В. И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ХОЛБОЕВ АЗАМАТ ҒАНИШЕРОВИЧ

МУНТАЗАМ КЎПЁҚЛИКНИНГ БИР ЎЛЧАМЛИ СИНЧИДА ЗИДДИЯТЛИ БОШҚАРУВГА ОИД КОМБИНАТОРИК МАСАЛА

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

УДК: 517.97

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В. И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ХОЛБОЕВ АЗАМАТ ҒАНИШЕРОВИЧ

МУНТАЗАМ КЎПЁҚЛИКНИНГ БИР ЎЛЧАМЛИ СИНЧИДА ЗИДДИЯТЛИ БОШҚАРУВГА ОИД КОМБИНАТОРИК МАСАЛА

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.2.PhD/FM339 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В. И. Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Азамов Абдулла** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Эшматов Фарход Хасанович** физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим
	Ахмедов Одилжон Сахибжонович физика-математика фанлари номзоди, катта илмий ходим
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси В. И. Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил « 5 » апрель соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В. И. Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (134-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2022 йил « 14 » март куни тарқатилди.
(2022 йил « 14 » мартдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У. А. Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж. К. Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

Р. Р. Ашуров
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раис ўринбосари,
ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Бошқарув жараёнларининг математик назарияси замонавий математиканинг муҳим ва долзарб йўналишларидан биридир. Бу назария табиат ва жамиятдаги, ҳамда техникадаги динамик жараёнларни математик моделлаштиришга асосланади. Кўплаб бошқарув жараёнларида системанинг ўзини тутишида ноаниқликнинг борлигини ёки бошқарувга зиддиятини ҳисобга олиш зарур ва уларни моделлаштириш зиддятли бошқарув масаласига келтирилади. Бу каби моделлар дифференциал ўйинлар дейилади. Иқтисодий рақобат, узлуксиз такрорланувчи ҳарбий низолар ва ўзгарувчан бозор муносабатлари қувиш ва қочиш масалалари билан таснифланади, ҳамда дифференциал ўйинлар назариясининг ўрганиш объекти бўлади.

Дифференциал ўйинлар динамиклик, бошқарувчанлик, зиддиятлилик, оптималлик, маълумотлилик каби факторларни ҳисобга олиши зарурлиги сабабли мураккаб математик тушунча ҳисобланади. Бундай факторлар дифференциал ўйинлар назариясида алоҳида ёндашувларни ишлаб чиқишни тақазо қилади. Бундай ёндашув аввало дифференциал ўйинлар назариясининг муҳим бўлими бўлган қувиш-қочиш масалаларини ечишга боғлиқ. Диссертация мавзусининг долзарблиги сунъий интеллект яратиш, тармоқдаги қидирув масалалари билан боғлиқ бўлган графларда дифференциал ўйинлар назариясини ривожлантиришдан иборат.

Мамлакатимизда сўнгги йилларда инновацион янгиланишда муҳим аҳамиятга эга бўлган геология, биология, математика ва физикани ривожлантиришга эътибор кучайтирилди. Амалдаги қонун хужжатларда эҳтимоллар назарияси, математик анализ, дифференциал тенгламалар назарияси, математик физика, математик моделлаштириш, алгебра ва бошқарувнинг математик назарияси бўйича илмий тадқиқотларни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга эканлиги таъкидланган[1]. Қарор ижросини таъминлашда мавжуд бошқарув системаларини алмаштириш мақсадида бошқарув жараёнларининг математик назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сон Фармони, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сон Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив–ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг устивор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот иши республика фан ва технологияларни ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. «Дифференциал ўйин» тушунчаси дастлаб америкалик математик Р. Айзекснинг XX асрнинг 50-йиллари бошларида АҚШнинг RAND корпорацияси буюртмаси бўйича тадқиқотларида киритилган. У дифференциал ўйинларнинг аниқ масалаларини ечишда классик вариацион ҳисобни, аниқроқ айтганда Гамильтон-Якоби тенгламаси (кейинчалик, Айзекс-Беллман тенгламаси деб аталди) учун характристикалар усулини қўллаган. Р. Айзекснинг тадқиқотлари 1965 йилда «Дифференциал ўйинлар» номли монографиясида нашр этилиб, унда қисман назарий масалалар ва кўплаб мисоллар кўриб чиқилган. Шу вақтнинг ўзида Л. С. Понтрягин ва унинг шогирдлари томонидан оптимал жараёнларнинг математик назарияси яратилди. Кейинчалик, ушбу назарияни ривожлантириш асосида зиддиятли бошқарувли масалалар сифатида қарашни таклиф қилди. Бундай қараш Е. Ф. Мишенко, Р. В. Гамкрелидзе, М. И. Зеликин, Н. Ю. Сатимов, М. С. Никольский, А. А. Чикрия, А. А. Азамов, Е. С. Половинкин, А. П. Пономарев, П. К. Гусятников, Н. Л. Григоренко ва бошқалар томонидан ривожлантирилди. Чекли вақт оралиқларида дифференциал тенгламаларнинг умумий назарияси Н. Н. Красовский томонидан яратилиб, Ю. С. Осипов, А. Б. Куржанский, А. В. Кряжимский, А. И. Субботин, Н. Н. Субботина, Е. И. Третьяков, В. Н. Ушаков, Ю. С. Лукоянов, А. М. Тарасьев ва бошқалар томонидан ривожлантирилди. Н. Н. Красовскийнинг ёндашувида содда дифференциал ўйин иккита боғлиқсиз масалаларга, яъни биринчи ўйинчига нисбатан иккинчи ўйинчининг қаршилигида бошқариш ва иккинчи ўйинчига нисбатан биринчи ўйинчининг қаршилигини инобатга олгандаги бошқариш масалаларига бўлинади. Лекин бу ерда Понтрягиннинг ёндашувидан фарқли равишда иҳтиёрий табиат стратегиясига йўл қўйилади. Дифференциал ўйинлар назариясига яна бир ёндашув Дж. фон Нейманнинг ўйинлар назарияси асосида ривожланди. Бундай ёндашув кўп иштирокчилик дифференциал ўйинларни тадқиқ қилишда самарали бўлиб, Л. А. Петросян, Н. Н. Петров, А. Фридман, Т. Эллиот, Ж. Калтон ва бошқалар томонидан ўрганилди. Л. С. Понтрягиннинг ғояларини ва ўйинлар назариясининг ёндашувларини мос келтирувчи ёндашув Б. Н. Пшеничников томонидан киритилиб, А. А. Азамов, В. В. Остапенко, Г. В. Томский, А. З. Фазилов ва бошқалар томонидан такомиллаштирилди.

Оптимал бошқарув ва дифференциал ўйинлар бўйича илмий мактаб Ўзбекистонда 1970 йилларда Н. Ю. Сатимов томонидан шакллантирилди. Мазкур мактаб вакиллари томонидан қувиш-қочиш дифференциал ва дискрет ўйинлари ечишнинг янги усуллари тақдим этилди. Дифференциал ўйинларга бағишланган кўплаб ишларда қийматлари компакт тўпламда қаралиб, бошқарув функцияси ўлчовли ўйинларга қўллаш мумкин дейилган. Кўплаб амалий дифференциал ўйинларда фазавий нуқтаси берилган ёпиқ тўплам ичида қолмаслиги керак. Бундай талаб фазавий чегаралаш дейилади ва бундай чегаралаш дифференциал ўйинларни ечишни жуда мураккаблаштиради. Шунингдек, бундай ўйинларни самарали ҳал қилиш усуллари шу кунгача ишлаб чиқилмаган. Мана шу сабабларга кўра фазавий чегаралашларга эга дифференциал ўйинлар синфларини турли ҳил соддалаштирувчи фаразлар билан ўрганиш табиий. Бундай синфларга геометрик графлардаги қувиш-қочиш ўйинлари киради.

