[x_i, f(x_1,...,\tilde{x}_i,...,x_{n+1})] +$$
$$+ \sum_{1\le i<j\le n+1}(-1)^{i+j} f([x_i,x_j],x_1,...,\tilde{x}_i,...,\tilde{x}_j,...,x_{n+1}),$$

бу ерда $f\in C^n(L,L)$, $x_i\in L$ ва $\tilde{x}$ белгиси x элементнинг йўқлигини билдиради. d^n чизиқли акслантириш учун $d^{n+1}\circ d^n=0$ хосса ўринли бўлади.

d^n акслантириш ядросининг элементлари ($Z^n(L,L):=Kerd^n$ билан белгилаймиз) *n-коцикллар*, d^{n-1}образи элементлари эса ($B^n(L,L):=\mathrm{Im}d^{n-1}$ билан белгилаймиз) *n-кочегаралар* деб аталади. $d^{n+1}\circ d^n=0$ хоссадан $B^n(L,L)\subseteq Z^n(L,L)$ эканлиги келиб чиқади. Ушбу

$$H^n(L, L) := Z^n(L, L) / B^n(L, L)$$

фактор фазо *L алгебранинг n-тартибли когомологик группаси* дейилади.

8-таъриф. Алгебранинг маркази ва биринчи тартибли когомологик группаси тривиал бўлса, у ҳолда бу алгебра *тўлиқ алгебра* дейилади. Бошқача айтганда, маркази тривиал ва барча дифференциаллашлари ички бўлган алгебра тўлиқ алгебра дейилади.

1.2-параграфда нилрадикали 5 ўлчамдан катта ва максимал узунликдаги квази-филиформ Лейбниц алгебрасидан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган.

2-теорема. $R(M^{1,0},1)$ оиладаги ихтиёрий алгебрада шундай $\{e_1,e_2, \ldots, e_n, x\}$ базис мавжудки, унинг шу базисдаги кўпайтириш жадвали қуйидаги кўринишлардан бирига эга:

$$R_1(\alpha_2,...,\alpha_n): \begin{cases} M^{1,0}, & \\ [e_1,x]=\alpha_2 e_n, & [x,x]=\alpha_n e_n, \\ [e_i,x]=e_i+\sum\limits_{t=i+1}^{n-1}\alpha_{t-i+2}e_t, & 2\le i\le n-1, \end{cases}$$

$$R_2(\beta): \quad \begin{cases} M^{1,0}, & \\ [e_1,x]=e_1, & [e_i,\ x]=(i-2+\beta)e_i,\ 2\le i\le n-1, \\ [e_n,x]=2e_{n\text{-}}, & [x,e_1]=-e_1, \end{cases}$$

$$R_3(\alpha): \quad \begin{cases} M^{1,0}, & & \\ [e_1,x]=e_1, & [e_2,x]=2e_2+\alpha e_n, & [x,e_1]=-e_1 \\ [e_n,x]=2e_n, & [e_i,x]=ie_i, & 3\le i\le n-1, \end{cases}$$

$$R_4(\alpha): \quad \begin{cases} M^{1,0}, & & \\ [e_1,x]=e_1+\alpha e_{n-2}, & [x,x]=-\alpha e_{n-3}, & [x,e_1]=-e_1, \\ [e_n,x]=\alpha e_{n-1}+2e_n, & [e_i,x]=(i+3-n)e_i, & 2\le i\le n-1, \end{cases}$$

$$R_5(\alpha): \quad \begin{cases} M^{1,0}, \\ [e_1,x]=e_1+\alpha e_{n-1}, & [e_i,x]=(i+2-n)e_i, \quad 2\le i\le n, \\ [x,e_1]=-e_1, & [x,x]=-\alpha e_{n-2}. \end{cases}$$

$$R_6(\alpha): \quad \begin{cases} M^{1,0}, \\ [e_1,x]=e_1, & [x,e_1]=-e_1, \qquad [e_n,x]=2e_n, \\ [x,x]=\alpha e_{n-1}, & [e_i,x]=(i+1-n)e_i, \quad 2\le i\le n-1, \end{cases}$$

$$R_7(\alpha): \quad \begin{cases} M^{1,0}, \\ [e_1,x]=e_{1,} & [e_i,x]=(i-1)e_i, \quad 2\le i\le n-1, \\ [e_n,x]=2e_n, & [x,e_1]=-e_1+\alpha e_2, \end{cases}$$

бу ерда $\alpha\neq 0,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n\in\mathbb{C}.$

Энди нилрадикали $M^{1,0}$ алгебрага изоморф бўлган ва тўлдирувчи фазосининг ўлчами 2 га тенг бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифини келтирамиз.

3-теорема. $R(M^{1,0},2)$ оиладаги ихтиёрий Лейбниц алгебраси қуйидаги алгебрага изоморф:

$$\begin{array}{llll} [e_1,e_1]=e_n, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-2, & \\ [e_1,x_1]=e_1, & [e_i,x_1]=(i-2)e_i, & 3\le i\le n-1, & \\ [e_n,x_1]=2e_n, & [x_1,e_1]=-e_1, & [x_2,e_i]=-e_i, & 2\le i\le n-1. \end{array}$$

Нилрадикали $M^{1,1}$ алгебрасидан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебрасининг йўқлиги ҳақидани теоремани келтирамиз.

4-теорема. Нилрадикали $M^{1,1}$ алгебрадан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраси мавжуд эмас.

5-теорема. $R(M^{2,\lambda},1)$ оиладаги ихтиёрий Лейбниц алгебра қуйидаги ўзаро изаморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$W_1: \quad \begin{cases} M^{2,-1}, & [e_1,x]=e_1+e_n, & [e_i,x]=ie_i, \quad 2\le i\le n-2, \\ [e_n,x]=e_n, & [x,e_1]=-e_1, & [x,e_n]=-e_n, \end{cases}$$

$$W_2: \quad \begin{cases} M^{2,0}, & [e_1,x]=e_1+e_n, & [x,e_1]=-e_1, \\ [e_n,x]=e_n, & [x,x]=-e_{n-1}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 2\le i\le n-2, \end{cases}$$

$$W_3: \quad \begin{cases} M^{2,\lambda}, & [e_i,x]=ie_i, & 1\le i\le n-2, \\ [x,e_1]=-e_1, & [e_n,x]=(1+\lambda)e_n, & \\ [e_{n-1},x]=\lambda e_{n-1}, & [x,e_{n-1}]=-\lambda e_{n-1}, & \lambda\notin\{-1,0,1\}, \end{cases}$$

$$W_4: \quad \begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x]=ie_i, & 1\le i\le n-2, \\ [x,e_1]=-e_1, & [e_{n-1},x]=-e_{n-1}, & [x,x]=e_n, \end{cases}$$

$$W_5: \begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2, \\ [x,e_1]=-e_1, & [e_{n-1},x]=e_{n-2}+(n-2)e_{n-1}, \quad [e_n,x]=(n-1)e_n, \end{cases}$$

$$W_6: \begin{cases} M^{2,\lambda}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 3\le i\le n-2, \\ [e_n,x]=2e_n, & [e_1,x]=e_1+e_{n-1}, \quad [x,e_1]=-e_1-e_{n-1}, \\ [e_{n-1},x]=e_{n-1}, & [x,e_n]=(\lambda-1)e_n, \\ [x,e_{n-1}]=-e_{n-1}, & [e_2,x]=2e_2+(1+\lambda)e_n, \quad \lambda\in\{-1,1\}, \end{cases}$$

$$W_7: \begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2, \\ [x,e_1]=-e_1, & [e_{n-1},x]=e_{n-3}+(n-3)e_{n-1}, \quad [e_n,x]=e_{n-2}+(n-2)e_n, \end{cases}$$

$$W_8(\alpha): \begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2, \\ [x,e_1]=-e_1, & [e_{n-1},x]=\alpha e_{n-1}, \quad [e_n,x]=(1+\alpha)e_n, \end{cases}$$

$$W_9(\alpha): \begin{cases} M^{2,-1}, & [x,e_1]=-e_1, \quad [x,e_{n-1}]=e_{n-1}, \\ [x,x]=e_n, & [e_{n-1},x]=-e_{n-1}, \quad [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2, \end{cases}$$

$$W_{10}(\alpha): \begin{cases} M^{2,-1}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2, \\ [e_{n-1},x]=\alpha e_{n-1}, & [e_n,x]=(1+\alpha)e_n, \\ [x,e_1]=-e_1, & [x,e_{n-1}]=-\alpha e_{n-1}, \quad [x,e_n]=-(\alpha+1)e_n, \end{cases}$$

$$W_{11}(\alpha_2,\dots,\alpha_n): \begin{cases} M^{2,-1}, & [e_i,x]=\sum\limits_{t=i+1}^{n-2}\alpha_{t-i+1}e_t, \quad 1\le i\le n-3, \\ [e_n,x]=e_n, & [e_{n-1},x]=e_{n-1}+\alpha_{n-1}e_n, \\ [x,e_n]=-e_n, & [x,e_{n-1}]=-e_{n-1}-\alpha_{n-1}e_n, \quad [x,x]=\alpha_n e_{n-2}, \end{cases}$$

$$W_{12}(\alpha_2,\dots,\alpha_n): \begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x]=\sum\limits_{t=i+1}^{n-2}\alpha_{t-i+1}e_t, \quad 1\le i\le n-3, \\ [e_n,x]=e_n, & [e_{n-1},x]=e_{n-1}+\alpha_{n-1}e_n, \quad [x,x]=\alpha_n e_{n-2}, \end{cases}$$

бу ерда α_i, $\alpha\in\mathbb{C}$ ва $W_6(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $W_{12}(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ алгебралар оиласидаги $\{\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ параметрлардан дастлабки нолдан фарқлисини 1 га олиб келиш мумкин.

