В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ҲАКИМОВ ОТАБЕК НОРБЎТА ЎҒЛИ

ЧЕКСИЗ ЎЛЧАМЛИ ВА НОАРҲИМЕД ДИНАМИК СИСТЕМАЛАРНИНГ ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ НАЗАРИЯСИГА ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

УДК: 517.98

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

Ҳакимов Отабек Норбўта ўғли
Чексиз ўлчамли ва ноарҳимед динамик системаларнинг Гиббс ўлчовлари назариясига татбиқлари…… 3

Khakimov Otabek Norbuta ugli
Applications of infinite dimensional and non-Archimedean dynamical systems to the theory of Gibbs measures…… 31

Хакимов Отабек Норбута угли
Приложения бесконечномерных и неархимедовых динамических систем к теории гиббсовских мер……... 55

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works…….. 59

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ҲАКИМОВ ОТАБЕК НОРБЎТА ЎҒЛИ

ЧЕКСИЗ ЎЛЧАМЛИ ВА НОАРҲИМЕД ДИНАМИК СИСТЕМАЛАРНИНГ ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ НАЗАРИЯСИГА ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01– Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2022.1.DSc/FM186 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (https://kengash.mathinst.uz) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчилар:	**Розиқов Ўткир Абдуллоевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Мухамедов Фаррух Максутович физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Хренников Андрей Юрьевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Икромов Исроил Акрамович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Эшматов Фарход Ҳасанович физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим
Етакчи ташкилот:	**Наманган Давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг « 29 » июл 2022 йил соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz. Website: www.mathinst.uz).

Докторлик диссертацияси билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (143-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9-уй. Тел.: (99871) 207-91-40.)

Диссертация автореферати 2022 йил « 13 » июл куни тарқатилди.
(2022 йил « 13 » июлдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

А. Азамов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раис ўринбосари, ф.-м.ф.д., академик

Ж.К. Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш котиби, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

У.У. Жамилов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда дискрет вақтли динамик системаларни тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Динамик системалар назариясининг келиб чиқиши Ньютон механикаси билан бевосита боғлиқ. Бунда табиий ва техника фанларида бўлгани каби динамик система эволюциясининг қонунияти системанинг келажакдаги оний вақт давомидаги ҳолатини ифодаловчи ошкормас муносабат кўринишида берилади. Электрон ҳисоблаш машиналари яратилишигача бўлган даврларда динамик системаларни тадқиқ қилиш мураккаб математик усулларни қўллашни талаб қилардики, буни динамик системаларнинг фақат маълум бир синфлари учун амалга ошириш мумкин эди. Динамик системалар назарияси мухандислик, биология, кимё, физика, иқтисодиёт, психология ва бошқа турли соҳаларда татбиқларга эга фан йўналиши ҳисобланади.

Ҳозирги кунда спин қийматлари тўплами кўпи билан саноқли бўлган панжарали системалар учун барча даврий Гиббс ўлчовлари тўпламини тавсифлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Таъкидлаш жоизки, бу каби масалалар вектор фазолардаги дискрет вақтли динамик системаларни тадқиқ қилишга олиб келинади. Берилган Ҳамилтонианга мос динамик системада траекториянинг ҳолатини билган ҳолда барча трансляцион-инвариант ва даврий Гиббс ўлчовлари тўпламини тавсифлаш мумкин. Шунингдек, охирги изланишлар шуни кўрсатмоқдаки, p-адик динамик системалар кутилмаган “эффектлар”ни келтириб чиқаради. Шу боис, дискрет вақтли ноарҳимед динамик системаларнинг регулярлик, эргодиклик, минималлик, хаотиклик ва топологик қоришма каби хоссаларини тадқиқ қилиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган динамик системалар назариясининг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилмоқда. Жумладан, охирги йилларда спин қийматлари кўпи билан саноқли бўлган панжарали системаларда аниқланган классик моделлар учун ҳақиқий ва p-адик акслантиришларнинг даврий орбиталарини ўрганиш ҳамда ўлчовлар назариясининг амалий муаммоларни ҳал этиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. “Математик физика, ноарҳимед функционал анализ, ноарҳимед ўлчовлар назарияси ва динамик системалар назарияси” фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида панжарали системаларда берилган, спин қийматлари кўпи билан

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори.

саноқли бўлган статистик физика моделларига мос акслантиришлар учун ноарҳимед динамик системалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947 Фармони, 2019 йил 9 июлдаги “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4387 Қарорлари ва 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи. Дискрет вақтли динамик системалар назарияси ва панжарали системалар учун Гиббс ўлчовлари назарияси бўйича илмий тадқиқотлар илғор хорижий мамлакатларнинг етакчи илмий-текшириш марказлари ва университетларида олиб борилмоқда. Жумладан, Физика институти (Сербия), Россия Фанлар Академиясининг В.А.Стеклов номидаги Математика институти (Россия), Украина Миллий Фанлар Академияси Математика институти (Украина), Сербия Фанлар Академияси Математика институти (Сербия), “Компьютер фанлари ва бошқарув” Федерал тадқиқот маркази (Россия), Линнеус университети (Швеция), Индиана университети (АҚШ), Берлин Вейерштрасс тадқиқот институти, Берлин Техника университети, Бон ва Рур университетлари (Германия), Халқаро Назарий Физика маркази, Римдаги Ла Сапиенза университети (Италия), Марсел ва Париж университетлари (Франция), Бирлашган Араб Амирликлари университети (БАА), Лидс университети (Буюк Британия), Мельбрун университети (Австралия), Миллий Политехника институти қошидаги Тадқиқот маркази (Мексика), Малайзия Халқаро Ислом университети (Малайзия).