Графлардаги динамик ўйинларнинг бир нечта турлари мавжуд бўлиб, улардан биринчиси ва чуқур ўрганилгани абстракт графлардаги синфидир. Бундай ўйинларда нуқта графнинг бир учидан бошқасига сакраб ўтади. Бундай ўйинлар сирасига шахмат ва «Ним» каби стол ўйинлари киради. Аксарият ҳолатда, ихтиёрий қувиш-қочиш ўйинини кўп қадамли графлардаги ўйинлардек апкорсимация қилиш мумкин. Абстракт графлардаги ўйинлар Э. Цермело, К. Берже, Б. Куммер, Р. Дж. Новаковский, А. Квиллиат, М. Айгнер, М. Фромме, А. Бонато, П. Пралат, Б. Боллобаш, Г. Кун, Н. Е. Кларк, Б. С. Шредер ва бошқалар томонидан ўрганилган. Хусусан, немис математиги Т. Андреа қувиш-қочиш масаласини бир нечта графлар учун ечиб, граф хоссалари ва қувиш масаласининг ечимлари орасида боғлиқлик ўрнатган. М. Айгер ва М. Фромме ихтиёрий планар графда қувиш масаласининг ечимга эга бўлиши учун учта қувувчи етарли эканлигини исботлаганлар. Графлардаги динамик ўйинларнинг нисбатан торроқ синфини Евклид фазосидаги графлар қирраларида ҳаракатланувчи нуқталари бўлган қувиш-қочиш ўйинлари ташкил қилади. Бундай турдаги динамик ўйинлар А. А. Азамов томонидан киритилиб, Н. А. Алмос, Г. Ибрагимов, Н. Н. Петров, Т. Ибайдуллаев ва бошқалар томонидан такомиллаштирилмоқда. Таъкидлаш жоизки, динамик ўйинлар назариясида графлар геометрик бўлиши, яъни унинг қирралари тўғри чизиқ бўлиб, графларнинг ўзи эса Евклид фазосида бўлиши зарур. Шунинг учун, ечимга нафақат графнинг тузилиши (граф учлари ва қирралари инцидентлилиги) ва топологияси (масалан, циклларнинг мураккаблиги), балки қирралари узунлиги ҳам таъсир қилади. Ушбу диссертация ишида ихтиёрий ўлчамдаги Евклид фазосида мунтазам кўпёқликларнинг бир ўлчамли синчларидан ташкил топган графда динамик ўйинлар ўрганилган ва қувувчи нуқталар сонига боғлиқ равишда ечиш мезонлари ишлаб чиқилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган илмий тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В. И. Романовский номидаги Математика институтининг Ф4-ФА-Ф014 «Динамик ва бошқарилувчи системалар траекто-рияларини кузатув ва бошқарув стратегияларининг синтез методларини ривожлантириш ҳамда уларнинг иссиқлик ва кимёвий жараёнларнинг математик моделларига татбиқлари» (2012-2016 йиллар) ва ОТ-Ф4-84 «Полиномиал системалар учун дискрет-сонли метод ҳамда унинг циклик ва бошқарилувчи жараёнларни моделлаштиришга татбиқлари» (2017-2020) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Евклид фазосидаги мунтазам кўпёқликларнинг қирраларидан иборат граф бўйлаб ҳаракатланувчи нуқталар – қувувчилар жамоаси ва қочувчи иштирокидаги қувиш-қочиш ўйинлари учун сифат масаласини ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

чекли ўлчамли евклид фазосидаги мунтазам кўпёқликнинг қирраларидан иборат графда қувиш-қочиш динамик ўйинлар назариясини ривожлантириш;

графлардаги қувиш-қочиш масаласини Дж. фон Нейман нормал формасига келтириш;

мунтазам кўпёқликнинг қирраларидан иборат графлар структурасини потенциал функция танлови асосида таснифлаш ва ишлаб чиқиш;

уч ўлчамли фазода яриммунтазам кўпёқликларнинг бир ўлчамли синчидан иборат графларда қувиш-қочиш масаласини ечиш.

Тадқиқот объекти. Мунтазам ва яриммунтазам кўпёқлик қирраларидан иборат графда қувиш-қочиш дифференциал ўйинлари назарияси учун зиддиятли бошқарувли комбинаторик масала.

Тадқиқот предмети. Қувишни якунлаш учун етарли бўлган қувувчиларнинг оптимал сонини топиш масаласи.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда дифференциал тенгламалар, бошқарув системалар назарияси, чизиқли алгебра, кўп ўлчамли геометрия, умумий ўйинлар назарияси ва графлар назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

графлардаги қувиш-қочиш масаласини Дж. фон Нейман нормал формасига келтирувчи махсус стратегиялар синфи киритилган;

тўрт ўлчамли Евклид фазода мунтазам кўпёқликларнинг қирраларидан иборат графларда геометрик структурасини потенциал функция ёрдамида таснифи ишлаб чиқилган;

ихтиёрий ўлчамли Евклид фазосидаги симплекс, кокуб, ва куб қирраларидан иборат графларда, ҳамда уч ва тўрт ўлчамли евклид фазосидаги мунтазам жисмлар қирраларидан иборат графлардаги қувиш-қочиш ўйинида қувувчи нуқталарнинг оптимал сони топилган;

уч ўлчамли фазодаги мунтазам кўпёқликларнинг бир ўлчамли синчида секин қувувчилар иштирокидаги қувиш-қочиш ўйинидаги сифат масаласи ечилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси графлардаги қувиш-қочиш ўйинида ютуқни кафолатлайдиган стратегиялар қурилган. Натижаларни исботлашда таклиф қилинган усуллар бошқарув жараёнлари ва математик ўйинлар назариясидаги тадқиқотларда қўлланилади, ҳамда қидирув назарияси ва сунъий интеллект масалаларига татбиқ қилишдан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги масаланинг аниқ қўйилиши, зарур таъриф ва тасдиқлар исботи замонавий математика қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти дифференциал ўйинлар назариясининг тривиал бўлмаган ечимлари топилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти ҳаракатланувчи объектни топишнинг аниқ стратегияси ишлаб чиққанлиги билан асосланади. Олинган натижалар сунъий интеллектни ривожлантиришда қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Мунтазам кўпёқликнинг бир ўлчамли синчида зиддиятли бошқарувга оид комбинаторик масала бўйича олинган натижалар асосида:

тўрт ва ундан юқори ўлчамли фазода симплекс, кокуб ва куб қирраларидан иборат графдаги қувиш-қочиш ўйинидаги ютиш стратегияларидан 01-01-17-1921ФР рақамли «Евклид метрикасига эга манифолдларда кўп қувувчили қувиш ва қочиш дифференциал ўйинлар учун янги усул» мавзусидаги хорижий грант лойиҳада қувиш-қочиш ўйинида ютиш стратегиясини қуришда фойдаланилган (Путра Малайзия университетининг 2021 йил 7 июлдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши l_2 фазодаги қувиш-қочиш ўйинида қувувчилар учун ютиш стратегиясини қуришни ва асосий натижани исботлаш имконини берган;

уч ўлчамли Евклид фазосидаги мунтазам кўпёқликларнинг қирраларидан иборат графнинг хоссалари ва шу билан бирга мунтазам кўпёқликларнинг қирраларидаги қувиш-қочиш ўйинида ўйинчиларнинг ютиш стратегияларидан ОТ-Ф1-16 «Оптимал бошқарув масалалари ва графларда дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар назариясини ишлаб чиқиш» мавзусидаги фундаментал лойиҳада бошқариладиган объектларни бошқаришда фойдаланилган (Тошкент молия институти 2021 йил 7 сентябрьдаги № 28/2094-сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши дифференциал тенгламаларнинг ечимларини графларда қуришда ва ечимларнинг чексизликда жойлашган нуқталардаги хусусиятларини ўрганиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 8 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 18 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 94 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертациянинг **Кириш** қисми мавзунинг долзарблигини ва унинг Республика фан ва техникаси ривожланишининг устувор йўналишларига мувофиқлиги, шунингдек, диссертация тадқиқотини ўтказишнинг мақсадга мувофиқлигини асослашдан иборат. Шунингдек, диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар ҳақида умумий маълумот берилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси кўрсатилган, мақсад ва вазифалари, тадқиқотнинг обекти ва предмети кўрсатилган, тадқиқот натижалари илмий янгилиги очиб берилган ва олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти, тадқиқот натижаларини қўллаш, нашр этилган ишлар ва тузилмаси ҳақида маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **«Графлардаги ўйин зиддиятли вазиятларни бошқариш модели масала сифатида»** деб номланган биринчи бобида геометрик графларда қувиш-қочиш ўйинини ечишдан иборат комбинаторик масаланинг қўйилиши, асосий тушунчалари ва таърифлари берилган.

Берилган R^d Евклид фазосидаги чекли Γ – геометрик граф қирраларида ҳаракатланадиган иккита ўйин иштирокчилари: ҳаракати бошқариладиган $\mathbf{P}=\{P_1, P_2,...,P_m\}$ нуқталардан иборат қувувчи жамоа ва ҳаракати бошқариладиган Q нуқтадан иборат қочувчи иштирокидаги қувиш-қочиш ўйинини қарайлик. Нуқталарнинг траекториялари $\mathbf{P}(t)=(P_1(t),P_2(t),\ldots,P_m(t)),\ Q(t)\in\Gamma,\ t\geq 0$ (абсолют-узлуксиз функциялар) бўлсин ва нуқталарнинг максимал тезликлари $\left|dP_k(t)/dt\right|\leq\rho_k,\ k=1,2,\ldots,m,\ \left|Q(t)/dt\right|\leq\sigma$ ва улар қуйидаги шартни қаноатлантирсин $1=\sigma\geq\rho_1\geq\rho_2\geq\ldots\geq\rho_m>0$.