6-теорема. $R(M^{2,\lambda},2)$ оиладаги ихтиёрий Лейбниц алгебра қуйидаги изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$$R(M^{2,0},2): \begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x_1]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2, \\ [e_n,x_1]=e_n, & [x_1,e_1]=-e_1, \quad [e_{n-1},x_2]=e_{n-1}, \quad [e_n,x_2]=e_n, \end{cases}$$

$$R(M^{2,-1},2): \begin{cases} M^{2,-1}, & [e_i,x_1]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2, \\ [e_1,x_1]=-e_1, & [x_1,e_n]=-e_n, \quad [e_{n-1},x_2]=e_{n-1}, \quad [e_n,x_2]=e_n. \end{cases}$$

Таъкидлаш жоизки, нилрадикали $M^{3,0}$ ва M^4 алгебраларга изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари мос равишда А.Шабанский ва Ж.К.Адашевлар томонидан таснифланган.

1.3- ва 1.4-параграфларда мос равишда нилрадикали 5 ва 4 ўлчамли максимал узунликдаги квази-филиформ Лейбниц алгебрасидан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган.

Диссертациянинг **«Нилрадикалнинг ко-ўлчами нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари»** деб номланувчи иккинчи боби нилрадикални тўлдирувчи фазонинг ўлчами нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ечилувчан Ли ва Лейбниц алгебраларининг таснифига бағишланади. Бундай Ли алгебраларнинг ягоналиги исботланиши, Снобл гипотезасини нилрадикалнинг ко-ўлчами нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ҳолатдаги ижобий ечимини беради.

7-теорема. Айтайлик $R=N\oplus Q$ ечилувчан Ли алгебраси бўлиб, $dimQ=dimN/N^2=k$ бўлсин. У ҳолда R алгебрада шундай $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x_1, x_2,\dots, x_k\}$ базис топиладики, R алгебрадаги кўпайтма қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} [e_i,e_j]=\sum\limits_{t=k+1}^{n}\gamma_{i,j}^{t}e_t, & 1\le i,j\le n,\\ [e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k,\\ [e_i,x_j]=\alpha_{i,j}e_i, & k+1\le i\le n, 1\le j\le k,\end{cases} \tag{1}$$

бу ерда $\alpha_{i,j}$ сони e_i, $i=k+1,\dots,n$ элементнинг ҳосил бўлишидаги e_j, $j=1,\dots,k$ элемент неча маротаба иштирок этишини билдиради.

1-изоҳ. Шуни таъкидлаш керакки, 7-теоремадаги ечилувчан Ли алгебрасида, $\alpha_{i,j}$ сонлари нилрадикалнинг берилган базисдаги кўпайтмаси билан бир қийматли аниқланади. Бу холатда 7-теорема **Снобл гипотезасининг** $dimQ=dimN/N^2$ бўлган ҳолатдаги ижобий ечимини беради.

2-тасдиқ. Айтайлик $R=N\oplus Q$ ечилувчан Лейбниц алгебраси учун $dimQ=dimN/N^2$ шарт бажарилсин. У холда $Center(R)=0$ бўлади.

8-теорема. Айтайлик $R=N\oplus Q$ ушбу $dimQ=dimN/N^2=k$ шартни қаноатлантирувчи ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда R алгебрада шундай $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ базис топиладики, R алгебрадаги кўпайтма қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} [e_i,e_j]=\sum\limits_{t=k+1}^{n}\gamma_{i,j}^{t}e_t, & 1\le i,j\le n,\\ [e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k,\\ [x_i,e_i]=(b_i-1)e_i, & b_i\in\{0,1\}, \quad 1\le i\le k,\\ [e_i,x_j]=\alpha_{i,j}e_i, & k+1\le i\le n,\ 1\le j\le k,\\ [x_j,e_i]=\sum\limits_{t=1}^{q}\beta_{j,i}^{i_t}e_t, & k+1\le i\le n,\ 1\le j\le k,\end{cases} \tag{2}$$

бу ерда $\alpha_{i,j}$ сони e_i, $i=k+1,\dots,n$ элементнинг ҳосил бўлишидаги e_j, $j=1,\dots,k$ элементнинг неча маротаба иштирок этишини билдиради.

2-изоҳ.

(i) Агар нилрадикалнинг ҳосил қилувчи элементларидан фарқли e_i базис элементи бошқа бир базис элемент билан бир хил тузилишга эга бўлмаса, у ҳолда бу элемент учун қуйидаги кўпайтмалар ўринли бўлади

$$[x_j, e_i] = \beta_{j,i} e_i, \quad k+1 \le i \le n, \ 1 \le j \le k;$$

(ii) (2) кўпайтмадаги $\alpha_{i,j}$ сонлари нилрадикалнинг берилган базисдаги кўпайтмаси билан бир қийматли аниқланади;

(iii) Ихтиёрий i ($1\le i\le n$) учун шундай j ($1\le j \le k$) топиладики, $\alpha_{i,j} \neq 0$ бўлади.

9-теорема. Айтайлик $R=N\oplus Q$ ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлиб, $dimQ=dimN/N^2$ бўлсин. Агар N ёйилмайдиган Ли алгебраси бўлса, у ҳолда R алгебра ҳам Ли алгебраси бўлиб, унинг кўпайтмаси (1) орқали аниқланади.

Диссертациянинг 2.3-параграфи нилрадикалининг тўлдирувчи фазосига юқоридаги шартлар қўйилган ечилувчан Ли ва Лейбниц алгебраларнинг тўлиқлигига бағишланади.

10-теорема. Айтайлик $R=N\oplus Q$ ечилувчан Ли алгебраси бўлиб, $dimQ=dimN/N^2$ бўлсин. У ҳолда R *тўлиқ* алгебра бўлади.

3-тасдиқ. Айтайлик $R=N\oplus Q$ ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлиб, $dimQ=dimN/N^2$ бўлсин. У ҳолда $I = Ann_r(R)$ тенглик ўринли бўлади, бу ерда $I=span\{[x, x], x\in R\}$.

11-теорема. Айтайлик $R=N\oplus Q$ ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлиб, $dimQ=dimN/N^2$ бўлсин. У ҳолда R *тўлиқ* Лейбниц алгебраси бўлади.

Диссертациянинг **«Максимал про-нилпотент идеалга эга бўлган про-ечилувчан Ли алгебраларининг таснифи»**, деб номланувчи учинчи бобида максимал про-нилпотент идеали $\boldsymbol{m}_0$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{n}_1$ ва $\boldsymbol{n}_2$ алгебралардан бирига изоморф бўлган про-ечилувчан Ли алгебраларининг таснифи олинган. Максимал про-нилпотент идеали $\boldsymbol{m}_0$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ алгебралардан иборат бўлган баъзи про-ечилувчан Ли алгебраларининг биринчи ва иккинчи когомологик группаларининг тавсифлари келтирилган.

12-теорема. Айтайлик M_0 максимал про-нилпотент идеали $\boldsymbol{m}_0$ бўлган про-ечилувчан Ли алгебраси бўлсин. У ҳолда M_0 да шундай $\{x, y, e_1, e_2, \ldots\}$ базис топиладики, бу базисдаги кўпайтма қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_0(\beta):\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad i\ge 2, & [x,e_1]=-e_1,\\ [x,e_i]=(1-i)e_i-\sum\limits_{k=3}^{t}\beta_k e_{t+i-2}, & [y,e_i]=-e_i, \quad i\ge 2,\end{cases}$$

бу ерда $\beta = (\beta_3, \beta_4, \ldots, \beta_t)$.

13-теорема. Айтайлик M_2 максимал про-нилпотент идеали $\boldsymbol{m}_2$ бўлган про-ечилувчан Ли алгебраси бўлсин. У ҳолда M_2 да шундай $\{x, e_1, e_2, \ldots\}$ базис топиладики, бу базисдаги кўпайтма қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_2(\gamma):\begin{cases}[e_1,e_i]=e_{i+1}, \quad i\ge 2, & [e_2,e_j]=e_{j+2}, \quad j\ge 3,\\ [x,e_1]=-e_1, & [x,e_i]=-ie_i-\sum\limits_{j=4}^{n}\gamma_j e_{j+i-2}, \ i\ge 2,\end{cases}$$

бу ерда $\gamma = (\gamma_4, \gamma_5, \dots, \gamma_n)$.

Мос равишда $M_0(0)$ ва $M_2(0)$ про-ечилувчан Ли алгебраларини кўрайлик.

$$\tilde{M}_0 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad i \geq 2, & [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_i] = (1-i)e_i & [y, e_i] = -e_i, \quad i \geq 2. \end{cases}$$

$$\tilde{M}_2 : \begin{cases} [e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad i \geq 2, & [e_2, e_j] = e_{j+2}, \quad j \geq 3, \\ [x, e_1] = -e_1, & [x, e_i] = -ie_i \quad i \geq 2. \end{cases}$$

14-теорема. $\tilde{M}_0$ ва $\tilde{M}_2$ про-ечилувчан Ли алгебралари *тўлиқ* бўлади.