Ноарҳимед динамик системалар бўйича олинган муҳим натижалар қуйидагилардан иборат: *p*-адик тор назариясининг ривожланиши (Россия Фанлар Академиясининг В.А.Стеклов номидаги Математика институти, Россия), ноарҳимед эҳтимоллик ўлчовлари назариясининг ривожланиши (Россия Фанлар Академиясининг В.А.Стеклов номидаги Математика институти, Россия; Линнеус университети, Швеция; Физика институти, Сербия), ноарҳимед операторлар назариясининг ривожланиши (Украина Миллий Фанлар Академияси Математика институти, Украина; Сербия Фанлар

Академияси Математика институти, Сербия), *p*-адик функциялар динамикасининг компьютер фанларига қўлланиши (“Компьютер фанлари ва бошқарув” Федерал тадқиқот маркази, Россия), *p*-адик динамик системалар учун хоатиклик мезонини аниқлаш (Марсель ва Париж университетлари, Франция), ихтиёрий тартибли Кэли дарахтидаги ферромагнетик Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларини таснифлаш (Бон ва Рур университетлари, Германия), Поттс модели учун чегаравий қонуниятни тадқиқ қилиш (Лидс университети, Буюк Британия), SOS модели учун Гиббс ўлчовининг ягона эмаслигини текшириш (Берлин Вейерштрасс тадқиқот институти ва Берлин Техника университети, Германия), *p*-адик Гиббс ўлчовлари назариясини ривожлантириш (Бирлашган Араб Амирликлари университети, БАА), Кэли дарахтидаги Изинг модели учун парамагнетик, ферромагнетик ва антиферромагнетик фаза алмашишлари мавжудлигини текшириш (Мельбрун университети, Австралия), *p*-адик сонлар майдони устида мономиал тенгламанинг илдизларини топиш (Малайзия Халқаро Ислом университети, Малайзия).

Бугунги кунда ноарҳимед динамик системаларни тадқиқ қилиш ва уларнинг Гиббс ўлчовлари назариясига татбиқлари бўйича қуйидаги йўналишларда илмий изланишлар олиб борилмоқда: траекториянинг асимптотик характерини тадқиқ қилиш, хусусун, динамик системанинг минималлик, эргодиклик, топологик қоришма ва хаотиклик каби муҳим хоссаларини текшириш, шунингдек, кўпи билан саноқлита спин қийматга эга Ҳамилтониан учун барча трансляцион-инвариант *p*-адик Гиббс ўлчовлари тўпламини тавсифлаш, берилган модел учун фаза алмашишлари мавжудлигини текшириш, *p*-адик ўлчовларнинг чегаралганликка ва сингулярликка текшириш.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Чизиқли динамик системалар функционал анализнинг ёш ва жадал ривожланаётган йўналишларидан бири бўлиб, уни 1982 йилда Торонтада PhD диссертациясини ҳимоя қилган С.Китаининг ишлари билан бошланган дейиш мумкин. Бу йўналишнинг оммалашишида Г.Годефрой, Ж.Ҳ.Шапиро, К.Г.Гроссе-Эрдман каби математикларнинг хизматлари катта. Юкланган чапга суриш операторининг гиперциклик ва суперциклик бўлиши учун мезонлар Х.Салас томонидан олинган. С.Шкарин ихтиёрий сепарабел чексиз ўлчамли Банах фазосида Китаи мезонини қаноатлантирувчи чегаралганган чизиқли *T* операторнинг мавжудлигини исботлади. А.Н.Кочубеи ноарҳимед Банах фазоларида берилган чизиқли операторлар учун ноарҳимед спектрал назариянинг ривожланишига ҳисса қўшди. Ҳозирда *p*-адик анализ математиканинг тез ривожланаётган йўналишларидан ҳисобланади. В.И.Волович, С.Албеверио, А.Ю.Хренников, Р.Чианчи, В.С.Анашинлар *p*-адик сонларнинг *p*-адик дифференциал тенгламалар назарияси, *p*-адик эҳтимоллар назарияси ва *p*-адик математик физикага кўплаб татбиқларини келтириб ўтишди. Маълумки, *p*-адик сонлар Диофант тенгламаси билан бевосита боғлиқ бўлиб, бу *p*-адик

сонлар майдонида кўпҳаднинг нолларини топиш ёки унинг ноллари сонини аниқлаш каби масалаларда намоён бўлади. А.Ю.Хренников, Э.Юръева томонидан мономиал тенгламанинг умумлашмаси бўлган 1-Липшиц функцияларининг ноллари мавжудлиги мезони топилган. Шунингдек, улар томонидан бундай функциялар учун Ҳензел леммасининг умумлашмаси исботланган.

Гиббс ўлчовлари назариясида Колмогоровнинг ўлчовни давом эттириш ҳақидаги теоремаси муҳим рол ўйнаши маълум. Н.Н.Ғанихўжаев, Ф.М.Мухамедов ва Ў.А.Розиқов томонидан бу теореманинг ноарҳимед муқобили исботланган. Шунингдек, *p*-адик эҳтимоллар назарияси А.Ю.Хренников, С.Ямада, ван Руиж, С.М.Лудковский, Ли Ней, Ф.М.Мухамедов, Н.Н.Ғанихўжаев ва Ў.А.Розиқовларнинг илмий изланишлари натижасида шаклланди. Дискрет вақтли *p*-адик динамик системалар назариясининг муҳим натижаларидан бири А.Х.Фан, С.Л.Фан, Л.Лиао, ва Й.Ф.Ванг томонидан олинган бўлиб, улар *p*-адик функциялар динамик системалари учун хаотиклик мезонини топишган. Шунингдек, Л.Лиао ихтиёрий бошланғич нуқта учун зич траекторияга эга кўплаб *p*-адик функцияларни қуришга муваффақ бўлган.

