V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

MAKEEV GEORGII SERGEEVICH

C*-ALGEBRALARI UCHUN KASPAROV TIPIDAGI GOMOTOP FUNKTORLAR

01.01.06 – Algebra

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

UDK: 519.98

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) Dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

MAKEEV GEORGII SERGEEVICH

C*-ALGEBRALARI UCHUN KASPAROV TIPIDAGI GOMOTOP FUNKTORLAR

01.01.06 – Algebra

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2023

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B2023.2.PhD/FM873 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash vebsahifasi: (http://kengash.mathinst.uz) va "ZiyoNet" ta'lim axborot tarmog'ida (http:www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbarlar:	**Ayupov Shavkat Abdullaevich** Fizika-matematika fanlari doktori, akademik **Manuilov Vladimir Markovich** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Eshmatov Farxod Xasanovich** fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim **Popelenskiy Fedor Yurievich** fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Andijon davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2023 yil " 14 " noyabr soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent shahar., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (168-raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent shahar., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil " 27 " oktabr kuni tarqatildi.

(2023 yil " 27 " oktabrdagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A.Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

J.K.Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f-m.f.d., katta ilmiy xodim

A.R.Hayotov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar rais o'rinbosari,
f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Kasparov KK-nazariyasi nokommutativ geometriya va topologiyada operatori K-nazariya hamda K-homologiyani birlashtiruvchi asosiy vosita hisoblanadi. KK-nazariya bu C^*-algebralar va $*$-gomomorfizmlar kategoriyasidan abel gruppalari kategoriyasiga bo‘lgan bivariant funktordir. Odatda KK-nazariya ta’rifi funksional analizda Fredgolm-Gilbert bimodullari orqali berilgan bo‘lib, u silliq ko‘philliklarda elliptik operatorlar indeks nazariyasi uchun tabiiy til bo‘lib xizmat qiladi.

Ma’lumki, Kasparov ko‘paytmasi indeks hisoblash muammosi bilan uzviy bog‘liqdir. KK-nazariyasining muhim jihatlaridan biri Kasparov ko‘paytmasi tushunchasi ta’rifining texnik murakkabligi hisoblanadi. Shuning uchun Konn-Xigson E-nazariyasi KK-nazariyaning soddaroq ko‘rinishi sifatida paydo bo'lgan. E-nazariyaning afzalligi shundaki, u abel kategoriyasi bo‘lib, Kasparov ko‘paytmasi esa ushbu kategoriyadagi morfizmlar kompozitsiyasiga mos keladi. Dissertatsiya ishida ba’zi metrik fazolar uchun Roe algebra funktorlari qurishga e’tibor qaratilgan. Bu algebralar E-nazariya hamda C^*-algebralar kengaytmalarini (Konn-Xigson qurilishi orqali) bog‘lovchi tabiiy vosita ekani ma‘lum bo‘ladi. E nazariyasining yangi ta’rifi bu funktorlar orqali aniqlangan ba’zi gomotop munosabatlar yordamida beriladi. Hozirgi kunda KK- yoki E-nazariyaning muqobil tavsiflarini berish, shuningdek, bu nazariyalarning C^*-algebralar kategoriyasidagi morfizmlar gomotopligini to‘g‘ri talqin qilishga imkon beruvchi xossalariga yaqin tushunchalarni qurish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan algebraik geometriya va funksional analizning dolzarb masalalariga e’tibor berib kelinmoqda. Ushbu fundamental tadqiqotlar doirasida Konn-Xigson E-nazariyasida nokommutativ geometriya, KK- yoki E-nazariyaning muqobil tavsiflarini berish hamda bu nazariyalarning C^*-algebralar kategoriyasidagi morfizmlar gomotopligini to‘g‘ri talqin qilishga imkon beruvchi xossalariga yaqin tushunchalarni qurish oid borasida salmoqli natijalarga erishildi. «Algebra va funksional analiz» fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifasi va faoliyat yo‘nalishi etib belgilandiga[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda ilmiy natijalardan ilm-fanning turdosh sohalarida foydalanish maqsadida C*-algebralari uchun Kasparov tipdagi gomotop funktorlarni qurish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son «O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha xarakatlar strategiyasi to‘g‘risida»gi Farmoni, 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son «Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi va 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta’lim

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish to‘g‘risida”gi 292-son qarori.

sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ–huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertasiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustivor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. 1920-yillarda kvant mexanikasi paydo bo‘lishi bilan fizik kattaliklar yordamida o‘lchanadigan tushunchalarni qayta talqin qilish uchun zarurat sezildi. Fizik sistema fazaviy fazosidagi odatdagi funksiyalar Gilbert fazosidagi nokommutativ operatorlar algebrasi bilan almashtirildi. Yarim asr o‘tib, A. Konn tomonidan matematikaning boshqa ko‘plab sohalariga qo‘llaniluvchi muqobil yondashuv taklif qilindi. Ushbu yondashuvda klassik fazo tushunchasi (masalan, topologiya yoki o‘lchov nazariyasidagi) nokommutativ algebralar bilan almashtiriladi. Matematikaning nazariy fizikadagi ko‘plab sohalarida tatbiqlarga ega bo‘lgan, nokommutativ geometriya deb nomlangan yo‘nalish hozir ham faol rivojlanishda davom etmoqda.

Shunday qilib, nokommutativ geometriya geometrik tushunchalarni operator algebralar usullari yordamida tadqiq qiladi. Misol uchun kompakt Hausdorff fazosining asosiy topologik xususiyatlari bu fazoda uzluksiz funksiyalarning algebrasi orqali to‘liq aniqlanadi. Boshqacha aytganda, kompakt Hausdorff fazolarida beriladigan ixtiyoriy tabiiy topologik konstruksiyalarni sof algebraik tuzilmalar orqali ifodalash mumkin. Masalan, X kompakt Hausdorff fazosining K nazariyasini geometrik jihatdan lokal trivial dastalar orqali, algebraik jihatdan esa koeffitsientlari $C(X)$ ga tegishli bo‘lgan matritsalar algebrasidagi proyektorlar orqali tasvirlash mumkin. O‘z navbatida, M.Atiyah, Braun-Duglas-Fillmor va G.Kasparovlar ko‘rsatganidek K-nazariyaga qo‘shma nazariya, K-gomologiya, elliptik operatorlarni tasniflashda ishlatilishi mumkin. K-nazariyasi va K-gomologiyasini juftlashtirish natijasi koeffitsiyentlari X fazodagi vektor dastadan bo‘lgan elliptik operatorning Fredgolm indeksini beradi. Bu ikki nazariya ajoyib tarzda Kasparov bivariant KK-nazariyasiga birlashadi.

Konnes va Xigsonning E nazariyasi Kasparovning KK-nazariyasiga ko‘ra qulayroq muqobil bo‘lib, ushbu nazariyada uzun aniq ketma-ketliklar mavjudligi bu nazariyaning afzalliklaridan biridir. Dastlab E-nazariyasi N. Xigson tomonidan ma’lum aksiomalarni qanoatlantiradigan universal kategoriya deb ta’riflangan. Biroq, keyinchalik A. Konnes va N. Xigsonlar asimptotik gomomorfizmlarning gomotopiyasi tushunchasidan foydalanib E-nazariya kategoriyasini aniq konstruksiyasini berishga erishishdi. A dan B bo‘lgan har bir asimptotik gomomorfizm $E(A,B)$ elementiga mos keladi, ammo E-nazariya kategoriyaning ixtiyoriy elementini olish uchun ustqurmalarga o‘tish kerak. Bunda E-nazariyasining ustqurmadan xoli tavsifi mavjudligi masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalaning mohiyati E-nazariya kategoriyasining shunday tuzilishini topishdan iboratki, unda strelkalar ustqurma ishtirokisiz $*$-gomomorfizm gomotopiya sinflari bilan ifodalanishi shart qilinadi. Masalan, M. Dadarlat ishida E-nazariyasi doirasida qoladigan ustqurmadan voz kechish mumkin bo‘lgan vaziyat tasvirlangan bo‘lsa, V. Manuilovning maqolasida esa bu boradagi yondashuv taklif qilingan. V. Manuilov va K. Tomsenning birgalikdagi ishida mualliflar C^*- algebralar kengaytmasining gomotop sinflari bilan ustma-ust tushadigan translyatsiyaga nisbatan invariant asimptotik gomomorfizmni gomotop sinflarining yarim gruppasining ustqurmasiz tavsifini taqdim etishdi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi A algebrani o‘zini o‘ziga $*$-gomomorfizmlarining ba’zi maxsus gomotop sinflari yordamida $E(A,B)$ gruppaning ustqurmasiz ko‘rinishini topish hamda E-nazariya kategoriyasida kompozitsiyani tasvirlovchi gomomorfizmlarning umumlashgan gomotop sinflari kompozitsiyasi uchun aniq formulani berishdan iboratdir.

Tadqiqotning vazifalari:

Roe algebralarida $*$-gomomorfizmlar yordamida E-nazariyaning ustqurmasiz tavsifini olish;

Roe algebralarida $*$-gomomorfizmlarning gomotop sinflarida gruppa tuzilishini tadqiq qilish;

asimptotik kengaytmalar va ularning E-nazariyaga bog‘liqligini o‘rganish.

Tadqiqotning obyekti. Funktor, kategoriya, Roe algebra, Roe algebralarida asimptotik koeffitsiyentli $*$-gomomorfizmlar.

Tadqiqotning predmeti. dissertatsiya ishida operatorlar K-nazariyasi, kategoriyalar nazariyasi va dag‘al geometriya usullari qo‘llanilgan.

Tadqiqotning usullari. Ushbu ishda operator algebralari nazariyasi, operator K-nazariyasi, dag‘al geometriya va kategoriyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

*-gomomorfizmlarning ba’zi maxsus gomotop sinflarini tavsiflashga imkon beradigan kategoriya qoidalar to‘plami rivojlantirilgan;

Roe algebralarida asimptotik koeffitsiyentli *-gomomorfizmlarining gomotop sinflari yordamida E-nazariyaning ustqurmasiz tavsifi olingan;

C*-algebralari uchun Kasparov KK-nazariyasi va teskari kengaytirish nazariyalari izomorfizmligining E-nazariya uchun muqobili qurilgan;

metrik fazolarda mos Roe algebralari gomotop sinflarida gruppa strukturasi mavjudligi uchun yetarli shartlar topilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. quyidagilardan iborat: Dissertasiyada olingan natijalar va foydalanilgan metodlar oliy o‘quv yurtlari magistrantlari va tayanch doktorantlari uchun maxsus kurslarda o‘qitilishi mumkin.

