V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

TUG‘YONOV ZOHID TOLIBOVICH

NOARXIMED NORMALANGAN MAYDONLAR USTIDA DAVRIY O‘LCHOVLAR QURISH

01.01.01 – Matematik analiz
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent–2023

UO‘K: 517.98

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

MATEMATIKA INSTITUTI

TUG'YONOV ZOHID TOLIBOVICH

NOARXIMED NORMALANGAN MAYDONLAR USTIDA DAVRIY O'LCHOVLAR QURISH

**01.01.01 – Matematik analiz
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Toshkent–2023

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy Attestatsiya komissiyasida B2023.1.PhD/FM834 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www. kengash.mathinst.uz) va "ZiyoNet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Ayupov Shavkat Abdullayevich** fizika-matematika fanlari doktori, akademik
Rasmiy opponentlar:	**Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Sattarov Iskandar Abu-aliyevich fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori
Yetakchi tashkilot:	**O'zbekiston Milliy universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023-yil " 25 " aprel soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (158-raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil " 11 " aprel kuni tarqatildi.
(2023-yil " 11 " apreldagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

U.A.Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

J.K.Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

U.U.Jamilov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash huzuridagi Ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy hamda amaliy tadqiqotlar aksariyat hollarda kvant mexanikasining noarximed modellarini tadqiq qilishni taqozo etadi. p-Adik integrallash nazariyasi noarximed analizning juda muhim qismlaridandir. Integrallash uchun esa taqsimotning xossalari muhim hisoblanadi. Bir necha yuz yillar davomida matematika va nazariy fizika haqiqiy (va undan so‘ng kompleks) sonlar asosida shakllanib kelgan. Ko‘pgina o‘lchov sistemalarida Arximed aksiomasining bajarilishi muhim shart hisoblanadi. Dunyoni p-adik arifmetika va ultrametrik geometriya yordamida tavsiflashni taklif qilish tabiiydir. Taqsimotning davriylik xossasi davriy jarayonlarni tadqiq qilish imkonini beradi. Davriy p-adik taqsimotlar kvant mexanikasining noarximed modellari uchun faza almashishlar nazariyasidagi tadqiqotlarning muhim ob’yektidir.

Hozirgi vaqtda p-adik qiymatli ehtimollik o‘lchovlari katta qiziqish uyg‘otib kelmoqda. Bunday o‘lchovlarning ommalashuviga noarximed qiymatli (xususan, p-adik qiymatli) to‘lqin funksiyalari ishtirok etgan kvant modellarining rivojlanishi turtki bo‘ldi. Noarximed ehtimollik modellarining o‘zi ham alohida qiziqish uyg‘otadi. Xususan, ular “yaxshi, yaxshi, ..., halokat” kabi keskin o‘zgarishli holatlar tavsifi uchun p-adik Bernulli sxemalarida qo‘llaniladi. Bundan tashqari, ushbu o‘lchovlar biologik populyatsiya yo‘q bo‘lib ketganda, rivojlanish dinamikasi standart (Kolmogorov) ehtimollik nazariyasi nuqtai nazaridan “juda yaxshi” bo‘lgan p-adik stoxastik modellarida qo‘llaniladi. Ushbu mavzuning dolzarbligi yuqoridagi misollardan, noarximed normalangan fazolarda o‘lchovlarning keng tatbiqidan kelib chiqadi.

Mamlakatimizda so‘nggi yillarda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqlarga ega bo‘lgan dolzarb yo‘nalishlariga qiziqish ortib bormoqda. Statistik mexanikaning noarximed muqobillari va noarximed ehtimollik nazariyasi bo‘yicha qator tadqiqotlar olib borilmoqda. Buning natijasida, ultrametrik fazolardagi tadqiqotlarda salmoqli natijalarga ega bo‘lish muhim vazifalardan biri bo‘lib qoladi. Xususan, ultrametrik statistik fizika va mexanika masalalarini o‘rganishning asosiy ob’ekti sanalgan ultrametrik o‘lchovlar nazariyasining rivojlanishiga alohida e’tibor qaratildi. Matematika fanining ustuvor yo‘nalishlari, ya’ni funksional analiz va matematik fizika kabi muhim yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifasi va yo‘nalishi etib belgilangan[1].

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi № PF-4947 Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4387-son qarori

instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4387-sonli Qarori va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4708-sonli Qarori hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. *p*-Adik sonlar tushunchasini birinchi marta nemis matematigi Genzel (1897) kiritgan. Bunday sonlar ratsional sonlarni *p*-adik (noarximed yoki ultrametrik) norma bo‘yicha to‘ldirish natijasida hosil qilinadi. Hozirgi kunga kelib dunyoda, xususan, Sh.Ayupov, S.Albeverio, U.Roziqov, N.G‘anixo‘jaev, F.Muxammedov, A.Xrennikov, J.Ruiz, D.Gandolfo, B.Omirov, O.Hakimov va boshqa matematiklarning bir qancha ishlarida noarximed maydonlar uchun matematik tahlilning qator yo‘nalishlari keng o‘rganilib kelinmoqda.

1970-yillarda qiymatlari noarximed maydonlarda bo‘lgan o‘lchovlar va integrallash nazariyasi asoslari va umumiy tavsiflari A.S. van Rooy, A.P.Monna va V.Shixovlarning ishlarida keltirilgan. V.Shixovning ishida agar *p*-adik o‘lchov sigma additiv bo‘lsa, u holda bunday o‘lchov diskret o‘lchov bo‘lishi ya’ni faqat sanoqli to‘plamdagina nolga teng bo‘lmasligi keltirilgan. Shu sababli bunday *p*-adik atomik o‘lchovlar bilan mukammal integrallash nazariyasini yaratib bo‘lmaydi. *p*-Adik o‘lchovning sigma additivligi o‘rniga chegaralanganlik shartini olinganda, noarximed integrallash nazariyasi van Rooy va V.Shixovlar tomonidan yaxshi rivojlantirilgan. A.Xrennikov tomonidan *p*-adik butun sonlar to‘plamida translyatsion-invariat o‘lchov mavjud emasligi isbotlangan. Bu esa translyatsion-invariant o‘lchovlardan umumiyroq bo‘lgan *p*-adik davriy o‘lchovlarni tadqiq qilishga turtki bo‘ldi. 1984-yilda V.Vladimirov va I.Volovich tomonidan Arximed aksiomasi bajarilmaydigan (Plank masofalari deb ataluvchi) juda kichik masofalarda fazoni tavsiflash uchun *p*-adik sonlardan foydalanish mumkinligi taklif qilingan. 1987-yilda I.Volovich tor tebranish nazariyasida *p*-adik fazolardan foydalanishni taklif qildi. I.Volovichning “Klassik va kvant gravitatsiyasi” jurnalidagi maqolasi *p*-adik tor tebranishlariga bag‘ishlangan butun bir nashrlar to‘lqinini vujudga kelishiga sabab bo‘ldi. Noarximed modellarni statistik fizika va noarximed ehtimollar nazariyasida turli xil tatbiqlariga doir ko‘plab maqolalar va bir qator kitoblar nashr etildi. Bu o‘rinda V.Vladimirov, P.Freynd, I.Arefeva, B.Dragovich, E.Vitten, P.Frampton, G.Parizi, E.Marinari, M.Olson va boshqalarning natijalarini ko‘rsatish mumkin.

Haqiqiy qiymatli o‘lchovlar nazariyasida o‘lchovni davom ettirish haqidagi Kolmogorov teoremasi muhim rol o‘ynaydi. Noarximed ehtimollik taqsimotlari uchun bu teoremaning muqobili N.G‘anixo‘jaev, F.Muxamedov va O‘.Roziqovlarning ishida isbotlangan. Bu natija *p*-adik taqsimotlar va tasodifiy jarayonlarning keng sinfini qurish va *p*-adik nazariyaga nisbatan statistik usullarni ishlab chiqish imkonini beradi. Ushbu natijalar Bete panjarasidagi bir qancha *p*-adik modellarni o'rganilishiga asos bo'lib xizmat qildi. Xususan, eng yaqin qo'shnilari o'zaro ta'sirga ega bo'lgan turli modellar uchun davriy *p*-adik Gibbs o'lchovlarining bir nechta ko'rinishlari qurilgan. Bu o'rinda D.Gandolfo, J.Ruiz, L.Liao, U.Roziqov, N.G'anixo'jaev, F.Muxamedov, O.Hakimov, M.Saburov va boshqalarning natijalarini ko'rsatish mumkin.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan ilmiy-tadqiqoqt muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi.

Dissertatsiya tadqiqoti Matematika instituti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasidagi F4-FA-F013 "Noassotsiativ va operatorlar algebralari, dinamik sistemalar, hamda ularning statistik fizika va populyatsion biologiyaga tatbiqlari" (2012-2016-yillar), YoF-4-3+YoF-4-4 "Sanoqli graflarda spin sistemalarning ehtimollik o'lchovlari va Li algebralarining tasvirlari bilan assotsirlangan Leybnits algebralari" (2016-2017-yillar) fundamental loyihalari doirasida amalga oshirilgan.

Tadqiqotning maqsadi qiymatlari *p*-adik sonlar maydonida bo'lgan *p*-adik davriy taqsimotlarning yangi sinflarini qurish va topilgan taqsimotlar uchun chegaralanganlik shartlarini aniqlashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

haqiqiy sonlar maydonida haqiqiy davriy o'lchovlarning namunasini qurish (bunda Arximed aksiomasi bajariladi);

Arximed aksiomasi bajarilmaydigan (noarximed) maydonlarda *p*-adik davriy o'lchovlarning namunasini qurish;

p-adik Dirak o'lchovlarining davriylik shartini tadqiq etish;

p-adik Bernuli taqsimotlarining davriylik shartini tadqiq etish;

p-adik taqsimotlar va *p*-adik Gibbs o'lchovlarining chegaralanganlik shartlarini aniqlash;

Tadqiqotning ob'yekti. *p*-Adik va haqiqiy o'lchovlar, davriy o'lchovlar, Bernulli taqsimotlari, Dirak o'lchovlari, *p*-adik Izing modellari.

Tadqiqotning predmeti. *p*-adik Dirak o'lchovining davriyligi, Bernulli taqsimotlarining davriyligi, *p*-adik taqsimotlarning chegaralanganlik shartlari, panjaralardagi *p*-adik Gibbs o'lchovlarining chegaralanganlik shartlari.