Охирги йилларда ўйинлар назариясига квадратик динамик системаларни қўллаш орқали кўплаб натижалар олинмоқда. Ж.Ҳоффбауэр ва К.Зигмундларнинг айнан шу мавзудаги қўлланмаси ўйинлар назариясига кириш учун дастлабки қадам вазифасини ўтаб беради. Дискрет вақтли Волтерра операторлари нол йиғиндили эволюцион ўйинлар динамикасини тавсифлашда муҳим ўрин тутади. Айтиш мумкинки, нол йиғиндили дискрет эволюцион ўйинлар динамикаси Э.Акин ва В.Лозерт томонидан тадқиқ қилинган. Т.Нагилакининг илмий изланишларига кўра система етарлича кўп турлардан иборат бўлганда ҳам Волтерра операторларини тадқиқ қилиш зарурати туғилади. Бошқача айтганда ўйин иштрокчилари сони жуда кўп ёки чекланмаган ҳолда натижа қандай бўлишини башорат қилиш муҳим ҳисобланади. Бу ўз навбатида “чексиз ўлчамли симплексда Волтерра оператори нинг динамикаси қандай бўлади?” деган саволни келтириб чиқаради. Чексиз ўлчамли Волтерра оператори нинг муҳим хоссалари Ф.М.Мухамедов, Ҳ.Акин, С.Темир томонидан ўрганилган. Шу ўринда Волтерра квадратик операторлари полиномиал стохастик операторларнинг ҳусусий ҳоли эканлигини таъкидлаб ўтиш жоиз.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган илмий ташкилот ёки таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг Ф4-ФА-Ф013 рақамли “Операторлар ва ноассоциатив алгебралар, динамик системалар ва уларнинг статистик механика ва популяцион биологияга татбиқлари” (2012-2016 йй), ЁФ-4-3+ЁФ-4-4 рақамли “Саноқли графларда спин системаларнинг эҳтимоллик ўлчовлари ва Ли алгебраларнинг тасвирлари ёрдамида ҳосил қилинувчи Лейбниц алгебралари” (2016-2017 йй) ва ОТ-Ф4-82 рақамли “Операторлар ва ноассоциатив

алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизиқли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос” (2017-2020) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Банах фазоларида дискрет вақтли ноарҳимед динамик системаларга мос моделлар учун *p*-адик Гиббс ўлчовларини қуриш, абсолют яқинлашувчи кетма-кетликлар фазосида полиномиал стохастик операторларнинг суръективлиги мезонларини топиш ва уларнинг омега лимит тўпламларини тавсифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

F-фазоларда берилган чизиқли операторларнинг гиперциклик ва суперциклиги ҳақидаги (ҳақиқий ёки комплекс ҳолда) маълум теоремаларнинг ноарҳимед муқобилини исботлаш ва ноарҳимед кетма-кетликлар фазосида берилган умумлашган юкланган чапга суриш операторини тадқиқ қилиш;

p-адик сонлар майдонида мономиал тенгламанинг барча илдизлари тўпламини тавсифлаш;

ярим чексиз Кэли дарахтида берилган *p*-адик Изинг модели учун умумлашган *p*-адик Гиббс ўлчовларини қуриш ва бу модел учун трансляцион-инвариант умумлашган *p*-адик Гиббс ўлчовлари тўпламини тавсифлаш;

ярим чексиз Кэли дарахтида берилган *p*-адик Изинг-Ваннименус модели учун фаза алмашишлари мавжудлигини текшириш;

p-адик Поттс-Бете функцияси учун траекториянинг асимптотик ҳолатини текшириш ва ярим чексиз Кэли дарахтида берилган *p*-адик Поттс модели учун барча даврий умумлашган *p*-адик Гиббс ўлчовлари тўпламини тавсифлаш;

SOS модели учун *p*-адик Гиббс ўлчовларини қуриш. Бу модел учун Гиббс ўлчовининг ягоналиги мезонларини аниқлаш;

чексиз ўлчамли симплексда аниқланган полиномиал стохастик операторларнинг суръективлиги учун зарур ва етарли шартларни топиш ҳамда полиномиал стохастик операторлар учун омега лимит тўпламларни тавсифлаш.

Тадқиқотнинг объекти: *p*-адик сонлар, гиперциклик/суперциклик операторлар, Кэли дарахти, панжара моделлари, *p*-адик Гиббс ўлчовлари, хаос, ночизиқли Марков операторлари, Ҳаммерштейн интеграл оператори, омега лимит тўпламлар.

Тадқиқотнинг предмети: Группалар ва графлар назарияси, алгебра ва сонлар назарияси, Гиббс ва ноарҳимед ўлчовлар назарияси, дискрет вақтли динамик системалар назарияси, символик динамика, ночизиқли Марков жараёнлари ва интеграл тенгламалар.

Тадқиқотнинг усуллари: Тадқиқот ишида функционал анализ, группалар назарияси, ўлчовлар назарияси, динамик системалар назарияси, стохастик жараёнлар ва ночизиқли интеграл тенгламалар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ноарҳимед кетма-кетликлар фазосида берилган умумлашган юкланган

чапга суриш операторининг гиперциклик, суперциклик ва циклик бўлиши учун зарурий ва етарли шартлар топилган;

ярим чексиз Кэли дарахтида берилган *p*-адик Изинг модели учун трансляцион-инвариант умумлашган *p*-адик Гиббс ўлчовлари тўплами тавсифланган ва *p*-адик Изинг-Ваннименус модели учун фаза алмашиши мавжудлиги исботланган;

p-адик Поттс-Бете функциясининг динамикаси хаотик характерга эгалиги исботланган ва ярим чексиз Кэли дарахтида берилган *p*-адик Поттс модели учун барча даврий умумлашган *p*-адик Гиббс ўлчовлари тўплами тавсифланган;

SOS модели учун *p*-адик Гиббс ўлчовлари қурилган ва берилган модел учун бу ўлчов ягона бўладиган параметрнинг аниқ қийматлари топилган;