Tadqiqotning natijalarining ishonchliligi natijalar operatorlar algebralari nazariyasi va kategoriyalar nazariyasi usullaridan foydalanilganligi hamda matematik mulohazalarning qat’iyligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Natijalarining ilmiy ahamiyati birinchi navbatda ishning nazariy xususiyatga egaligi va $*$-gomomorfizmlarning gomotopiyalari bilan ishlashning yangi usullari rivojlantirilganligi, hamda K-gomologiya va dag‘al geometriyada keyingi rivojlanishni berishi bilan izohlanadi. Shuningdek, olingan natijalar E-nazariya, KK-nazariya, hamda C^*-algebralarning gomotopiyalari nazariyasida tatbiqlarga egadir.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati shundan iboratki, olingan natijalardan algebraik strukturalar nazariyasida qo‘llash mumkin. Shuningdek, dissertasiyada olingan natijalar va foydalanilgan metodlarni oliy o‘quv yurtlari magistrantlari va tayanch doktorantlari uchun maxsus kurslarda o‘qitish mumkin.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. C^*-algebralar uchun Kasparov tipidagi gomotop funktorlar bo‘yicha olingan natijalar asosida:

Roe algebralarida asimptotik koeffitsiyentli *-gomomorfizmlarining gomotop sinflari yordamida qurilgan E-kategoriya nazariyasidan OT-F4-42 raqamli “Yarim additiv-silliq funksionallar fazosining topologik va kardinal xossalari” mavzusidagi fundamental loyihada cheklangan geometriyaning diskret metrik fazolari uchun qo‘pol gomotopiyalarga nisbatan mos keladigan Roe funktorlarining gomotopiya o‘zgarmasligini isbotlashda foydalanilgan. (O‘zbekiston Milliy universiteti 2023 yil 8-sentabrdagi № 04/11-5328-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi Tixonov fazolari kategoriyasida ta’sir etuvchi kovariant funktorlarning kardinal invariantlari va ularning uzluksiz akslantirishlari bilan bog‘liq muammolarni hal qilish imkonini bergan;

*-gomomorfizmlarning maxsus gomotopik sinfini tavsiflashga imkon beruvchi kategoriyalar qoidalari to‘plamlariga oid natijalar OT-4-27 raqamli “Yordan uchliklari oldqo‘shma fazolari, sig‘imlar fazolari tavsiflari va funksiyalarni golomorf davom ettirish” mavzusidagi fundamental loyihada o‘z-o‘ziga qo‘shma siklik kompakt operatorlar va ularning tatbiqlarini o‘rganishda foydalanilgan. (Qoraqalpoq davlat universiteti 2023 yil 17-avgustdagi № 01-22-04/292-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi metrik kompaktda musbat-bir jinsli va normalangan, tartibni saqlovchi, sust additiv funksionallar fazosini tadqiq qilish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 2 ta xalqaro va 2 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi Dissertatsiya tadqiqot mavzusi bo‘yicha jami 8 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 4 ta, jumladan 3 tasi xorijiy jurnallarida, shuningdek, 4 ta ma’ruza tezislari ilmiy konferensiya materiallarida nashr etilgan.

Dissertatsiya tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, to‘rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 100 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismda dissertasiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan bo‘lib tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar hamda dissertasiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi “**E-nazariyasidagi dastlabki tushunchalar**” deb nomlangan bo‘lib, bu bob dissertatsiya uchun kerakli bo‘lgan belgilashlar va C^*-algebralar nazariyasidan, gomotopiya nazariyasi va kategoriya nazariyalaridan ba’zi kerakli natijalarni qisqacha xulosasini taqdim etadi. Shuningdek, E-nazariyasining asosiy qurilishlari: asimptotik gomomorfizmlar, asimptotik gomomorfizmlarning gomotopiya kategoriyasi va E-nazariya kategoriyalari tavsiflanadi.

Aytaylik B – C^*-algebra bo‘lsin, $C_b([1,+\infty),B)$ orqali $[1,+\infty)$ da aniqlangan va B to‘plamdagi qiymatlarni qabul qiluvchi uzluksiz chegaralangan funksiyalar C^*-algebrasini, $C_o([1,+\infty),B)$ bilan esa $C_b([1,+\infty),B)$ dagi cheksizlikda nolga intiluvchi funksiyalardan iborat idealni belgilaymiz. Ushbu $\mathfrak{A}B = C_b([1,+\infty),B)/C_0([1,+\infty),B)$ faktor algebra B ning *asimptotik algebrasi* deyiladi. $\mathfrak{A}$ funktor endofunktor ekanligini ko‘rish qiyin emas.

1-ta’rif. A dan $\mathfrak{A}^n B$ ga $*$-gomomorfizm asimptotik gomomorfizm deyiladi.

2-ta’rif. Aytaylik $\varphi_0, \varphi_1 \colon A \to \mathfrak{A}^n B$ asimptotik gomomorfizmlar berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A}^n B \\ A \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & \mathfrak{A}^n IB \arrow[u, "\mathrm{ev}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ & \mathfrak{A}^n B, \end{tikzcd}$$

diagrammani kommutativ diagrammagacha to‘ldiruvchi $\Phi \colon A \to \mathfrak{A}^n IB$ $*$-gomomorfizm mavjud bo‘lsa, $\varphi_0, \varphi_1 \colon A \to \mathfrak{A}^n B$ asimptotik gomomorfizmlar n-gomotopik deyiladi, bu yerda $I = \cdot \otimes C[0,1]$ – silindrik funktor.

Ushbu $\mathrm{hom}(A, \mathfrak{A}^n B)$ to‘plamda aniqlangan n-gomotopiya ekvivalentlik munosabati bo‘ladi va biz uni $\simeq_n$ bilan belgilaymiz. Biz A ni $\mathfrak{A}^n B$ ga o‘tkazuvchi $*$-gomomorfizmlarning n-gomotoplik sinflarini $[[A,B]]_n$ orqali belgilaymiz, ya’ni

$$[[A,B]]_n = \mathrm{hom}(A, \mathfrak{A}^n B)/\underset{n}{\simeq}.$$

3-ta’rif. Har qanday B – C^*-algebra uchun $\alpha_B: B \to \mathfrak{A}B$ orqali $b \in B$ elementni $\mathfrak{A}B$ dagi $(t \mapsto b) \in \mathfrak{T}B$ o‘zgarmas funksiyasi sinfiga o‘tkazadigan $*$-gomomorfizmni belgilaymiz. Xususan, α -ayniy Id funktordan $\mathfrak{A}$ ga tabiiy almashtirish bo‘ladi.

4-ta’rif. $[\![A, B]\!]$ orqali quyidagi sistemaning induktiv limitini belgilaymiz.

$$[\![A, B]\!]_0 \to [\![A, B]\!]_1 \to [\![A, B]\!]_2 \to$$

bu yerda akslantirishlar $n = 1,2, \ldots$ uchun $\alpha\mathfrak{A}^n$ bilan kompozitsiya orqali hosil qilinadi.

5-ta’rif. Biz E-nazariyani obyektlari seperabel C^*-algebralaridan va morfizmlari $[[SA, SB]]$ to‘plamning elementlaridan iborat bo‘lgan kategoriya sifatida aniqlaymiz, bu yerda $S = \cdot \otimes C(0,1)$ – ustqurma funktor.

“Tabiiy almashtirishlar gomotopiyalari” deb nomlangan 2-bobda $*$-gomomorfizmlarning ma’lum bir to‘plamlarida gomotopiya munosabatlari bilan ishlash uchun qulay vositalar majmui ishlab chiqiladi. Ushbu yondashuvda gomotopiya sinflarini manipulyatsiya qilish ma’lum xossalarni qanoatlantiradigan C^*-algebralarning endofunktorlarining ba’zi maxsus kategoriyasida tabiiy almashtirishlarning darajasiga ko‘tariladi.

$\mathfrak{A}$ funktor asimptotik gomomorfizmlarning gomotopiya tushunchasini aniqlashda foydalaniladi. Ushbu qurilish ma’lum darajada $\mathfrak{A}$ ga o‘xshash funktorlarning ancha keng sinfi uchun F-gomotopiya deb ataladigan ta’rif keltirishga undaydi.

6-ta’rif. Aytaylik A, B lar C^*-algebralar va F funktor C^*-algebralar kategoriyasida aniqlanga endofunktor bo‘lsin. Agar $\varphi_0, \varphi_1: A \to FB$ $*$-gomorfizmlar uchun ushbu

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A}^n B \\
A \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & \mathfrak{A}^n IB \arrow[u, "\mathrm{ev}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\
 & \mathfrak{A}^n B,
\end{tikzcd}$$

kommutativ diagramma mavjud bo‘lsa, $\varphi_0, \varphi_1: A \to FB$ $*$-gomorfizmlar F-gomotopik deyiladi ($\varphi_0 \simeq_F \varphi_1$).

Yuqorida aniqlangan F-gomotopiya ekvivalentlik munosabati bo‘lishi uchun F funktorga ba’zi shartlar qo‘yishimiz kerak. Biz bunday funktorlar sinfini 2-kategoriyaga aylantirish mumkin ekanligini ko‘rsatamiz.

C^* orqali C^*-algebralar va $*$-gomomorfizmlar kategoriyasini belgilaymiz. Aytaylik $\alpha: F_1 \Rightarrow F_2$ va $\beta: G_1 \Rightarrow G_2$ tabiiy almashtirishlar berilgan bo‘lsin. Ularning gorizontal kompozitsiyasini $\alpha\beta: F_1G_1 \Rightarrow F_2G_2$ orqali belgilaymiz. B obyektda $\alpha: F \Rightarrow G$ komponent uchun $\alpha B: FB \to GB$ ni yozamiz. Id orqali ayniy funktorni belgilaymiz.

7-ta’rif. Quyidagi xossalar o‘rinli bo‘lsa, $G \in\in \mathrm{C}^{*\mathrm{C}^*}$ funktor *yaxshi endofunktor* deyiladi:

1. G epimorfizmni saqlaydi;
2. Aytaylik

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A}^n B \\ A \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & \mathfrak{A}^n I B \arrow[u, "\mathrm{ev}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ & \mathfrak{A}^n B, \end{tikzcd}$$

φ_2 epimorfizm bo‘ladigan C^* dagi pulbek diagramma bo‘lsin. U holda Gp_1 va Gp_2 dan hosil qilingan $*$-gomomorfizm

$$G\left(B_1 \bigoplus_B B_2\right) \to GB_1 \bigoplus_{GB} GB_2$$

izomorfizm bo‘ladi;

3. quyidagi diagrammani kommutativ diagrammaga to‘ldiruvchi

$IG \Rightarrow GI$ tabiiy almashtirish mavjud

$$\begin{tikzcd} IG \arrow[rr, Rightarrow, "\kappa^G"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{ev}_j G"'] & & GI \arrow[dl, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_j"] \\ & G, & \end{tikzcd} \qquad j = 0, 1.$$

Yaxshi funktorlar va ularning tabiiy almashtirishlari kategoriya hosil qiladi va biz uni GEFC bilan belgilaymiz. Yaxshi endofunktorlar orasidagi tabiiy almashtirishlarning gomotopiyasini quyidagicha kiritamiz.