Энди $\tilde{M}_0$ ва $\tilde{M}_2$ алгебраларининг иккинчи тартибли когомологик группаларини тавсифлаймиз.

15-теорема. $H^2(\tilde{M}_0, \tilde{M}_0) = \{0\}, \quad H^2(\tilde{M}_2, \tilde{M}_2) \neq \{0\}.$

3.2 параграфда максимал про-нилпотент идеали $\boldsymbol{n}_1$ ва $\boldsymbol{n}_2$ алгебраларга изоморф бўлган максимал про-ечилувчан Ли алгебраларининг таснифи келтирилган.

16-теорема. Айтайлик M максимал про-нилпотент идеали $\boldsymbol{n}_1$ бўлган про-ечилувчан Ли алгебраси бўлсин. У ҳолда M да шундай $\{x, y, e_1, e_2, \dots\}$ базис топиладики, бу базисдаги кўпайтма қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R_{n_1}(\alpha) : \begin{cases} [e_{3i-2}, x] = ie_{3i-2} + \sum\limits_{k=2}^{t}(i-1)\alpha_k e_{3k+3i-5}, & [e_{3i-1}, x] = (i-1)e_{3i-1} + \sum\limits_{k=2}^{t} i\alpha_k e_{3k+3i-4}, \\ [e_{3i}, x] \quad = ie_{3i} + \sum\limits_{k=2}^{t} i\alpha_k e_{3k+3i-3}, & [e_{3i-2}, y] = -e_{3i-2} + \sum\limits_{k=2}^{t} \alpha_k e_{3k+3i-5}, \\ [e_{3i-1}, y] \ = e_{3i-1} - \sum\limits_{k=2}^{t} \alpha_k e_{3k+3i-4}, & [x, y] \quad = \sum\limits_{k=2}^{t}(1-k)\alpha_k e_{3k}, \end{cases}$$

бу ерда $\alpha_{3i-2}\alpha_{3k-2} = 0, \quad 2 \leq i, k \leq t, \ \ 3k + 3i - 4 \geq 3t, \ \ i, t \in \mathbb{N}, \quad \alpha = \{\alpha_2, \dots, \alpha_t\}$.

Худди шундай, 16-теоремадаги каби, максимал про-нилпотент идеали $\boldsymbol{n}_2$ бўлган максимал про-ечилувчан Ли алгебраларининг таснифини $dimQ_2 = 2$ бўлган ҳолат учун келтирамиз.

17-теорема. Айтайлик M максимал про-нилпотент идеали $\boldsymbol{n}_2$ бўлган про-ечилувчан Ли алгебраси бўлсин. У ҳолда M да шундай $\{x, y, f_1, f_2, \dots\}$ базис топиладики, бу базисдаги кўпайтма қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$
R_{n_2}(\beta):=\begin{cases}
[f_{8i+1},x]=f_{8i+1}, & [f_{8i+1},y]=2if_{8i+1}+\sum\limits_{k=1}^{t}2i\beta_k f_{8i+8k+1},\\
[f_{8i+2},x]=-2f_{8i+2}, & [f_{8i+2},y]=(2i+1)f_{8i+2}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+1)\beta_k f_{8i+8k+2},\\
[f_{8i+3},x]=-f_{8i+3}, & [f_{8i+3},y]=(2i+1)f_{8i+3}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+1)\beta_k f_{8i+8k+3},\\
[f_{8i+5},x]=f_{8i+5}, & [f_{8i+4},y]=(2i+1)f_{8i+4}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+1)\beta_k f_{8i+8k+4},\\
[f_{8i+6},x]=2f_{8i+6}, & [f_{8i+5},y]=(2i+1)f_{8i+5}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+1)\beta_k f_{8i+8k+5},\\
[f_{8i+7},x]=-f_{8i+7}, & [f_{8i+6},y]=(2i+1)f_{8i+6}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+1)\beta_k f_{8i+8k+6},\\
 & [f_{8i+7},y]=(2i+2)f_{8i+7}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+2)\beta_k f_{8i+8k+7},\\
 & [f_{8i+8},y]=(2i+2)f_{8i+8}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+2)\beta_k f_{8i+8k+8},
\end{cases}
$$

бу ерда $i,t\in\mathbb{N}$, $\beta=\{\beta_1,\dots,\beta_t\}$.

3.3-параграфда $R_{\mathbf{n}_1}(0)$ ва $R_{\mathbf{n}_2}(0)$ про-ечилувчан Ли алгебраларининг иккинчи тартибли когомологик группаларининг тривиаллиги исботланган.

18-теорема. $R_{\mathbf{n}_1}(0)$ ва $R_{\mathbf{n}_2}(0)$ про-ечилувчан Ли алгебралари *тўлиқ* бўлади.

19-теорема. $H^2(R_{\mathbf{n}_1}(0),R_{\mathbf{n}_1}(0))=\{0\}$, $H^2(R_{\mathbf{n}_2}(0),R_{\mathbf{n}_2}(0))=\{0\}$.

ХУЛОСА

Диссертация чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц ва про-ечилувчан Ли алгебраларини ўрганишга бағишланади.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Нилрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ алгебраларига изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган;
2. Нилрадикалнинг ко-ўлчами нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ечилувчан Ли алгебралари тавсифланган;
3. Нилрадикални тўлдирувчи қисм фазонинг ўлчами нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари тавсифланган;
4. Нилрадикалнинг ко-ўлчами нилрадикалнинг ҳосил қилувчилари сонига тенг бўлган ечилувчан Ли ва Лейбниц алгебраларининг тўлиқлиги исботланган;

5. Максимал про-нилпотент идеали $\boldsymbol{m}_0$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{n}_1$ ва $\boldsymbol{n}_2$ алгебраларидан бирига изоморф бўлган про-ечилувчан Ли алгебраларининг таснифи олинган, бундан ташқари баъзи про-ечилувчан Ли алгебраларининг биринчи тартибли когомологик группалари тривиаллиги исботланган;
6. Максимал про-нилпотент идеали $\boldsymbol{m}_0$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{n}_1$ ва $\boldsymbol{n}_2$ алгебралардан иборат бўлган, баъзи про-ечилувчан Ли алгебраларининг иккинчи тартибли когомологик группаларининг тавсифи келтирилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01

ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АБДУРАСУЛОВ КОБИЛЖОН КОМИЛЖОН УГЛИ

РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ДОПОЛНЯЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО К НИЛЬРАДИКАЛУ

01.01.06 – Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2020

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.1.PhD/FM314.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И. Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Худойбердиев Аброр Хакимович** доктор физико-математических наук
	Курбанбаев Тууелбай Кадирбаевич кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Андижанский Государственний университет**

Защита диссертации состоится «7» января 2021 года в 9:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 109). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «29» декабря 2020 года.
(протокол рассылки № 2 от «29» декабря 2020 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н

Б.А.Омиров
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые на мировом уровне, часто приводятся к алгебраическим проблемам. Приложения алгебр Ли в различных областях физики и дифференциальной геометрии послужили предпосылкой для появления различных обобщений алгебр Ли, таких как супералгебры Ли, алгебры Мальцева, n-Лиевые алгебры, а также алгебры Лейбница. Связь алгебр Лейбница с алгебрами Ли и их представлениями показала актуальность изучения теории алгебр Лейбница и их представлений. На данный момент алгебры Лейбница являются одним из бурно развивающихся разделов современной алгебры. Напомним, что аналог теоремы Леви справедлив для алгебр Лейбница, и утверждается, что произвольная конечномерная алгебра Лейбница над полем нулевой характеристики разлагается в полупрямую сумму полупростой алгебры Ли и разрешимого радикала. В силу того, что полупростые алгебры Ли разлагаются в прямую сумму простых идеалов, классификация которых известна из классической теории алгебр Ли, то изучение конечномерных алгебр Лейбница сводится к изучению разрешимых алгебр и их представлений.

В настоящее время в мире основная нерешенная проблема в теории конечномерных алгебр Лейбница – это классификация всех разрешимых алгебр, которая, в принципе, не обозрима и не имеет реалистичного решения. Известно, что метод построения разрешимых алгебр Ли с помощью нильрадикала и их специальных типов дифференцирований продолжается на случай алгебр Лейбница. Анализ работ, посвященных описаниям разрешимых алгебр Ли и алгебр Лейбница с заданными нильрадикалами, показывает, что разрешимые алгебры Лейбница с максимальной размерностью дополняющего подпространства к нильрадикалу обладают общими характерными свойствами (такими, как тривиальность центра, тривиальность групп когомологий малых порядков и так далее). В данном контексте стоит упомянуть гипотезу Снобля о том, что с точностью до изоморфизма существует единственная комплексная разрешимая алгебра Ли с заданным нильрадикалом и максимальным дополняющим подпространством к нильрадикалу.