чексиз ўлчамли симплексда аниқланган полиномиал стохастик операторларнинг суръективлиги учун зарурий ва етарли шартлар топилган ҳамда бундай операторлар учун кучли ва кучсиз омега лимит тўпламлари тўлиқ тавсифланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари:

p-Адик сонлар майдонидаги мономиал тенгламанинг барча илдизлари тўпламининг тўлиқ тавсифи панжарали системалар учун трансляцион-инвариант умумлашган *p*-адик Гиббс ўлчовлари сонини аниқлашда қўлланилган;

p-Адик Поттс-Бете функциясининг хаотик характерга эгалигини кўрсатишда қўлланган усулдан чексиз кўп даврий умумлашган *p*-адик Гиббс ўлчовларини қуришда фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Функционал анализ (асосан, ноарҳимед функционал анализ), дискрет вақтли динамик системалар, Гиббс ва ноарҳимед ўлчовлар назарияси, ночизиқли операторлар назарияси усуллари ва ва қўзғалмас нуқталар ҳақидаги теоремалардан фойдаланилган. Олинган натижалар қатъий математик мулоҳазаларга асосланиб исботланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ярим чексиз Кэли дарахтида берилган *p*-адик статистик механиканинг кўпи билан саноқлита спин қийматларга эга моделларига мос функцияларнинг динамикаси *p*-адик Гиббс ўлчовларининг термодинамик хоссаларини тадқиқ қилишда қўлланилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти *p*-адик сонлар майдонидаги мономиал тенгламанинг илдизларидан фойдаланиб *p*-адик Поттс-Бете функциясининг хаотиклиги мезонини олиш ҳамда саноқли сондаги умумлашган *p*-адик Гиббс ўлчовини қуриш имконини берганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ноарҳимед динамик системаларнинг *p*-адик Гиббс ўлчовларига татбиқлари бўйича олинган натижалар асосида:

Ярим чексиз Кэли дарахтида берилган *p*-адик Поттс модели учун барча даврий умумлашган *p*-адик Гиббс ўлчовлари тўпламининг тўлиқ таснифидан хорижий илмий-журналларда (*p*-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Application, 2021, 13(4); Results in Mathematics, 2020, 75(3); Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 105; Mathematical Physics Analysis and Geometry, 2015, 18(1)) *p*-адик рационал функцияларнинг даврий қўзғалмас нуқталарини топишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши қаралаётган физик системаларнинг термодинамикасини таҳлил қилиш имконини берган.

p-Адик Поттс-Бете функциясининг хаотиклигини кўрсатишда қўлланган усулдан хорижий илмий-журналларда (Reviews in Mathematical Physics, 2021, 33(10); *p*-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Application, 2020, 12(3); Entropy, 2019, 21(11); Science China Mathematics, 2018, 61(12)) *p*-адик рационал функциялар учун траекториянинг асимптотик ҳолатини тавсифлашда кенг фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши *p*-адик динамик системани минимал қисм системаларининг бирлашмаси кўринишида ифодалаш имконини берган.

Ярим чексиз Кэли дарахтида берилган *p*-адик Изинг-Ваннименус модели учун трансляцион-инвариант умумлашган *p*-адик Гиббс ўлчовлари тўплами тавсифи ва бу модел учун фаза алмашиши мавжудлигидан хорижий илмий-журналларда (Journal of Mathematical Physics, 2022, 63(1); Journal of Mathematical Physics, 2020, 61(1); Journal of Statistical Physics, 2018, 171(6)) ноарҳимед ўлчовларини қуришда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши чегараланмаган ноарҳимед ўлчовларини топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 5 та халқаро ва 10 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 25 та иш илмий журналларда чоп этилган бўлиб, уларнинг барчаси Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фан доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларида, 24 таси Scopus базасига кирувчи нуфузли даврий нашрларда ва 1 та иш *p*-adic Methodology in STEAM-H "*Advances in Non-Archimedean Analysis and Applications*" (Springer, Switzerland, 2021) номли китобнинг боби сифатида чоп этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, тўрт боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 193 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланиб, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган. Шунингдек,

бу қисмда диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқотнинг мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Ноарҳимед вектор фазоларида чизиқли динамик системалар ва мономиал тенгламанинг татбиқлари”** деб номланган биринчи боби икки қисмдан иборат бўлиб, биринчи қисм ноарҳимед вектор фазолардаги чизиқли операторларнинг динамикасига бағишланган. Иккинчи қисми эса кейинги боблар учун асос бўлиб хизмат қиладиган маълумот ва натижалардан иборат. Биринчи параграфда ноарҳимед вектор фазолар ҳақида умумий маълумотлар келтирилган. Иккинчи параграфда (ҳақиқий ва комплекс) топологик вектор фазолардаги чизиқли операторларнинг гиперциклик ва суперцикликлиги ҳақидаги маълум теоремаларнинг ноарҳимед муқобиллари исботланган. Чизиқли операторлар учун гиперцикликлик чексиз ўлчамли фазолардагина маънога эга бўлиши кўрсатилган. Учинчи, тўртинчи ва бешинчи параграфларда ноарҳимед c_0 фазода умумлашган юкланган чапга суриш операторларининг гиперциклик, суперциклик ва циклик бўлиши учун зарур ва етарли шартлар топилган. Олтинчи параграфда p-адик сонлар майдонида $x^q = a$ мономиал тенглама қаралган бўлиб, бу тенгламанинг илдизлари сони ҳақида тўлиқ маълумот берувчи натижалар олинган. Шунингдек, охирги параграфда мономиал тенгламанинг баъзи муҳим табиқлари келтирилганки, бу татбиқлар кейинги бобларда кенг фойдаланилган.