8-ta’rif. Bizga $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathsf{GEFC}(F, G)$ tabiiy almashtirishlar berilgan bo‘lsin. Quyidagi diagramma kommutativ bo‘ladigan $\gamma: F \Rightarrow GI$ tabiiy almashtirish mavjud bo‘lsa, γ_0, γ_1 tabiiy almashtirishlar *gomotopik* deyiladi:

$$\begin{tikzcd} & G \\ F \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma_1"] \arrow[r, Rightarrow, "\gamma"] \arrow[dr, Rightarrow, "\gamma_0"'] & GI \arrow[u, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_1"'] \arrow[d, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_0"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Gomotopiya ekvivalentlik munosabati bo‘ladi. Bundan tashqari yuqori va quyi ko‘paytmalar gomotopiyani saqlaydi. Shuning uchun, yaxshi endofunktorlar va ular orasidagi tabiiy transformatsiyalarning gomotopiya sinflari 2-kategoriya tashkil etadi va biz uni hGEFC ka’bi belgilaymiz.

Izoh. Quyidagini belgilaylik $[A, F, B] := \mathrm{hom}(A, FB)/\simeq_F$. U holda har bir $\alpha \in \mathsf{hGEFC}(F, G)$ tabiiy almashtirish barcha $A, B \in\in \mathsf{C}^*$ uchun

$$[A, F, B] \to [A, G, B]$$

akslantirishni hosil qiladi.

Dissertatsiyaning **“Roe algebralari”** deb nomlangan 3-bobida yetarlicha yaxshi metrik fazolar uchun Roe algebrasi funktorini quramiz. Ushbu funktor uchun shunday xossalar jamlanmasi isbotlanganki, bu funktor bilan avvalgi bobda ishlab chiqilgan metodlar orqali ham ishlash mumkin bo‘ladi.

9-ta’rif. Agar barcha $R > 0$ haqiqiy sonlar uchun R-radiusli sharlar tekis chegaralangan quvvatga ega bo‘lsa, ya’ni

$$\sup_{x\in X}|B_R(x)| < \infty.$$

bo‘lsa, X metrik fazo *chegaralangan geometriya*ga ega deyiladi.

10-ta’rif. Aytaylik X chegaralangan geometriyali diskret metrik fazosi bo‘lsin. Agar

$$\sup\left\{\mathrm{dist}(x,y): x,y \in X,\ b_{x,y} \neq 0\right\} < \infty.$$

shart bajarilsa, C^*-algebra elementlaridan tuzilgan $X \times X$-matritsa *chekli yoyilish*ga ega deyiladi.

Chekli yoyilmali B dagi norma bo‘yicha tekis chegaralangan elementlardan iborat matritsalar $l_2(X) \otimes B$ standart Gilbert B-modulidagi qo‘shma operatorlarining C^*-algebrasida qism $*$-algebra hosil qiladi. Uning yopilmasi X uchun koeffitsiyentlari B da bo‘lgan Roe algebrasi deyiladi va $\mathfrak{M}_X B$ ka’bi belgilanadi. Tekshirish mumkinki, $\mathfrak{M}_X - C^*$-algebralarning yaxshi endofunktori bo‘ladi.

Shuningdek, har bir C^*-algebra B uchun $\mathfrak{N}_X B = \mathfrak{M}_X B/\mathbb{K}B$ faktorni ko‘rib chiqishimiz mumkin, bu yerda $\mathbb{K}B$ yozuv $\mathbb{K}\big(l_2(X)\big) \otimes B$ ni bildiradi. $\mathfrak{N}_X - C^*$-algebralarning yaxshi endofunktori bo‘lishini tekshirish qiyin emas.

Quyidagi tabiiy almashtirishlarni keltiramiz.

$\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} S$ komponentalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\eta A\colon A \to \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} S A\colon a \mapsto \operatorname*{mat}_{i,j\in\mathbb{Z}}\left\{\alpha_i \alpha_j \otimes a\right\},$$

bu yerda $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset C_0(\mathbb{R})$ uzluksiz funksiyalar oilasi bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$0 \leq \alpha_i \leq 1;\quad \mathrm{supp}(\alpha_i) \subset \left[i - \tfrac{2}{3}, i + \tfrac{2}{3}\right];\quad \textstyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i\,(x)^2 \equiv 1.$$

$\varepsilon\colon S\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}$ komponentalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\varepsilon A\colon S\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} A \to \mathfrak{A}A\colon f \otimes m \mapsto \mathrm{as}[t \mapsto \theta(f(D_t)m)],$$

bu yerda $f(D_t) = \mathrm{diag}_{j\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{j}{t}\right)$, va $\theta\colon \mathbb{K}A \cong A$ turg‘un C^*-algebralarning izomorfizmi.

1-teorema. Quyidagi diagrammalar hGEFC da kommutativ bo‘ladi:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} \arrow[r, Rightarrow, "\eta\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}\alpha"'] & \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} S \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} \arrow[d, Rightarrow, "\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}\varepsilon"] \\ & \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{A}\mathbb{K}. \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, Rightarrow, "S\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha S"'] & S\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} S \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon S"] \\ & \mathfrak{A}\mathbb{K}S, \end{tikzcd}$$

Quyidagi tabiiy almashtrishlar uchun oldingi teorema natijasini osongina umumlashtirish mumkin:

$$\varepsilon\colon S^n\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^n} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}, \qquad \varepsilon'\colon S\mathfrak{N}_{\mathbb{N}} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K},$$
$$\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^n}S^n, \qquad \eta'\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}S.$$

“Tabiiy almashtirishlar gomotopik kategoriyasi va E-nazariya” deb nomlangan to‘rtinchi bobda oldingi bobdagi texnikani Konn-Xigson E-nazariyasiga qo‘llaymiz. E-tur kategoriyasini qurish uchun mavhum yondashuvni beriladi va E-nazariyasining ustqurmasiz ko‘rinishi taklif qilinadi. KK^1-nazariyasi va C^*-algebralarining teskari kengaytmalari nazariyasi o‘rtasidagi ma’lum izomorfizmning E nazariya analogini tuzamiz. Tegishli Roe algebralarida $*$-gomomorfizmlarning gomotop sinflariga o‘tishda gruppa tuzilishini hosil qiladigan ba’zi simmetriyali metrik fazolarni ham o‘rganamiz.

11-ta’rif. *Qat’iy monoid kategoriya* bu $\langle C, \square, e\rangle$ uchlikdir, bu yerda C - kategoriya, $\square\colon C \times C \to C$ - assotsiativ bifunktor:

$$\square(\square \times 1) = \square(1 \times \square)\colon C \times C \times C \to C,$$

va e - C kategoriyaning $\square$ uchun chap va o‘ng teskari obyekti :

$$\square(e \times 1) = \mathrm{id}_C = \square(1 \times e),$$

bu yerda $e \times 1$ va $1 \times e$ lar C dan $C \times C$ ga mos ravishda $b \mapsto (b, e)$ va $b \mapsto (e, b)$ formulalar bilan berilgan funktorlar uchun qisqa belgilashdir.

12-ta’rif. Aytaylik $\langle M, \square, e\rangle$ va $\langle M', \square', e'\rangle$ qat’iy monoid kategoriyalar bo’lsin. (F, F_2, F_0) uchlik M dan M' ga *monoid funktor* deyiladi, bu yerda

- $F\colon M \to M'$ - funktor;
- F_2 - M' dagi a va b larga nisbatan tabiiy morfizmlar oilasi bo’lib,

$$F_2(a, b)\colon F(a) \square' F(b) \to F(a \square b),$$

- $F_0\colon e' \to Fe$ - M' dagi morfizm,

quyidagi diagrammalar kommutativ bo‘lishi kerak:

$$\begin{tikzcd} Fa\square' Fb\square' Fc \arrow[r] \arrow[d] & F(a\square b)\square' Fc \arrow[d] \\ Fa\square' F(b\square c) \arrow[r] & F(a\square b\square c), \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Fb\square e' \arrow[r, equal] \arrow[d, "1\square F_0"'] & Fb \arrow[d, equal] \\ Fb\square Fe \arrow[r] & F(b\square e), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e'\square Fb \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_0\square 1"'] & Fb \arrow[d, equal] \\ Fe\square Fb \arrow[r] & F(b\square e). \end{tikzcd}$$

$\langle \mathrm{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle$ qat’iy monoid kategoriya ekanligini osongina tekshirish mumkin ($\cdot$ belgi endofunktorlarning kompozitsiyasi uchun qisqa belgilashdir).

Aytaylik $\langle J, \square, e\rangle$ kichik qat’iy monoid kategoriya va $\Gamma = (F, \gamma, \mathrm{Id})\colon \langle J, \square, e\rangle \to \langle \mathrm{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle$ monoid funktor bo’lsin. Kelgusida qulaylik uchun Fj ni F_j orqali, barcha $j, k \in\in J$ lar uchun $\gamma(j, k)$ ni $\gamma_{j,k}$ orqali belgilaymiz. A va B C^*-algebralar uchun $P(A, B)\colon J \to \mathbf{Set}$ funktorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$P(A,B)\colon \left(j \xrightarrow{f} k\right) \mapsto \left([A,F_j,B] \xrightarrow{(F_f)(F_jB)\circ\cdot} [A,F_k,B]\right).$$

Bundan tashqari, obyektlari turg‘un C^* −algebralardan va morfizmlari $\mathcal{F}_\Gamma(A,B) = \mathrm{colim}P(A,B)$ to‘plamning elementlaridan iborat bo‘lgan $\mathcal{F}_\Gamma$ kategoriyani aniqlaymiz. Agar biror $j \in\in J$ uchun $\varphi \in \left[A, F_j, B\right]$ bo‘lsa, u holda $[\varphi]_{\mathcal{F}_\Gamma}$ orqali $\mathcal{F}_\Gamma(A,B)$ dagi φ ning sinflarini belgilaymiz. Bu kategoriyadagi kompozitsiya quyidagicha aniqlanadi: agar $\varphi \in \left[A, F_j, B\right]$ va $\psi \in [B, F_k, C]$ bo‘lsa, u holda

$$[\psi]_{\mathcal{F}_\Gamma} \circ [\varphi]_{\mathcal{F}_\Gamma} = [\zeta]_{\mathcal{F}_\Gamma},$$

bu yerda ζ

$$A \xrightarrow{\varphi} F_jB \xrightarrow{F_j\psi} F_jF_kC \xrightarrow{\hat{\gamma}_{j,k}C} F\,(j\square k)\,C,$$

kabi aniqlanadi, bunda $\hat{\gamma}_{j,k} \in \mathtt{GEFC}$- $\mathtt{hGEFC}$ da gomotop sinfi $\gamma_{j,k}$ ga teng bo‘ladigan tabiiy almashtirishdir.