В нашей стране уделяется особое внимание прикладной математике, информатике, цифровой экономике, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, в последние годы бесконечномерные алгебры Ли нашли и продолжают находить новые приложения в различных областях математики, особенно в геометрии, топологии и математической физике. Исследования, посвященные про-разрешимым и про-нильпотентным алгебрам Ли, малочисленны и их описание сопряжено с такими трудностями, как отсутствие бесконечномерного аналога теоремы Энгеля и теоремы Ли. Примечательно, что классификация даже такого подкласса про-нильпотентных алгебр, как узкие положительно градуированные алгебры Ли, является важной задачей, и, как отмечают Зельманов и Шалев, это «сложная задача». Описание про-нильпотентных алгебр Ли отличается от описания конечномерных нильпотентных алгебр тем, что не существует простых объектов в том смысле, что каждая положительно градуированная алгебра Ли имеет собственный идеал. В последние годы были достигнуты значительные результаты в получении классификаций таких алгебр. Научные исследование на международном уровне по таким важным направлениям математической науки, как «Алгебра и функциональный анализ», рассматриваются в качестве основной задачи фундаментальных исследований[2]. Исследования по теории разрешимых алгебр Лейбница играют важную роль при исполнении этого постановления.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан УП-2789 от 17 февраля 2017 года "О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности", ПП-4387 от 9 июля 2019 года "О мерах по дальнейшему развитию математического образования и науки, коренному совершенствованию деятельности Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Узбекистана " и № УП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан "Математика, механика и информатика".

Степень изученности проблемы. Еще в 1945 году Мальцев доказал, что разрешимая алгебра Ли однозначно определяется своим нильрадикалом. Далее, в 1963 году Мубаракзянов предложил конструктивный метод, основанный на свойствах нильрадикала и их ниль-независимых дифференцирований. С помощью этого метода получена классификация разрешимых алгебр Ли с абелевыми, гейзенберговскими, филиформными, квази-филиформными нильрадикалами. Известно, что классические результаты теории алгебр Ли (теорема Энгеля, теорема Ли и тот факт, что квадрат разрешимой алгебры вкладывается в его нильрадикал) продолжаются на случай алгебр Лейбница. Применение этих результатов для алгебр Лейбница позволило распространить метод Мубаракзянова на случай разрешимых алгебр Лейбница, то есть метод построения разрешимых алгебр Ли с помощью структуры нильрадикала и их специальных типов внешних дифференцирований, аналогичным образом распространяется на алгебры Лейбница. В случае алгебр Лейбница имеются описания комплексных разрешимых алгебр Лейбница с такими нильрадиками, как нуль-филиформные, прямая сумма нуль-филиформных, филиформные, естественным образом градуированные квази-филиформные алгебры и так далее.

Типичным примером про-разрешимой алгебры Ли является

---

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан № 292 “О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан” от 18 мая 2017 года.

неотрицательная часть алгебры Витта $W_{\geq 0}$. Легко видеть, что максимальный про-нильпотентный идеал алгебры $W_{\geq 0}$ является положительной частью алгебры Витта W_{+}. Более того, метод построения разрешимой конечномерной алгебры Ли с заданным нильрадикалом полностью согласован для этих бесконечномерных алгебр Ли. Отметим, что существуют и другие примеры про-разрешимых алгебр Ли, максимальный про-нильпотентный идеал которых является $\mathbb{N}$-градуированной алгеброй Ли максимального класса (бесконечномерной филиформной алгеброй Ли), для которых метод описания конечномерных разрешимых алгебр Ли с помощью ее нильрадикала полностью согласован. Следует отметить, что во всех упомянутых примерах дополняющее подпространство к максимальному про-нильпотентному идеалу про-разрешимой алгебры совпадает с числом образующих про-нильпотентного идеала.

Известно, что алгебры $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ являются положительными частями аффинных алгебр Каца-Муди $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(2)}$, соответственно. Они также известны своими приложениями в теории комбинаторных тождеств. Алгебры $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ являются представителями изоморфных классов естественным образом градуированных алгебр над полем нулевой характеристики, полученных Фиаловским и Миллионщиковым. Отметим, что проблема классификации градуированных алгебр Ли конечной ширины была выделена Зельмановым и Шалевым как очень важная и трудная. Класс положительно градуированных конечномерных алгебр Ли был классифицирован Миллионщиковым, в настоящее время получена полная классификация только класса шириной 3/2 в бесконечномерном случае.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательского учреждения, в котором выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования «Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в нелинейных динамических системах» + «Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в Евклидовом и псевдо-Евклидовом пространствах и ее приложения в механике» Института Математики (ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87, 2017-2019 гг.); «Группы когомологий полупростых и нильпотентных алгебр» Института Математики (ЁФА-Фтех-2018-77, 2018-2019 гг.).

Целью исследования является описание разрешимых алгебр Лейбница с заданным нильрадикалом, а также построение максимальных про-разрешимых алгебр Ли с максимальными про-нильпотентными идеалами ширины 3/2 и изучение их групп когомологий малых порядков.

Задачи исследования:

описание разрешимых алгебр Лейбница с заданными нильрадикалами;

описание максимальных разрешимых расширений алгебр Ли с заданными условиями на дополняющее подпространство к нильрадикалу;

изучение структуры максимальных про-разрешимых алгебр Ли с максимальным про-нильпотентным идеалом ширины 3/2.

Объектом исследования являются разрешимые алгебры Лейбница, про-разрешимые алгебры Ли, дифференцирования, группы когомологий.

Предметом исследования являются разрешимые алгебры Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины; максимальные разрешимые расширения нильпотентных алгебр Лейбница с условием на дополняющее подпространство к нильрадикалу; про-разрешимые алгебры Ли с заданными максимальными про-нильпотентными идеалами.

Методы исследования. В работе использованы неассоциативная теория алгебры, структурные и когомологические методы, а также методы бесконечномерной алгебры и методы теории инвариантов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

описаны разрешимые алгебры Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины;

классифицированы разрешимые алгебры Лейбница с размерностью дополняющего подпространства к нильрадикалу, равной числу порождающих нильрадикала, а также доказана полнота таких алгебр Лейбница;

получено описание максимальных про-разрешимых алгебр Лейбница с максимальным про-нильпотентным идеалом ширины 3/2;

описаны первые и вторые группы когомологий некоторых про-разрешимых алгебр Ли.

Практические результаты исследования. Результаты и методы, использованные в диссертации, могут быть применены при чтении специальных курсов для магистрантов и базовых докторантов для ВУЗов Республики Узбекистан. Кроме того, результаты диссертации, касающиеся описания разрешимых алгебр Лейбница с различными типами нильрадикалов, классификации разрешимых алгебр Лейбница с условием, что размерность дополняющего подпространства к нильрадикалу равна числу порождающих нильрадикалов, вычислению 2-х групп когомологий некоторых про-разрешимых алгебр Ли, позволяют проверить справедливость ряда гипотез относительно разрешимых алгебр Лейбница и про-разрешимых алгебр Ли.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием известных методов исследования других классов алгебр, а также строгостью математических рассуждений. Доказательства полученных результатов математически верны.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что результаты диссертации могут быть использованы для дальнейших исследований других многообразий алгебр. В частности, техника и методы, разработанные в данной диссертации, могут быть использованы для описания разрешимых алгебр Лейбница с другими классами нильрадикалов. Кроме того, классификация разрешимых алгебр Лейбница с условием, что размерность дополняющего подпространства к нильрадикалу равна числу порождающих нильрадикалов, может быть использована при доказательстве Гипотезы Снобля, полнота таких алгебр Лейбница будет способствовать доказательству полноты максимальных разрешимых расширений произвольных нильпотентных алгебр Лейбница.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты о классификации разрешимых алгебр Лейбница с ко-размерностью нильрадикала, равной числу порождающих нильрадикалов и о полноте таких алгебр были использованы в зарубежном проекте номер FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2 для описания дифференцирований специальных классов конечномерных разрешимых алгебр Лейбница (справка от 27 ноября 2020 года Университета Технологи МАРА, Малайзия). Данные научные результаты были также применены для установления когомологической жесткости некоторых разрешимых алгебр Лейбница;

результаты об описании разрешимых алгебр Ли с размерностью дополняющего подпространства к нильрадикалу, равной числу порождающих нильрадикалов, использованы в проекте ЁФА-Фтех-2018-79 для описания разрешимых алгебр Лейбница (справка Академии наук Республики Узбекистан от 3 декабря 2020 года, № 2 /1255-2719). Результатов диссертации были использованы при получении классификации разрешимых алгебр Ли с квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины;

результаты о классификации разрешимых алгебр Ли с ко-размерностью нильрадикалов, равной числу порождающих нильрадикалов, и их полнота, а также единственность таких алгебр используются в проекте ОТ-F4-31 для описания групп когомологий разрешимых алгебр Ли (справка Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 30 ноября 2020 года, № 89-03-4997). Эти результаты были использованы при описании групп когомологий первого и второго порядков для некоторых разрешимых алгебр Ли.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 2 международных и 3 республиканских научных конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, из них 8 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 1 опубликована в зарубежном журнале, 5 – в республиканских научных изданиях, 2 публикации www.arxiv.org и 5 тезисов докладов в материалах научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на десять параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 114 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертации, названной **«Разрешимые алгебры Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины»**, приведены необходимые понятия и вспомогательные результаты из теорий алгебр Ли и алгебр Лейбница. Описаны разрешимые алгебры Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины.