Tadqiqotning usullari: Dissertatsiyada (*p*-adik) o'lchovlar nazariyasi, gruppalar nazariyasi, bo'laklash nazariyasi metodlari, noarximed analiz, (*p*-adik) sonlar nazariyasi hamda ehtimollik nazariyasi metodlaridan foydalanilgan. Bundan tashqari statistik mexanika usullari rivojlantirilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

noarximed va Arximed maydonlarida davriy o'lchov tushunchasi kiritilib, $[0;1)$ to'plamda haqiqiy davriy o'lchov qurilgan hamda uning har qanday bo'laklashlari uchun haqiqiy davriy o'lchov mavjudligining zaruriy sharti isbotlangan;

p-adik butun sonlar to'plamining ba'zi bo'laklashlari uchun *p*-adik davriy taqsimotlarning umumiy ko'rinishi topilgan hamda *p*-adik butun sonlar to'plamining har qanday bo'laklashlari uchun *p*-adik davriy taqsimotlar mavjud bo'lishining zaruriy sharti isbotlangan;

p-adik butun sonlar to‘plamining ko‘pi bilan sanoqli bo‘laklashlariga nisbatan Bernulli taqsimotlari davriy bo‘lmasligi hamda topilgan *p*-adik taqsimotlarning chegaralanganligi isbotlangan;

p-adik butun sonlar to‘plamida aniqlangan ma’lum *p*-adik taqsimotlardan foydalanib, yangi taqsimot qurish usullari bayon qilingan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Haqiqiy va *p*-adik taqsimotlarning davriyligini tekshirish usullari statistik fizikaning bir nechta modellari uchun *p*-adik Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflashda qo‘llanilgan.

p-adik butun sonlar to‘plamining ba’zi bo‘laklashlariga nisbatan davriy taqsimotlarning chegaralanganligidan Keli daraxtida berilgan yaqin qo‘shnilari bo‘yicha ta’sirga ega fizik modellar uchun Gibbs o‘lchovlarini qurishda foydalanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Noarximed funksional analiz, sonlar nazariyasi, *p*-adik ehtimollik o‘lchovlar nazariyasi usullaridan foydalangan holda matematik mulohazalarning qat’iyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati haqiqiy va *p*-adik taqsimotlarning davriyligini tekshirish usullari statistik fizikaning ba’zi modellari uchun *p*-adik Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflashda qo‘llanilganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati *p*-adik davriy taqsimotlarning chegaralanganligi yaqin qo‘shnilari bo‘yicha ta’sirga ega modellar uchun Gibbs o‘lchovlarini qurish imkonini berganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Noarximed normalangan maydonlarda davriy o‘lchovlar qurish bo‘yicha olingan natijalar asosida:

Arximed maydonlarida qurilgan haqiqiy davriy taqsimotlar va noarximed *p*-adik butun sonlar to‘plamining ko‘pi bilan sanoqli bo‘laklashlariga nisbatan Bernulli taqsimotlari davriy bo‘lmasligi hamda topilgan *p*-adik taqsimotlarning chegaralanganligidan G0003247 raqamli “Panjarali modellar renormalizatsion gruppasiga mos xaotik va qorishma *p*-adik dinamik sistemalar” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida Keli daraxtidagi eng yaqin qo‘shnilari bo‘yicha ta’sirlashuvchi turli modellar uchun *p*-adik Gibbs o‘lchovlarini topishda foydalanilgan (Birlashgan Arab Amirliklari universitetining 2022-yil 1-iyundagi ma’lumotnomasi, BAA). Ilmiy natijaning qo‘llanishi umumlashgan Gibbs o‘lchovlarini qurish imkonini bergan;

p-adik butun sonlar to‘plamining bo‘laklashlari uchun *p*-adik davriy taqsimotlarning umumiy ko‘rinishi va *p*-adik butun sonlar to‘plamining har qanday bo‘laklashlari uchun *p*-adik davriy taqsimotlar mavjudligidan FRGS 17-027-0593 raqamli “Xaos faza almashishini keltirib chiqaradi: *p*-adik Gibbs o‘lchovlarining yangi sinfini topishda *p*-adik dinamik sistema usuli” mavzusidagi xorijiy grant loyihasida statistik fizikaning bir nechta modellariga mos *p*-adik davriy Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tavsiflashda foydalanilgan (Malayziya Xalqaro Islom universitetining 2022-yil 3-iyundagi ma’lumotnomasi, Malayziya). Ilmiy natijaning qo‘llanishi noarximed fizik sistemalar uchun faza almashishini tavsiflovchi parametrlarni topish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 2 ta xalqaro va 3 ta respublika miqyosidagi ilmiy anjumanlarda muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Tadqiqot mavzusi bo‘yicha jami 12 ta ilmiy ish chop etilgan bo‘lib, ulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya Komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari (PhD) asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta maqola, jumladan, 3 tasi xorijiy va 4 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 85 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga muvofiqligi ko‘rsatilgan, ushbu dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi berilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi ko‘rsatilgan, tadqiqot maqsadi va vazifalari keltirilgan, tadqiqot ob’yekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining amaliyotga joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi haqida ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“$\boldsymbol{p}$-Adik o‘lchovlar va ularning davriyligi”** deb nomlanuvchi birinchi bobida dissertatsiyada olingan natijalarni yoritishda foydalaniladigan ba’zi ma’lum faktlar, asosiy tushunchalar va ta’riflar keltirilgan.

Biror p tub son berilgan bo‘lsin. Har qanday $x \neq 0$ ratsional sonni

$$x = p^r \frac{m}{n}$$

ko‘rinishida tasvirlash mumkin. Bunda m – musbat butun son, $r, n \in \mathbb{Z}$. n va m o‘zaro tub sonlar esa p bilan ham o‘zaro tub: $EKUB(m,n) = 1$, $EKUB(p,n) = 1, \mathrm{E}KUB\,(p,m) = 1$. Ushbu x sonining p-adik normasi quyidagicha aniqlanadi

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r} & agar \quad x \neq 0, \\ 0 & agar \quad x = 0. \end{cases}$$

Bu norma $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} -$ *kuchli uchburchak tengsizligi*ni qanoatlantirgani uchun noarximed normasi bo‘ladi.

Quyidagi tasdiqlar bu tengsizlikdan bevosita kelib chiqadi:

1) agar $|x|_p \neq |y|_p$ bo‘lsa, u holda $|x \pm y|_p = \max\{\,|x|_p, |y|_p\}$;

2) agar $|x|_p = |y|_p$ bo‘lsa, u holda $|x \pm y|_p \leq |x|_p$.

Ostrovskiy teoremasiga ko‘ra ratsional sonlar maydonida trivial bo‘lmagan quyidagi (noekvivalent) normalarnigina kiritish mumkin: birinchidan, har bir p tub son uchun $|\cdot|_p$ normani, ikkinchidan, odatdagi absolyut qiymat $|\cdot|$. Ta’kidlab o‘tamizki, ratsional sonlar maydoni p-adik normaga nisbatan to‘la emas. Ratsional sonlar maydonini p-adik norma bo‘yicha to‘ldirganda p-adik sonlar maydoni – $\mathbb{Q}_p$ hosil bo‘ladi. Har qanday p-adik $x \neq 0$ sonni yagona usulda

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots)$$

kanonik ko‘rinishida tasvirlash mumkin bunda $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ va x_j lar butun sonlar $x_0 > 0$, $0 \leq x_j \leq p-1$ shartlarni qanoatlantiradi. Bu holda $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$. $\mathbb{Z}_p = \{x \in_p : |x|_p \leq 1\}$ to‘plamning elementlari *p-adik butun sonlar* deb ataladi.

Shunday qilib, har qanday p-adik sonni qator ko‘rinishida

$$x = p^{\gamma(x)} \sum_{n=0}^{\infty} x_n p^n,$$

kabi tasvirlash mumkin bunda x_n-butun sonlar, $0 \leq x_n \leq p-1, \gamma(x) \in \mathbb{Z}$. Ta’kidlab o‘tamizki, bunday tasvirlash har bir x uchun yagonadir. Agar $\gamma(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda x soni p-adik butun son bo‘ladi.

$\mathbb{Q}_p$ metrik fazoda ochiq to‘plamlar bazisi sifatida quyidagi to‘plamlar sistemasini olish mumkin:

$$a + p^n\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq \tfrac{1}{p^n}\}, \text{ bunda } a \in \mathbb{Q}_p, \text{ va } n \in \mathbb{Z}.$$

$a \in \mathbb{Q}_p, n \in \mathbb{Z}$ lar uchun $a + p^n\mathbb{Z}_p$ to‘plamlar *intervallar* deyiladi va $a + (p^n)$ kabi belgilanadi. Aytib o‘tish kerakki, $\mathbb{Q}_p$ ning ochiq qism to‘plami faqat va faqat chekli sondagi intervallar birlashmasidan iborat bo‘lsagina kompakt bo‘ladi. Bunday qism to‘plamlar *kompakt-ochiq* deb ataladi.

1-ta’rif. *X to‘plamning kompakt-ochiq qism to‘plamlariga p-adik sonlarni mos qo‘yuvchi additiv μ akslantirishga p-adik taqsimot deyiladi. Chegaralangan p-adik taqsimotga o‘lchov deyiladi.*

μ akslantirishning chegaralanganligi $sup\{\,|\mu(V)|_p : V \subset X\} < \infty$ ni anglatadi. Aytaylik $\mathbb{Z}_p$ to‘plam uchun biror $\xi = \{K^{(i)}, i \in I\} -$ bo‘laklash bo‘lsin ya’ni

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i \in I} K^{(i)}, K^{(i)} \cap K^{(j)} = \emptyset, i \neq j.$$

2-ta’rif. *$\mathbb{Z}_p$ to‘plamdagi μ taqsimot har qanday $a \in K^{(i)}$ uchun $\mu(a + (p^n)) = \lambda_i^{(n)} (\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_i^{(n)} \in \mathbb{Q}_p)$ munosabatni qanoatlantirsa, bu taqsimotga ξ-davriy taqsimot deyiladi. Ya’ni tayin n uchun $\mu(a + (p^n))$ taqsimotning qiymati faqat a ning qaysi sinfga mansubligiga bog‘liq.*

Endi $\mathbb{Q}_p$ da biror kompakt-ochiq X qism-fazo berilgan bo‘lsin. Quyidagi teorema ma’lum:

1-teorema. *X dagi intervallar to‘plamini $\mathbb{Q}_p$ maydonga akslantiruvchi har qanday μ akslantirish uchun ixtiyoriy $a + (p^n) \subset X$ da*

$$\mu\big(a+(p^n)\big)=\sum_{b=0}^{p-1}\mu\big(a+bp^n+(p^{n+1})\big)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, ushbu akslantirishni X dagi p-adik taqsimotgacha yagona ravishda davom etirish mumkin.