Aytyalik ω

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots,$$

graf va C_ω – ω orqali hosil qilingan erkin kategoriya bo‘lsin. $\langle C_\omega, +, 0\rangle$ kichik qat’iy monoid kategoriya bo‘lishini ko‘rsatish qiyinchilik tug‘dirmaydi.

U orqali $\mathtt{hGEFC}$ dan graflarning kategoriyasiga o‘tuvchi unutuvchi funktorni belgilaylik.

Aytaylik $S, M, G \in\in \mathtt{hGEFC}$ – obyektlar, $e\colon SM \Rightarrow G$, $h\colon \mathrm{Id} \Rightarrow MS$ va $a\colon \mathrm{Id} \Rightarrow G$ – $\mathtt{hGEFC}$ dagi $aG = Ga$ shartni qanoatlantiruvchi morfizmlar bo‘lsin. Soddalik uchun, (a, e, h) uchlikni τ orqali belgilaymiz va $\mu_\tau\colon \omega \to U\mathtt{hGEFC}$ funktorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\mu_\tau\colon (n \to n+1) \mapsto \begin{cases} U(h), & n = 0; \\ U(MaG^{n-1}S), & n \geq 1. \end{cases}$$

Erkin kategoriyaning universal xossasiga ko‘ra shunday yagona $F_\tau\colon C_\omega \to \mathtt{hGEFC}$ funktor mavjudki, quyidagi diagramma kommutativ bo‘ladi:

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r] \arrow[dr, "\mu_\tau"'] & UC_\omega \arrow[d, "UF_\tau"] \\ & U\mathtt{hGEFC}. \end{tikzcd}$$

Quyidagi monoid funktorni aniqlaylik:

$$\Gamma(\tau) = (F_\tau, \gamma, \mathrm{Id})\colon \langle C_\omega, +, 0\rangle \to \langle \mathtt{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle,$$

bu yerda

$$\gamma_{j,k} = MG^{j-1}eG^{k-1}S\colon MG^{j-1}SMG^{k-1}S \Rightarrow MG^{j+k-1}S.$$

2-teorema. Aytaylik $\mathrm{G}, \mathrm{M}, \mathrm{S} \in\in \mathrm{hGEFC}$ va $\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{h} \in \mathrm{hGEFC}$ yuqoridagidek aniqlansin.E' va E'' kategoriyalarni quyidagicha aniqlaylik: $\mathrm{E}'(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathcal{F}_{\Gamma(\mathrm{a},\mathrm{Id},\mathrm{Id})}(\mathrm{SA}, \mathrm{SB})$, $\mathrm{E}''(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathcal{F}_{\Gamma(\mathrm{a},\mathrm{e},\mathrm{h})}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. Agar

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, Rightarrow, "Sh"] \arrow[dr, Rightarrow, "aS"'] & SMS \arrow[d, Rightarrow, "eS"] \\ & GS, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, Rightarrow, "hM"] \arrow[dr, Rightarrow, "Ma"'] & MSM \arrow[d, Rightarrow, "Me"] \\ & MG, \end{tikzcd}$$

diagrammalar hGEFC da kommutativ bo‘lsa, u holda E' va E'' lar izomorfdir.

Quyidagi ikkita ma’lumotlar to’plamini ko’rib chiqaylik:

$$G = \mathfrak{A}\mathbb{K}, \qquad M = \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^n}, \qquad S = S^n = C_0(\mathbb{R}^n),$$
$$a = \tilde{\alpha}\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}, \qquad e = \varepsilon\colon S^n\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^n} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}, \qquad h = \eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^n}S^n,$$

va

$$G = \widetilde{\mathfrak{A}}, \qquad M = \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}, \qquad S = C_0(0, \infty),$$
$$a = \tilde{\alpha}\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}, \qquad e = \varepsilon'\colon S\mathfrak{N}_{\mathbb{N}} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}, \qquad h = \eta'\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}S.$$

Bu ma’lumotlar 2-teorema shartlarini qanoatlantirishini ko‘rsatish mumkin. Natijada biz E-nazariyaning ustqurmasiz tavsifini olamiz.

Natija. Aytaylik A separabel va B turg‘un C^*-algebralar bo’lsin. U holda

$$\mathrm{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \operatorname*{colim}_{\mathrm{k}}\left[\mathrm{A}, \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^{\mathrm{n}}}(\mathfrak{A}\mathbb{K})^{\mathrm{k}}\mathrm{S}^{\mathrm{n}}, \mathrm{B}\right] = [\mathrm{A}, \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^{\mathrm{n}}}\mathfrak{A}\mathbb{K}\mathrm{S}^{\mathrm{n}}, \mathrm{B}],$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \operatorname*{colim}_{\mathrm{k}}\left[\mathrm{A}, \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}(\mathfrak{A}\mathbb{K})^{\mathrm{k}}\mathrm{S}, \mathrm{B}\right] = [\mathrm{A}, \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}\mathfrak{A}\mathbb{K}\mathrm{S}, \mathrm{B}].$$

Yuqoridagi shartlarda ifodalangan E-nazariyali kategoriyadagi kompozitsiya mos ravishda $\varepsilon\colon \mathrm{S}^{\mathrm{n}}\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^{\mathrm{n}}} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}$ va $\varepsilon'\colon \mathrm{S}\mathfrak{N}_{\mathbb{N}} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}$ tabiiy almashtirishlar orqali hosil qilinadi.

B C^*-algebrasining multiplikatorlarini $\mathcal{M}B$ bilan belgilaylik. KK-nazariyasining toq gradiurovkasini Kasparov KK^1-sikllar nuqtai nazaridan aniqlash mumkin. $\mathbb{E}(A, B)$ bilan barcha $a \in A$ uchun

$$[v, \phi(a)] \in B, \qquad (v^* - v)\phi(a) \in B, \qquad (v^2 - v)\phi(a) \in B$$

munosabatlarni qanoatlantiradigan (v, φ) juftliklarni belgilaymiz, bu yerda $v \in \mathcal{M}B$ va $\phi\colon A \to \mathcal{M}B$. $\mathbb{E}(A, B)$ da $\sim$ gomotopiya munosabatini tabiiy ravishda aniqlash mumkin. $\mathbb{E}(A, B)$ to’plamining elementlari KK^1-sikllar deyiladi va Abel gruppa tuzilmasiga ega $\mathbb{E}(A, B)/\sim$ faktor gruppani $KK^1(A, B)$ bilan belgilaymiz.

Ma’lumki, $KK^1(A, B)$ tabiiy ravishda elementlari A dan QB gacha bo‘lgan $*$-gomomorfizmlarning barqaror ekvivalentlik sinflari bo’lgan $\mathrm{Ext}^{-1}(A, B)$ teskari kengaytmalarning gruppasiga izomorfdir, bu yerda $QB = \mathcal{M}B/B$ faktor B ning tojidir.

$q_B\colon \mathcal{M}B \to QB$ faktor gomomorfizm bo‘lsin. Quyida KK^1-sikllari va teskari kengaytmalar orasidagi bog’lanishni ko’rsatadigan teoremani keltiramiz.

3-teorema. Quyidagi abel gruppalar izomorfdir:

$$\mathrm{Ext}^{-1}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \to \mathrm{KK}^1(\mathrm{A},\mathrm{B}): \psi \mapsto [\mathrm{p},\phi],$$

bu yerda $\mathrm{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{M}_2\mathrm{B}$, $\phi: \mathrm{A} \to \mathcal{M}\mathrm{B}$, $\psi = \mathrm{q}_\mathrm{B}\big(\mathrm{p}\phi(\cdot)\big)$.

Endi shunga o‘xshash konstruksiyani E-nazariya kontekstida tavsiflaymiz.

Ravshanki, Roe algebralari turg‘unlashgan B C^*-algebraning multiplikatorlarida yotadi. Demak, Roe algebrasining $\mathfrak{N}_X B = \mathfrak{M}_X B/\mathbb{K}B$ kompakt operatorlar ideali bo‘yicha faktori umumlashtirilgan Kalkin algebrasining analogi sifatida qaralishi mumkin. Tabiiy metrikali natural sonlar metrik fazosidan $\mathfrak{N}_\mathbb{N}$ C^*-algebrani hosil qilamiz. U holda A ni $\mathfrak{N}_\mathbb{N}\mathfrak{A}B$ ga o‘tkazuvchi $*$-gomomorfizmlar gomotopik sinflarini kengaytmalarning analoglari sifatida qarash mumkin. O‘z navbatida, $\varphi: A \to \mathfrak{M}_\mathbb{Z}\mathfrak{A}B$ ko‘rinishdagi $*$-gomomorfizmlar gomotopik sinflari KK^1-nazariyaning analogi sifatida ham qaralishi mumkin. Haqiqatan ham, agar $p \in \mathbb{B}\big(l_2(\mathbb{Z})\big)$ akslantirish $l_2(\mathbb{Z}_+)$ qismfazoga proyeksiya bo‘lsa, u holda $[\varphi(a), p]$ kommutator har bir $a \in A$ uchun kompakt va (φ, p) juftlik KK^1-siklning ta’rifidagi barcha aksiomalarni qanoatlantiradi. Bu mulohazalar quyidagi ta’rifga turtki beradi.

13-ta’rif. Aytaylik A, B lar C^*-algebralar bo‘lib, A separabl va B turg‘un bo‘lsin. Ushbu

$$\mathrm{KK}^1_{cla}(A,B) := [A, \mathfrak{M}_\mathbb{Z}\mathfrak{A}, B],$$
$$\mathrm{Ext}(A,B) := [A, \mathfrak{N}_\mathbb{N}\mathfrak{A}, B]$$

abel gruppalari mos ravishda asimptotik sikllar va kengaytmalar orqali boshqariladi deyiladi.

Ushbu dissertatsiya ishining asosiy natijalaridan biri KK^1-nazariyasi va teskari kengaytmalar nazariyasi orasidagi izomorfizmning E nazariyali analogidir.

4-teorema. $\mathfrak{M}_\mathbb{Z} \Rightarrow \mathfrak{N}_\mathbb{N}$ tabiiy almashtirish orqali hosil qilingan $\mathrm{KK}^1_{\mathrm{cla}}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ dan $\mathrm{Ext}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ ga bo‘lgan akslantirish A va B ga nisbatan tabiiy bo‘lgan abel gruppa izomorfizmidir.