Определение 1. Алгебра G над полем F называется *алгеброй Ли*, если для любых элементов $x, y, z\in G$ выполняются следующие два тождества:

$[x, x] = 0$ – тождество антикоммутативности,

$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ – тождество Якоби,

где [-, -] – умножение в G.

Определение 2. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z\in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[,]$ – умножение в L.

Нетрудно видеть, что если в алгебре Лейбница потребовать выполнение антикоммутативного тождества, то тождества Лейбница и Якоби совпадают. Следовательно, алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли. Последние достижения в области алгебр Лейбница свидетельствуют о том, что из всех известных обобщений алгебр Ли данные алгебры являются наиболее естественными и близкими к алгебрам Ли.

Дальнейшее изложение определений и понятий будет приведено для алгебр Лейбница, которые также (если не оговорено отдельно) справедливы для алгебр Ли.

Для произвольной алгебры Лейбница L определим ряды:

$$L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}]; \qquad L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k, L^1], \qquad k \geq 1.$$

Определение 3. Алгебра Лейбница L называется *разрешимой* (соответственно, *нильпотентной*), если существует $s\in N$ такое, что $L^{[s]}=0$ (соответственно, $L^s=0$).

Максимальный нильпотентный идеал алгебры Лейбница L называется *нильрадикалом*.

Введём следующие обозначения:

- $Ann_r(L)=\{x\in L \mid [L, x]=0\}$ – правый аннулятор алгебры L;
- $Center(L)=\{x\in L \mid [x, L]=[L, x]=0\}$ – центр алгебры L;

Определение 4. Линейное отображение $d\in End(L)$ называется *дифференцированием алгебры* L, если выполняется равенство:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)] \text{ для любых } x, y\in L.$$

Справедливость тождества Лейбница влечет тот факт, что оператор правого умножения R_x на элемент x алгебры является дифференцированием алгебры. Дифференцирования такого вида называются *внутренними*.

Определение 5. Алгебра Лейбница L называется *квази-филиформной*, если $L^{n-2}\neq 0$ и $L^{n-1}=0$, где $n= dimL$.

Пусть $L-\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Лейбница с конечным числом ненулевых градуированнных подпространств, т.е. $L=\oplus_{i\in Z}V_i$, где $[V_i,V_j]\subseteq V_{i+j}$ для любых $i, j\in \mathbb{Z}$.

Будем говорить, что нильпотентная алгебра Лейбница L *допускает связное градуирование*, если $L=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus\ldots\oplus V_{k_t}$, где $V_i\neq 0$ для всех $i(k_1\leq i\leq k_t)$.

Число $len(L)=k_t-k_1+1$ будем называть *длиной алгебры Лейбница L*.

Определение 6. Алгебра Лейбница L называется *алгеброй максимальной длины*, если $l(L) = dimL$.

Камачо Л.М. и другими была получена классификация квази-филиформных не лиевых алгебр Лейбница максимальной длины.

Теорема 1. Произвольная n-мерная ($n \geq 6$) квази-филиформная не лиевая алгебра Лейбница максимальной длины изоморфна одной из следующих попарно не изоморфных алгебр:

$$M^{1,\delta}: \begin{cases} [e_1,e_1]=e_n, & [e_{n-1},e_1]=e_2, \quad [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 2\le i\le n-3, \\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\delta e_4, & [e_i,e_{n-1}]=\delta e_{i+3}, \quad \delta\in\{0,1\}, \quad 2\le i\le n-5, \end{cases}$$

$$M^{2\lambda}: \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-3, \\ [e_1,e_{n-1}]=\lambda e_n, & \lambda\in\mathbb{C}, \end{cases}$$

$$M^{3,\alpha}: \begin{cases} [e_1,e_1]=e_2, & [e_3,e_3]=\alpha e_6, \\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & [e_1,e_i]=-e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-1, \end{cases}$$

$$M^4: \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1, \\ [e_1,e_{n-1}]=e_n, \end{cases}$$

где $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ базис алгебры; если в алгебре $M^{3,\alpha}$ $n> 6$, то $\alpha=0$, и если $n = 6$, то $\alpha\in\{0,1\}$.

Для семейства разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом N и размерностью дополняющего подпространства, равной s, мы будем использовать обозначение $R(N,s)$.

Приведем гипотезу Снобля о разрешимых алгебрах максимальной размерности с заданным нильрадикалом. (Šnobl L., On the structure of maximal solvable extensions and of Levi extensions of nilpotent Lie algebras, J. Phys. A 43 (2010), 505202 (17 pp).)

Гипотеза. Пусть N – комплексная нильпотентная (не характеристически нильпотентная) алгебра Ли. Пусть L, L' – разрешимые алгебры Ли с нильрадикалом N максимальной размерности, в том смысле, что нет таких разрешимых алгебр Ли больших размерностей. Тогда алгебры L и L' изоморны.

Аффинные алгебры Каца-Муди − один из наиболее хорошо изученных классов бесконечномерных алгебр Ли. Проанализировав структуру разрешимых конечномерных алгебр Ли с заданным нильрадикалом максимальной ко-размерности, мы задаемся вопросом - может ли эта структура быть расширена на бесконечномерный случай? Наиболее подходящими претендентами для таких аналогов являются так называемые про-разрешимые и про-нильпотентные алгебры Ли.

Определение 7. Алгебра Ли L называется *про-разрешимой* (соответственно, *про-нильпотентной*), если $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^{[i]}=0$ и $\dim L/L^{[i]}<\infty$ (соответственно, $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^{i}=0$ и $\dim L/L^{i}<\infty$) для любого $i\ge 1$.

В работе Миллионщикова изучены следующие про-нильпотентные алгебры

Ли:

$\boldsymbol{m}_0$: $[e_i, e_1] = e_{i+1},\ i \geq 2.$

$\boldsymbol{m}_2$: $[e_1, e_i] = e_{i+1},\ i \geq 2,\quad [e_2, e_j] = e_{j+2},\ j \geq 3,$

$$\mathbf{n}_1 :\quad [e_i, e_j] = c_{i,j} e_{i+j},\quad i, j \in \mathbb{N},\quad c_{i,j} = \begin{cases} 1, & \textit{если}\quad i - j \equiv 1\, mod\, 3, \\ 0, & \textit{если}\quad i - j \equiv 0\, mod\, 3, \\ -1, & \textit{если}\quad i - j \equiv -1\, mod\, 3. \end{cases}$$

$$\mathbf{n}_2 :\quad [f_q, f_l] = d_{q,l} f_{q+l},\quad q, l \in \mathbb{N},$$

с таблицей умножения в базисе $\{f_{8i+1}, f_{8i+2}, f_{8i+3}, f_{8i+4}, f_{8i+5}, f_{8i+6}, f_{8i+7}, f_{8i+8}\}$ $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

	f_{8j}	f_{8j+1}	f_{8j+2}	f_{8j+3}	f_{8j+4}	f_{8j+5}	f_{8j+6}	f_{8j+7}
f_{8i}	0	1	−2	−1	0	1	2	−1
f_{8i+1}	−1	0	1	1	−3	−2	0	1
f_{8i+2}	2	−1	0	0	0	1	−1	0
f_{8i+3}	1	−1	0	0	3	−1	1	−2
f_{8i+4}	0	3	0	−3	0	3	0	−3
f_{8i+5}	−1	2	−1	1	−3	0	0	1
f_{8i+6}	−2	0	1	−1	0	0	0	1
f_{8i+7}	1	−1	0	2	3	−1	1	0

,

где i, j не нулевые целые числа.

Для алгебры Ли L введем обозначение $C^n(L, L) := Hom(\wedge^n L, L)$, при $n \geq 0$.

Пусть d^n: $C^n(L, L) \to C^{n+1}(L, L)$ – линейное отображение, определенное следующим образом:

$$(d^n f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) := \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} [x_i, f(x_1, \ldots, \tilde{x}_i, \ldots, x_{n+1})] +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_j, \ldots, x_{n+1}),$$

где $f \in C^n(L, L)$, $x_i \in L$ и символ $\tilde{x}$ означает отсутствие элемента x. Гомоморфизмы d^n, $n \geq 0$, удовлетворяют свойству $d^{n+1} \circ d^n = 0$.

Элементы ядра d^n (обозначим через $Z^n(L, L) := Ker d^n$) назовем n-коциклами, а элементы образа d^{n-1} (обозначим через $B^n(L, L) := \mathrm{Im} d^{n-1}$) назовем n-кограницами. Очевидно, что $B^n(L, L) \subseteq Z^n(L, L)$. Фактор-пространство

$$H^n(L, L) := Z^n(L, L) / B^n(L, L)$$

будем называть *пространством когомологий алгебры L степени n*.

Определение 8. Алгебра Ли называется *полной*, если её центр и первая группа когомологий тривиальны. Другими словами, алгебра Ли называется полной, если ее центр тривиален и любое дифференцирование внутреннее.

В параграфе 1.2 описаны разрешимые алгебры Лейбница, нильрадикал которых является квази-филиформной алгеброй Лейбница размерности более 5 и допускающей градуировку максимальной длины.