1-таъриф. Ҳар бир $\mathbf{P}$ ва Q нуқталарнинг ҳолатига $v,\ \left|v\right|\leq\sigma$ вектор ва мусбат δ сонни мос қўювчи Y акслантириш, қочувчининг стратегияси дейилади.

Агар $Y(\mathbf{P},Q)=(v,\delta)$ бўлса, у ҳолда (v,δ) ни $(\mathbf{P},Q)$ вазиятдаги (Q нуқта учун) V стратегиянинг кўрсатмаси деб номлаймиз.

2-таъриф. Ҳар бир $\mathbf{P}$, Q нуқталар жуфтлигига, $v,\ \left|v\right|\leq\sigma$ вектор ва мусбат δ сонга $\mathbf{U}=(u_1,u_2,\ldots,u_m),\ \left|u_k\right|\leq\rho_k,\ k=1,2,\ldots,m$ тўплам ва мусбат $\varepsilon,\ \varepsilon\leq\delta$ сонни мос қўювчи X акслантириш, қувувчининг стратегияси дейилади.

Агар $X(\mathbf{P},Q,v,\delta)=(\mathbf{U},\varepsilon)$ бўлса, у ҳолда $(\mathbf{U},\varepsilon)$ ни $(\mathbf{P},Q,v)$ вазиятдаги (P_k, $k=1,2,\ldots,m$ нуқталар учун) $\mathbf{U}$ стратегиянинг кўрсатмаси деб номлаймиз.

Жараён $\mathbf{P}_0=\mathbf{P}(0)=(P_1(0),P_2(0),\ldots,P_m(0))$, $Q_0=Q(0)\in\Gamma$ ўйинчиларнинг берилган позициясидан бошланади.

Қувиш масаласи. Қувувчи шундай $\hat{X}$ стратегиясини тузиш керакки, қочувчининг ҳар қандай Y стратегияси учун

$$\forall\mathbf{P}_0,\forall Q_0,\exists t,\exists k\ \ P_k(t,\mathbf{P}_0,Q_0,\hat{X},Y)=Q(t,\mathbf{P}_0,Q_0,\hat{X},Y)$$

бўлсин.

Қочиш масаласи. Қувувчи шундай $\hat{Y}$ стратегиясини тузиш керакки, қочувчининг ҳар қандай X стратегияси учун

$$\exists\mathbf{P}_0,\exists Q_0,\forall t,\forall k\ \ P_k(t,\mathbf{P}_0,Q_0,X,\hat{Y})\neq Q(t,\mathbf{P}_0,Q_0,X,\hat{Y}).$$

бўлсин.

Ушбу масалаларнинг ҳар бирининг ечилиши, шунингдек, уларнинг ўзаро боғлиқлиги M графга ва $1=\sigma\geq\rho_1\geq\rho_2\geq\ldots\geq\rho_m>0$ сонлар тўпламига боғлиқ. Бундай берилганлар билан геометрик графда ўйин аниқланади.

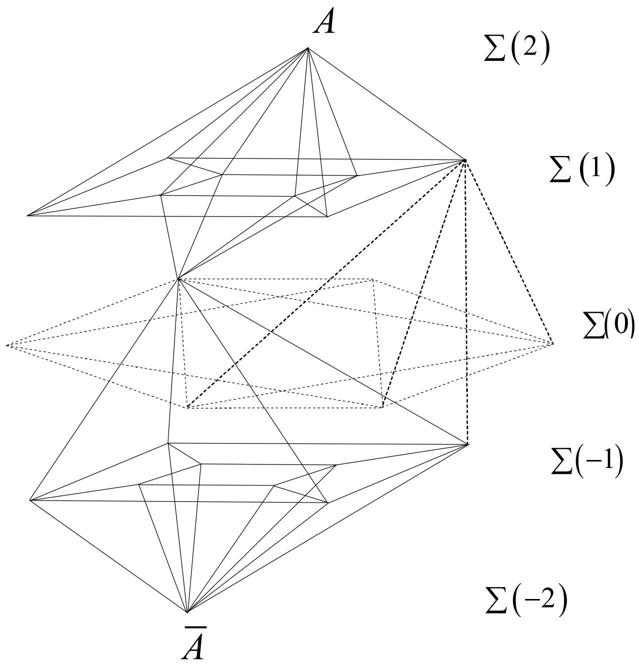
Геометрик графда, агар қувиш масаласи ҳар қандай бошланғич ҳолат учун ечилиши мумкин бўлса, ўйин қувувчи жамоанинг фойдасига ва агар қочиш масаласи камида битта бошланғич ҳолат учун ечими мавжуд бўлса, қочувчининг фойдасига ҳал бўлади.

$N(M)$ орқали биз қувувчиларнинг минимал сонини белгилаймиз, бунда $m\geq N(M)$ бўлганда ўйин қувувчи жамоа фойдасига, $m<N(M)$ бўлганда қочувчи фойдасига ҳал бўлади.

Диссертациянинг мақсади ихтиёрий ўлчамдаги Евклид фазоларида M мунтазам кўпбурчакларнинг бир ўлчовли синчларидан ташкил топган графлар учун $N(M)$ сонини топишдан иборат. Шу мақсадда уларнинг графометрияси - структурани тасвирлаш усули ишлаб чиқилди.

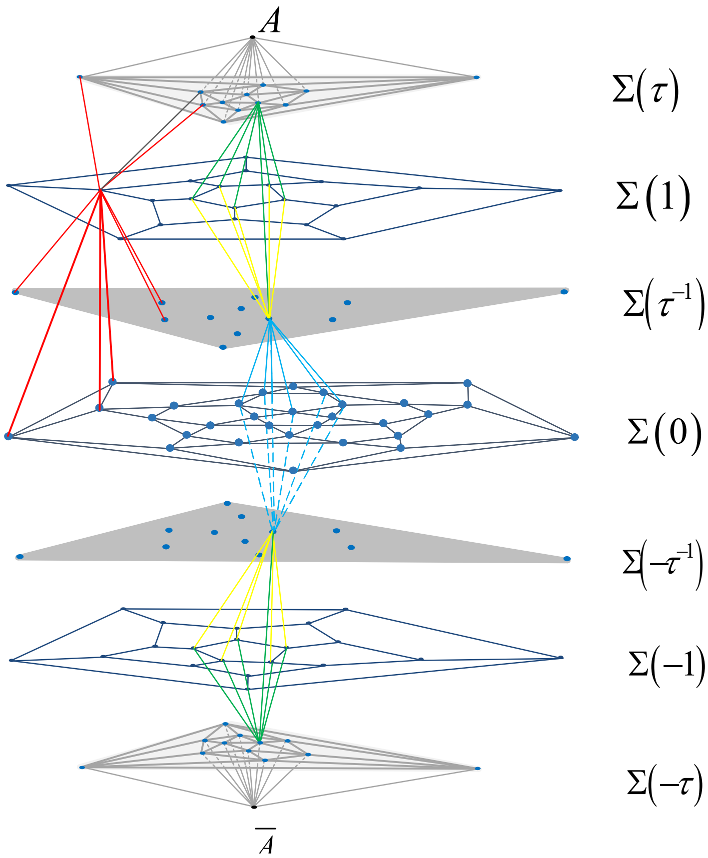
M_{24} 24 та $(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1),(\pm2,0,0,0),(0,\pm2,0,0),(0,0,\pm2,0),$ $(0,0,0,\pm2)$ (барча комбинациялар) координаталар билан берилган нуқталарнинг қаварик қобиғи. Унинг ҳар бир учидан 8 тадан қирра чиқиб, бу қирраларнинг оҳирлари 3 ўлчамли куб, 96 та қирраси ва 24 та 3 ўлчамли гиперёғи мавжуд.

M_{24} учли мунтазам кўпёқлик потенциал функция ёрдамида 5 та қатламга ажралади (1-расм).



1-расм.

M_{120} мунтазам кўпёқлик қуйидаги 3 типдаги 120 та нуқталарнинг қавариқ қобиғидан ҳосил қилинади:



2-расм.