Eslatib o‘tamiz, E-nazariya kategoriyasining $\big[[SA, SB]\big]$ hom-to‘plamlaridagi gruppa tuzilishi chap tomondan ustki tuzilmani teskari o‘zgartirish orqali beriladi. Haqiqatan ham, agar

$$\varphi: SA \to \mathfrak{A}SB$$

$*$-gomomorfizm bo‘lsa, u holda gomotopiya teskarisi quyidagicha beriladi

$$f \otimes a \mapsto \varphi(f(-\,\cdot) \otimes a).$$

E-nazariyasining olingan ustqurmasiz tavsifida teskari elementlarning qurilishi $\mathfrak{M}_\mathbb{Z}$ funktor ta’rifidagi $\mathbb{Z}$ metrik fazosining ba’zi aniq simmetriyalaridan foydalanadi. Demak, $\varphi \in [A, \mathfrak{M}_\mathbb{Z}, B]$ elementlari uchun teskari element $\mathbb{Z}$ fazoni nolga yaqin aks ettirish orqali olinadi.

Dissertatsiyaning yakuniy qismida E-nazariyaning olingan ustqurmasiz tavsifidagi teskari elementlarni qurish uchun aniq usulni taqdim etamiz. Bundan tashqari $[A, \mathfrak{M}_X, B]$ $*$-gomomorfizmlarning gomotopik sinflarini bu sinflardan olingan har bir X fazo uchun gruppa tuzilishi imkonini beradigan simmetriyalarga ega bo‘lgan metrik fazolarning ma’lum bir sinfini kiritamiz.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishi Konn va Xigson E-nazariyasini Roe algebralaridagi asimptotik koeffitsiyentli *-gomomorfizmlar orqali tavsiflashga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. *-gomomorfizmlarning ba’zi maxsus gomotop sinflarini tavsiflashga imkon beradigan kategoriya qoidalar to‘plami rivojlantirilgan;
2. Roe algebralarida asimptotik koeffitsiyentli *-gomomorfizmlarining gomotop sinflari yordamida E-nazariyaning ustqurmasiz tavsifi olingan;
3. C*-algebralari uchun Kasparov KK-nazariyasi va teskari kengaytirish nazariyalari izomorfizmligini E-nazariya uchun analogi qurilgan;
4. metrik fazolarda mos Roe algebralari gomotop sinflarida gruppa strukturasi mavjudligi uchun yetarli shartlar topilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАКЕЕВ ГЕОРГИЙ СЕРГЕЕВИЧ

О ГОМОТОПИЧЕСКИХ ФУНКТОРАХ ТИПА КАСПАРОВА ДЛЯ C*-АЛГЕБР

01.01.06 – Алгебра

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2023

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образавания, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за № B2023.2.PhD/FM873.

Диссертация выполнена в институте Математики имена В. И. Романовского.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский, (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научные руководители:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** доктор физико-математических наук, академик **Мануйлов Владимир Маркович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Эшматов Фарход Хасанович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник **Попеленский Федор Юрьевич** доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Андижанский государственный университет**

Защита диссертации состоится «14» ноября 2023 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 168). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «27» октября 2023 года.
(протокол рассылки № 2 от « 27» октября 2023 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

А.Р.Хаётов
Заместитель председателя Научного
семинара при Научном совете
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. K-теория Каспарова является одним из наиболее мощных инструментов в некоммутативной геометрии и топологии, объединяющим операторную K-теорию и K-гомологию. KK-теория представляет собой бивариантный функтор из категории C^*-алгебр и $*$-гомоморфизмов в категорию абелевых групп. Стандартное определение K-теории в терминах фредгольмово-гильбертовых бимодулей происходит из функционального анализа и является естественным языком для теории индекса эллиптических операторов на гладких многообразиях.

Одной из важных особенностей K-теории является техническая сложность определения так называемого произведения Каспарова, которое тесно связано с проблемой вычисления индекса. E-теория Конна-Хигсона возникла как разновидность KK-теории с более простым построением этой композиции. Преимуществом E-теории является то, что она является абелевой категорией, и произведение Каспарова в этом подходе соответствует просто композиции морфизмов в данной категории. В работе построены функторы алгебр Роу для некоторых метрических пространств. Эти алгебры оказываются естественным контекстом, связывающим E-теорию и расширения C^*-алгебр (конструкция Конна-Хигсона). Новая картина E-теории строится с помощью гомотопий определенных в терминах этих функторов. В настоящее время к числу целевых научных исследований относится предоставление альтернативных описаний KK- или E-теории, а также построения близких по свойствам теорий в основе которых — правильное понимание гомотопности морфизмов в тех или иных категориях C^*-алгебр.

В нашей стране большое внимание уделяется актуальным проблемам алгебраической геометрии и функционального анализа, имеющим научное и практическое применение в фундаментальных науках. Большое внимание уделяется некоммутативной геометрии и ее важной части — E-теории Конна-Хигсона, даются альтернативные описания KK- или E-теории и разрабатываются конструкции с похожими свойствами. Проведение на уровне международных стандартов научных исследований по приоритетным направлениям математических наук, в частности алгебре и функциональному анализу, являются основной задачей и направлением деятельности Института математики им. В.И.Романовского[2]. Построение гомотопических функторов типа Каспарова для C*-алгебр играет важную роль в реализации этого постановления.

Тема и объект исследования настоящей диссертационной работы соответствуют поручениям, обозначенным в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистана от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

наук, организации, управления и финансирования научно исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан», и № УП-4708 от 7 мая 2020 года «О повышении качества обучения в сфере математики и о мерах развития научных исследований», а также настоящее диссертационное исследование в определенной мере служит реализации задач, определенных в постановлениях и других нормативных правовых актах , касающихся данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование проведено в области соответствующей приоритетному направлению в области науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и компьютерные науки».

Степень изученности проблемы. В двадцатых годах XX века с появлением квантовой механики возникла необходимость переосмысления понятия измеряемых физических величин. На замену привычным функциям на фазовом пространстве физической системы пришли некоммутативные алгебры операторов в гильбертовом пространстве. Спустя пятьдесят лет А. Конном был предложен подобный подход, применимый ко многим другим областям математики. Классическое понятие пространства (например в топологии или в теории меры) в данном подходе заменяется некоммутативными алгебрами. Данное чрезвычайно широкое направление в математике, собирательно называемое некоммутативной геометрией, продолжает активно развиваться и сейчас, имея применения во многих областях теоретической физики.

Итак, некоммутативная геометрия исследует геометрические концепты методами операторных алгебр. Так, например, основные топологические свойства компактного хаусдорфова пространства полностью определяются алгеброй непрерывных функций на нем. Иными словами, естественные топологические конструкции с участием компактных хаусдорфовых пространств и непрерывных отображений допускают чисто алгебраическую формулировку. К примеру, K-теорию для компактного хаусдорфова пространства X можно описывать как с помощью локально тривиальных расслоений, так и в терминах проекторов в матричных алгебрах с коэффициентами в $C(X)$. В свою очередь, K-гомология, теория, двойственная к K-теории, как было показано в работах Атьи Брауна-Дугласа-Филлмора и Каспарова, классифицирует эллиптические операторы. Для пространства X спаривание K-теории и K-гомологии даёт фредгольмов индекс эллиптического оператора с коэффициентами в векторном расслоении над X. Две теории удачно объединяются в бивариантной KK-теории Каспарова.

E-теория Конна-Хигсона появилась как более удобная альтернатива K-теории Каспарова, обладающая вдобавок еще и полезным свойством существования длинных точных последовательностей. Изначально E-теория была определена Хигсоном как универсальная категория, удовлетворяющая некоторым аксиомам, но потом в работе Конна и Хигсона была представлена конкретная реализация E-теоретической категории, в которой в качестве объектов выступают сепарабельные C^*-алгебры, а в качестве стрелок — классы гомотопности асимптотических гомоморфизмов между надстройками таких алгебр. Всякому асимптотическому гомоморфизму из A в B отвечает элемент из $E(A, B)$, однако для того, чтобы получить произвольный элемент E-теоретической категории, приходится переходить к надстройкам. Отсюда возникает вопрос так называемого безнадстроечного описания E-теории, суть которого заключается в нахождении некоторой картины E-теоретической категории, в которой стрелки представлены классами гомотопности $*$-гомоморфизмов без участия надстроек. К примеру, в работе М.Дадарлата описана ситуация, в которой от надстройки можно отказаться, оставаясь по-прежнему в рамках E-теории, в то время как в статье В.Мануйлова предлагается подход в духе KK-теории. В совместной работе В.Мануйлова и и К.Томсена представлена безнадстроечная картина для полугруппы классов гомотопности трансляционно инвариантных асимптотических гомоморфизмов, которая представляет собой полугруппу классов гомотопности расширений.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках научно-исследовательской программы Института математики им. В. И. Романовского.

Целью исследования является нахождение безнадстроечной картины E-теории в терминах специально определенных классов гомотопности $*$-гомоморфизмов из C^*-алгебры без участия надстроек и получение явной формулы для композиции таких обобщенных гомотопических классов $*$-гомоморфизмов, которая представляла бы композицию в E-теоретической категории.

Задачи исследования:

получить безнадстроечное описание E-теории в терминах $*$-гомоморфизмов в алгебры Роу;

исследовать групповую структуру на гомотопических классах $*$-гомоморфизмов в алгебры Роу;

исследовать асимптотические расширения и их связь с E-теорией.

Объект исследования: $*$-гомоморфизмы в алгебру Роу с асимптотическими коэффициентами.

Предмет исследования. В диссертации применяются методы операторной K-теории, теории категорий и грубой геометрии.

Методы исследования Основные методы исследования, использовавшиеся в данной работе включают теорию операторных алгебр, операторную E-теорию, грубую геометрию и теорию категорий.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

разработан категорный формализм, позволяющий описывать специальные гомотопические классы *-гомоморфизмов типа асимптотических;

найдено безнадстроечное описание E-теории в терминах гомотопических классов $*$-гомоморфизмов в алгебры Роу с асимптотическими коэффициентами;

построен E-теоретический аналог известного изоморфизма KK-теории Каспарова и теории обратимых расширений для C*-алгебр;

найдены условия на метрическое пространство, достаточные для существования групповой структуры при переходе к гомотопическим класса в соответствующую алгебру Роу.

Практические результаты исследования. Полученные результаты и использовавшиеся методы могут лечь в основу курса для магистров и аспирантов ВУЗов математической направленности.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов теории операторных алгебр и теории категорий, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Данная работа имеет теоретический характер. Автором были разработаны новые методы для работы с гомотопиями $*$-гомоморфизмов. Предложенный категорный подход допускает дальнейшее развитие в контексте грубой геометрии и K-гомологии. Полученные результаты могут найти приложения в E-теории, KK-теории и теории гомотопий операторных алгебр.