Теорема 2. В произвольной алгебре из семейства $R(M^{1,0},1)$ существует базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, x\}$ такой, что таблица умножения алгебры в этом базисе имеет один из следующих типов:

$$R_1(\alpha_2,\ldots,\alpha_n): \begin{cases} M^{1,0}, & \\ [e_1,x]=\alpha_2 e_n, & [x,x]=\alpha_n e_n, \\ [e_i,x]=e_i+\sum\limits_{t=i+1}^{n-1}\alpha_{t-i+2}e_t, & 2\le i\le n-1, \end{cases}$$

$$R_2(\beta): \quad \begin{cases} M^{1,0}, & \\ [e_1,x]=e_1, & [e_i,\ x]=(i-2+\beta)e_i,\ 2\le i\le n-1, \\ [e_n,x]=2e_{n\text{-}}, & [x,e_1]=-e_1, \end{cases}$$

$$R_3(\alpha): \quad \begin{cases} M^{1,0}, & & \\ [e_1,x]=e_1, & [e_2,x]=2e_2+\alpha e_n, & [x,e_1]=-e_1 \\ [e_n,x]=2e_n, & [e_i,x]=ie_i, & 3\le i\le n-1, \end{cases}$$

$$R_4(\alpha): \quad \begin{cases} M^{1,0}, & & \\ [e_1,x]=e_1+\alpha e_{n-2}, & [x,x]=-\alpha e_{n-3}, & [x,e_1]=-e_1, \\ [e_n,x]=\alpha e_{n-1}+2e_n, & [e_i,x]=(i+3-n)e_i, & 2\le i\le n-1, \end{cases}$$

$$R_5(\alpha): \quad \begin{cases} M^{1,0}, & \\ [e_1,x]=e_1+\alpha e_{n-1}, & [e_i,x]=(i+2-n)e_i, \quad 2\le i\le n, \\ [x,e_1]=-e_1, & [x,x]=-\alpha e_{n-2}. \end{cases}$$

$$R_6(\alpha): \quad \begin{cases} M^{1,0}, & & \\ [e_1,x]=e_1, & [x,e_1]=-e_1, & [e_n,x]=2e_n, \\ [x,x]=\alpha e_{n-1}, & [e_i,x]=(i+1-n)e_i, & 2\le i\le n-1, \end{cases}$$

$$R_7(\alpha): \quad \begin{cases} M^{1,0}, & \\ [e_1,x]\ =e_{1,} & [e_i,x]=(i-1)e_i, \quad 2\le i\le n-1, \\ [e_n,x]=2e_n, & [x,e_1]=-e_1+\alpha e_2, \end{cases}$$

где $\alpha\ne 0,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n\in\mathbb{C}.$

Приведем классификацию разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикал которых является алгеброй $M^{1,0}$ и размерность дополняющего пространства к нильрадикалу равна двум.

Теорема 3. Произвольная алгебра семейства $R(M^{1,0},2)$ изоморфна следующей алгебре:

$$[e_1,e_1]=e_n,\qquad [e_i,e_1]=e_{i+1},\qquad 2\le i\le n-2,$$
$$[e_1,x_1]=e_1,\qquad [e_i,x_1]=(i-2)e_i,\quad 3\le i\le n-1,$$
$$[e_n,x_1]=2e_n,\quad [x_1,e_1]=-e_1,\qquad [x_2,e_i]=-e_i,\qquad 2\le i\le n-1.$$

Приведем результат, указывающий на отсутствие разрешимых алгебр с нильрадикалом $M^{1,1}$.

Теорема 4. Не существует разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом$M^{1,1}$.

Теорема 5. Произвольная алгебра из семейства $R(M^{2,\lambda},1)$ изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$W_1:\quad \begin{cases} M^{2,-1}, & [e_1,x]=e_1+e_n, \quad [e_i,x]=ie_i,\quad 2\le i\le n-2,\\ [e_n,x]=e_n, & [x,e_1]=-e_1, \quad [x,e_n]=-e_n,\end{cases}$$

$$W_2:\quad \begin{cases} M^{2,0}, & [e_1,x]=e_1+e_n, \quad [x,e_1]=-e_1,\\ [e_n,x]=e_n, & [x,x]=-e_{n-1}, \quad [e_i,x]=ie_i,\quad 2\le i\le n-2,\end{cases}$$

$$W_3:\quad \begin{cases} M^{2,\lambda}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2,\\ [x,e_1]=-e_1, & [e_n,x]=(1+\lambda)e_n,\\ [e_{n-1},x]=\lambda e_{n-1}, & [x,e_{n-1}]=-\lambda e_{n-1}, \quad \lambda\notin\{-1,0,1\},\end{cases}$$

$$W_4:\quad \begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2,\\ [x,e_1]=-e_1, & [e_{n-1},x]=-e_{n-1}, \quad [x,x]=e_n,\end{cases}$$

$$W_5:\quad \begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2,\\ [x,e_1]=-e_1, & [e_{n-1},x]=e_{n-2}+(n-2)e_{n-1}, \quad [e_n,x]=(n-1)e_n,\end{cases}$$

$$W_6:\quad \begin{cases} M^{2,\lambda}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 3\le i\le n-2,\\ [e_n,x]=2e_n, & [e_1,x]=e_1+e_{n-1}, \quad [x,e_1]=-e_1-e_{n-1},\\ [e_{n-1},x]=e_{n-1}, & [x,e_n]=(\lambda-1)e_n,\\ [x,e_{n-1}]=-e_{n-1}, & [e_2,x]=2e_2+(1+\lambda)e_n, \quad \lambda\in\{-1,1\},\end{cases}$$

$$W_7:\quad \begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2,\\ [x,e_1]=-e_1, & [e_{n-1},x]=e_{n-3}+(n-3)e_{n-1}, \quad [e_n,x]=e_{n-2}+(n-2)e_n,\end{cases}$$

$$W_8(\alpha):\quad \begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2,\\ [x,e_1]=-e_1, & [e_{n-1},x]=\alpha e_{n-1}, \quad [e_n,x]=(1+\alpha)e_n,\end{cases}$$

$$W_9(\alpha):\quad \begin{cases} M^{2,-1}, & [x,e_1]=-e_1, \quad [x,e_{n-1}]=e_{n-1},\\ [x,x]=e_n, & [e_{n-1},x]=-e_{n-1}, \quad [e_i,x]=ie_i,\quad 1\le i\le n-2,\end{cases}$$

$$W_{10}(\alpha):\quad \begin{cases} M^{2,-1}, & [e_i,x]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2,\\ [e_{n-1},x]=\alpha e_{n-1}, & [e_n,x]=(1+\alpha)e_n,\\ [x,e_1]=-e_1, & [x,e_{n-1}]=-\alpha e_{n-1}, \quad [x,e_n]=-(\alpha+1)e_n,\end{cases}$$

$$W_{11}\left(\alpha_2,...,\alpha_n\right):\begin{cases} M^{2,-1}, & [e_i,x]=\sum\limits_{t=i+1}^{n-2}\alpha_{t-i+1}e_t, \qquad 1\le i\le n-3,\\ [e_n,x]=e_n, & [e_{n-1},x]=e_{n-1}+\alpha_{n-1}e_n,\\ [x,e_n]=-e_n, & [x,e_{n-1}]=-e_{n-1}-\alpha_{n-1}e_n, \qquad [x,x]=\alpha_n e_{n-2}, \end{cases}$$

$$W_{12}\left(\alpha_2,...,\alpha_n\right):\begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x]=\sum\limits_{t=i+1}^{n-2}\alpha_{t-i+1}e_t, \qquad 1\le i\le n-3,\\ [e_n,x]=e_n, & [e_{n-1},x]=e_{n-1}+\alpha_{n-1}e_n, \qquad [x,x]=\alpha_n e_{n-2}, \end{cases}$$

где α_i, $\alpha\in\mathbb{C}$ и первый не нулевой параметр $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ в алгебрах семейств $W_6(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $W_{12}(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ можно масштабировать до 1.

Теорема 6. Произвольная алгебра из семейства $R(M^{2,\lambda}, 2)$ изоморфна одной из следующих неизоморфных алгебр:

$$R\left(M^{2,0},2\right):\begin{cases} M^{2,0}, & [e_i,x_1]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2,\\ [e_n,x_1]=e_n, & [x_1,e_1]=-e_1, \quad [e_{n-1},x_2]=e_{n-1}, \quad [e_n,x_2]=e_n, \end{cases}$$

$$R\left(M^{2,-1},2\right):\begin{cases} M^{2,-1}, & [e_i,x_1]=ie_i, \quad 1\le i\le n-2,\\ [e_1,x_1]=-e_1, & [x_1,e_n]=-e_n, \quad [e_{n-1},x_2]=e_{n-1}, \quad [e_n,x_2]=e_n. \end{cases}$$

Напомним, что классификация разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалами $M^{3,0}$ и M^4 получена А.Шабанской и Ж.К.Адашевым, соответсвенно.

В параграфах 1.3 и 1.4 приведены классификации разрешимых алгебр Лейбница с 5-мерным и 4-мерным квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины, соответственно.

Во второй главе диссертации, названной «**Разрешимые алгебры Лейбница с нильрадикалом ко-размерности, равной числу порождающих нильрадикалов**», описываются разрешимые алгебры Ли и алгебры Лейбница с размерностью дополняющего подпространства к нильрадикалу, равной числу порождающих нильрадикалов. Учитывая единственность таких алгебр Ли, данная классификация дает положительное решение Гипотезы Снобля в случае, когда коразмерность нильрадикала совпадает с числом порождающих нильрадикалов.