Birinchi bobda $\mathbb{Z}_p$ ning ba’zi bo‘laklashlari uchun p-adik taqsimotlarning umumiy ko‘rinishi berilgan. Birinchi bobning asosiy natijasi quyidagi teoremalardan iborat:

2-teorema. 1) *Har qanday $p\mathbb{Z}_p$-davriy p-adik taqsimot quyidagi ko‘rinishga ega:*

$$\mu\big(a+(p^n)\big)=\frac{\lambda_i^{(1)}}{p^{n-1}},$$

bunda $a\in K^{(i)}, n\in\mathbb{N}$ va $\lambda_i^{(1)}\in\mathbb{Q}_p$, $i=0,1,\dots,p-1$;

2) *Har qanday $p^2\mathbb{Z}_p$ - davriy p- adik taqsimot quyidagi ko‘rinishga ega:*

$$\mu(a+(p^n))=\begin{cases}\frac{\lambda_i^{(2)}}{p^{n-2}}, & agar\ n\geq 2,\\ \sum_{m=0}^{p-1}\lambda_{i+mp}^{(2)}, & agar\ n=1;\end{cases},$$

bunda $a\in K^{(i)}, n\in\mathbb{N}$ va $\lambda_i^{(2)}\in\mathbb{Q}_p$, $i=0,1,\dots,p^2-1$.

3-teorema. *Har qanday L_k-davriy p- adik taqsimot quyidagi ko‘rinishga ega:*

$$\lambda_i^{(n)}=\begin{cases}\frac{\lambda_i^{(k+1)}}{p^{n-k-1}}, & agar\ \ n>k,\\ \sum_{j=0}^{p-1}\lambda_j^{(k+1)}, & agar\ \ n=k,\\ p^{k-n}\lambda_i^{(k)}, & agar\ \ n<k;\end{cases}$$

bunda $a\in L^{(i)}$, $n\in\mathbb{N}$ va $\lambda_i^{(k+1)}\in\mathbb{Q}_p$, $i=0,1,\dots,p-1$.

Dissertatsiyaning “***p*-Adik taqsimotlar va o‘lchovlarning davriyligi**” deb nomlanuvchi ikkinchi bobi p-adik davriy taqsimotlar va p-adik davriy o‘lchovlarni o‘rganishga bag‘ishlangan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida Dirak o‘lchovlarining K-davriyligi tadqiq etiladi. Berilgan $\alpha\in\mathbb{Z}_p$ uchun $\lambda\neq 0$ bo‘lganda μ_α Dirak o‘lchovi quyidagicha aniqlanadi:

$$\mu_\alpha(U) = \begin{cases} \lambda, & \text{a}gar\ \alpha \in U, \\ 0, & aks\ holda. \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_p$ to‘plamning bo‘laklashi sifatida quyidagini qaraymiz:

$$K = \{K^{(1)}, K^{(2)}\}, \qquad K^{(1)} = \{x: |x|_p = 1\}, \qquad K^{(2)} = \{x: |x|_p < 1\}.$$

α nuqtaning $K^{(1)}$ yoki $K^{(2)}$ to‘plamga tegishli bo‘lishiga qarab ikkita hol mavjud. Bundan kelib chiqib, quyidagi lemmalarning isboti keltirilgan:

1-lemma. *Agar $\alpha \in K^{(1)}$ bo‘lsa, u holda*

1) $n \geq 2$ *yoki* $n = 1, p \neq 2$ *da* $|\alpha - a|_p > \frac{1}{p^n}$ *shartni qanoatlantiruvchi* $a \in K^{(1)}$ *mavjud;*

2) $n = 1, p = 2$ *da* $|\alpha - a|_p > \frac{1}{p}$ *shartni qanoatlantiruvchi* $a \in K^{(1)}$ *mavjud emas.*

2-lemma. *Agar $\alpha \in K^{(2)}$ bo‘lsa, u holda*

1) $n \geq 2$ *da* $|\alpha - a|_p > \frac{1}{p^n}$ *shartni qanoatlantiruvchi* $a \in K^{(2)}$ *mavjud;*

2) $n = 1$ *da* $|\alpha - a|_p > \frac{1}{p}$ *shartni qanoatlantiruvchi* $a \in K^{(2)}$ *mavjud emas.*

Va nihoyat, isbotlangan lemmalardan va taqsimotning xossasidan foydalanib, quyidagi teorema isbotlangan:

4-teorema. *$\mathbb{Z}_p$ to‘plamning $K = \{K^{(1)}, K^{(2)}\}$ bo‘laklashi berilgan bo‘lsin, bunda $K^{(1)} = \{x: |x|_p = 1\}$ va $K^{(2)} = \{x: |x|_p < 1\}$. U holda K-davriy Dirak o‘lchov mavjud emas.*

$\mathbb{Z}_p$ ning umumiyroq bo‘laklashlari uchun p-adik davriy taqsimotlar tadqiq qilingan.

Ikkinchi bobning ikkinchi va uchinchi paragraflarida Bernulli taqsimotlari o‘rganilgan. Bir nechta Bernulli ko‘phadlarini keltirish mumkin:

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \ldots$$

Biror nomanfiy k butun soni uchun $\mu_{B,k}$ akslantirishni $a + (p^n)$ intervallarda

$$\mu_{B,k}\big(a + (p^n)\big) = p^{n(k-1)} B_k\left(\frac{a}{p^n}\right).$$

formula yordamida aniqlaymiz. $\mu_{B,k}$ akslantirish *k-Bernulli taqsimoti* deb ataladi.

Quyidagi teoremaning isboti keltirilgan:

5-teorema. *$\mu_{B,k}$ funksiyani $\mathbb{Z}_p$ dagi taqsimotgacha davom ettirish mumkin.*

Dastlabki bir nechta $B_k(x)$ ko‘phadlar uchun quyidagi taqsimotlarni hosil qilish mumkin:

$$\mu_{B,0}\big(a+(p^n)\big)=p^{n(0-1)}B_0\left(\frac{a}{p^n}\right)=p^{-n}\cdot 1=\frac{1}{p^n},$$

$$\mu_{B,1}(a+(p^n))=p^{n(1-1)}B_1\left(\frac{a}{p^n}\right)=1\cdot B_1(\frac{a}{p^n})=\frac{a}{p^n}-\frac{1}{2},$$

$$\mu_{B,2}(a+(p^n))=p^{n(2-1)}B_1\left(\frac{a}{p^n}\right)=p^n(\frac{a^2}{p^{2n}}-\frac{a}{p^n}+\frac{1}{6}).$$

$\mu_{B,0}$ ni Xaar taqsimoti, $\mu_{B,1}$ ni Mazur taqsimoti deb atalishini eslatib o‘tamiz.

Shundan so‘ng, Bernulli taqsimotlarini $\mathbb{Z}_p$ to‘plamning $\xi=\{K^{(i)},i\in I\}$ bo‘laklashi ya’ni $i\neq j$ da

$$\mathbb{Z}_p=\bigcup_{i\in I}K^{(i)},K^{(i)}\cap K^{(j)}=\emptyset$$

uchun ξ-davriyligini tadqiq qilish maqsadida quyidagi teorema isbotlangan:

6-teorema. *$\mu\big(a+(p^n)\big)$ akslantirish quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin*

$$\mu\big(a+(p^n)\big)=f_n(a).$$

$x\in\mathbb{Z}_p$ larda aniqlangan $f_n(x)$ akslantirish uchun har qanday $c\in\mathbb{Q}_p$ da $\{f_n^{-1}(c)\}$ to‘plamning quvvati ko‘pi bilan sanoqli bo‘lsa, u holda μ akslantirishni ξ-davriy qiladigan sanoqli yoki chekli ξ bo‘laklash mavjud emas.

$\mu_{B,k}$ Bernulli taqsimotlari ξ-davriy bo‘lishi uchun

$$p^{n(k-1)}B_k\left(\frac{a}{p^n}\right)=\lambda_i^{(n)},a\in K^{(i)}$$

bo‘lishi kerak. Biroq,

$$B_k\left(\frac{a}{p^n}\right)=p^{-n(k-1)}\lambda_i^{(n)}$$

tenglamaning a yechimlari soni chekli. Shuning uchun, ixtiyoriy i da $K^{(i)}$ ning elemetlari ko‘pi bilan sanoqli bo‘ladi. Demak, $\mu_{B,k}$ Bernulli taqsimotlari ξ-davriy bo‘ladigan chekli yoki sanoqli ξ bo‘laklash mavjud emas.

Ko‘rish mumkinki, 2-teoremadagi va 3-teoremadagi barcha taqsimotlar chekli bo‘laklashlardan hosil qilinadi. Shuning uchun $p\mathbb{Z}_p$-davriy, $p^2\mathbb{Z}_p$-davriy va L_k-davriy taqsimotlar orasida Bernulli tavsimotlari mavjud emas.

$\mathbb{Z}_p$ to‘plamni shunday $\xi=\{K^{(i)},i\in I\}$ bo‘laklashini topish mumkinki, $\mu_{B,k}$ Bernulli taqsimotlari ξ davriy bo‘ladi. $K^{(i)}$ lar sifatida quyidagi to‘plamlarni olamiz:

$$K^{(c)} = \bigcup_{n} \left\{a \in \mathbb{Z}_p : B_k\left(\frac{a}{p^n}\right) = c\right\}, c \in \mathbb{Q}_p,$$

ya'ni

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}_p} K^{(c)}$$

Ushbu

$$p^{n(k-1)} B_k\left(\frac{a}{p^n}\right) = \lambda_n^{(c)}$$

tenglamalardan bunaqa taqsimotlarning koʻrinishini ham aniqlash mumkin:

$$\lambda_n^{(c)} = p^{n(k-1)} \cdot c.$$

Dissertatsiyaning **"Panjaralardagi *p*-adik taqsimotlar"** deb nomlanuvchi uchinchi bobida $\mathbb{Z}^d$ panjarada p-adik Gibbs taqsimoti va Bete panjarasida (Keli daraxtida) p-adik taqsimot tushunchalari kiritiladi

$x = (x_1, \ldots, x_d), x_i \in Z, i = 1, \ldots, d$ nuqtalar toʻplamini ya'ni d-oʻlchamli $\mathbb{Z}^d$ butun sonli panjarani qaraylik. Bunda metrika

$$\rho_1(x'; x'') = \max_{1 \le i \le d} |x'_i - x''_i|$$

koʻrinishida yoki unga yaqinlashish boʻyicha ekvivalent boʻlgan

$$\rho_2(x'; x'') = \sum_{i=1}^{d} |x'_i - x''_i|$$

kabi kiritiladi.

Agar $x, y \in \mathbb{Z}^d$ nuqtalar uchun $\rho_2(x; y) = 1$ oʻrinli boʻlsa, u holda x va y nuqtalar *qoʻshni nuqtalar* deb ataladi va $< x, y >$ kabi belgilanadi.