координаталари $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ бўлган 16 та нуқта, координаталари $(\pm 2, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 2)$ бўлган 8 та нуқта, (бу 24 та нуқта M_{24} учли мунтазам кўпёқликни ташкил қилади) ва яна 96 та нуқта, координаталари $(\pm\tau, \pm 1, \pm \tau^{-1}, 0)$ нинг мумкин бўлган барча жуфт ўринлаштиришлари ($\tau = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ – қиймат “олтин кесим”). Унинг ҳар бир учидан 12 тадан қирра чиқиб, бу қирраларнинг оҳирлари 3 ўлчамли икосаэдр бўлади.

M_{120} учли мунтазам кўпёқлик потенциал функция ёрдамида 9 та қатламга ажралади (2-расм).

Диссертатциянинг «R^d, $d \geq 3$ **фазодаги мунтазам симплекс, кокуб ва кубнинг бир ўлчамли синчида зиддиятли бошқарувга оид комбинаторик масалалар»** деб номланган иккинчи бобида уч турдаги мунтазам кўпёқликлар графларида – симплекс, куб ва кокуб (кўпёқлик, иккиланган куб) ихтиёрий ўлчамдаги фазоларда, барча нуқталарнинг тезлиги бир хил бўлганда ўйин қаралган. Тегишли қувиш ва қочиш масалаларини ечимини таъминлайдиган $N(M)$ сони топилади ва стратегиялар тузилади.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида M – d-ўлчамли симплекс ($d \geq 3$)

$$\Sigma^d = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1 + x_2 + \ldots + x_{d+1} = 1\big/\sqrt{2},\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, d+1.\right\}$$

ва кокуб

$$\mathrm{K}_*^d = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_d| = 1\big/\sqrt{2}\right\}$$

бўлган ҳолида қувиш-қочиш масаласи кўриб чиқилди.

1-теорема. $N(\Sigma^d) = N(\mathrm{K}_*^d) = 2$.

Иккала ҳолатда ҳам, қувиш масаласини ечишда кафолатланган тутиш вақти ва қочиш масаласини ечишда хавфсиз масофа учун қуйидан баҳоланиши мавжуд.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида

$$\mathrm{K}^d = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, d.\right\}$$

d-ўлчамли кубнинг қирраларида қувиш-қочиш ўйини кўриб чиқилди ($d \geq 3$).

Бу ҳолат энг қизиқарли бўлиб чиқди, чунки бу мисолда қуйидаги саволга жавоб топиган: ҳар бир $n \in \mathbb{N}$ учун $N(\Gamma) = n$ шартни қаноатлантирувчи шундай Γ геометрик граф мавжудми? Абстракт графларда ўйин учун шунга ўхшаш масала Т. Андреа томонидан ижобий ҳал қилинган.

2-теорема. $N(\mathrm{K}^d) = [d/2] + 1$.

($[a]$ – a сонининг бутун қисми.) Теореманинг исботи икки кубнинг декарт кўпайтмаси $\mathrm{K}^d \times \mathrm{K}^2 = \mathrm{K}^{d+2}$ формуласига асосланади. Унга асосланиб, $N(\mathrm{K}^d) = N(\mathrm{K}^{d-2}) + 1,\ d > 3$ рекуррент формуласи келиб чиқади.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида, секин қувувчилар иштирокидаги ўйинда уч ўлчамли тетраедр Σ^3, октаэдр K^3_* ва кубда K^3 кўриб чиқилади.

Айтайлик қувувчиларнинг максимал тезлиги $\rho_k,\ k = 1,2,...,m$, қочувчиники эса σ бўлсин. Секин қувувчилар иштирокидаги ўйинда қочувчини тутадиган қувувчиларнинг энг кам сони $N^*(M)$ билан белгиланади. Қуйидаги натижа 1-теореманинг натижасини яхшилайди.

3-теорема. Агар $\rho_1 = \sigma = 1,\quad 0 < \rho_k < 1,\quad k = 2,3,\dots,m$ бўлса, у ҳолда $N^*(\textit{тетраэдр}) = N^*(\textit{октаэдр}) = N^*(\textit{куб}) = 2$ бўлади.

Диссертациянинг **«3 ва 4 ўлчамдаги мунтазам ва яриммунтазам кўпёқликларнинг бир ўлчамли синчида зиддиятли бошқарувга оид комбинаторик масалалар»** деб номланган учинчи бобида қолган мунтазам кўпёқликлар ва ярим мунтазам кўпёқлик қирраларида зиддиятли бошқарувли масалалар ўрганишга бағишланган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида додакаэдр ва икосаэдр қирраларида «қувиш ва қочиш» масаласи қаралган. Ўйинчиларнинг максимал тезликлари тенг бўлгандаги ўйинда қочувчини тутадиган қувувчиларнинг энг кам сони $N(M)$ аниқланган. Параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремада келтирилган.

4-теорема. $N(\textit{додекаэдр}) = N(\textit{икосаэдр}) = 3$.

Бир қувувчининг максимал тезлиги қочувчининг тезлигига тенг, бошқа қувувчиларнинг тезлиги эса қочувчининг тезлигидан кам бўлгандаги ўйинда қувувчиларнинг минимал сони $N(M)$ топилган.

Бу ерда 3-теореманинг аналоги мавжуд.

5-теорема. $N^*(\textit{додекаэдр}) = N^*(\textit{икосаэдр}) = 3$.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида тўрт ўлчамли фазодаги 24 учли M_{24} ва 120 учли M_{120} мунтазам кўпёқликлар қирраларида «қувиш-қочиш» ўйинлари қаралган. Ўйин иштирокчилари стратегиясини баён қилиш учун ўйин жараёнини ифодалаш қулай бўлиши мақсадида M_{24} ва M_{120} мунтазам кўпёқликлар потенциал функция ёрдамида бир нечта қатламларга ажратилган. Ҳар бир кўпёқлик учун ўйинчиларнинг максимал тезликлари тенг бўлгандаги ўйинда қочувчини тутадиган қувувчиларнинг энг кам сони $N(M_{24})$, $N(M_{120})$ аниқланган.

6-теорема. $N(M_{24}) = N(M_{120}) = 3$.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида уч ўлчамли Евклид фазосидаги Архимед жисмлари ёки яриммунтазам кўпёқликларнинг қирраларида «қувиш-қочиш» ўйини қаралган: кесик тетраэдр $T_{3,3}$, кубооктаэдр $R_{4,3}$, кесик куб $T_{4,3}$, кесик октаэдр $T_{3,4}$, ромбокубооктаэдр $RR_{4,3}$, яссиқиррали куб $SR_{4,3}$, икосододекаэдр $R_{5,3}$. Архимед жисмларининг қирраларидан иборат графни M деб белгилайлик.

Барча ўйинчиларнинг максимал тезликлари 1 га тенг бўлганда қувиш-қочиш масаласи қаралган.

Уч ўлчамли фазодаги яриммунтазам кўпёқликлардан еттитасининг ҳар бирида қувиш-қочиш ўйини ечилган ва қочувчини тутадиган қувувчиларнинг энг кам сони $N(M)$ топилган.

7-теорема. $M \in \{T_{3,3}, T_{4,3}\}$ учун, $N(M) = 2$.

8-теорема. $M \in \{R_{4,3}, T_{3,4}, RR_{4,3}, SR_{4,3}, R_{5,3}\}$ учун, $N(M) = 3$.

ХУЛОСАЛАР

Диссертация иши мунтазам кўпбурчакларнинг бир ўлчовли синчларидан ташкил топган графларда қувиш-қочиш масаласига оид комбинаторик масалаларни ўрганишга бағишланган. Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Уч ўлчамли Евклид фазосидаги мунтазам кўпёқликнинг қирраларида зиддиятли бошқарув комбинаторик масаласи ечилди ва ютиш стратегиялари кўрсатилди.
2. Тўрт ва ундан юқори ўлчамли Евклид фазоларнинг барчасида мавжуд бўлган мунтазам симплекс, кокуб ва куб қирраларида қувиш-қочиш масаласи ечилди ва қочувчини тутадиган қувувчиларнинг энг кам сони топилди.
3. Тўрт ўлчамли фазодаги 24 ва 120 учлик мунтазам кўпёқликларнинг графометрик хоссалари ёрдамида уларнинг қирраларидан иборат графи тасвирланди.
4. Тўрт ўлчамли фазодаги 24 ва 120 учлик мунтазам кўпёқлик қирраларидан иборат графда қувиш-қочиш ўйинида қочувчини тутадиган қувувчиларнинг энг кам сони топилди ва ютиш стратегияси ишлаб чиқилди.
5. Уч ўлчамли Евклид фазосидаги яриммунтазам кўпёқликларнинг 7 таси учун зиддиятли бошқарув комбинаторик масаласи ҳал қилинди.
6. Қувиш масаласида ўйин ихтиёрий вазиятда бошланганда қочувчининг ихтиёрий стратегияси учун қувувчи чекли вақтда қочувчини тутадиган стратегия кўрсатилди.
7. Қочиш масаласида эса, ўйин бирор вазиятда бошланганда қувувчининг ихтиёрий стратегияси учун қочувчи чексиз вақт давомида қувувчига тутилмай ҳаракатланадиган стратегия кўрсатилди.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В. И. РОМАНОВСКОГО**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ХОЛБОЕВ АЗАМАТ ГАНИШЕРОВИЧ