Полученные результаты и использовавшиеся методы могут лечь в основу для магистров и аспирантов ВУЗов математической направленности.

Внедрение результатов исследования. Опираясь на результаты, полученные для гомотопических функторов типа Каспарова для C*-алгебр:

Разработанная в рамках диссертации теория алгебр Роу с асимптотическими коэффициентами была использована для доказательства гомотопической инвариантности функторов Роу относительно грубых гомотопий для дискретных пространств ограниченной геометрии была использована в фундаментальном научном проекте «Топологические и кардинальные свойства пространства полуаддитивно-гладких функционалов» №OT-F4-42 (справка № 04/11-5328 от 8 сентября 2023 Национального университета Республики Узбекистан). Благодаря данному результат оказалось возможным решить задачи, связанные с кардинальными инвариантами ковариантных функторов, действующих на категории тихоновских пространств и непрерывных отображений.

Полученное в рамках диссертации аксиоматическое описание категорий функторов, позволяющих задавать специальные классы *-гомоморфизмов было использовано для исследования сопряженных циклических компактных операторов в фундаментальном проекте «Предкомпозитные пространства йордановых троек, описания ёмкостных пространств и голоморфное продолжение функций» №OT-4-27 (справка № 01-22-04/292 от 17 августа 2023 года Каракалпакского государственного университета). В результате было получено описание функтора Конна-Хигсона, что позволило исследовать пространство положительных однородных нормированных слабо аддитивных сохраняющих порядок функционалов для метрических компактов

Аппробация результатов исследования. Основные полученные результаты обсуждались на 2 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях

Публикации по теме исследования. По теме диссертации было опубликовано 8 работ, из них 4 входят в научных журналах, включенных в список научных изданий, рекомендованных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты кандидатских диссертаций, в том числе, из них 3опубликованов зарубежных журналах и 1 – в республиканском журнале.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность и значимость темы диссертации для приоритетных направлений развития науки и технологий в республике. Обозначена проблема исследования, указан уровень ее изученности, определены цель, задачи, объект и предмет исследования. Представлена научная новизна и практические результаты исследования, подчеркнута теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Предоставлена информация о публикации результатов исследования, а также о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная «**Предварительные сведения и *E*-теория**», является вводной и содержит обозначения и краткий список фактов из теории C^*-алгебр, теории гомотопий и теории категорий. Коротко описаны основные конструкции из E-теории: асимптотические гомоморфизмы, гомотопическая категория асимптотических гомоморфизмов, E-теоретическая категория.

Пусть B — C^*-алгебра, обозначим через $C_b([1,+\infty),B)$ C^*-алгебру непрерывных ограниченных функций на $[1,+\infty)$ со значениями в B, а через $C_0([1,+\infty),B)$ — идеал в $C_b([1,+\infty),B)$ состоящий из функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Факторалгебра $\mathfrak{A}B = C_b([1,+\infty),B)/C_0([1,+\infty),B)$ называется *асимптотической алгеброй* для B.

Можно проверить, что $\mathfrak{A}$ — эндофунктор в категории C^*-алгебр.

Определение 1. Будем называть $*$-гомоморфизм $A \to \mathfrak{A}^n B$ *асимптотическим гомоморфизмом*.

Определение 2. Два асимптотических гомоморфизма $\varphi_0, \varphi_1: A \to \mathfrak{A}^n B$ называются n-гомотопными если существует $*$-гомоморфизм $\Phi: A \to \mathfrak{A}^n IB$, дополняющий до коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A}^n B \\ A \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & \mathfrak{A}^n IB \arrow[u, "\mathrm{ev}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ & \mathfrak{A}^n B, \end{tikzcd}$$

где $I = \cdot \otimes C[0,1]$ — функтор цилиндра.

Отношение n-гомотопии на множестве $\hom(A, \mathfrak{A}^n B)$ оказывается отношением эквивалентности, которое мы будем обозначать через $\simeq_n$. Через $\big[[A,B]\big]_n = \hom(A, \mathfrak{A}^n B)/\simeq_n$ мы будем обозначать классы n-гомотопности $*$-гомоморфизмов из A в $\mathfrak{A}^n B$.

Определение 3. Для всякой C^*-алгебры B введем $*$-гомоморфизм $\alpha_B: B \to \mathfrak{A}B$, сопоставляющий элементу $b \in B$ класс постоянного отображения $(t \mapsto b) \in \mathfrak{T}B$ в $\mathfrak{A}B$. На самом деле α является естественным преобразованием из тождественного функтора Id в $\mathfrak{A}$.

Определение 4. Обозначим через $[\![A,B]\!]$ индуктивный предел диаграммы

$$[\![A,B]\!]_0 \to [\![A,B]\!]_1 \to [\![A,B]\!]_2 \to \cdots,$$

где стрелки порождаются композицией с $\alpha\mathfrak{A}^n$, $n = 1,2,\ldots$.

Определение 5. Определим E-теорию как категорию, объектами которой выступают сепарабельные C^*-алгебры, а стрелками из A в B — элементы множества $\big[[SA, SB]\big]$, где $S = \cdot \otimes C(0,1)$ — функтор надстройки.

Во второй главе диссертации, названной **«Гомотопии естественных преобразований»**, разрабатывается некоторый удобный инструментарий для работы с отношениями гомотопности на некоторых специальных множествах $*$-гомоморфизмов. В данном подходе работа с классами гомотопности поднимается на уровень естественных преобразований в категории эндофункторов, обладающих некоторыми свойствами.

Функтор $\mathfrak{A}$ был нужен нам для того, чтобы определить гомотопии асимптотических гомоморфизмов. Данная конструкция дает мотивировку для рассмотрения так называемых F-гомотопий для достаточно широкого класса функторов, в некотором смысле похожих на $\mathfrak{A}$.

Определение 6. Пусть A, B — C^*-алгебры, и пусть F — эндофунктор в категории C^*-алгебр. Два $*$-гомоморфизма $\varphi_0, \varphi_1 \colon A \to FB$ называются F-*гомотопными* ($\varphi_0 \simeq_F \varphi_1$), если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A}^n B \\ A \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & \mathfrak{A}^n IB \arrow[u, "\mathrm{ev}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ & \mathfrak{A}^n B, \end{tikzcd}$$

Для того, чтобы n-гомотопность была отношением эквивалентности, необходимо наложить некоторые условия на F. Далее мы покажем, что класс таких функторов можно превратить в 2-категорию.

Обозначим через C^* категорию C^*-алгебр и $*$-гомоморфизмов. Пусть $\alpha \colon F_1 \Rightarrow F_2$ и $\beta \colon G_1 \Rightarrow G_2$ пара естественных преобразований. Будем записывать их горизонтальное произведения через $\alpha\beta \colon F_1 G_1 \Rightarrow F_2 G_2$. Кроме того, с через $\alpha B \colon FB \to GB$ мы будет обозначать компоненту $\alpha \colon F \Rightarrow G$ на объекте B. Будем записывать с помощью символа Id тождественный функтор.

Определение 7. Мы называем $G \in\in \mathrm{EFC}$ *хорошим эндофунктором*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. G сохраняет эпиморфизмы;
2. Пусть

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A}^n B \\ A \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & \mathfrak{A}^n IB \arrow[u, "\mathrm{ev}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ & \mathfrak{A}^n B, \end{tikzcd}$$

— диаграмма пулбэка в категории C^*, причем φ_2 эпиморфно. Тогда $*$-гомоморфизм

$$G\left(B_1 \bigoplus_B B_2\right) \to GB_1 \bigoplus_{GB} GB_2,$$

порожденный Gp_j, $j = 1,2$, является изоморфизмом;

3. Существует естественное преобразование $\kappa^G: IG \Rightarrow GI$, дополняющее до коммутативных следующие диаграммы в категории $\mathtt{EFC}$:

$$\begin{tikzcd} IG \arrow[rr, Rightarrow, "\kappa^G"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{ev}_j G"'] & & GI \arrow[dl, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_j"] \\ & G, & \end{tikzcd} \qquad j = 0, 1.$$

Хорошие функторы и естественные преобразования между ними образуют категорию, которую мы будем обозначать как $\mathtt{GEFC}$. Для естественных преобразований между хорошими эндофункторами можно ввести понятие гомотопии следующим образом.

Определение 8. Будем говорить, что естественные преобразования $\mathtt{GEFC} \ni \gamma_0, \gamma_1: F \Rightarrow G$ *гомотопны*, если существует естественное преобразование $\gamma: F \Rightarrow GI$, такое что в категории $\mathtt{GEFC}$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & G \\ F \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma_1"] \arrow[r, Rightarrow, "\gamma"] \arrow[dr, Rightarrow, "\gamma_0"'] & GI \arrow[u, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_1"'] \arrow[d, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_0"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Гомотопность является отношением эквивалентности. Кроме того, вертикальное и горизонтальное произведения сохраняют отношение гомотопности. Следовательно, хорошие эндофункторы и классы гомотопности естественных преобразований между ними образуют 2-категорию, которую мы обозначим через $\mathtt{hGEFC}$.

Замечание. Положим $[A, F, B] := \hom(A, FB)/\simeq_F$. Тогда любое естественное преобразование $\alpha \in \mathtt{hGEFC}(F, G)$ очевидным образом порождает отображение

$$[A, F, B] \to [A, G, B]$$

для всех $A, B \in\in \mathtt{C}^*$.

В третьей главе диссертации, названной «**Алгебры Роу»** мы построим функтор алгебры Роу для достаточно хороших метрических пространств. Для этого функтора будет доказан набор свойств, благодаря которым с ним можно будет работать методами, разработанными в предыдущем разделе.

Определение 9. Говорят, что метрическое пространство X обладает *ограниченной геометрией* если для всякого $R > 0$ все шары радиуса R имеют равномерно ограниченные мощности:

$$\sup_{x \in X} |B_R(x)| < \infty.$$

Определение 10. Пусть X дискретное метрическое пространство ограниченной геометрии. Говорят, что $X \times$-матрица с элементами в C^*-алгебре обладает конечным распространением, если

$$\sup\{\mathrm{dist}(x, y): x, y \in X,\ b_{x,y} \neq 0\} < \infty.$$

Матрицы конечного распространения с равномерно ограниченными по норме элементами из B образуют $*$-подалгебру в C^*-алгебре допускающих сопряжение операторов в стандартном гильбертовом B-модуле $l_2(X) \otimes B$. Ее замыкание называется алгеброй Роу для X с коэффициентами в B. Мы будем обозначать ее через $\mathfrak{M}_X B$. Можно проверить, что $\mathfrak{M}_X$ хороший эндофунктор в категории C^*-алгебр.