$\Phi = \{-1, +1\}$ spin qiymatlar toʻplami boʻlsin. Biror natural n soni uchun

$$M_n = \{x = (x_1, \ldots, x_d), x_i \ge 0, i = 1, \ldots, d : \rho_1(x, x^0) \le n\}$$

toʻplam markazi x^0 da boʻlgan *fundamental kvadrat* deb ataladi. $\mathbb{Z}^d$ ning M_n kvadratga tegishli boʻlmagan va M_n ning ba'zi nuqtalariga qoʻshni boʻlgan barcha nuqtalarini M_n *kvadratning konturi* deb ataladi va ∂M_n kabi belgilanadi. $\mathbb{Z}^d$ da aniqlangan $x \in \mathbb{Z}^d \to \sigma(x) \in \Phi$ funksiya σ *konfiguratsiya* deb ataladi. σ ning har qanday $V \subset Z^d$ qism toʻplamdagi cheklovini $\sigma(V)$ deb belglaymiz, ya'ni $\sigma(V) = \{\sigma(x), x \in V\}$. M_n dagi barcha konfiguratsiyalar toʻplamini Ω_n bilan, $\mathbb{Z}^d$ dagi barcha konfiguratsiyalar toʻplamini Ω bilan belgilaymiz. Izing modeli uchun *p-adik gamiltonian*

$H(\sigma) = -J \sum_{<x,y>} \sigma(x)\sigma(y),$ kabi aniqlanadi bunda $|J|_p \le \frac{1}{p}$.

Izing modeli uchun M_n kvadratdagi $H_n(\sigma|\sigma')$ *shartli p-adik gamiltonian*

$$H_n(\sigma|\sigma') = -J\sum_{<x,y>_{x,y\in M_n}} \sigma(x)\sigma(y) - J\sum_{<x,y>_{x\in M_n, y\in\partial M_n}} \sigma(x)\sigma'(y),$$

ko‘rinishga ega bunda $|J|_p \leq \frac{1}{p}$.

$a \in \mathbb{Q}_p$ va $r > 0$ uchun $B(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p < r\}$ belgilash kiritamiz.

p-*Adik logarifm* yaqinlashish sohasi $x \in B(1,1)$ bo‘lgan

$$\log_p(x) = \log_p(1+(x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(x-1)^n n,$$

qator bilan beriladi.

p-*Adik eksponenta* yaqinlashish sohasi $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$ bo‘lgan

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n n!,$$

qator bilan beriladi.

M_n kvadratda σ va $\mathbb{Z}^d \backslash M_n$ da σ' konfiguratsiya uchun *shartli Gibbs taqsimoti*

$$\mu_n(\sigma|\sigma') = \frac{\exp_p\left(-H_n(\sigma|\sigma')\right)}{\sum_{\sigma\in\Omega_n} \exp_p\left(-H_n(\sigma|\sigma')\right)}$$

kabi aniqlanishini eslatib o‘tamiz.

Quyidagi konfiguratsiyalarni qaraymiz:

$$\sigma^+ = \{\sigma(x) \equiv 1\}, \sigma^- = \{\sigma(x) \equiv -1\}.$$

M_n kvadratda Ω dagi biror tayin σ konfiguratsiya uchun ikkita σ^+ va σ^- chegaraviy shartlarda mos ravishda ikkita p-adik Gibbs shartli taqsimotlarini aniqlaymiz

$$\mu_n^\varepsilon(\sigma) = \mu(\sigma(M_n)|\sigma^\varepsilon(\mathbb{Z}^d\backslash M_n)) = \frac{\exp_p(-H_n^\varepsilon(\sigma))}{z_n^\varepsilon}, \varepsilon = -, +$$

bunda

$$H_n^\varepsilon(\sigma) = -J \sum_{<x,y>_{x,y\in M_n}} \sigma(x)\sigma(y) - \varepsilon J \sum_{<x,y>_{x\in M_n, y\in\partial M_n}} \sigma(x)$$

$$va \qquad z_n^\varepsilon = \sum_{\sigma\in\Omega_n} \exp_p(-H_n^\varepsilon(\sigma)).$$

3-lemma. *Agar* $p \neq 2$, $|J|_p \leq \frac{1}{p}$ *bo‘lsa, u holda* $|H(\sigma)|_p \leq \frac{1}{p}$.

4-lemma. *Agar* $p \neq 2$ *bo‘lsa, u holda* $z_n^+ = z_n^-$ *va* $|z_n^+|_p = |z_n^-|_p = 1$.

7-teorema. *Agar* $p \neq 2$ *va* $\lim_{n\to\infty} \mu_n^{\pm}(\sigma)$ *limitlar mavjud bo'lib,* $\mu^{\pm}$ *ga teng bo'lsa, u holda* $\mu^{\pm} -$ *p-adik taqsimotlar turlicha bo'ladi. Bundan tashqari, har qanday* $r \in N$ *uchun* $|\mu^{+}(\sigma) - \mu^{-}(\sigma)|_p = |J|_p \cdot p^{-r}$ *tenglikni qanoatlantiruvchi* σ *konfiguratsiya mavjud bo'ladi.*

Ushbu taqsimotlarning chegaralanganligi ham tekshirilgan.

8-teorema. *Izing modeli uchun Gibbs taqsimotlari chegaralangan bo'lishi uchun* $p \neq 2$ *bo'lishi zarur va yetarli.*

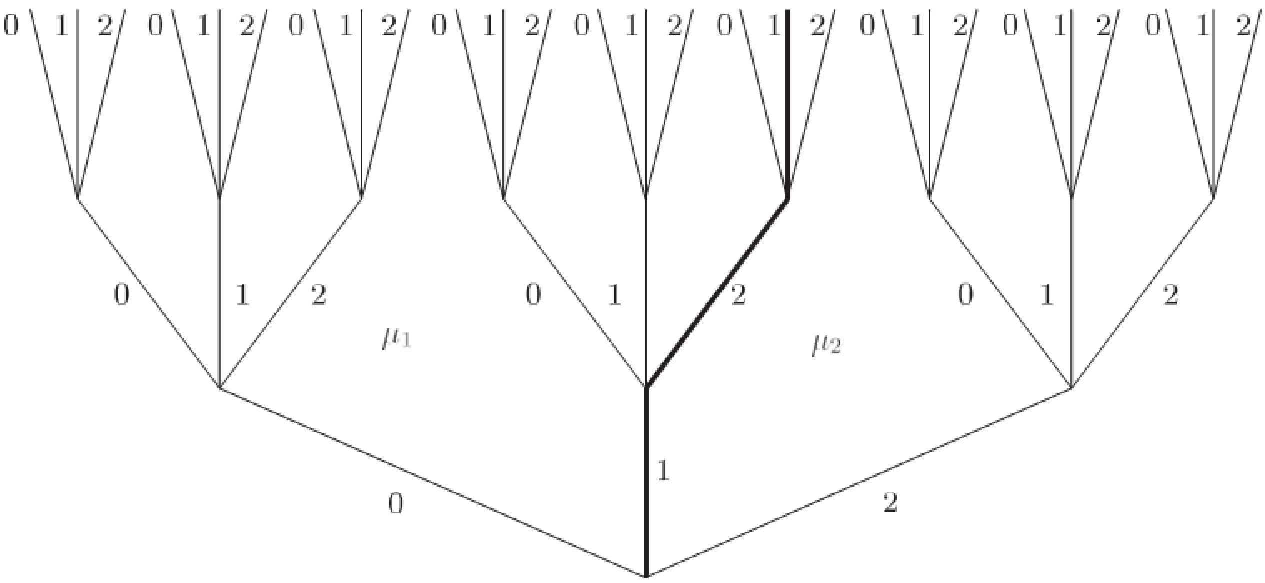
Uchinichi bobning uchinchi paragrafi Keli daraxtida haqiqiy Gibbs o'lchovlarining ba'zi metodlaridan foydalanib, p-adik butun sonlar to'plamida bir nechta p-adik taqsimotlar va o'lchovlar qurishga bag'ishlangan. Keli yarimdaraxti uchun odatdagi leksikografik tartib $\prec$ kiritilgan.

$\pi = \{x^0 = x_0 < x_1 < \cdots\}$ yo'lga

$$t = t(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n p^n, \quad t \in \mathbb{Z}_p$$

p-adik sonni mos qo'yamiz.

Ushbu moslik o'zaro bir qiymatli bo'ladi. Bunda tashqari $\prec$ qisman tartibdan $\mathbb{Z}_p$ da qisman tartib kiritish uchun ham foydalanish mumkin: ya'ni, agar $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_p$ sonlarga mos keluvchi π_1, π_2 yo'llar uchun $\pi_1 \prec \pi_2$ o'rinli bo'lsa, u holda $t_1 \prec t_2$ deymiz.



1-chizma. Uchinchi tartibli Keli yarimdaraxti. Qalin chiziq bilan belgilangan π yo'l 121… ketma-ketlik bilan ifodalanadi. Bu yo'ldan chapda (mos ravishda o'ngda) μ taqsimot μ_1 bilan (mos ravishda μ_2 bilan) ustma-ust tushadi.

Quyidagi teorema isbotlangan:

9-teorema. $i_0 i_1 i_2 \dots$ *ketma-ketlik bilan ifodalangan* $\pi = \{x^0 = x_0 < x_1 < \cdots\}$ *yo'l berilgan bo'lsin. Agar* $\mathbb{Z}_p$ *dagi* μ_1, μ_2 *taqsimotlar uchun* $\mu_1 \neq \mu_2$ *bo'lib, barcha* $n \leq m(a,\pi) + 1$ *larda* $\mu_1(a + (p^n)) = \mu_2(a + (p^n))$ *o'rinli bo'lsa, u holda* $\mathbb{Z}_p$ *dagi intervallarda quyidagicha aniqlangan* μ *taqsimot mavjud:*

$$\mu\big(a + (p^n)\big) = \begin{cases} \mu_1\big(a + (p^n)\big), \quad agar \quad \pi_a \prec \pi, \pi_a \cap \pi = \emptyset \\ \qquad yoki \qquad \pi_a \cap \pi \neq \emptyset, \quad n \leq m, \\ yoki \quad \pi_a \cap \pi \neq \emptyset, \quad n \geq m + 1, a_{m+1} < i_{m+1}, \\ \mu_2(a + (p^n)), \quad agar \quad \pi \prec \pi_a, \pi_a \cap \pi = \emptyset \\ yoki \quad \pi_a \cap \pi \neq \emptyset, \quad n \geq m + 1, a_{m+1} > i_{m+1}, \end{cases}$$

bunda $m = m(a,\pi)$ *va* π_a *yo'l* $a \in \mathbb{Z}_p$ *nuqtani tasvirlaydi (1-chizmaga qarang).*

Quyidagi teoremada berilgan taqsimotlardan foydalanib, yangi taqsimot qurish mumkinligi keltirilgan.

10-teorema. $k \in \mathbb{N}$ *va* $\mathbb{Z}_p$ *da* $\{\nu_t : t \in W_k\}$ *taqsimotlar oilasi berilgan bo'lsin. Agar shunday* $t, s \in W_k (t \neq s)$ *topilib, biror* $c + (p^{n_0})$ $(n_0 \geq k)$ *interval uchun* $\nu_t(c + (p^{n_0})) \neq \nu_s(c + (p^{n_0})$ *o'rinli bo'lsa, u holda* $\mathbb{Z}_p$ *da har bir* $t \in W_k$ *uchun* ν_t *dan farqli* $\mu^{(k)} = \mu^{(k)}[\nu_t, t \in W_k]$, *taqsimot mavjud.*

Quyidagi teoremada 9 va 10-teoremalarda qurilgan p-adik taqsimotlarning chegaralanganlik shartini keltirib o'tamiz.