$\mathbb{K}$ ноарҳимед майдони устида X ва Y топологик вектор фазолар берилган бўлсин. X фазони Y фазога акслантирувчи барча узлуксиз чизиқли операторлар тўпламини $L(X,Y)$ каби белгилаймиз. Хусусан, $X = Y$ бўлганида $L(X,Y)$ ўрнига $L(X)$ ёзувдан фойдаланамиз. Демак, $T \in L(X)$ ёзув X топологик вектор фазода T узлуксиз чизиқли оператор берилганини англатади. Берилган $T \in L(X)$ оператор учун $\boldsymbol{x} \in X$ векторнинг T-*орбитаси* деганда қуйидаги тўпламни тушунамиз

$$O(\boldsymbol{x},T) := \{T^n(\boldsymbol{x}); n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Агар $T \in L(X)$ оператор учун бирор $\boldsymbol{x} \in X$ вектор топилиб, унинг T-орбитаси X фазода зич бўлса, бу операторга *гиперциклик оператор* дейилади. Мос $\boldsymbol{x}$ векторга эса T- *гиперциклик* вектор дейилади. Барча T-гиперциклик векторлар тўплами $HC(T)$ каби ёзилади.

Агар $T \in L(X)$ оператор учун бирор $\boldsymbol{x} \in X$ вектор топилиб, унинг проектив T-орбитаси, яъни қуйидаги тўплам

$$\mathbb{K} \cdot O(\boldsymbol{x},T) := \{\lambda T^n(\boldsymbol{x}); n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

X фазода зич бўлса, бу операторга *суперциклик оператор* дейилади. Мос $\boldsymbol{x}$ векторга эса T- *суперциклик* вектор дейилади. Барча T-суперциклик векторлар тўплами $SC(T)$ каби ёзилади.

Агар $T \in L(X)$ оператор учун бирор $\boldsymbol{x} \in X$ вектор топилиб, қуйидаги тўплам

$$\mathbb{K}[T]\boldsymbol{x} := \ span\ O(\boldsymbol{x}, T) = \{P(T)(\boldsymbol{x}) : P\ -\ \text{кўпҳад}\}$$

X фазода зич бўлса, бу операторга *циклик оператор* дейилади. Мос $\boldsymbol{x}$ векторга эса T-*циклик* вектор дейилади. Барча T-циклик векторлар тўплами $CC(T)$ каби ёзилади.

1-теорема. *X сепарабел F-фазо ва $T \in L(X)$ оператор берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар тенг кучли:*

(i) T гиперциклик оператор;

*(ii) T **топологик транзитив**, яъни ихтиёрий бўш бўлмаган (U, V) очиқ тўпламлар жуфтлиги учун шундай $n \in \mathbb{N}$ мавжудки, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ўринли.*

2-теорема. *X сепарабел F-фазо ва $T \in L(X)$ оператор берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар тенг кучли:*

(i) T суперциклик оператор;

(ii) ихтиёрий бўш бўлмаган (U, V) очиқ тўпламлар жуфтлиги учун шундай $n \in \mathbb{N}$ ва $\lambda \in \mathbb{K}$ мавжудки, $\lambda T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ўринли.

$\mathbb{K}$ ноарҳимед майдонида элементлари

$$\sup_{i,j}\{|w_{i,j}|\} < \infty, \qquad w_{k,l} = 0, \qquad \forall k \geq l. \tag{1}$$

каби аниқланган $\mathcal{W} = (w_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ чексиз ўлчамли юқори учбурчак матрицаси берилган бўлсин. Бу матрица ёрдамида c_0 фазода қуйидаги чизиқли операторни қараймиз

$$B_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{e}_n) = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \text{агар} \quad n = 1; \\ \sum_{j=1}^{n-1} w_{j,n}\boldsymbol{e}_j, & \text{агар} \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{2}$$

(2) формула билан аниқланган операторга *умумлашган юкланган чапга суриш оператори* дейилади. Агар (1) каби аниқланган $\mathcal{W}$ матрицанинг элементлари ихтиёрий $k \neq l + 1$ индексларда $w_{k,l} = 0$ шартни ҳам қаноатлантирса, мос $B_{\mathcal{W}}$ оператор *юкланган чапга суриш операторига* айланади. Таъкидлаш жоизки, $\boldsymbol{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ (юк) векторига мос *юкланган чапга суриш оператори* $B_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{0}$ ва ихтиёрий $n \geq 2$ учун $B_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{e}_n) = w_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}$ каби аниқланади. Бунда $w_{n-1,n} := w_{n-1}$ ва қолган

элементлар учун $w_{k,l} := 0$ дейиш орқали (1) матрицани ҳосил қилиш мумкин. Шунингдек, юкланган чапга суриши оператори учун юк векторининг барча координаталари 1 бўлса, бу оператор *чапга суриш оператори* дейилади ва у B каби ёзилади.

3-теорема. $\mathcal{W}-$ *элементлари (1) муносабат билан аниқланган матрица бўлсин. Агар ихтиёрий* $k \geq 1$ *учун* $w_{k,k+1} \neq 0$ *ўринли бўлса, у ҳолда* c_0 *фазодаги* $B_{\mathcal{W}}$ *умумлашган юкланган чапга суриш оператори суперциклик бўлади.*

1-натижа. $\mathcal{W}-$ *элементлари (1) муносабат билан аниқланган матрица бўлсин. Агар ихтиёрий* $k \geq 1$ *учун* $w_{k,k+1} \neq 0$ *ўринли бўлса, у ҳолда* c_0 *фазодаги* $B_{\mathcal{W}}$ *умумлашган юкланган чапга суриш оператори циклик бўлади.*

4-теорема. $\mathcal{W}-$ *элементлари (1) муносабат билан аниқланган матрица бўлсин. Агар унинг элементлари қуйидаги*

$$\sup_j\{|w_{k,j}|\} = |w_{k,k+1}| \neq 0, \quad \forall k \geq 1. \tag{3}$$

муносабатларни ҳам қаноатлантирса, у ҳолда $B_{\mathcal{W}}$ *операторнинг гиперциклик бўлиши учун* $\limsup_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} |w_{i,i+1}| = \infty$ *ўринли бўлиши етарли.*

Элементлари (1) муносабат билан аниқланган $\mathcal{W}$ матрица учун қуйидаги операторни қараймиз

$$T_{\mathcal{W}} := I + B_{\mathcal{W}}. \tag{4}$$

Равшанки, (4) операторнинг берилишига кўра ҳар бир $\boldsymbol{x} \in c_0$ вектор учун

$$(T_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{x}))_k = x_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} w_{k,j}x_j, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

ўринли бўлади.