Также для всякой C^*-алгебры B можно рассматривать факторалгебру $\mathfrak{N}_X B = \mathfrak{M}_X B/\mathbb{K}B$ (здесь $\mathbb{K}B$ обозначает $\mathbb{K}\big(l_2(X)\big) \otimes B$). Эндофунктор $\mathfrak{N}_X$ также является хорошим.

Введем следующие естественные преобразования:

- $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} S$ с компонентами, заданными формулой
$$\eta A\colon A \to \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} S A\colon a \mapsto \operatorname*{mat}_{i,j\in\mathbb{Z}}\{\alpha_i \alpha_j \otimes a\},$$

где $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset C_0(\mathbb{R})$ — семейство непрерывных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

  - $0 \leq \alpha_i \leq 1$;
  - $\operatorname{supp}(\alpha_i) \subset \left[i - \frac{2}{3}, i + \frac{2}{3}\right]$;
  - $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i\,(x)^2 \equiv 1$.

- $\varepsilon\colon S\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}$ с компонентами, заданными формулой
$$\varepsilon A\colon S\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} A \to \mathfrak{A}A\colon f \otimes m \mapsto \mathrm{as}[t \mapsto \theta(f(D_t)m)],$$

где $f(D_t) = \operatorname{diag}_{j\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{j}{t}\right)$, и $\theta\colon \mathbb{K}A \cong A$ — изоморфизм стабильных C^*-алгебр.

Теорема 1. Следующие диаграммы коммутативны в hGEFC:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} \arrow[r, Rightarrow, "\eta\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}\alpha"'] & \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} S \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} \arrow[d, Rightarrow, "\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}\varepsilon"] \\
 & \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{A}\mathbb{K}.
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, Rightarrow, "S\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha S"'] & S\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} S \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon S"] \\
 & \mathfrak{A}\mathbb{K}S,
\end{tikzcd}$$

Результат предыдущей теоремы несложно обобщить на следующие естественные преобразования:
$$\varepsilon\colon S^n\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^n} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}, \qquad \varepsilon'\colon S\mathfrak{N}_{\mathbb{N}} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K},$$
$$\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^n} S^n, \qquad \eta'\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{N}_{\mathbb{N}} S.$$

В четвертой главе диссертации, названной **«Гомотопическая категория естественных преобразований и *E*-теория»** мы применяем технику, разработанную в предыдущей главе к E-теории Конна-Хигсона. Мы приведем подход абстрактного построения категории типа E и предложим безнадстроечную картину E-теории. Будет построен E-теоретический аналог известного изоморфизма KK^1-теории и теории обратимых расширений C^*-алгебр. Мы также исследуем метрические пространства, обладающей определенными симметриями, порождающими групповую структуру при переходе к гомотопическим классам $*$-гомоморфизмов в соответствующие алгебры Роу.

Определение 11. *Строго моноидальной категорией* называется тройка $\langle C, \square, e\rangle$, где C — категория, $\square\colon C \times C \to C$ — бифунктор, удовлетворяющий аксиоме ассоциативности:
$$\square(\square \times 1) = \square(1 \times \square)\colon C \times C \times C \to C,$$

и e — объект категории C, являющийся левой и правой единицей для $\square$:

$$\square(e \times 1) = \mathrm{id}_C = \square(1 \times e),$$

где $e \times 1$ и $1 \times e$ обозначают функторы из C в $C \times C$, заданные формулами $b \mapsto (b, e)$ и $b \mapsto (e, b)$ соответственно.

Определение 12. Пусть $\langle M, \square, e\rangle$ и $\langle M', \square', e'\rangle$ — пара строго моноидальных категорий. *Моноидальным функтором* из M в M' называется тройка (F, F_2, F_0), где

- $F: M \to M'$ — функтор;
- F_2 — семейство морфизмов в M':
$$F_2(a, b): F(a) \square' F(b) \to F(a \square b),$$
- естественных по a и b;
- $F_0: e' \to Fe$ — морфизм в M',

причем должна коммутировать следующая диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
Fa\Box' Fb\Box' Fc \arrow[r] \arrow[d] & F(a\Box b)\Box' Fc \arrow[d] \\
Fa\Box' F(b\Box c) \arrow[r] & F(a\Box b\Box c),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Fb\Box e' \arrow[r, equal] \arrow[d, "1\Box F_0"'] & Fb \arrow[d, equal] \\
Fb\Box Fe \arrow[r] & F(b\Box e),
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e'\Box Fb \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_0\Box 1"'] & Fb \arrow[d, equal] \\
Fe\Box Fb \arrow[r] & F(b\Box e).
\end{tikzcd}$$

Легко проверить, что $\langle \mathrm{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle$ — строго моноидальная категория ($\cdot$ обозначает композицию функторов).

Пусть $\langle J, \square, e\rangle$ — некоторая малая строго моноидальная категория, и пусть $\Gamma = (F, \gamma, \mathrm{Id}): \langle J, \square, e\rangle \to \langle \mathrm{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle$ — моноидальный функтор. В дальнейшем для удобства мы будем обозначать Fj через F_j, и $\gamma(j, k)$ через $\gamma_{j,k}$ для всех $j, k \in\in J$. Для C^*-алгебр A и B определим функтор $P(A, B): J \to$ **Set** следующей формулой

$$P(A,B):\ \left(j \xrightarrow{f} k\right) \mapsto \left([A, F_j, B] \xrightarrow{(F_f)(F_j B)\circ\cdot} [A, F_k, B]\right).$$

Кроме того, определим категорию $\mathcal{F}_\Gamma$, в которой в качестве объектов выступают стабильные C^*-алгебры, а в качестве стрелок из A в B — элементы множества $\mathcal{F}_\Gamma(A, B) = \mathrm{colim} P(A, B)$. Если $\varphi \in [A, F_j, B]$ для некоторого $j \in \in J$, то через $[\varphi]_{\mathcal{F}_\Gamma}$ мы будем обозначать класс φ в $\mathcal{F}_\Gamma(A, B)$. Композиция в такой категории определена следующим образом: если $\varphi \in [A, F_j, B]$, $\psi \in [B, F_k, C]$, то

$$[\psi]_{\mathcal{F}_\Gamma} \circ [\varphi]_{\mathcal{F}_\Gamma} = [\zeta]_{\mathcal{F}_\Gamma},$$

где ζ определяется как композиция

$$A \xrightarrow{\varphi} F_j B \xrightarrow{F_j \psi} F_j F_k C \xrightarrow{\hat\gamma_{j,k} C} F(j \Box k) C,$$

в которой $\hat{\gamma}_{j,k} \in \mathrm{GEFC}$ — некоторое естественное преобразование, гомотопический класс которого в hGEFC совпадает с $\gamma_{j,k}$.

Пусть ω — следующий граф:

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots,$$

и пусть C_ω — свободная категория, порожденная этим графом. Легко проверить, что $\langle C_\omega, +, 0\rangle$ — малая строго моноидальная категория.

Обозначим через U забывающий функтор из hGEFC в категорию графов. Пусть $S, M, G \in\in \mathrm{hGEFC}$, и пусть $e: SM \Rightarrow G$, $h: \mathrm{Id} \Rightarrow MS$, $a: \mathrm{Id} \Rightarrow G$ — стрелки из hGEFC, причем $aG = Ga$. Для краткости обозначим тройку (a, e, h) через τ и определим функтор $\mu_\tau: \omega \to U\mathrm{hGEFC}$ соотношением

$$\mu_\tau: (n \to n+1) \mapsto \begin{cases} U(h), & n = 0; \\ U(MaG^{n-1}S), & n \geq 1. \end{cases}$$

Из универсального свойства свободной категории следует, что существует единственный функтор $F_\tau: C_\omega \to \mathrm{hGEFC}$, такой что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r] \arrow[dr, "\mu_\tau"'] & UC_\omega \arrow[d, "UF_\tau"] \\ & U\mathtt{hGEFC}. \end{tikzcd}$$

Зададим моноидальный функтор

$$\Gamma(\tau) = (F_\tau, \gamma, \mathrm{Id}): \langle C_\omega, +, 0\rangle \to \langle \mathrm{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle,$$

где

$$\gamma_{j,k} = MG^{j-1}eG^{k-1}S: MG^{j-1}SMG^{k-1}S \Rightarrow MG^{j+k-1}S.$$

Теорема 2. Пусть $\mathrm{G}, \mathrm{M}, \mathrm{S} \in\in \mathrm{hGEFC}$, $\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{h} \in \mathrm{hGEFC}$ — функторы и гомотопические классы естественных преобразований, определенные выше. Определим категории E' и E'' следующим образом: $\mathrm{E}'(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathcal{F}_{\Gamma(\mathrm{a}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})}(\mathrm{SA}, \mathrm{SB})$, $\mathrm{E}''(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathcal{F}_{\Gamma(\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{h})}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. Тогда, если в hGEFC коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, Rightarrow, "Sh"] \arrow[dr, Rightarrow, "aS"'] & SMS \arrow[d, Rightarrow, "eS"] \\ & GS, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, Rightarrow, "hM"] \arrow[dr, Rightarrow, "Ma"'] & MSM \arrow[d, Rightarrow, "Me"] \\ & MG, \end{tikzcd}$$

то E' и E'' изоморфны.

Рассмотрим следующие два набора данных:

$G = \mathfrak{A}\mathbb{K}$, $\quad M = \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^n}$, $\quad S = S^n = C_0(\mathbb{R}^n)$,

$a = \tilde{\alpha}: \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}$, $\quad e = \varepsilon: S^n\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^n} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}$, $\quad h = \eta: \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^n}S^n$,

и

$G = \widetilde{\mathfrak{A}}$, $\quad M = \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}$, $\quad S = C_0(0, \infty)$,

$a = \tilde{\alpha}: \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}$, $\quad e = \varepsilon': S\mathfrak{N}_{\mathbb{N}} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}$, $\quad h = \eta': \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}S$.

Можно показать, что они удовлетворяют условиям теоремы 2.

Следствием оказывается безнадстроечная картина E-теории.

Следствие. Пусть A и B — C^*алгебры, A сепарабельна, B стабильна. Тогда

$$\mathrm{E}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \operatorname*{colim}_{\mathrm{k}}\left[\mathrm{A}, \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^{\mathrm{n}}}(\mathfrak{A}\mathbb{K})^{\mathrm{k}}\mathrm{S}^{\mathrm{n}}, \mathrm{B}\right] = [\mathrm{A}, \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^{\mathrm{n}}}\mathfrak{A}\mathbb{K}\mathrm{S}^{\mathrm{n}}, \mathrm{B}],$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \operatorname*{colim}_{\mathrm{k}}\left[\mathrm{A}, \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}(\mathfrak{A}\mathbb{K})^{\mathrm{k}}\mathrm{S}, \mathrm{B}\right] = [\mathrm{A}, \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}\mathfrak{A}\mathbb{K}\mathrm{S}, \mathrm{B}].$$

Композиция в E-теоретической категории, записанной таким образом задана в терминах естественных преобразований $\varepsilon: \mathrm{S}^{\mathrm{n}}\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}^{\mathrm{n}}} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}$ и $\varepsilon': \mathrm{S}\mathfrak{N}_{\mathbb{N}} \Rightarrow \mathfrak{A}\mathbb{K}$ соответственно.