11-teorema. *Quyidagi tasdiqlar o'rinli.*

1. 9-*teoremada keltirilgan* μ *taqsimot chegaralangan bo'lishi uchun,* μ_1 *va* μ_2 *taqsimotlar chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

2. 10-*teoremada keltirilgan* $\mu^{(k)}$ *taqsimot chegaralangan bo'lishi uchun, har qanday* $t \in W_k$ *va* $n \geq k$ *da* $\nu_t(a + (p^n))$ *chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

XULOSA

Dissertatsiya noarximed maydonlarida davriy taqsimotlarni qurishga, taqsimotlarning chegaralanganligini o‘rganishga bag‘ishlangan bo‘lib, quyidagi natijalarga erishilgan:

davriy p-adik va davriy haqiqiy taqsimotlar tushunchalari kiritilgan bo‘lib, butun p-adik sonlar to‘plamining ayrim bo‘laklashlari uchun davriy p-adik taqsimotlarning umumiy ko‘rinishi topilgan;

[0;1) to‘plamning aniq bir bo‘laklashi uchun davriy haqiqiy o‘lchovlarning umumiy ko‘rinishi topilgan. Davriy haqiqiy o‘lchovlar mavjud bo‘lmaydigan [0;1) to‘plamning bo‘laklashlariga misollar keltirilgan;

Dirak o‘lchovining K-davriyligi tushunchasi kiritilgan bo‘lib, K-davriy Dirak o‘lchovlari mavjud emasligi isbotlangan. p-Adik butun sonlar to‘plamining umumiyroq bo‘laklashlari uchun davriy p-adik taqsimotlarning umumiy ko‘rinishi topilgan;

butun p-adik sonlar to‘plamining ixtiyoriy bo‘laklashlari uchun davriy p-adik taqsimotlar mavjudligining zaruriy sharti topilgan bo‘lib, topilgan p-adik davriy taqsimotlar orasida p-adik Bernulli taqsimotlari yo‘qligi isbotlangan;

p-adik sonlar to‘plamining shunday bo‘laklashi topilganki, bu bo‘laklashga nisbatan Bernulli taqsimotlari davriy bo‘ladi va bunday davriy p-adik Bernulli taqsimotlarining umumiy ko‘rinishi keltirilgan;

Bete panjarasidagi haqiqiy qiymatli Gibbs o‘lchovlari nazariyasining ba’zi usullaridan foydalanib, bir nechta p-adik taqsimotlarni qurish usulini p-adik hol uchun taklif qilingan va p-adik taqsimotlarning chegaralanganligi tadqiq etilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТУГЁНОВ ЗОХИД ТОЛИБОВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР НАД НЕАРХИМЕДОВЫМИ НОРМИРОВАННЫМИ ПОЛЯМИ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за № B2023.1.PhD/FM834

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://kengash.mathinst.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович** доктор физико-математических наук, профессор **Саттаров Искандар Абу-алиевич** доктор философии по физико-математическим наукам
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится « 25 » апреля 2023 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И. Романовского (зарегистрирована за № 158). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 11 » апреля 2023 года.
(протокол рассылки № 2 от « 11 » апреля 2023 года).

У.А. Розиков
Председателя Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

У.У.Жамилов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые во всем мире, очень часто сводятся к исследованию неархимедовых моделей квантовой механики. Теория p-адического интегрирования – одна из важнейших частей неархимедова анализа. Для интегрирования важны свойства распределения. В течение нескольких столетий математика и теоретическая физика развивались на основе действительных (а затем и комплексных) чисел. Важнейшим допущением во многих системах измерения является аксиома Архимеда. Вполне естественно предложить описание мира в терминах p-адической арифметики и ультраметрической геометрии. Свойство периодичности распределения позволяет изучать периодические процессы. Периодические p-адические распределения являются основным объектом в теории фазовых переходов для неархимедовых моделей квантовой механики.

В настоящее время наибольший интерес представляют вероятностные меры со значениями в поле p-адических чисел. Обобщения таких мер были мотивированы развитием квантовых моделей с неархимедовозначными (и, в частности, со значениями в поле p-адических чисел) волновыми функциями. Неархимедовые вероятностные модели представляют и самостоятельный интерес. В частности, они использованы в p-адической схеме Бернулли для описания катаклизмов, ситуаций типа: «хорошо, хорошо, ..., катастрофа». Кроме того, эти меры применяются в p-адических стохастических моделях вымирания биологической популяции, динамика развития которой является «вполне благополучной», с точки зрения стандартной (колмогоровской) теории вероятностей. Актуальность данной тематики следует из этих примеров, большого приложения мер над неархимедово нормированными пространствами.

В нашей стране в последние годы усилился интерес к актуальным направлениям фундаментальных наук, имеющих научное и практическое применение. Ведется ряд исследований по неархимедовым аналогам статистической механики и неархимедовой теории вероятностей. Вследствие этого актуальным становится получение значимых результатов в исследовании ультраметрических пространствах. В частности, особое внимание было уделено развитию теории ультраметрических мер, являющейся основным объектом изучения задач ультраметрической статистической физики и механики. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук, а именно по таким важным направлениям, как функциональный анализ и математическая физика, рассматривается в качестве основной задачи фундаментальных исследований[1].

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

Исследования данной диссертации в определенной степени служат осуществлению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан» от 9 июля 2019 года и № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 7 мая 2020 года, а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Понятие p-адических чисел было впервые введено немецким математиком Гензелем (1897). Такие числа появляются при пополнении рациональных чисел по p-адической (неархимедовой или ультраметрической) норме. В настоящее время в мире, в частности, в работах Ш.Аюпова, С.Албеверио, У.Розикова, Н.Ганиходжаева, Ф.Мухаммедова, А.Хренникова, Ж.Руиза, Д.Гандольфо, О.Хакимова и других широко изучается ряд направлений математического анализа на неархимедовых структурах.

Основы и общие характеристики теории мер и интегрирования со значениями в неархимедовых полях даны в работах А.С.М. ван Роойа, А.Монна и В.Шихова в 1970-х годах. В работах В.Шихова было доказано, что если p-адическая мера является сигма-аддитивной, то такая мера будет дискретной мерой, т.е. не равной нулю только на счетном множестве. Следовательно, содержательная теория интегрирования не может быть создана с такими p-адическими атомическими мерами. Хорошо развита теория неархимедового интегрирования, когда вместо сигма-аддитивности рассматриваются условия ограниченности. В работах А.Хренникова было доказано отсутствие трансляционно-инвариантных мер при условии ограниченности в множестве целых p-адических чисел. Поэтому возникла задача о нахождении периодических p-адических мер, более общих, чем трансляционно-инвариантные. В 1984 г. В.Владимиров и И.Волович предположили, что p-адические числа могут быть использованы для описания пространства на фантастически малых расстояниях, так называемых планковских расстояниях, в которых аксиома Архимеда нарушается. В 1987 г. И.Волович предложил использовать p-адическое пространство в теории струн. Работа И.Воловича в журнале «Классическая и квантовая гравитация» вызвала целую волну публикаций по p-адическим струнам. Опубликованы многочисленные статьи и ряд книг по различным приложениям неархимедовых моделей статистической физики и неархимедовой теории вероятностей. Здесь можно указать на результаты В.Владимирова, П.Фрейнда, И.Арефьева, Б.Драговича, Э.Виттена, П.Фрамптона, Г.Паризи, Э.Маринари, М.Олсона и других.

Теорема Колмогорова о продолжении меры играет важную роль в теории действительнозначных мер Гиббса. Неархимедов аналог теоремы Колмогорова был доказан в работе Н.Ганиходжаева, Ф.Мухамедова и У.Розикова. Этот результат позволяет конструировать широкий класс p-адических распределений, случайных процессов и дает возможность развивать статистические методы применительно к p-адической теории. Благодаря этой работе было изучено несколько p-адических моделей на решетке Бете. В частности, построено несколько вариантов периодических p-адических мер Гиббса для различных моделей с взаимодействиями ближайших соседей. Здесь можно указать на результаты Д.Гандольфо, Ж.Руиза, Л.Оиао, У.Розикова, Н. Ганиходжаева, Ф. Мухамедова, О.Хакимова, М. Сабурова и других.

Связь темы диссертации с научно-исследовательской работой научного исследовательского учреждения, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научных исследований Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» Института математики (Ташкент, 2012-2016 гг.), ЁФ-4-3+ЁФ-4-4 «Вероятностные меры спиновых систем на счетных графах и алгебры Лейбница, ассоциированные с представлениями алгебр Ли» Института математики (Ташкент, 2016-2017 гг.).

Целью исследования является построение новых классов p-адических периодических распределений со значениями в поле p-адических чисел и нахождение условий ограниченности для найденных распределений.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

построить пример вещественной периодической меры на поле вещественных чисел (для которых аксиома Архимеда выполняется);

построить примеры p-адических периодических мер на (неархимедовых) полях, для которых аксиома Архимеда нарушается;

исследовать условия периодичности p-адических мер Дирака;

исследовать условия периодичности p-адических распределений Бернулли;

установить условия ограниченности p-адических распределений и p-адических гиббсовских мер.

Объект исследования – p-адические и вещественныеые меры, периодические меры, распределения Бернулли, меры Дирака, p-адические модели Изинга.

Предмет исследования – периодичность p-адической меры Дирака, периодичность распределения Бернулли, условия ограниченности p-адических распределений, условия ограниченности p-адических гиббсовских распределений на решетках.

Методы исследования. В работе используются методы, основанные на теории (p-адических) мер, теории групп, методы теории разбиений, неархимедов анализ, теория (p-адических) чисел и теория вероятностей. Кроме того, развиваются методы статистической механики.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

введены понятия периодических мер над архимедовыми и неархимедовыми полями, построена периодическая вещественная мера на множестве [0;1) и для произвольных разбиений множества [0;1) доказано необходимое условие существования периодической вещественной меры;

найден общий вид периодических p-адических мер для некоторых разбиений множества целых p-адических чисел, а также доказано необходимое условие существования периодических p-адических распределений для произвольных разбиений множества целых p-адических чисел;

доказана не периодичность распределений Бернулли относительно не более счетного разбиения множества целых p-адических чисел и ограниченность найденных p-адических распределений;

описаны методы построения новых распределений, используя уже известных p-адических распределений, заданные на множестве целых p-адических чисел.

Практические результаты исследования состоит в следующем: Методы проверки периодичности вещественных и p-адических распределений используются при описании множества p-адических мер Гиббса для различных моделей статистической физики.