5-теорема. $\mathcal{W}-$ *элементлари (1) муносабат билан аниқланган матрица бўлсин. Агар бу матрицанинг элементлари учун* $\sup_{j\geq 1}\{|w_{1,j}|\} = 0$ *ўринли бўлса, у ҳолда қуйидаги тасдиқлар тенг кучли:*

(i) $T_{\mathcal{W}}$ *суперциклик;*

(ii) $T_{\mathcal{W}}$*, гиперциклик, бу ерда* $\mathcal{W}' = (w'_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ *ва* $w'_{i,j} = w_{i+1,j+1}$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$.

6-теорема. $\mathcal{W}-$ *элементлари (1),(3) муносабатлар билан аниқланган матрица бўлсин. У ҳолда (4) формула билан берилган* $T_{\mathcal{W}}$ *оператор учун қуйидагилар ўринли:*

(i) *агар* $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} |w_{j,j+1}| = \infty$ *бажарилса, у ҳолда* $HC(T_{\mathcal{W}}) \neq \emptyset$ *ўринли;*

(ii) *агар* $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=2}^{n} |w_{j,j+1}| = \infty$ *бажарилса, у ҳолда* $SC(T_{\mathcal{W}}) \neq \emptyset$ *ўринли.*

$\mathbb{Q}_p -$ p-адик сонлар майдони бўлсин. Ихтиёрий $x \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ сонни ягона усулда қуйидаги каноник ёйилма кўринишида ифодалаш мумкин

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots), \tag{5}$$

бу ерда $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ ва x_j бутун сонлар бўлиб, $x_0 > 0$, $0 \le x_j \le p-1$ муносабатларни қаноатлантиради. Бу ҳолда, $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$ ўринли.

Ҳисоблашларда қулайлик учун биз қуйидаги янги белгилашларни киритамиз: “O” ва “o” (Аслида бу белгилашлар “$\equiv (mod\ p^k)$” ёзувнинг ўрнига қўлланилади). $x \in \mathbb{Q}_p$ учун $O[x]$ ёзув p-адик нормаси $p^{-\gamma(x)}$ бўлган ихтиёрий сонни англатади, яъни $|x|_p = |O(x)|_p$. Шунингдек, $o[x]$ ёзув эса p-адик нормаси $p^{-\gamma(x)}$ сондан кичик ихтиёрий сонни англатади, яъни $|o(x)|_p < |x|_p$. Масалан, $x = 1 - p + p^2$ сони берилган бўлса, у ҳолда $x = O[1]$, $x - 1 = o[1]$ ёки $x - 1 + p = o[p]$ каби ёзиш мумкин. $O[\cdot]$ ва $o[\cdot]$ белгилашлар p-адик сонларнинг нормасини баҳолашда қулай эканлигини таъкидлаш жоиз. Равшанки, $y = O[x]$ ва $x = O[y]$ ёзувлар тенг кучли.

Берилган $a \in \mathbb{Q}_p$ ва $r > 0$ сонлари учун маркази a нуқтада радиуси r бўлган очиқ шарни $B(a,r) := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a| < r\}$ каби ёзамиз. Шунингдек, $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \le 1\}$ ва $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}$ тўпламлар мос равишда *p-адик бутун сонлар* ва *p-адик бирлар тўплами* дейилади..

$\mathbb{Q}_p$ майдонда қуйидаги мономиал тенгламани қараймиз

$$x^k = a, \quad k \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{Q}_p. \tag{6}$$

Кўриш мумкинки, мономиал тенгламани $\mathbb{Z}_p^*$ тўплам устида қараш етарли. Дарҳақиқат, ихтиёрий $x \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ сон учун ягона $x^* \in \mathbb{Z}_p^*$ сони мавжудки, $x = \frac{x^*}{|x|_p}$ ўринли. У ҳолда $x = \frac{x^*}{|x|_p}$ ва $a = \frac{a^*}{|a|_p}$ ёзувларни (6) тенгламага қўйиб, $\left(\frac{x_*}{|x|_p}\right)^k = \frac{a_*}{|a|_p}$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу эса (6) тенгламанинг $a \in \mathbb{Q}_p$ сони учун $\mathbb{Q}_p$ майдонда ечимга эга бўлиши бирор $l \in \mathbb{Z}$ сони учун $|a|_p = p^{kl}$ тенглик ўринли ва $x_*^k = a_*$ тенгламанинг $\mathbb{Z}_p^*$ тўпламда ечимга эга бўлишига тенг кучли эканлигини билдиради. Демак, (6) мономиал тенгламада фақат $a \in \mathbb{Z}_p^*$ бўлган ҳолни кўриш етарли экан.

$b \in \mathbb{Z}$ сони учун $x^m \equiv b(mod\ p)$ таққослама $\mathbb{Z}$ тўпламда ечимга эга бўлса, b сонига *p модул бўйича m-даражали қолдиқ* дейилади. Маълумки, $b \in \mathbb{Z}$ сони p модул бўйича m-даражали қолдиқ бўлиши учун $b^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1(mod\ p)$ ўринли бўлиши зарур ва етарли. Бу ерда $d = \text{ЭКУБ}(m, p-1)$. Берилган $a \in \mathbb{Z}_p^*$ сони учун қуйидаги белгилашларни қиламиз

$$Sol_p(x^k - a) = \{\xi \in \mathbb{F}_p : \xi^k - a = o[1]\} \text{ ва } \kappa_p = card\big(Sol_p(x^k - a)\big),$$

бу ерда $\mathbb{F}_p$ тўплам p модул бўйича қолдиқлар синфи. Равшанки, $0 \leq \kappa_p \leq k$ ўринли. Таъкидлаш жоизки, $Sol_p(x^k - a) \neq \emptyset$ муносабат a_0 сонининг p модул бўйича k-даражали қолдиқ бўлишига тенг кучли.