Теорема 7. Пусть $R=N\oplus Q$ – разрешимая алгебра Ли такая, что $dimQ=dimN/N^2=k$. Тогда в R допускается базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ такой, что таблица умножения в R имеет следующий вид:

$$\begin{cases} [e_i,e_j]=\sum\limits_{t=k+1}^{n}\gamma_{i,j}^t e_t, & 1\le i,j\le n,\\ [e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k,\\ [e_i,x_j]=\alpha_{i,j}e_i, & k+1\le i\le n, 1\le j\le k, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\alpha_{i,j}$ – количество вхождений базисного элемента $e_j, j=1,\dots k$, в формирование элемента e_i, $i= k+1,\dots, n$.

Замечание 1. Следует отметить, что в Теореме 16 структурные константы $\alpha_{i,j}$ разрешимой алгебры Ли однозначно определяются структурными константами нильрадикала. Таким образом, Теорема 16 дает положительное решение **Гипотезы Снобля** в случае, когда $dimQ=dimN/N^2$.

Предложение 1. Пусть $R = N \oplus Q$ – разрешимая алгебра Лейбница такая, что $dimQ = dim(N/N^2)$. Тогда $Center(R) =0$.

Теорема 8. Пусть $R = N \oplus Q$ –разрешимая алгебра Лейбница такая, что $dimQ = dim(N/N^2) = k$. Тогда в R существует базис $\{e_1, e_2, \dots , e_n, x_1, x_2, \dots , x_k\}$ такой, что таблица умножения в R имеет следующий вид:

$$\begin{cases} [e_i,e_j] = \sum\limits_{t=k+1}^{n} \gamma_{i,j}^t e_t, & 1\le i, j \le n, \\ [e_i,x_i] = e_i, & 1\le i \le k, \\ [x_i,e_i] = (b_i-1)e_i, \quad b_i \in \{0,1\}, & 1\le i \le k, \\ [e_i,x_j] = \alpha_{i,j}e_i, & k+1\le i \le n,\ 1\le j \le k, \\ [x_j,e_i] = \sum\limits_{t=1}^{q} \beta_{j,i}^{i_t} e_t, & k+1\le i \le n,\ 1\le j \le k, \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha_{i,j}$ – количество вхождений базисного элемента e_j , $j =1,\dots,k$, в формирование элемента e_i, $i= k+1,\dots, n$.

Замечание 2.

(iv) Если среди не порождающих базисных элементов нильрадикала N не существует элементов такой же структуры, что и e_i, то
$$[x_j, e_i] = \beta_{j,i}e_i,\ k +1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k;$$

(v) Из (2) заключаем, что параметры $\alpha_{i,j}$ однозначно определяются структурой нильрадикала N;

(vi) Для любого $i (1 \le i \le n)$ существует такое j $(1 \le j \le k)$, что $\alpha_{i,j} \neq 0$.

Теорема 9. Пусть $R = N \oplus Q$ –разрешимая алгебра Лейбница такая, что $dimQ = dim\ (N/N^2)=k$ и N – неразложимая алгебра Ли. Тогда R есть алгебра Ли с таблицей умножения (1).

Параграф 2.3 диссертации посвящен доказательству полноты разрешимых алгебр Ли и алгебр Лейбница с вышеупомянутыми ограничениями на размерность дополняющего подпространства к нильрадикалу.

Теорема 10. Пусть $R=N\oplus Q$ – разрешимая алгебра Ли такая, что $dimQ=dim(N/N^2)$. Тогда R – полная алгебра.

Предложение 2. Пусть $R = N\oplus Q$ – разрешимая алгебра Лейбница такая, что $dimQ = dim(N/N^2)$. Тогда
$$I = Ann_r(R),$$
где $I = span\{[x, x] , x\in R\}$.

Теорема 11. Пусть $R=N\oplus Q$ – разрешимая алгебра Лейбница такая, что $dimQ=dim\ (N/N^2)$. Тогда R – полная алгебра Лейбница.

В третьей главе диссертации, названной **«Описание про-разрешимых**

алгебр ли с заданными максимальными про-нильпотентными идеалами», получено описание про-разрешимых алгебр Ли, имеющих в качестве максимального про-нильпотентного идеала одну из следующих алгебр: $\boldsymbol{m}_0$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Описаны первые и вторые группы когомологий с коэффициентами в регулярном модуле для некоторых про-разрешимых алгебр с максимальным про-нильпотентным идеалом N из множества $\{\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\}$.

Теорема 12. *Пусть* M_0 – максимальная про-разрешимая алгебра Ли с максимальным про-нильпотентным идеалом $\boldsymbol{m}_0$. Тогда существует базис $\{x, y, e_1, e_2, \ldots\}$ алгебры M_0, в котором таблица умножения алгебры имеет следующий вид:

$$M_0(\beta): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad i \geq 2, & [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_i] = (1-i)e_i - \sum\limits_{k=3}^{t} \beta_k e_{t+i-2}, & [y, e_i] = -e_i, \quad i \geq 2, \end{cases}$$

где $\beta = (\beta_3, \beta_4, \ldots, \beta_t)$.

Теорема 13. Пусть M_2 – максимальная про-разрешимая алгебра Ли с максимальным про-нильпотентным идеалом $\boldsymbol{m}_2$. Тогда существует базис $\{x, e_1, e_2, \ldots\}$ алгебры M_2, в котором таблица умножения алгебры имеет вид:

$$M_2(\gamma): \begin{cases} [e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad i \geq 2, & [e_2, e_j] = e_{j+2}, \qquad j \geq 3, \\ [x, e_1] = -e_1, & [x, e_i] = -ie_i - \sum\limits_{j=4}^{n} \gamma_j e_{j+i-2}, \quad i \geq 2, \end{cases}$$

где $\gamma = (\gamma_4, \gamma_5, \ldots, \gamma_n)$.

Рассмотрим следующие про-разрешимые алгебры Ли $M_0(0)$ и $M_2(0)$ соответственно.

$$\tilde{M}_0: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad i \geq 2, & [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_i] = (1-i)e_i & [y, e_i] = -e_i, \quad i \geq 2. \end{cases}$$

$$\tilde{M}_2: \begin{cases} [e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad i \geq 2, & [e_2, e_j] = e_{j+2}, \quad j \geq 3, \\ [x, e_1] = -e_1, & [x, e_i] = -ie_i \quad i \geq 2. \end{cases}$$

Теорема 14. Про-разрешимые алгебры Ли $\tilde{M}_0$ и $\tilde{M}_2$ *являются полными.*

Теперь мы опишем вторые группы когомологий алгебр $\tilde{M}_0$ и $\tilde{M}_2$.

Теорема 15. $H^2(\tilde{M}_0, \tilde{M}_0) = \{0\}, \quad H^2(\tilde{M}_2, \tilde{M}_2) \neq \{0\}.$

В параграфе 3.2 описаны максимальные про-разрешимые алгебры Ли, у которых максимальные про-нильпотентные идеалы являются либо $\boldsymbol{n}_1$, либо $\boldsymbol{n}_2$.

Теорема 16. Пусть M максимальная про-разрешимая алгебра Ли с максимальным про-нильпотентным идеалом $\boldsymbol{n}_1$. Тогда существует базис $\{x, y, e_1, e_2, \ldots\}$ алгебры M такой, что таблица умножения алгебры в этом базисе имеет вид:

$$R_{n_1}(\alpha):\begin{cases} [e_{3i-2},x]=ie_{3i-2}+\sum\limits_{k=2}^{t}(i-1)\alpha_k e_{3k+3i-5}, & [e_{3i-1},x]=(i-1)e_{3i-1}+\sum\limits_{k=2}^{t}i\alpha_k e_{3k+3i-4},\\ [e_{3i},x] \ =ie_{3i}+\sum\limits_{k=2}^{t}i\alpha_k e_{3k+3i-3}, & [e_{3i-2},y]=-e_{3i-2}+\sum\limits_{k=2}^{t}\alpha_k e_{3k+3i-5},\\ [e_{3i-1},y] \ =e_{3i-1}-\sum\limits_{k=2}^{t}\alpha_k e_{3k+3i-4}, & [x,y] \ =\sum\limits_{k=2}^{t}(1-k)\alpha_k e_{3k}, \end{cases}$$

где $\alpha_{3i-2}\alpha_{3k-2}=0,\quad 2\le i,k\le t,\ \ 3k+3i-4\ge 3t,\ \ i,t\in\mathbb{N},\quad \alpha=\{\alpha_2,\ldots,\alpha_t\}$.

Аналогично, как в Теореме 16, описываются максимальные про-разрешимые алгебры Ли с максимальным про-нильпотентным идеалом $\boldsymbol{n}_2$. В этом случае мы также рассмотрим только случай $dimQ_2=2$.