Ограниченность p-адических периодических распределений относительно некоторых разбиений можества целых p-адических чисел применяются при построение мер Гиббса на деревях Кэли для физических моделей с взаимодействиями ближайших соседей.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов неархимедового функционального анализа, теории чисел, теории p-адических вероятностных мер, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что методы проверки периодичности вещественных и p-адических распределений используются при описании множества p-адических мер Гиббса для некоторых моделей статистической физики.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что ограниченность p-адических периодических распределений позволяет строить мер Гиббса для моделей с взаимодействиями ближайших соседей.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по построение периодических мер над неархимедово нормированными полями внедрены в практику по следующим направлениям:

вещественные периодические меры построенные над архимедовым полями и периодичность распределений Бернулли относительно не более счетного разбиения неархимедово множества целых p-адических чисел, а также ограниченность найденных p-адических распределений были использованы в исследовательском проекте «Хаотические и смешанные p-адические динамические системы, соответствующие решетчатым моделям ренормированных групп» G0003247 (ОАЭ, справка Университета Объединённых Арабских Эмиратов от 1 июня 2022 года) чтобы найти p-адических мер Гиббса на деревьях Кэли для различных моделей с взаимодействиями ближайших соседей. Применение этих научных результатов позволило построить обобщенные гиббсовские меры;

общий вид периодических p-адических мер для разбиений множества целых p-адических чисел и существования p-адических периодических распределений были использованы в исследовательском проекте «Хаос вызывает фазовый переход: метод p-адических динамических систем для нового класса p-адических мер Гиббса» FRGS 17-027-0593 (Малайзия, справка Международного исламского университета Малайзии, от 3 июня 2022 года) для описания множества p-адических мер Гиббса, связанных с несколькими моделями статистической физики. Применение этих научных результатов дало возможность нахождения параметра характеризующего существование фазового перехода для неархимедовых физических систем.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 2 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 7 входят в перечень научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 3 из них опубликованы в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 85 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности и востребованности темы диссертации, отмечено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации под названием **«p-Адические меры и их периодичность»** приведены некоторые известные факты, необходимые предварительные сведения и основные определения, которые будут использованы при изложении результатов диссертации.

При фиксированном числе p каждое рациональное число $x \neq 0$ можно представить в виде

$$x = p^r \frac{m}{n}$$

где $r, n \in \mathbb{Z}$, m – положительное целое число, а n и m суть числа, взаимно простые с $p: (p, n) = 1, (p, m) = 1, (m, n) = 1$. Далее, p-адическая норма числа x дается выражением

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r} & \text{если} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Данная норма – удовлетворяет сильному неравенству треугольника, что показывает неархимедовость нормы:

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Из этого неравенства непосредственно вытекают следующие утверждения:

1) если $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x \pm y|_p = \max\{ |x|_p, |y|_p\}$;

2) если $|x|_p = |y|_p$, то $|x \pm y|_p \leq |x|_p$.

Согласно теореме Островского на поле рациональных чисел можно ввести только следующие нетривиальные (неэквивалентные) нормы: во-первых, p-адическую норму $|\cdot|_p$ для каждого простого числа p, во-вторых, обычную абсолютную величину $|\cdot|$. Заметим, что поле рациональных чисел не является полным относительно p-адической нормы. Пополнение поля рациональных чисел по p-адической норме приводит к полю p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Любое p-адическое число $x \neq 0$ можно единственным образом представить в каноническом виде $x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots)$, где $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и целые числа x_j удовлетворяют условиям $x_0 > 0$, $0 \leq x_j \leq p - 1$. В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$. Элементы множества $\mathbb{Z}_p = \{x \in_p : |x|_p \leq 1\}$ называются *p-адическими целыми числами*.

Таким образом, любое p-адическое число может быть записано в виде ряда $x = p^{\gamma(x)} \sum_{n=0}^{\infty} x_n p^n$, где x_n-целые числа, $0 \leq x_n \leq p - 1, \gamma(x) \in \mathbb{Z}$. Заметим, что такое представление однозначно. Если $\gamma(x) \geq 0$, то число x является целым p-адическим числом.

В качестве базиса открытых множеств метрического пространства $\mathbb{Q}_p$ можно взять систему множеств

$$a + p^n\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq \tfrac{1}{p^n}\}, \text{ где } a \in \mathbb{Q}_p, \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

Множества $a + p^n\mathbb{Z}_p$, где $a \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}$, называются *интервалами* и обозначаются $a + (p^n)$. Надо заметить, что открытое подмножество в $\mathbb{Q}_p$ компактно тогда и только тогда, когда оно есть объединение конечного числа интервалов. Такие подмножества, называются *компактно-открытыми*.

Определение 1. *Аддитивное отображение μ множества компактно-открытых подмножеств в X со значениями в $\mathbb{Q}_p$ называется p-адическим распределением на X. Если отображение μ будет и ограниченным, то оно называется мерой.*

Ограниченность отображения μ означает

$$sup\left\{ |\mu(V)|_p : V \subset X \right\} < \infty$$

Пусть $\xi = \left\{K^{(i)}, i \in I\right\}$ −некоторое разбиение множества $\mathbb{Z}_p$ т.е.

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i \in I} K^{(i)}, K^{(i)} \cap K^{(j)} = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Определение 2. *Распределение μ на $\mathbb{Z}_p$ называем ξ-периодическим, если $\mu(a + (p^n)) = \lambda_i^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$), для любых $a \in K^{(i)}$, где $\lambda_i^{(n)} \in \mathbb{Q}_p$, т.е. значение распределения $\mu(a + (p^n))$ при фиксированном n зависит только от класса принадлежности а.*

Пусть теперь X – компактно-открытое подпространство в $\mathbb{Q}_p$. Известна следующая

Теорема 1. *Каждое отображение μ множества интервалов, содержащихся в X, в поле $\mathbb{Q}_p$, для которого*

$$\mu\big(a + (p^n)\big) = \sum_{b=0}^{p-1} \mu\big(a + bp^n + (p^{n+1})\big)$$

при любом $a + (p^n) \subset X$, однозначно продолжается до p-адического распределения на X.

Для некоторых разбиений множества $\mathbb{Z}_p$ дан общий вид периодических p-адических мер. Основным результатом первой главы является следующие теоремы:

Теорема 2. 1) *любое $p\mathbb{Z}_p$-периодическое p-адическое распределение имеет вид*

$$\mu\big(a + (p^n)\big) = \frac{\lambda_i^{(1)}}{p^{n-1}},$$

где $a \in K^{(i)}, n \in \mathbb{N}$ и все $\lambda_i^{(1)} \in \mathbb{Q}_p$ – заданные числа, $i = 0,1,\dots,p-1$;

2) *любое $p^2\mathbb{Z}_p$ - периодическое p-адическое распределение имеет вид*

$$\mu(a+(p^n)) = \begin{cases} \frac{\lambda_i^{(2)}}{p^{n-2}}, & \text{при } n \geq 2, \\ \sum_{m=0}^{p-1} \lambda_{i+mp}^{(2)}, & \text{при } n = 1; \end{cases},$$

где $a \in K^{(i)}, n \in \mathbb{N}$ *и все* $\lambda_i^{(2)} \in \mathbb{Q}_p$ *заданные числа,* $i = 0,1,\dots,p^2-1$.

Теорема 3. *Любое* L_k*-периодическое* p*-адическое распределение имеет вид*

$$\lambda_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{\lambda_i^{(k+1)}}{p^{n-k-1}}, & \text{при } n > k, \\ \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j^{(k+1)}, & \text{при } n = k, \\ p^{k-n}\lambda_i^{(k)}, & \text{при } n < k, \end{cases}$$

где $a \in L^{(i)},\ n \in \mathbb{N}$ *и все* $\lambda_i^{(k+1)} \in \mathbb{Q}_p$ *– заданные числа,* $i = 0,1,\dots,p-1$.

Вторая глава диссертации **«Периодичность p-адических распределений и мер»** посвящена изучению периодических p-адических распределений и периодических p-адических мер.

В первом параграфе второй главы исследована мера Дирака на K-периодичность.

При $\lambda \neq 0$ мера Дирака μ_α, сосредоточенная в точке $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ (α фиксировано), определяется следующим образом:

$$\mu_\alpha(U) = \begin{cases} \lambda, \text{если } \alpha \in U, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве разбиения множества $\mathbb{Z}_p$ возьмем следующее

$$K = \{K^{(1)}, K^{(2)}\}, K^{(1)} = \{x: |x|_p = 1\}, K^{(2)} = \{x: |x|_p < 1\}.$$

В зависимости от принадлежности точки α множеству $K^{(1)}$ или $K^{(2)}$ имеем два случая. Исходя из этого, приводится доказательство следующих двух лемм:

Лемма 1. *Если* $\alpha \in K^{(1)}$, *то*

1) *при* $n \geq 2$ *или при* $n = 1, p \neq 2$ *существует* $a \in K^{(1)}$, *удовлетворяющее условию* $|\alpha - a|_p > \frac{1}{p^n}$;

2) *при* $n = 1, p = 2$ *не существует* $a \in K^{(1)}$ *удовлетворяющего условию* $|\alpha - a|_p > \frac{1}{p}$.

Лемма 2. *Если* $\alpha \in K^{(2)}$, *то*

1) *при* $n \geq 2$ *существует* $a \in K^{(2)}$, *удовлетворяющее условию*

$$|\alpha - a|_p > \frac{1}{p^n};$$

2) *при* $n = 1$ *не существует* $a \in K^{(2)}$ *удовлетворяющего условию*

$$|\alpha - a|_p > \frac{1}{p}.$$

И наконец, из доказанных лемм, применяя свойства распределения, доказывается

Теорема 4. *Для разбиения* $K = \{K^{(1)}, K^{(2)}\}$ *где* $K^{(1)} = \{x: |x|_p = 1\}$ *и* $K^{(2)} = \{x: |x|_p < 1\}$, *множества* $\mathbb{Z}_p$, *не существует* K*-периодическая мера Дирака.*

Далее будут исследованы периодические p-адические распределения для более общих разбиений множества $\mathbb{Z}_p$.

Во втором и третьем параграфах второй главы изучены распределения Бернулли. Можно написать несколько первых многочленов Бернулли:

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \ldots$$

Фиксируем некоторое целое неотрицательное число k и определим отображение $\mu_{B,k}$ на множестве интервалов $a + (p^n)$ формулой

$$\mu_{B,k}\big(a + (p^n)\big) = p^{n(k-1)} B_k\left(\frac{a}{p^n}\right).$$

Отображение $\mu_{B,k}$ называется k-м *распределением Бернулли*.

Дано доказательство следующей теоремы:

Теорема 5. *Функция* $\mu_{B,k}$ *продолжается до распределения на* $\mathbb{Z}_p$.