7-теорема. $p \geq 3$ *ва* $k = mp^s$, *ЭКУБ*$(p, m) = 1$, $s \geq 0$ *бўлсин. Айтайлик,* $a \in \mathbb{Z}_p^*$ *сони қуйидаги каноник ёйилмага*

$$a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots,$$

эга бўлсин. Агар $Sol_p(x^k - a) \neq \emptyset$ *бўлса, у ҳолда қуйидагилар тенг кучли тасдиқлардир:*

(i) *(6) тенглама илдизга эга;*

(ii) $a = a_0^{p^s} + o[p^s]$;

(iii) *ихтиёрий* $\xi \in Sol_p(x^k - a)$ *учун (6) тенглама* $B(\xi, 1)$ *очиқ шарда ягона илдизга эга.*

p-Адик экспоненциал функция қуйидаги қатор билан аниқланади

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Бу қаторнинг яқинлашиш соҳаси $B(0, p^{-1/(p-1)})$ очиқ шардир. Қуйидаги тўплам

$$\mathcal{E}_p = \left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x - 1|_p < p^{-1/(p-1)}\right\}$$

p-адик экспоненциал функциянинг қийматлари тўпламидир.

2-натижа. $p \geq 3$ *ва* $k = mp^s$, *ЭКУБ*$(p, m) = 1$, $s \geq 0$ *бўлсин. Каноник ёйилмаси* $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$, *бўлган ихтиёрий* $a \in \mathbb{Z}_p^*$ *сони учун шундай* $x_* \in \mathbb{Z}_p^*$ *сони топилиб* $x_*^k = a + o[k^2]$ *муносабат ўринли бўлиши учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши зарур ва етарли:*

(1) $Sol_p(x^k - a) \neq \emptyset$;

(2) $a = a_0^{p^s} + o[p^s]$.

3-натижа. $p \geq 3$ *ва* $a \in \mathcal{E}_p$ *берилган бўлсин. Қуйидаги тасдиқлар ўринли:*

(i) *агар* $|k|_p \leq |a - 1|_p$ *бажарилса, у ҳолда (6) тенглама илдизга эга эмас.*

(ii) агар $|k|_p > |a - 1|_p$ *бажарилса, у ҳолда (6) тенглама айнан* κ_p *та илдизга эга. Бунда* $\xi_i \in Sol_p(x^k - a)$ *ўринли бўлган ҳар бир* $i \in \{1, 2, \ldots, \kappa_p\}$ *индекс учун (6) тенглама* $B(\xi_i, 1)$ *тўпламда ягона илдизга эга.*

1-изоҳ. *3-Натижага кўра* $|a-1|_p < |k|_p$ *шартни қаноатлантирувчи ҳар бир* $a \in \mathcal{E}_p$ *сони* $\mathcal{E}_p$ *тўпламда битта* k*-даражали илдизга эга ва бу илдизга* a *сонининг* k*-даражали туб илдизи дейилади.* a *сонининг* k*-даражали туб илдизини* $\sqrt[k]{a}$ *каби ёзамиз. Демак, берилган* $a \in \mathcal{E}_p$ *сони учун* $\sqrt[k]{a}$ *ёзувда биз ҳар доим* k*-даражали туб илдизни назарда тутган бўламиз.*

Диссертациянинг **"Ярим чексиз Кэли дарахтида Изинг типидаги моделлар учун *p*-адик Гиббс ўлчовлари"** деб номланган иккинчи бобида ихтиёрий тартибли ярим чексиз Кэли дарахтида берилган Изинг типидаги статистик моделлар учун умумлашган p-адик Гиббс ўлчовлари қурилган. p-Адик эҳтимоллар назариясидан фойдаланиб фаза алмашишлари мавжудлиги таҳлил қилинган. Изинг-Поттс функциясининг қўзғалмас нуқталарини топиш орқали трансляцион-инвариант умумлашган p-адик Гиббс ўлчовлари тўплами тавсифланган. Бу тавсиф фаза алмашишлари мавжудлигини кўрсатиш имконини берган. Ҳақиқий ҳолда фаза алмашишлари лимит Гиббс ўлчовининг сингулярлигини таъминлайди. Лекин, p-адик ҳолда ўлчовларнинг сингулярлигини англатувчи кучли фаза алмашиши мавжуд эмаслиги кўрсатилди. Бобнинг иккинчи қисмида Изинг-Ваннименус моделининг p-адик варианти ўрганилди. Бу модел учун k – дарахтнинг тартиби ва p – туб сонга боғлиқ равишда фаза алмашишлари мавжудлиги кўрсатилди. Шу ўринда p-адик ҳолда фаза алмашишлари бир неча турда бўлишини эслатиб ўтиш жоиз. Бу ерда фаза алмашиши деганда бири чегараланган бошқаси чегараланмаган p-адик Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги назарда тутилмоқда.

$\Gamma_+^k = (V, L)$ бу тартиби $k \geq 1$ ва илдизи x^0 бўлган ярим чексиз Кэли дарахти, яъни илдизидан k та, бошқа учларидан $k+1$ та қирра чиқувчи циклга эга бўлмаган чексиз граф. Бу ерда V графнинг учлари тўплами ва L унинг қирралари тўпламидир. Агар x ва y учларни туташтирувчи $\langle x, y\rangle \in L$ қирра мавжуд бўлса, бу учларга *яқин қўшнилар* дейилади. $\langle x, x_1\rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y\rangle$ турли қирралар кетма-кетлигига эса x учдан y учга олиб борувчи *йўл* дейилади. Йўл ёрдамида дарахтда метрика аниқлаш мумкин, яъни x учдан y учга олиб борувчи йўлдаги қирралар сонига шу учлар орасидаги масофа дейилади ва у $d(x, y)$ каби белгиланади.