Обозначим через $\mathcal{M}B$ мультипликаторы C^*-алгебры B. KK-теория Каспарова в случае нечетной градуировки может быть определена в терминах так называемых каспаровских KK^1-циклов. Обозначим через $\mathbb{E}(A,B)$ множество всевозможных пар (v,φ), где $v \in \mathcal{M}B$, $\phi: A \to \mathcal{M}B$ удовлетворяют соотношениям:

$$[v,\phi(a)] \in B, \qquad (v^* - v)\phi(a) \in B, \qquad (v^2 - v)\phi(a) \in B$$

для всех $a \in A$. На $\mathbb{E}(A,B)$ естественным образом может быть определено отношение гомотопности $\sim$. Элементы множества $\mathbb{E}(A,B)$ называют KK^1-циклами, а фактормножество $\mathbb{E}(A,B)/\sim$, наделенное структурой абелевой группы, обозначается как $KK^1(A,B)$.

Известно, что $KK^1(A,B)$ естественно изоморфна группе обратимых расширений $\mathrm{Ext}^{-1}(A,B)$, элементы которой суть классы стабильной эквивалентности $*$-гомоморфизмов из A в QB, где $QB = \mathcal{M}B/B$ — корона C^*-алгебры B.

Обозначим через $q_B: \mathcal{M}B \to QB$ $*$-гомоморфизм факторпроекции. Известно, что существует следующий изоморфизм абелевых групп:

Теорема 3. *Существует изоморфизм абелевых групп*
$$Ext^{-1}(A,B) \to KK^1(A,B): \psi \mapsto [p,\phi],$$
где
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}M_2B, \qquad \phi: A \to \mathcal{M}B, \qquad \psi = q_B\big(p\phi(\cdot)\big).$$

Опишем теперь аналогичную конструкцию в контексте E-теории.

Алгебры Роу, очевидно, лежат в мультипликаторах стабилизации C^*-алгебры B. Следовательно, фактор алгебры Роу по идеалу компактных операторов $\mathfrak{N}_X B = \mathfrak{M}_X B/\mathbb{K}B$ можно рассматривать как аналог обобщенной алгебры Калкина. Беря в качестве метрического пространства натуральные числа с естественной метрикой, получим C^*-алгебру $\mathfrak{N}_{\mathbb{N}}B$. Тогда гомотопические классы $*$-гомоморфизмов $*$-гомоморфизмов из A в $\mathfrak{N}_{\mathbb{N}}\mathfrak{A}B$ можно рассматривать как аналоги расширений. В свою очередь, гомотопические классы $*$-гомоморфизмов вида $A \to \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{A}B$ можно рассматривать в качестве аналога KK^1-теории. Действительно, если $p \in \mathbb{B}\big(l_2(\mathbb{Z})\big)$ — проектор на подпространство $l_2(\mathbb{Z}_+)$, то коммутатор $[\varphi(a),p]$ компактен для всякого $a \in A$, и пара (φ,p) удовлетворяет всем аксиомам из определения KK^1-цикла. Данные наблюдения дают мотивировку для следующего определения.

Определение 13. Пусть A, B — C^*-алгебры, A сепарабельна, B стабильна. Назовем абелевы группы
$$\mathrm{KK}^1_{cla}(A,B) := [A, \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{A}, B],$$
$$\mathrm{Ext}(A,B) := [A, \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}\mathfrak{A}, B]$$

контролируемыми локально асимптотическими циклами и расширениями соответственно.

Одним из главных результатов этой работы является E-теоретический аналог известного изоморфизма между KK^1-теорией Каспарова и теорией обратимых расширений.

Теорема 4. Отображение из $\mathrm{KK}^1_{\mathrm{cla}}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ в $\mathrm{Ext}(\mathrm{A},\mathrm{B})$, порожденное естественным преобразованием $\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} \Rightarrow \mathfrak{N}_{\mathbb{N}}$ является гомоморфизмов абелевых групп, естественным по A и B.

Напомним, что групповая структура на hom-множествах $[[SA,SB]]$ E-теоретической категории задана с помощью отражения надстройки, стоящей слева. Действительно, если

$$\varphi: SA \to \mathfrak{A}SB$$

— $*$-гомоморфизм, то гомотопически обратный к нему может быть задан формулой

$$f \otimes a \mapsto \varphi(f(-\cdot) \otimes a).$$

В конструкции полученного нами безнадстроечного описания E-теории мы используем очевидные симметрии метрического пространства $\mathbb{Z}$ в определении функтора $\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}$. Таким образом, обратный к элементу $\varphi \in [A,\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}},B]$ может быть получен с помощью отражения пространства $\mathbb{Z}$ относительно нуля.

В заключительной части нашей работы мы предлагаем явный метод построения обратных элементов в безнадстроечном описании E-теории. Кроме того, мы введем некоторый класс метрических пространств, обладающий определенными симметриями, которые позволяют снабдить множество гомотопических классов $*$-гомоморфизмов $[A,\mathfrak{M}_X,B]$ структурой абелевой группы для всякого такого пространства X.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена описанию E-теории Конна-Хигсона в терминах гомотопических классов $*$-гомоморфизмов в алгебры Роу с асимптотическими коэффициентами.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Разработан категорный формализм, позволяющий описывать специальные гомотопические классы $*$-гомоморфизмов типа асимптотических.
2. Найдено безнадстроечное описание E-теории в терминах гомотопических классов $*$-гомоморфизмов в алгебры Роу с асимптотическими коэффициентами.
3. Построен E-теоретический аналог известного изоморфизма KK-теории Каспарова и теории обратимых расширений для C^*-алгебр.
4. Найдены условия на метрическое пространство, достаточные для существования групповой структуры при переходе к гомотопическим класса в соответствующую алгебру Роу.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MAKEEV GEORGII SERGEEVICH

ON KASPAROV TYPE FUNCTORS FOR C*-ALGEBRAS

01.01.06 – Algebra

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2023

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the of Ministers of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2023.2.PhD/FM873.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V. I. Romonovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisors:	**Ayupov Shavkat Abdullaevich** Doctor of physical and mathematical sciences, Academician **Manuilov Vladimir Markovich** Doctor of physical and mathematical sciences, Docent
Official opponents:	**Eshmatov Farkhod Khasanovich** Doctor of physical and mathematical sciences, Senior researcher **Popelensky Fedor Yurievich** Candidate of physical and mathematical sciences, Docent
Leading organization:	**Andijan State University**

Defense will take place "14" November 2023 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered № 168). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on "27" October 2023 year

(Mailing report № 2 on "27" October 2023 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific
Council on award of scientific
degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

A.R.Hayotov
Deputy Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work was to find an unsuspended picture of the group $E(A, B)$ in terms of some special homotopy classes of $*$-homomorphisms from the algebra A itself, rather than its suspensions and to find an explicit formula for the composition of such generalized homotopy classes of homomorphisms, which would represent the composition in the E-theory category.

The research object: $*$-homomorphisms into Roe algebras with asymptotic coefficients.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

a category formalism which makes it possible to describe some special homotopy classes of $*$-homomorphisms developed;

an unsuspended description of E-theory in terms of homotopy classes of $*$-homomorphisms into Roe algebras with asymptotic coefficients;

an E-theory analog of the well-known isomorphism of Kasparov's KK-theory and the theory of invertible extensions was constructed;

some conditions on the metric space that are sufficient for the existence of a group structure at the level of homotopy classes in the corresponding Roe algebra were found.

Implementation of the research results.

Based on the results obtained for Kasparov-type homotopy functors for C*-algebras:

the E-category approach was used to prove the homotopy invariance of Roe functors with respect to coarse homotopies for discrete metric spaces of bounded geometry in the fundamental project "Topological and cardinal properties of the space of semi-additive-smooth functionals" numbered OT-F4-42. (Reference No. 04/11-5328 of the National University of Uzbekistan dated September 8, 2023). The application of this scientific result made it possible to solve problems related to cardinal invariants of covariant functors acting in the category of Tikhonov spaces and their continuous maps;

the axiomatic description of the categories which yields a special homotopy class of *-homomorphisms was used to study adjoint cyclic compact operators and their applications in the fundamental project "Prejoined spaces of Jordan triples, descriptions of capacity spaces and holomorphic continuation of functions" numbered OT-4-27 (Karakalpak State University reference No. 01-22-04/292 of August 17, 2023). The application of the scientific result gave the description of the Conn-Higson functors to study the space of positive-homogeneous and normalized, order-preserving, weakly additive functionals for metric compacts.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The general volume of the thesis is 100 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; part I)

1. Makeev G. S. Yet another description of the Connes-Higson functor // Mathematical Notes. – 2020. – 107. – P. 97-108. (3. Scopus IF=0.49)
2. Makeev G. S. Invertibility for some homotopy invariant functors related to Roe algebras // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2021. – 28:2. – P. 244-250. (3. Scopus IF=0.76).
3. Makeev G. S. An unsuspended description of the E-theory category // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2023. – 78(1). – P. 1-14. (3. Scopus IF=0.61)
4. Makeev G. S. Cycles and extensions in E-theory // Uzbek Mathematical Journal. – 2023. – 67(1). – P. 79-86. (01.00.00; №6)

II bo'lim (II часть; Part II)

5. Макеев Г. С. Еще одно описание функтора Конна-Хигсона // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020». Второе издание: переработанное и дополненное / Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронныйресурс] – М.: МАКС Пресс. – Москва. 8-12 апреля, 2019
6. Макеев Г. С. Об обратимости в гомотопически инвариантных функторах, связанных с алгебрами Роу // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020». Второе издание: переработанное и дополненное / Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В., Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс – М.: МАКС Пресс, – Москва. 8-12 апреля, 2020.
7. Makeev G. S. Cycles and extensions in E-theory // International Conference «Ali Qushji - An outstanding ambassador of the scientific school of Ulugh-Beg», –Samarkand. September 21-22, 2023. – P. 134-135.
8. Makeev G. S. Roe functors preserve homotopies // International Conference «Ali Qushji - An outstanding ambassador of the scientific school of Ulugh-Beg», –Samarkand. September 21-22, 2023. – P. 135-137.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida 2023 yil 16 oktabrda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 47/23.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.