Для нескольких первых многочленов $B_k(x)$ можно получить следующие распределения:

$$\mu_{B,0}\big(a + (p^n)\big) = p^{n(0-1)} B_0\left(\frac{a}{p^n}\right) = p^{-n} \cdot 1 = \frac{1}{p^n},$$

$$\mu_{B,1}(a + (p^n)) = p^{n(1-1)} B_1\left(\frac{a}{p^n}\right) = 1 \cdot B_1(\frac{a}{p^n}) = \frac{a}{p^n} - \frac{1}{2},$$

$$\mu_{B,2}(a + (p^n)) = p^{n(2-1)} B_1\left(\frac{a}{p^n}\right) = p^n(\frac{a^2}{p^{2n}} - \frac{a}{p^n} + \frac{1}{6}).$$

Напомним, что $\mu_{B,0}$ называется распределением Хаара, $\mu_{B,1}$ называется распределением Мазура.

Далее, чтобы исследовать распределения Бернулли на ξ-периодичность для разбиения $\xi = \{K^{(i)}, i \in I\}$ множества $\mathbb{Z}_p$, т.е. при $i \neq j$,

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i \in I} K^{(i)}, K^{(i)} \cap K^{(j)} = \emptyset$$

доказана

Теорема 6. *Пусть распределение* $\mu(a + (p^n))$ *имеет вид*

$$\mu\big(a + (p^n)\big) = f_n(a),$$

где $f_n(x), x \in \mathbb{Z}_p$ *– такое отображение, что при всех* $c \in \mathbb{Q}_p$ *множество* $\{f_n^{-1}(c)\}$ *является не более чем счетным. Тогда не существует конечного или счетного разбиения* ξ, *относительно которого* μ *является* ξ*- периодической.*

Для ξ-периодичности распределения Бернулли $\mu_{B,k}$ должно выполняться

$$p^{n(k-1)} B_k\left(\frac{a}{p^n}\right) = \lambda_i^{(n)}, \text{если } a \in K^{(i)}.$$

Но уравнение $B_k\left(\frac{a}{p^n}\right) = p^{-n(k-1)}\lambda_i^{(n)}$ имеет не более чем конечное множество решений a. Поэтому при любом i число элементов $K^{(i)}$ должно быть конечным. Следовательно, для распределения Бернулли не существует конечного или счетного разбиения ξ, относительно которого распределение $\mu_{B,k}$ является ξ-периодической.

Можно увидеть, что все распределения из теорем 2 и 3 получены из конечных разбиений. Поэтому среди $p\mathbb{Z}_p$-периодических, $p^2\mathbb{Z}_p$-периодических и L_k-периодических распределений не существует распределения Бернулли.

Можно найти такое разбиение $\xi = \{K^{(i)}, i \in I\}$ множества $\mathbb{Z}_p$, что распределение Бернулли $\mu_{B,k}$ будет ξ-периодическим. В качестве $K^{(i)}$ возьмем следующие множества

$$K^{(c)} = \cup_n \left\{a \in \mathbb{Z}_p : B_k\left(\frac{a}{p^n}\right) = c\right\}, c \in \mathbb{Q}_p, \text{т.е.} \mathbb{Z}_p = \cup_{c \in \mathbb{Q}_p} K^{(c)},$$

как более чем счетное разбиение. Из уравнения

$$p^{n(k-1)} B_k\left(\frac{a}{p^n}\right) = \lambda_n^{(c)}$$

можно найти и явный вид таких распределений:

$$\lambda_n^{(c)} = p^{n(k-1)} \cdot c.$$

В третьей главе диссертации, названной «***p*-Адические распределения на решетках**», вводятся понятия p-адических гиббсовских распределений на решетке $\mathbb{Z}^d$ и на решетке Бете (дерево Кэли).

Рассмотрим совокупность точек $x = (x_1, \ldots, x_d), x_i \in Z, i = 1, \ldots, d.$ т.е. d-мерную целочисленную решетку $\mathbb{Z}^d$ с метрикой

$$\rho_1(x'; x'') = \max_{1 \le i \le d} |x'_i - x''_i|$$

или с эквивалентной к нему по сходимости метрикой

$$\rho_2(x'; x'') = \sum_{i=1}^{d} |x'_i - x''_i|.$$

Если для $x, y \in \mathbb{Z}^d$ выполняется $\rho_2(x; y) = 1$ то x и y называются *соседными точками* решетки и обозначается $< x, y >$.

Пусть $\Phi = \{-1, +1\}$ – множество спиновых значений. Для некоторого натурального число n множество

$$M_n = \{x = (x_1, \ldots, x_d), x_i \ge 0, i = 1, \ldots, d: \rho_1(x, x_0) \le n\}$$

называется фундаментальным квадратом. Точки из $\mathbb{Z}^d$, не принадлежащие квадрату M_n, и соседние некоторой точке из M_n, называются *контуром квадрата* M_n и обозначаются ∂M_n. *Конфигурацией* σ, определенной на множестве $\mathbb{Z}^d$ называется функция $x \in A \to \sigma(x) \in \Phi$. Ограничение σ на любое подмножество $V \subset Z^d$ обозначим $\sigma(V)$, т.е. $\sigma(V) = \{\sigma(x), x \in V\}$. Множество всех конфигураций на M_n обозначим Ω_n, множество всех конфигураций на $\mathbb{Z}^d$ обозначим Ω. Определим *p-адический гамильтониан* модели Изинга для конфигурации σ как

$$H(\sigma) = -J \sum_{<x,y>} \sigma(x)\sigma(y), \text{где} |J|_p \le \frac{1}{p}.$$

Условный гамильтониан $H_n(\sigma|\sigma')$ для модели Изинга на квадрате M_n имеет следующий вид

$$H_n(\sigma|\sigma') = -J \sum_{<x,y>_{x,y \in M_n}} \sigma(x)\sigma(y) - J \sum_{<x,y>_{x \in M_n, y \in \partial M_n}} \sigma(x)\sigma'(y),$$
$$\text{где } |J|_p \le \frac{1}{p}.$$

Для $a \in \mathbb{Q}_p$ и $r > 0$ обозначим

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p: |x - a|_p < r\}.$$

p-адический логарифм определяется как ряд

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x - 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(x - 1)^n n,$$

который сходится для $x \in B(1,1)$;

p-адическая экспонента определяется как

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n n!,$$

которая сходится для $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$.

Напомним, что p-адическое *условное распределение Гиббса* для кофигурации σ на квадрате M_n и σ' на $\mathbb{Z}^d \backslash M_n$, с гамильтонианом $H_n(\sigma|\sigma')$ определяется как

$$\mu_n(\sigma|\sigma') = \frac{\exp_p\left(-H_n(\sigma|\sigma')\right)}{\sum_{\sigma \in \Omega_n} \exp_p\left(-H_n(\sigma|\sigma')\right)}.$$

Рассмотрим следующие конфигурации

$$\sigma^+ = \{\sigma(x) \equiv 1\}, \sigma^- = \{\sigma(x) \equiv -1\}.$$

На квадрате M_n при фиксированной конфигурации σ из Ω при двух граничных условиях σ^+ и σ^-, соответственно, определим два p-адические гиббсовских условных распределения т.е.

$$\mu_n^\varepsilon(\sigma) = \mu(\sigma(M_n)|\sigma^\varepsilon(\mathbb{Z}^d \backslash M_n)) = \frac{\exp_p\left(-H_n^\varepsilon(\sigma)\right)}{z_n^\varepsilon}, \varepsilon = -, + \ ,$$

где

$$H_n^\varepsilon(\sigma) = -J \sum_{<x,y>_{x,y \in M_n}} \sigma(x)\sigma(y) - \varepsilon J \sum_{<x,y>_{x \in M_n, y \in \partial M_n}} \sigma(x)$$

и $$z_n^\varepsilon = \sum_{\sigma \in \Omega_n} \exp_p(-H_n^\varepsilon(\sigma)).$$

Лемма 3. *Если* $p \neq 2$, $|J|_p \leq \frac{1}{p}$, *то* $|H(\sigma)|_p \leq \frac{1}{p}$.

Лемма 4. *Если* $p \neq 2$, *то* $z_n^+ = z_n^-$ *и* $|z_n^+|_p = |z_n^-|_p = 1$.

Теорема 7. *Пусть* $p \neq 2$ *Предположим, что существуют пределы* $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n^\pm(\sigma) = \mu^\pm$, *тогда p-адические меры* $\mu^\pm$ *различны. Кроме того, для любого* $r \in N$ *можно найти конфигурации* σ *такие, что* $|\mu^+(\sigma) - \mu^-(\sigma)|_p = |J|_p \cdot p^{-r}$.

Теорема 8. *p-адическое распределение Гиббса для модели Изинга является ограниченным тогда и только тогда, когда* $p \neq 2$.

Третий параграф третьей главы посвящен построению нескольких p-адических распределений и мер на множестве p-адических целых чисел, применяя некоторые методы теории вещественнозначных мер Гиббса на дерево Кэли. Введен обычный лексикографического порядок $\prec$ для полудерева Кэли. Сопоставим для пути $\pi = \{x^0 = x_0 < x_1 < \cdots\}$ p-адическое число

$$t = t(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n p^n, \quad t \in \mathbb{Z}_p$$

Это соответствие является взаимно однозначным. Более того, частичную упорядоченность $\prec$ на множестве путей можно использовать для того, чтобы ввести частичную упорядоченность на $\mathbb{Z}_p$: а именно, для чисел $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_p$ будем говорить, что $t_1 \prec t_2$, если и только если они соответствуют путям π_1, π_2 таким, что $\pi_1 \prec \pi_2$. Доказано следующая теорема:

Теорема 9. *Пусть* $\pi = \{x^0 = x_0 < x_1 < \cdots\}$ *– бесконечный путь, представленный последовательностью* $i_0 i_1 i_2 \ldots$ *, и* μ_1*,* μ_2 *– заданные распределения на* $\mathbb{Z}_p$ *такие, что* $\mu_1 \neq \mu_2$*,*

$$\mu_1(a + (p^n)) = \mu_2(a + (p^n)), \text{ при всех } n \leq m(a, \pi) + 1;$$

тогда на $\mathbb{Z}_p$ *существует распределение* μ*, определенное следующим образом на интервалах:*

$$\mu\big(a + (p^n)\big) = \begin{cases} \mu_1\big(a + (p^n)\big), & \text{если} \quad \pi_a \prec \pi, \pi_a \cap \pi = \emptyset \\ & \text{или} \quad \pi_a \cap \pi \neq \emptyset, \quad n \leq m, \\ & \text{или} \quad \pi_a \cap \pi \neq \emptyset, \quad n \geq m+1, a_{m+1} < i_{m+1}, \\ \mu_2(a + (p^n)), & \text{если} \quad \pi \prec \pi_a, \pi_a \cap \pi = \emptyset \\ & \text{или } \pi_a \cap \pi \neq \emptyset, \quad n \geq m+1, a_{m+1} > i_{m+1}, \end{cases}$$