КОМБИНАТОРНАЯ ЗАДАЧА КОНФЛИКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОДНОМЕРНЫХ ОСТОВАХ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.2.PhD/FM339.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В. И. Романовкого.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Азамов Абдулла** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Эшматов Фарход Хасанович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
	Ахмедов Одилжон Сахибжонович кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Самарканский государственный университет**

Защита диссертации состоится « 5 » апреля 2022 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В. И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В. И. Романовского (зарегистрирована за № 134). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 14 » марта 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от « 14 » марта 2022 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

У. А. Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж. К. Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Р. Р. Ашуров
Заместитель председателя Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Математическая теория управляемых процессов является одним из важных и актуальных направлений современной математики. Она базируется на математических моделях разнообразных динамических процессов в природе, технике и обществе. Во многих при случаях изучении управляемых процессов необходимо учитывать наличие неопределенности в будущем поведении объекта или противодействие к управлению. Моделирование таких факторов приводит к задаче управления в конфликтных ситуациях. Соответствующие математические модели принято называть дифференциальными играми. Экономическая конкуренция, непрерывно повторяющиеся военные конфликты и рыночные отношения описываются являются объектами и решаются методами теории дифференциальных игр.

Дифференциальная игра относится к сложным математическим понятием ввиду того, что необходимо принять во внимание такие факторы, как динамичность, управляемость, противодействие, информированность, оптимальность. Эти факторы обусловливают разработку особых подходов к теории дифференциальных игр. Это обстоятельство в первую очередь относится к решению задач преследования и убегания – важного раздела теории дифференциальных игр. Актуальность темы диссертации заключается в развитии теории дифференциальных игр на графах, тесно связанных с задачей поиска в сетях и разработкой искусственного интеллекта.

В нашей стране в последние годы уделяется большое внимание развитию таких отраслей науки как геология, биология, математика и физика, имеющих важное значение в инновационном обновлении страны. В директивных документах отмечено, что особое значение имеет развитие научных исследований по теории вероятностей, математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, математической физике, математическому моделированию, алгебре и математической теории управления[2]. В обеспечении решения поставленных задач важную роль играет развитие математической теории управляемых процессов с целью оптимизации реальных управляемых систем.

Исследования данной диссертации в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по

---

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития наук и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Понятие «Дифференциальная игра» впервые было введено в математический обиход американским математиком Р. Айзексом в начале 50-х годов XX века в закрытых работах, выполненных по заказу американской корпорации RAND. Для решения конкретных примеров дифференциальных игр на эвристическом уровне он использовал классическое вариационное исчисление, точнее, метод характеристик для уравнения Гамильтона-Якоби (которое позже стало называться уравнением Айзекса-Беллмана). Исследования Айзекса были опубликованы в 1965 году в виде монографии «Дифференциальные игры», в которой слегка затронута общая теория, в котором в основном рассмотрены многочисленные примеры. В это же время Л. С. Понтрягиным и его учениками была создана математическая теория оптимальных процессов. Позже, развивая эту теорию, Л. С. Понтрягин заложил основы математической теории дифференциальных игр, в том числе предложил подход, согласно которому дифференциальная игра рассматривается как пара задач управления при наличии противодействия. В дальнейшем этот подход был развит самым Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко, Р. В. Гамкрелидзе, М. И. Зеликиным, Н. Ю. Сатимовым, М. С. Никольским, А. А. Чикрием, А. А. Азамовым, Е. С. Половинкиным, А. П. Пономаревым, П. К. Гусятниковым, Н. Л. Григоренко и другими. Общая теория дифференциальных игр на конечных отрезках времени была создана Н. Н. Красовским и развита Ю. С. Осиповым, А. Б. Куржанским, А. В. Кряжимским, А. И. Субботиным, Н. Н. Субботиной, Е. И. Третьяковым, В. Н. Ушаковым, Ю. С. Лукояновым, А. М. Тарасьевым и другими. В подходе Н. Н. Красовского простая дифференциальная игра также делится на две независимые задачи – задачу управления для первого игрока при противодействии второго игрока и задача управления для второго игрока при противодействии первого игрока, но, в отличие от подхода Понтрягина, допускается стратегии более широкого класса. Еще один подход к теории дифференциальных был развит на основании теории игр Дж. фон Неймана. Такой подход оказался эффективным в изучении дифференциальных игр многих лиц. Он развивается Л. А. Петросяном, Н. Н. Петровым, А. Фридманом, Т. Эллиотом, Ж. Калтоном, Д. Йенг, Т. Башаром и др. Еще один подход, сочетающий идеи Л. С. Понтрягина с подходом теории игр, был заложен Б. Н. Пшеничным и был развит А. А. Азамовым, В. В. Остапенко, Г. Б. Томским, А. З. Фазыловым и др.

В 1970-годах в Узбекистане сформировалась научная школа по оптимальному управлению и дифференциальным играм, основанная Н. Ю. Сатимовым. Представителями этой школы были предложены новые методы решения дифференциальных и дискретных игр преследования-убегания. В большинстве работ, посвященных дифференциальным играм, предполагается, что функции управления измеримы и принимают, рассматривались значения из компактных множеств. В реальных дифференциальних играх может присутствовать еще один тип ограничения фазовая точка должна оставаться в пределах заданного замкнутого множества. Такое требование называется фазовым ограничением. Оно сильно усложняет решение дифференциальных игр и поэтому до сих пор не разработаны эффективные методы решения таких игр. В связи с этим естественно рассмотрение конкретных классов дифференциальных игр с фазовыми ограничениями, выделяемыми теми или иными упрощающими предположениями. К ним относится класс игр преследования-убегания на геометрических графах.

Существует несколько типов динамических игр на графах, из которых первым и хорошо изученным является класс игр в абстрактных графах. В таких играх точки, управлеемые игроками, перепрыгивают с одной вершины графа на другую. К их числу относятся настольные игры типа шахмат, «Ним» и др.. В принципе, любую игру преследования-убегания можно аппроксимировать многошаговыми играми на графах. Игры на абстрактных графах изучались Э. Цермело, К. Бержем, Б. Куммером, Р. Дж. Новаковским, А. Квиллиатом, М. Айгнером, М. Фромме, А. Бонато, П. Пралатом, Б. Боллобашом, Г. Куном, Н. Е. Кларком, Б. С. Шредером и др. В частности, немецкий математик Т. Андреа решил задачу преследования-убегания для нескольких типов графов и установил связь между свойствами графа и разрешимостью задачи преследования. М. Айгнер и М. Фромме доказали, что в любом планарном графе трех преследователей достаточно для решения задачи преследования. Сравнительно узкий, но не менее интересный класс динамических игр в графах составляют игры преследования-убегания, в которых точки движутся по ребрам графа, вложенного в Евклидово пространство. Динамические игры такого типа впервые были рассмотрены А. А. Азамовым и в настоящее время разрабатываются Н. А. Алмосом, Г. Ибрагимовым, Н. Н. Петровым, Т. Ибайдуллаевым и др. Необходимо отметить, что в теории динамических игр графы должны быть геометрическими, т. е. их ребра должны представлять собой спрямляемые кривые, а сами графы – вложенными в Евклидово пространство. Поэтому не только схема графа (схема инцидентности вершин и ребер) и топологические свойства (например, степени вершин, распределение циклов), но и длины ребер влияют на решение. В настоящей диссертационной работе исследуются динамические игры на графах, состоящих из одномерных остовов правильных многогранников в евклидовых пространствах произвольной размерности, и разработываются критерии разрешимости в зависимости от числа преследующих точек.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по фундаментальному гранту Ф4-ФА-Ф014 «Развитие методов слежения траекторий и синтеза стратегий в динамических и управляемых системах и их приложения к математическим моделям тепловых и химических процессов» (2012-2016 гг.) Института математики и ОТ-Ф4-84 «Метод дискретных чисел для полиномиальных систем и его приложения к моделированию циклических и управляемых процессов» (2017-2020 гг.).

Целью исследования является решение задач качества для игр преследования и убегания, в которых несколько точек, управления игроками, движутся по графу, состоящему из ребер правильных многогранников в Евклидовом пространстве.