Теорема 17. Пусть M максимальная про-разрешимая алгебра Ли с максимальным про-нильпотентным идеалом $\boldsymbol{n}_2$. Тогда существует базис $\{x, y, f_1, f_2, \ldots\}$ алгебры M такой, что таблица умножения в этом базисе имеет следующий вид:

$$R_{n_2}(\beta):=\begin{cases} [f_{8i+1},x]=f_{8i+1}, & [f_{8i+1},y]=2if_{8i+1}+\sum\limits_{k=1}^{t}2i\beta_k f_{8i+8k+1},\\ [f_{8i+2},x]=-2f_{8i+2}, & [f_{8i+2},y]=(2i+1)f_{8i+2}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+1)\beta_k f_{8i+8k+2},\\ [f_{8i+3},x]=-f_{8i+3}, & [f_{8i+3},y]=(2i+1)f_{8i+3}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+1)\beta_k f_{8i+8k+3},\\ [f_{8i+5},x]=f_{8i+5}, & [f_{8i+4},y]=(2i+1)f_{8i+4}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+1)\beta_k f_{8i+8k+4},\\ [f_{8i+6},x]=2f_{8i+6}, & [f_{8i+5},y]=(2i+1)f_{8i+5}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+1)\beta_k f_{8i+8k+5},\\ [f_{8i+7},x]=-f_{8i+7}, & [f_{8i+6},y]=(2i+1)f_{8i+6}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+1)\beta_k f_{8i+8k+6},\\ & [f_{8i+7},y]=(2i+2)f_{8i+7}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+2)\beta_k f_{8i+8k+7},\\ & [f_{8i+8},y]=(2i+2)f_{8i+8}+\sum\limits_{k=1}^{t}(2i+2)\beta_k f_{8i+8k+8}, \end{cases}$$

где $i,t\in\mathbb{N},\quad \beta=\{\beta_1,\ldots,\beta_t\}$.

В параграфе 3.3 доказывается тривиальность второй группы когомологий с коэффициентами в регулярном модуле про-разрешимых алгебр Ли $R_{\mathbf{n}_1}(0)$ и $R_{\mathbf{n}_2}(0)$.

Теорема 18. Про-разрешимые алгебры Ли $R_{\mathbf{n}_1}(0)$ и $R_{\mathbf{n}_2}(0)$ *являются полными.*

Теорема 19. $H^2(R_{\mathbf{n}_1}(0),R_{\mathbf{n}_1}(0))=\{0\},\ H^2(R_{\mathbf{n}_2}(0),R_{\mathbf{n}_2}(0))=\{0\}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена изучению конечномерных разрешимых алгебр Лейбница и про-разрешимых алгебр Ли.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Получена классификация разрешимых алгебр Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины.
2. Описаны разрешимые алгебры Ли с нильрадикалом ко-размерности, равной числу порождающих нильрадикалов.
3. Описана структура разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом ко-размерности, равной числу порождающих нильрадикалов.
4. Доказана полнота разрешимых алгебр Ли и алгебр Лейбница с нильрадикалом ко-размерности, равной числу порождающих нильрадикалов.
5. Дано описание про-разрешимых алгебр Ли, имеющих в качестве максимального про-нильпотентного идеала одну из следующих алгебр: $\boldsymbol{m}_0$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, а также доказана тривиальность первой группы когомологий с коэффициентами в регулярном модуле некоторых про-разрешимых алгебр Ли.
6. Описаны вторые группы когомологий с коэффициентами в регулярном модуле для некоторых про-разрешимых алгебр с максимальным про-нильпотентым идеалом N из множества $\{\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\}$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ABDURASULOV KOBILJON KOMILJON UGLI

SOLVABLE LEIBNIZ ALGEBRAS WITH RESTRICTIONS ON THE COMPLEMENTARY SPACE TO THE NILRADICAL

01.01.06 – Algebra

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM229.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Ayupov Shavkat Abdullaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, academic
Official opponents:	**Khudoyberdiev Abror Khakimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Kurbanbaev Tuuelbay Kadirbaevich Doctor of Philosophy (PhD) physical and mathematical sciences
Leading organization:	**Andijan state University**

Defense will take place "7" January 2021 at 9:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered № 109). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «29» December 2020 year
(Mailing report № 2 on «29» December 2020 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

A.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

B.A. Omirov
Chairman of the scientific seminar
at the Scientific Council for the
award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is to describe solvable Leibniz algebras with a given nilradical, as well as to construct maximal pro-solvable Lie algebras with maximal pro-nilpotent ideals of width 3/2 and to study their cohomology groups in low degrees.

The object of the research work is solvable Leibniz algebras, pro-solvable Lie algebras, pro-nilpotent Lie algebras, derivations, cohomology groups.

Scientific novelty of the research work is as follows:

solvable Leibniz algebras with quasi-filiform nilradicals of maximum length are described;

solvable Leibniz algebras with the dimension of the complementary subspace to the nilradical equal to the number of generators of the nilradical are classified;

the completeness of solvable Leibniz algebras with codimension of the nilradical equal to the number of generators of the nilradical is proved;

a description of maximal pro-solvable Leibniz algebras with maximal pro-nilpotent ideal of width 3/2 is obtained;

the first and second cohomology groups of some pro-solvable Lie algebras are described.

Implementation of the research results. The results of the dissertation are used in the following scientific projects:

results on the completeness of solvable Leibniz algebras with codimension of the nilradical equal to the number of generators of the nilradical are used in a foreign project under the number FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2, to describe the algebras of derivations of certain classes of finite-dimensional solvable Leibniz algebras (Reference from November 27, 2020, Universiti Technologi MARA, Malaysia). Scientific results were applied to solve the problems of cohomological rigidity of some solvable Leibniz algebras;

results on the classification of solvable Lie algebras with maximal complementary space of nilradical and their completeness are used in the project YOFA-FTEX-2018-79, to describe solvable Leibniz algebras (reference from the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated December 3, 2020, № 2/1255-2719). Using these results, a classification of solvable Lie algebras with quasi-filiform nilradicals of maximum length are described;

results on the classification of solvable Leibniz algebras with codimension of the nilradical equal to the number of generators of the nilradical and their completeness, as well as the conclusion about the uniqueness of such algebra are used in the project OT-F4-31, to classify the cohomology groups of solvable Lie algebras (reference from the Ministry of Higher and Secondary Special Education of the Republic of Uzbekistan dated November 30, 2020, № 89-03-4997). These results were used to classify the first and second order cohomological spaces of some solvable Leibniz algebras and to obtain their triviality.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 114 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Abdurasulov K.K., Adashev J.Q., Casas J.M., Omirov B.A., Solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length // Communications in Algebra, 2019, 47 (4), p.1578-1594. (№3. Scopus IF=0.656)
2. Абдурасулов К.К., Солижанова Г.О., Максимальные про-разрешимые алгебры Ли с максимальными положительно градуированными идеалами ширины 3/2 // Бюллетень Института математики, Узбекистан, 2020, №-5. С. 25-32. (01.00.00; №17).
3. Abdurasulov K.K., Maximal solvable extension of nilpotent Leibniz algebras // DAN RUz. 2019, N. 5, pp. 3-8. (01.00.00; №7).
4. Abdurasulov K.K., Khalkulova Kh.A., Solvable Lie algebras with maximal dimension of complementary space to nilradical. UzbekMathematicalJournal. vol. 1, 2018. p. 90-98.(01.00.00; №6).
5. Абдурасулов К.К., Халкулова Х.А., Разрешимые алгебры Лейбница с пятимерным квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины // Вестник NUUz, 2017, p. 58-66. (01.00.00; №8).
6. Абдурасулов К.К., Комплексные разрешимые алгебры Лейбница с четырехмерным квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины // УзМЖ., 2017, N. 3, p.42-52.(01.00.00; №6).

II бўлим (II часть; part II)

7. Abdurasulov K.K., Omirov B.A., Solijanova G.O., On pro-solvable Lie algebras with maximal pro-nilpotent ideals $\mathbf{m}_0$ and $\mathbf{m}_2$. arXiv:2001.06621.
8. Abdurasulov K.K., Rakhimov I.S., Solijanova G.O., On derivations and low-dimensional (co)homology groups of pro-sovable Lie algebras associated with $\mathbf{n}_1$ and $\mathbf{n}_2$. arXiv:2012.10178.
9. Abdurasulov K.K., Solijanova G.O., The description of pro-solvable Lie algebras with maximal pro-nilpotent ideals m_0 and m_2. Computational models and technologies, Uzbekiston-Malaysia international online conference. August 24-25, 2020, pp 115-116.
10. Abdurasulov K.K., Maximal solvable extension of Leibniz algebras, Tahlilning dolzarb muammolari va tatbiqlari. Qarshi, 4-5 oktyabr, 2019 yil. pp 227-228.
11. Abdurasulov K.K., Bosimova M., Linear integrable deformation of some solvable Lie algebras. Modern problems of geometry and topology and its applications. 21-23 November 2019, Tashkent, Uzbekistan. pp 13-15.
12. Abdurasulov K.K., Khalkulova Kh.A., Sattarov A.M., Solvable Leibniz algebras whose niradical is a five-dimensional quasi-filiform Leibniz algebra

of maximum length. "The second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics". Abstracts. Urgench 8-12 August 2017. -p 10.

13. Khalkulova Kh.A., Sattarov A.M., Abdurasulov K.K., Classification of a solvable algebra whose nilradical is a quasi-filiform Lie algebra of maximum length. "The life and work of academician Toshmuhammad Niyazovich Kori-Niyazi" Abstracts of the conference reports with the participation of foreign scientists. Tashkent, 7-8 September 2017 . -C. 89-91.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2020 йил 23 декабрда таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди 28.12.2020. Ҳажми 2,75 босма табоқ.
Бичими 60×84 1/16. Адади 50 нусха.