где $m = m(a, \pi)$ *и* π_a *есть путь, представляющий точку* $a \in \mathbb{Z}_p$ *(см. рис. 1).*

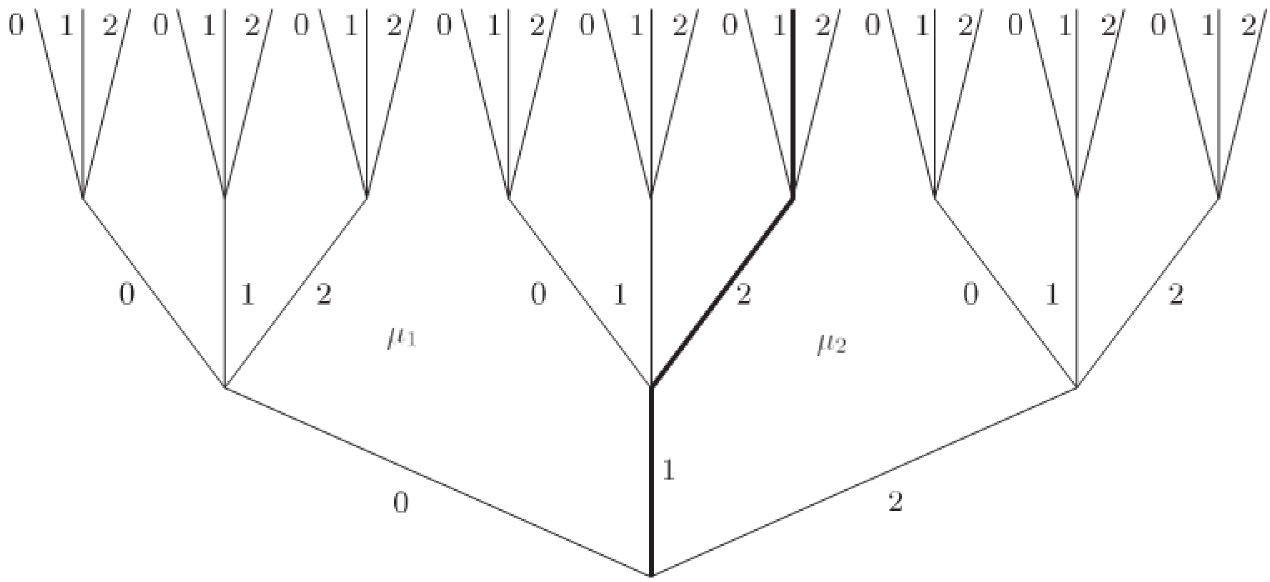


Рис. 1. Полудерево Кэли третьего порядка. Выделенный жирной линией путь π представляется последовательностью 121… . Слева (соответственно справа) от этого пути распределение μ совпадает с μ_1 (соответственно с μ_2).

В следующей теореме утверждается, что можно построить новое распределение, используя заданные распределения.

Теорема 10. *Пусть k – натуральное число. Предположим, что для каждого $t \in W_k$ на $\mathbb{Z}_p$ задано распределение ν_t и существует интервал $c + (p^{n_0})$, $n_0 \geq k$, такой, что $\nu_t(c + (p^{n_0})) \neq \nu_s(c + (p^{n_0}))$ для, по крайней мере, одной пары $t \neq s$, $t, s \in W_k$. Тогда на $\mathbb{Z}_p$ существует распределение $\mu^{(k)} = \mu^{(k)}[\nu_t, t \in W_k]$, которое отлично от ν_t при каждом $t \in W_k$.*

В следующей теореме мы приводим условия, при которых p-адические распределения, упомянутые в теоремах 9 и 10, будут ограниченными.

Теорема 11. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Распределение μ, упомянутое в теореме* 9, *ограничено, если и только если μ_1 и μ_2 ограничены.*

2. *Распределение $\mu^{(k)}$, упомянутое в теореме* 10, *ограничено, если и только если $\nu_t(a + (p^n))$ ограничено при любых $t \in W_k$ и $n \geq k$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению примеров периодических распределений на неархимедовых полях, исследованию ограниченности распределений, и были получены следующие результаты:

введено понятия периодических p-адических и периодических вещественных мер и для некоторых разбиений множества целых p-адических чисел найден общий вид периодических p-адических распределений;

для одного конкретного разбиения множества [0;1) найден общий вид периодических вещественных мер. Приведены примеры разбиений множества [0;1), на которых не существуют периодические вещественные меры;

введено понятие K-периодичности меры Дирака и доказано несуществование K-периодических мер Дирака. Найден общий вид периодических p-адических распределений для более общих разбиений множества целых p-адических чисел;

найдено необходимое условие существование периодических p-адических распределений для произвольных разбиений множества целых p-адических чисел и доказано, что среди найденных p-адических распределений не существует p-адических распределений Бернулли;

предложена разбиение, который относительно этого разбиения распределения Бернулли будут периодическими и дан общий вид таких периодических p-адических распределений Бернулли;

предложена метод построения несколько p-адических распределений с применением для p-адического случая некоторых методов теории вещественнозначных мер Гиббса на решетке Бете и исследовано ограниченность p-адических распределений.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMONOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

TUGYONOV ZOKHID TOLIBOVICH

CONSTRUCTION OF PERIODIC MEASURES OVER NON-ARCHIMEDEAN NORMED FIELDS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2023.1.PhD/FM834.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky.
The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Ayupov Shavkat Abdullaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician
Official opponents:	**Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Sattarov Iskandar Abu-alievich PhD on physical and mathematical Sciences
Leading organization:	**National University of Uzbekistan**

Defense will take place " 25 " April 2023 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Phone: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky (is registered № 158). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on " 11 " April 2023 year
(Mailing report № 2 on " 11 " April 2023 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

U.U.Jamilov
Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is to the construction of p-adic periodic distributions with values on the field of p-adic numbers and to find the boundedness conditions for the obtained distributions.

The object of the research work is Non-Archimedean and Archimedean measures, periodic measures, Bernoulli distributions, Dirac measures, p-adic Ising models.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the concepts of periodic measures over Archimedean and non-archimedean fields are introduced, a periodic real measure on the set [0;1) is constructed and for its arbitrary partition a necessary condition for the existence of a periodic real measure is proved;

the general form of periodic p-adic measures is found for some partitions of the set of p-adic integers and for arbitrary partitions of the set of p-adic integers, a necessary condition for the existence of periodic p-adic distributions is proved;

the non-periodicity of Bernoulli distributions with respect to at most countable partitions of the set of p-adic integers is proved and the boundedness of the found p-adic distributions are proved;

methods for constructing new distributions using already known p-adic distributions given on the set of p-adic integers are described.

Implementation of the research results. The results obtained on the construction of periodic measures over non-archimedean normalized fields have been put into practice in the following areas:

real periodic measures built over Archimedean fields and the periodicity of Bernoulli distributions with respect to a at most countable partition of a non-archimedean set of p-adic integers, as well as the boundedness of the found p-adic distributions were used in the research project "Chaotic and mixing p-adic dynamical systems associated with renormalized groups of lattice models" No. G0003247 (UAE, filed by the University of the United Arab Emirates on June 1, 2022) to find p-adic Gibbs measures on Cayley trees for various models with interactions of nearest neighbors. The application of these scientific results has made it possible to construct generalized Gibbs measures;

the general form of periodic p-adic measures for partitions of the set of p-adic integers and the existence of p-adic periodic distributions were used in the research project "The chaos implies the phase transition: p-adic dynamical system approaches to the quest for a new class of p-adic Gibbs measures" FRGS 17-027-0593 (Malaysia, reference from the International Islamic University of Malaysia, June 3, 2022) to describe the set of p-adic Gibbs measures associated with several models of statistical physics. The application of these scientific results has made it possible to find a parameter characterizing the presence of a phase transition for non-archimedean physical systems.

Approbation of the research results. The results of this study were discussed in 5 scientific and practical conferences, including 2 international and 3 republican ones.

Publications of the research results. Publication of research results. 12 scientific papers have been published on the topic of the dissertation, of which 7 are included in the list of scientific publications recommended by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending dissertations for the degree of Doctor of Philosophy, including 3 of them published in foreign journals and 4 in republican scientific publications.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of the introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 85 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. Тугёнов З.Т. Периодические p-адические меры // *Доклады Академии наук Республики Узбекистан.* − 2012, −№.1, − С. 3-6. (01.00.00. № 7).
2. Тугёнов З.Т. Периодичность распределения Бернулли // *Узбекский математический журнал.* −2013. −№.2, С.107-111. (01.00.00. № 6).
3. Tugyonov Z.T. On periodic p-adic distribution // *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications* Vol. 5, No. 3, 2013 P. 218-225. (3. Scopus. IF=0.355).
4. Тугёнов З.Т. Периодичность p-адической меры Дирака // *Доклады Академии наук Республики Узбекистан.* − 2013, −№.6, − С. 8-10. (01.00.00. № 7).
5. Tugyonov Z.T. Non Uniqueness of p-adic Gibbs Distribution for the Ising Model on the Lattice Z^d // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.* 2016, 9(1), P. 123–127. (3. Scopus. IF=0.204).
6. Розиков У.А., Тугёнов З.Т. Построение множества p-адических распределений // *Теоретическая и математическая физика.* − 2017. − Т.193, №.2, − С.333-342. (3. Scopus. IF=0.409).
7. Тугёнов З.Т. Периодические вещественные меры // *Бюллетень Института Математики*. – 2020, №.6,− С. 55-58. (01.00.00. № 17).

II bo‘lim (Часть II; Part II)

8. З.Т.Тугенов. Об одном классе периодических p-адических мер // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы», Ташкент, 12-14 сентября, 2012. – С. 217-218.
9. Z.T.Tugyonov. On Periodic distribution of Bernulli // Тезисы докладов международной конференции «Проблемы современной топологии и ее приложения», Ташкент , 20-24 мая, 2013. – С. 229-230.
10. Z.T.Tugyonov. A class of periodic p-adic distributions // SEOUL ICM 2014 International Congress of Mathematicians 13-21 august, Seoul-2014. SC08-17-01.
11. З.Т.Тугенов. О периодичность вещественных мер // Республиканская научная конференция «Актуальные проблемы стохастического анализа» 2021, часть II, Ташкент, 20-21 февраля, 2021. – С. 242-244.
12. З.Т.Тугенов. Построение p-адических распределений // Республиканская научная конференция «Новые теоремы молодых математиков – 2022», Наманган, 13-14 мая, 2022. – С. 87-88.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida
o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi nusxalari 2023-yil 27-martda tahrirdan o‘tkazilib,
o‘zbek, rus va ingliz tillardagi matnlari o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. “Times New Roman” garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 68/22.

Guvohnoma № 851684.
“Tipograff” MChJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.