Задачи исследования:

развитие теории динамических игр преследования-убегания на реберном графе правильных многогранников в конечномерном Евклидовом пространстве;

приведение задачи преследования-убегания на графах к нормальной форме Дж. фон Неймана;

разработка и описание структуры реберного графа правильных многогранников на основе выбора потенциальной функции;

решение задачи преследования-убегания на графах, состоящих из одномерного остова полуправильных многоугольников в трехмерном пространстве.

Объектом исследования является теория дифференциальных игр преследования-убегания на графах, состоящих из одномерного остова правильных и полуправильных многогранников.

Предметом исследования является задача нахождения оптимального количества преследователей, достаточных для завершения преследования.

Методы исследования. В исследовании используются методы теории дифференциальных уравнений, теории управляемых систем, линейной алгебры, многомерной геометрии, общей теории игр и теории графов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

введены специальные классы стратегий, приводящие задачу преследования-убегания на графах к нормальной форме Дж. фон Неймана и удобные для компьютерного моделирования;

разработан метод потенциальных функций для описания геометрической структуры реберного графа правильных многогранников в четырехмерном Евклидовом пространстве;

найдено оптимальное число преследующих точек в играх преследования-убегания на реберных графах симплекса, кокуба и куба в

Евклидовых пространствах произвольной размерности и исключительных правильных тел трехмерного и четырехмерного евклидовых прастранств;

решена задача качества для игры преследования-убегания с медленными преследователями на одномерном остове правильных многогранников в трехмерном пространстве.

Практическим результатом исследования является построение стратегий, гарантирующих успех в игре прследования-убегания в графах. Методы, предложенные при доказательстве результатов, используются в исследованиях по теории процессов управления и математических игр, а также при применении задач теории поиска и искусственного интеллекта.

Достоверность результатов исследования подтверждается строгой постановкой задач, введением необходимых определений и доказательствами утверждений на уровне современной математической строгости.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что найдены нетривиальные решения задач теории дифференциальных игр.

Практическая значимость результатов исследования характеризуется тем, что предложены конкретные стратегии поиска объекта, движущегося по графу. Полученные результаты могут быть использованы в развитии искусственного интеллекта.

Внедрение результатов исследования. Результаты диссертации, связанные с построением выигрывающих стратегий для решения задачи преследования на ребрах графа, адекватно были использованы в фундаментальном научном проекте (Университет Путра, Малайзия, справка от 7 июля 2021 года) под номером 01-01-17-1921ФР «Новый метод дифференциальных игр преследования и уклонения со многими преследователями на многообразиях с евклидовой метрикой». Применение научного результата дало возможность построить беспроигрышную стратегию для преследователей в игре преследования-убегания в пространстве l_2 и тем самым доказать основной результат.

Методика представления реберных графов многогранников в евклидовых пространствах произвольных размерностей, разработанная в диссертации, была использована в фундаментальном научном проекте OT-F1-16 по теме «Разработка теории краевых задач для задач оптимального управления и дифференциальных уравнений в графах» (Ташкентский финансовый институт, № 28/2094 - от 7 сентября 2021 года). Применение научного результата позволило установить новые свойства решений дифференциальных уравнений.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации изложено в научных докладах на 8 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, из них 5 статей опубликованы в журналах, которые входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD), в том числе 3 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 2 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Объем диссертации 94 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение диссертации состоит из обоснования актуальности темы и ее принадлежности к приоритетным направлениям развития науки и техники в Республике, а также целесообразности проведения диссертационного исследования. В нем также дан обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, показана степень изученности проблемы, указываются цели и задачи, объект и предмет исследования, раскрывается научная новизна результатов исследования, указывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, применение результатов исследования, приводятся опубликованные работы и сведения о структуре.

В первой главе диссертации, оглавленной **«Игра на графах как модельная задача конфликтного управления»**, приведены постановка комбинаторной задачи, состоящей в решение игры преследования-убегания на геометрических графах общего вида, сформулированы основные понятия и определения.

В Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ рассматривается игра преследования-убегания с участием двух сторон, которые управляют точками, движущимися по геометрическому графу Г: команда преследователей, состоящая из управляемых точек $\mathbf{P}=\{P_1, P_2,...,P_m\}$ и убегающий, управляющий движением точки Q. Пусть $\mathbf{P}(t)=(P_1(t),P_2(t),\dots,P_m(t)),\ Q(t)\in\Gamma,\ t\geq 0$ – траектории точек (абсолютно-непрерывные функции), скорости которых $\left|dP_k(t)/dt\right|\leq\rho_k,\ k=1,2,\dots,m,\ \left|dQ(t)/dt\right|\leq\sigma$, должны удовлетворять условиям ρ_k и σ – заданные положительные числа, $1=\sigma\geq\rho_1\geq\rho_2\geq\dots\geq\rho_m>0$.

Определение 1. Отображение Y, ставящее каждому положению точек $\mathbf{P}$ и Q в соответствие вектор $v, \left|v\right|\leq\sigma,$ и положительное число $\delta,$ называется стратегией убегающего.

Если при этом $Y(\mathbf{P},Q)=(v,\delta)$, то (v,δ) будем называть предписанием стратегии V (для точки Q) в позиции $(\mathbf{P},Q)$.

Определение 2. Отображение X, ставящее каждой паре точек $\mathbf{P}, Q$, вектору $v, \left|v\right| \le \sigma$, и положительному числу δ в соответствие набор $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, где $\left|u_k\right| \le \rho_k$, $k = 1,2,\ldots,m$, и положительное число $\varepsilon, \varepsilon \le \delta$, называется стратегией преследователя.

Если при этом $X\left(\mathbf{P}, Q, v, \delta\right) = \left(U, \varepsilon\right)$, то $\left(U, \varepsilon\right)$ будем называть предписанием стратегии U в позиции $\left(\mathbf{P}, Q, v\right)$ (для точек P_k, $k = 1,2,\ldots,m$).

Процесс начинается с заданной позиции $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(0) = (P_1(0), P_2(0), \ldots, P_m(0))$, $Q_0 = Q(0) \in \Gamma$ игроков.

Задача преследования. Построить стратегию преследователя $\hat{X}$, такую, что для любой стратегии убегающего Y окажется

$$\forall \mathbf{P}_0, \forall Q_0,\ \exists k,\ \exists T,\ P_k(T, \mathbf{P}_0, Q_0, \hat{X}, Y) = Q(T, \mathbf{P}_0, Q_0, \hat{X}, Y).$$

Задача уклонения от встречи (убегания). Построить стратегию убегающего $\hat{Y}$, такую, что для любой стратегии преследователя X будет иметь место

$$\exists \mathbf{P}_0, \exists Q_0, \forall k,\ \forall t,\ P_k(t, \mathbf{P}_0, Q_0, X, \hat{Y}) \ne Q(t, \mathbf{P}_0, Q_0, X, \hat{Y}).$$

Разрешимость каждой из этих задач, а также их взаимная связь зависит от графа M и набора чисел $1 = \sigma \ge \rho_1 \ge \rho_2 \ge \ldots \ge \rho_m > 0$. Этими данными игра на геометрическом графе определяется однозначно.

Определение. Игра на геометрическом графе завершается в пользу команды преследователей, если для любого начального состояния разрешима задача преследования, и в пользу убегающего, если хотя бы для одного начального состояния разрешима задача убегания.

В качестве $N(M)$ обозначим минимальное количество преследователей, при $m \ge N(M)$ котором игра завершается в пользу команды преследователей, а при $m < N(M)$ – в пользу убегающего.

Целью диссертации является нахождение числа $N(M)$ для графов, состоящих из одномерных остовов правильных многогранников M в евклидовых пространствах произвольной размерности. С этой целью разрабатывается их графометрия – способ описания строения.

M_{24} конструктивно есть выпуклая оболочка 24 своих вершин с координатами $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 2, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 2,)$ (при всевозможных комбинациях знаков). Из каждой вершины выходят по 8 ребер, вторые концы которых образуют трехмерный куб, а общее число ребер равняется 96.

24 вершинны M_{24} разбивается на 5 слоев с помощью потенциальной функции (рис. 1.; наряду со слоями изображены примеры смежности вершин из разных слоев).

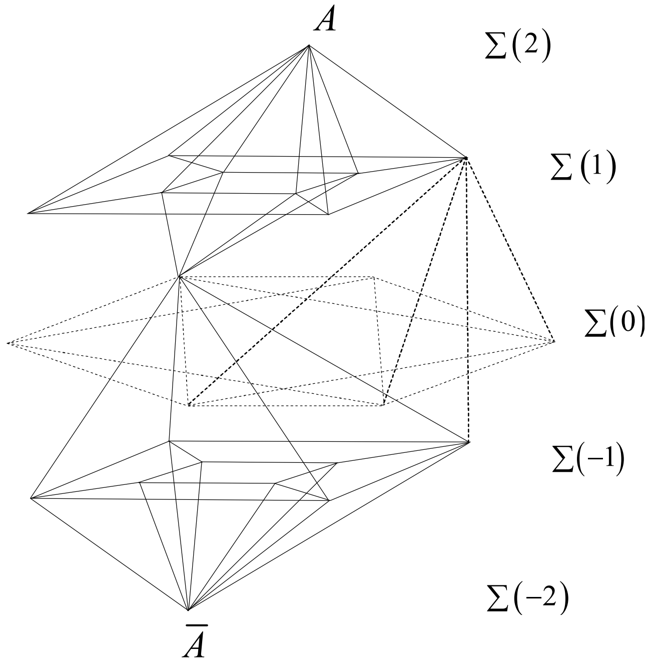


Рисунок 1.

M_{120} конструктивно есть выпуклая оболочка вершин трех типов:

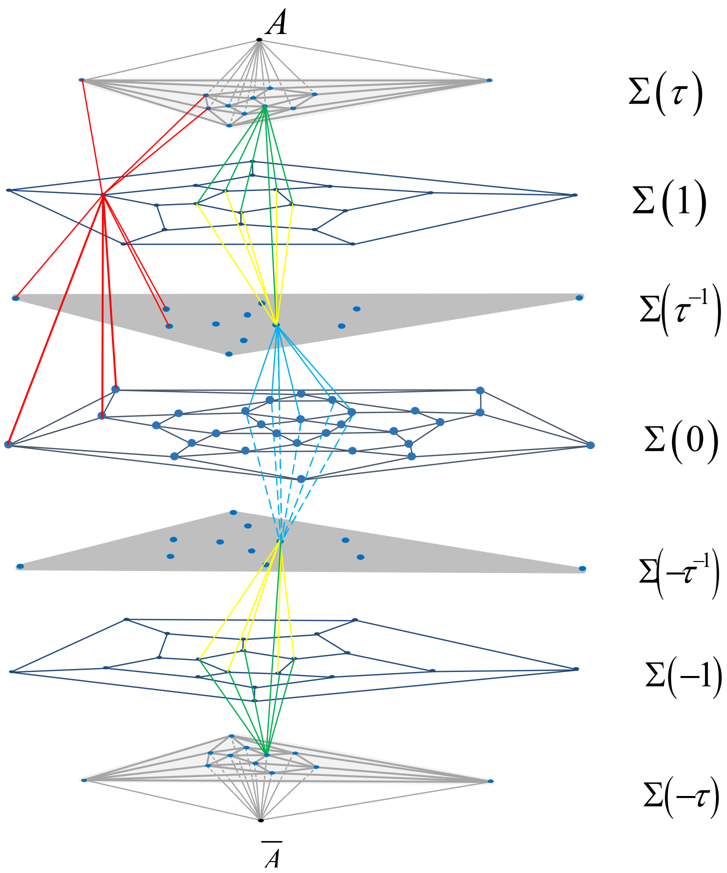


Рисунок 2.

16 точек с координатами $(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1)$, 8 точек с координатами $(\pm2,\ 0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ \pm2,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ \pm2,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 0,\ \pm2)$ (эти 24 точки образуют M_{24}) и еще 96 точек, которые получаются из наборов $(\pm\tau,\ \pm1,\ \pm\tau^{-1},\ 0)$ при всевозможных комбинациях знаков и четных перестановок координат ($\tau = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ – отношение “золотого сечения”). Из каждой вершины выходят по 12 ребер, вторые концы которых образуют икосаэдр.

Аналогично, 120 вершинны M_{120} разбивается на 9 слоев с помощью потенциальной функции (рис. 2.).

Во второй главе диссертации под названием **«Комбинаторная задача конфликтного управления на одномерных остовах правильных симплекса, кокуба и куба в R^d, $d \geq 3$»** исследована игра на графах правильных многогранников трех типов – симплекса, куба и кокуба (многогранника, двойственного кубу) в пространствах произвоьной размерности, когда скорости всех точек одинаковы. Найдено число $N(M)$ и построены стратегии, обеспечивающие разрешимость соответствующих задач преследования и убегания.

В первом параграфе второй главы рассмотрена задача преследования-убегания, когда M – d-мерный симплекс ($d \geq 3$)

$$\Sigma^d = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1 + x_2 + \ldots + x_{d+1} = 1\big/\sqrt{2},\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, d+1.\right\}$$

и кокуб

$$\mathrm{K}_*^d = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_d| = 1\big/\sqrt{2}\right\}.$$

Доказана

Теорема 1. $N(\Sigma^d) = N(\mathrm{K}_*^d) = 2$.

Для обоих случаев найдены также гарантированное время поимки в случае разрешимости задачи преследования и оценка снизу для безопасного расстояния в случае азрешимости задачи убегания.

Во втором параграфе второй главы рассматривается игра «преследования-убегания» на ребрах d-мерного куба ($d \geq 3$)

$$\mathrm{K}^d = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d :\ 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, d.\right\}.$$

Этот случай оказался наиболее интересным, так как на этом примере был найден ответ на вопрос: для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует игра на геометрическом графе Γ, для которой $N(\Gamma) = n$? Аналогичная задача для игры на абстрактных графах была решена положительно Т. Андреа.

Теорема 2. $N(\mathrm{K}^d) = [d/2] + 1$

($[a]$ –обозначает целую часть числа a.) Доказательство теоремы основывается на представлении $\mathrm{K}^d \times \mathrm{K}^2 = \mathrm{K}^{d+2}$. Основываясь на нем выведена рекуррентная формула $N(\mathrm{K}^d) = N(\mathrm{K}^{d-2}) + 1,\ d > 3$.

В третьем параграфе второй главы рассмотрена игра с медленными преследователями для графа трехмерного симплекса Σ^3, кокуба K^3_* и куба K^3.

Пусть максималные скорости преследавателей равны $\rho_k,\ k = 1, 2, ..., m$, а убегающего – σ. Наименьшее число преследователей, достаточных для завершения преследования, в этом случае обозначим $N^*(M)$. Следующий результат улучшает теорема 1.

Теорема 3. Если $\rho_1 = \sigma = 1,\quad 0 < \rho_k < 1,\quad k = 2, 3, \ldots, m$, то $N^*(\textit{тетраэдр}) = N^*(\textit{октаэдр}) = N^*(\textit{куб}) = 2.$

Третья глава диссертации под названием **«Комбинаторная задача конфликтного управления на одномерных остовах правильных и полуправильных многогранников размерностей 3 и 4»** посвящена изучению вопросов управления конфликтами в оставшихся правильных многогранниках и полуправильных многогранниках.

В первом параграфе третьей главы рассматриваются задача «преследования-убегания» по ребрам додекаэдра и икосаэдра. Найдено минимальное число $N(M)$ преследователей при случае максимальные скорости игроков равны. Основной результат этого параграфа излагается в следующей теореме.

Теорема 4. $N(\textit{додекаэдр}) = N(\textit{икосаэдр}) = 3.$

Найдено минимальное число $N(M)$ преследователей в игре, когда максимальная скорость одного преследователя равна скорости убегающего, а скорости остальных преследователей меньше чем скорости убегающего.

Оказывается, что и здесь имеет место аналог теоремы 3.

Теорема 5. $N^*(\textit{додекаэдр}) = N^*(\textit{икосаэдр}) = 3.$

Во втором параграфе третьей главы рассматриваются игра «преследования-убегания» в четырехмерном пространстве на ребрах 24 вершинных M_{24} и 120 вершинных M_{120} правильных многогранников. Для того, чтобы участникам игры было удобно выражать игровой процесс для описания своей стратегии, правильные многогранники M_{24} и M_{120} разделены на несколько слоев с использованием потенциальной функции. Для каждого многогранника определено минимального количество $N(M_{24})$, $N(M_{120})$

преследователей, которые поймают убегающего, когда максимальные скорости игроков равны.

Теорема 6. $N(M_{24}) = N(M_{120}) = 3$.

В третьем параграфе третьей главы рассматривается игра преследования-убегания на ребрах трехмерных Евклидовых полуправильных многогранников: усечённый тетраэдр $T_{3,3}$, кубооктаэдр $R_{4,3}$, усечённый куб $T_{4,3}$, усечённый октаэдр $T_{3,4}$, ромбокубооктаэдр $RR_{4,3}$, плосконосый куб $SR_{4,3}$, икосододекаэдр $R_{5,3}$. Обозначим граф через M, состоящий из ребер тел Архимеда.

Рассматривается задача преследования-убегания, когда максимальные скорости всех играков равны 1.

В каждом из семи полуправильных многогранников в трехмерном пространстве решается игра преследования-убегания и определяется число $N(M)$.

Теорема 7. $N(M) = 2$ для $M \in \{T_{3,3}, T_{4,3}\}$.

Теорема 8. $N(M) = 3$ для $M \in \{R_{4,3}, T_{3,4}, RR_{4,3}, SR_{4,3}, R_{5,3}\}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию комбинаторных задач, связанных с задачей преследования-убегания на графах, состоящих из одномерых остов правильных многогранников.

Основные выводы исследования заключаются в следующем:

1. На ребрах правильного многогранника в трехмерном Евклидовом пространстве была решена комбинаторная задача управления конфликтами и показаны стратегии выгрыша.

2. Задача преследования-убегания на ребрах правильных симплекса, кокуба и куба, которые существуют во всех четырехмерных и более высоких Евклидовых пространствах, была решена, и было найдено минимальное количество преследуемых, которые поймают убегающего.

3. В четырехмерном пространстве 24- и 120-вершинных правильных многогранников с использованием графометрических свойств правильных многоугольников был описан граф, состоящий из их ребер.

4. На графе, состоящем из ребер 24- и 120-вершинных правильных многогранников в четырехмерном пространстве, в игре преследования-убегания было найдено минимальное количество преследователей, поймаюших убегающего, и была разработана выгрышная стратегия.

5. Решена комбинаторная задача управления конфликтами для 7 полуправылных многогранников трехмерного евклидового пространства.

6. В задаче преследования указана стратегия, которая поймает убегающего в ограниченное время для произвольной стратегии убегающего, когда игра начинается в произвольной ситуации.

7. А в задаче убегания указывается стратегия, согласно которой, когда игра начинается в какой-то ситуации, для произвольной стратегии преследователя убегающий, не будучи пойманным преследователем в течение неограниченного периода времени.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V. I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

HOLBOYEV AZAMAT GANISHEROVICH

COMBINATORIAL CONFLICT CONTROL PROBLEM ON ONE DIMENSIONAL SKELETON OF REGULAR POLYHEDRON

01.01.02 – Differential equations and Mathematical physics

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of thesis of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.PhD/FM339.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Azamov Abdulla** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician
Official opponents:	**Eshmatov Farxod Xasanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
	Axmedov Odiljon Soxibjonovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
Leading organization:	**Samarkand state university**

Defense will take place “ 5 ” April 2022 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy (is registered № 134). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on “ 14 “ March 2022 year
(Mailing report № 2 on “ 14 “ March 2022 year)

U. A. Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J. K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior Researcher

R. R. Ashurov
Deputy Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the study is to solve quality problems for pursuit and evasion games, in which several points controlled by players moving along a graph consisting of edges of regular polyhedron in Euclidean space.

The object of research work is the theory of differential pursuit-evasion games on graphs consisting of a one-dimensional skeleton of regular and semiregular polyhedron.

Scientific novelty of the research work consists in the following:

it was introduced classes of strategies that reduce the pursuit-evasion problem on graphs to the normal form of J. von Neumann;

a method of potential functions for describing the geometric structure of the edge graph of regular polyhedron in four-dimensional Euclidean space was proposed;

it was found the optimal number of pursuer points in pursuit-evasion games on the edges of graphs of the simplex, cocube and cube of Euclidean spaces of arbitrary dimension and exceptionally regular polyhedron of three- and four-dimensional Euclidean space;

it was solved the quality problem for a pursuit-evasion game with slow pursuers on a one-dimensional skeleton of regular polyhedron in three-dimensional space.

Implementation of the research results. The results of the dissertation related to the construction of winning strategies for solving the pursuit problem on the edges of a graph have been adequately used in the fundamental scientific project No. 01-01-17-1921FR, “New method of pursuit and evasion differential games with many pursuers on manifolds with Euclidean metric” (Reference of Putra University of Malaysia dated July 7, 2021). The application of the scientific result made it possible to construct a win-win strategy for the pursuers in the pursuit-escape game in the space l_2 and thereby prove the main result.

The technique for representing line graphs of polytopes in Euclidean spaces of arbitrary dimensions, developed in the dissertation, have been used in the fundamental scientific project No. OT-F1-16, “Development of the theory of boundary value problems for optimal control problems and differential equations in graphs” (Reference No. 28 /2094 of Tashkent Financial Institute dated September 7, 2021). The implementation of the scientific result allowed to establish new properties of solutions of differential equations.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The full volume of the thesis is 94 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (часть I, part I)

1. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. I. // Automation and Remote Control, 2017, Vol. 78, № 4, pp. 754–761. (3. Scopus, IF=0.331).
2. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. II. // Automation and Remote Control, 2019, Vol. 80, № 1, pp. 164-170. (3. Scopus, IF=0.331).
3. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Холбоев А.Г. Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников при наличии “медленных” преследователей. // Uzbek Mathematical Journal – 2017, № 1, стр. 140-145. (01.00.00; №6).
4. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Холбоев А.Г. Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников III. // Математическая Теория Игр и её Приложения. Т.11, в.4, с. 5-23. 2019 г. (1. Web of Science).
5. Холбоев А.Г. Задача преследования-убегания на реберном графе многогранников Архимеда. // Бюллетень Института Математики. № 3, стр. 177-182, 2020 г. (01.00.00; №17).

II бўлим (часть II, part II)

6. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. Pursuit-Evasion Game on the 1-skeletion of Regular Polyhedrons. // Seventh International Conference on Game theory and Management., Sankt-Petersburg, 26-28 june, 2013 y., pp. 21-22.
7. Holboyev A.G. Pursuit-Evasion Game on the 1-skeletion of Regular Polyhedrons in R^4 with 24 vertices. // European Meeting on Game Theory. SING11-GTM2015., Sankt-Petersburg, 08-10 july, 2015 y., pp. 28-29.
8. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Холбоев А.Г. Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников при наличии “медленних” преследователей. // Abstracts of the conference problems of modern topology and its applications, Tashkent-2016., Tashkent, 5-6-may, 2016 y., pp. 131-132.
9. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Холбоев А.Г. Дифференциальные игры преследования-убегания на ребрах правильных многогранников. //

Modern problems of applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2016. Bukhoro, 10 november, 2016 y., pp. 144.
10. Holboyev A.G. Pursuit-evasion game on the regular polyhedron in the space R^4. // The Second USA-Uzbekistan Conference on Analysis and Mathematical Physics Khorezm-2017., Khorezm, 8-12 august, 2017 y., pp. 80-81.
11. Holboyev A.G. Pursuit-Evasion Game on the Prism and Pyramid in the Space R^3. // Modern problems of geometry and topology and its applications., Toshkent, 21-23 november 2019 y., pp. 23-24.
12. Holboyev A.G. Pursuit-Evasion Game on the Icosidodecahedron in the Space R^3. // Uzbek-Israel joint International Conference “Science-Technology-Education-Mathematics-Medicine”., Bukhara-Samarkand-Tashkent, 13-17 may, 2019 y., pp. 59.
13. Holboyev A.G. Pursuit-Evasion Game on the 1-skeleton of Semi-regular Polyhedron in the space R^3. // XIV International Conference “Game Theory and Management” (GTM 2020)., Saint Petersburg State, 5-8 october, 2020 y., pp 25-26.
14. Xolboyev A.G`. R^4 fazodagi muntazam ko’pyoqlarning tuzilishi haqida. // Yosh olim va talabalarning XXI asr – intellektual avlod asri shiori ostidagi Respublika ilmiy-amaliy konfrensiyasi., Buxoro, 12-15 noyabr, 2014 yil, 43-45 betlar.
15. Холбоев А.Г. Задача преследования-убегания на ребрах правильного многогранника. // Актуальные вопросы геометрии и её приложения. Тошкент, 15-17 сентябрь, 2014 г., стр. 235.
16. Holboyev A.G. Pursuit-Evasion Game on the Graph. // “Yosh matematiklarning yangi teoremalari – 2018” Respublika ilmiy amaliy konfrensiyasi., Namangan, 18-19 oktabr, 2018 yil, 196 bet.
17. Holboyev A.G. Pursuit-Evasion Game on the Regular 600 Vertexes Polyhedron in the Space R^4. // Control, optimization and dynamical systems., Andijon, 17-19 oktabr, 2019 y., pp. 25-26.
18. Holboyev A.G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of Archimedean solids in the Space. // Современные проблемы диффернциальных уравнений и смежных разделов математики., Фергана, 12-13 марта, 2020 г., стр. 216.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
2022 йил 1 мартда таҳрирдан ўтказилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 1/16. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,5. Адади 100 дона. Буюртма № 25/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.