Қуйидаги тўпламларни қараймиз

$$W_n = \{x \in V\colon\ d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \cup_{m=0}^{n} W_m, \quad L_n = \{\langle x, y\rangle \in L\colon\ x, y \in V_n\}.$$

Γ_+^k дарахтда координатали структура аниқлаш мумкин: x^0 илдизга (0) ёзувни ва $n \geq 1$ учун $x \in W_n$ учга $(i_1, \dots, i_n)$ ёзувни мос қўямиз, бунда $i_m \in \{1, \dots, k\}$, $1 \leq m \leq n$. У ҳолда $x = (i_1, \dots, i_n)$ учун қуйидаги тўпламни аниқлаймиз

$$S(x) = \{(x, i)\colon\ 1 \leq i \leq k\}, \tag{7}$$

бу ерда (x,i) ёзув $(i_1,\dots,i_n,i)$ координатани англатади. $S(x)$ тўпламга x учнинг *биринчи авлодлари* тўплами дейилади.

Шунингдек, Γ_+^k дарахтда бинар амал аниқлаш мумкин. $\circ\colon \Gamma_+^k \times \Gamma_+^k \to \Gamma_+^k$ бинар амални қуйидагича аниқлаймиз: координатали ёзувлари $x=(i_1,\dots,i_n)$ ва $y=(j_1,\dots,j_m)$ бўлган учлар учун

$$x \circ y = (i_1,\dots,i_n) \circ (j_1,\dots,j_m) = (i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_m),$$

$$x \circ x^{(0)} = x^{(0)} \circ x = (i_1,\dots,i_n) \circ (0) = (i_1,\dots,i_n).$$

Ушбу амал Γ_+^k дарахтни бири бор нокоммутатив ярим группа деб қараш мумкинлигини билдиради. Дарахтнинг ярим группавий структурасидан фойдаланиб унда ҳаракатни (трансляцияни) $\tau_g\colon \Gamma_+^k \to \Gamma_+^k$, $\forall g \in \Gamma_+^k$ $\tau_g(x) = g \circ x$ каби аниқлаймиз. Равшанки, $\tau_{(0)} = id$ ўринли.

$G \subset \Gamma_+^k$ бирор қисм ярим группа ва Y-қийматли $h\colon \Gamma_+^k \to Y$ функция берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $g \in G$ ва ҳар бир $x \in \Gamma_+^k$ учун $h(\tau_g(x)) = h(x)$ ўринли бўлса, h функцияга *G-даврий* дейилади. Ихтиёрий Γ_+^k-даврий функцияга эса *трансляцион-инвариант* дейилади.

Равшанки, ихтиёрий $m \geq 2$ натурал сони учун

$$G_m = \{x \in \Gamma_+^k\colon\ d(x,x^0) \equiv 0 (mod\ m)\}. \tag{8}$$

тўплам Γ_+^k ярим группанинг қисм ярим группаси бўлади.

$\Phi \subset \mathbb{R}$ тўплам ва дарахтнинг ҳар бир x учига бирор $\sigma(x) \in \Phi$ сонни мос қўювчи акслантиришга *конфигурация*, Φ тўпламга эса *спин қийматлар тўплами* дейилади. Мос равишда V_n ва W_n тўпламларда ҳам σ_n ва $\omega_{[n]}$ конфигурацияларни аниқлаш мумкин. V (мос равишда V_n, W_n) тўпламдаги барча конфигурациялар оиласи $\Omega = \Phi^V$ (мос равишда $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$) каби белгиланади. Берилган $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ ва $\omega_{[n]} \in \Omega_{W_n}$ конфигурациялар учун қуйидаги конфигурацияни аниқлаймиз:

$$(\sigma_{n-1} \vee \omega_{[n]})(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), & \text{агар} \quad x \in V_{n-1} \text{ бўлса,} \\ \omega_{[n]}(x), & \text{агар} \quad x \in W_n \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Кўриш мумкинки, $\sigma_{n-1} \vee \omega_{[n]} \in \Omega_{V_n}$ ўринли.

Изинг модели қаралаётганда спин қийматлар тўплами $\Phi = \{-1,1\}$ деб олинади. Ω_{V_n} чекли тўпламда p-адик Изинг модели қуйидагича берилади

$$H_n(\sigma) = N \sum_{\langle x,y \rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y), \qquad \forall \sigma \in \Omega_{V_n}, \tag{8}$$

бу ерда $N \in \mathbb{Z}^\times$.

Γ_+^k дарахтда (8) модел учун умумлашган p-адик Гиббс ўлчовини қурамиз. Бунинг учун $\mathbf{h}\colon V \to \mathbb{Q}_p^\Phi$ функцияни қараймиз, $\mathbf{h}_x = (h_{-1,x}, h_{1,x})$, бу ерда $x \in V$

учун $h_{\pm 1,x} \in \mathbb{Q}_p$. Бирор $\rho \in \mathbb{Q}_p \backslash \{-1,0,1\}$ сон учун Ω_{V_n} чекли тўпламда $\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}$ p-адик эҳтимоллик ўлчовини қараймиз

$$\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})}} \rho^{H_n(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}, \tag{9}$$

бу ерда $Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})}$ нормаллаштирувчи катталик бўлиб, у қуйидагича аниқланади

$$Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})} = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \rho^{H_n(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}. \tag{10}$$

2-изоҳ. *Таъкидлаш жоизки, $Z_{n,\rho}^{(\boldsymbol{h})}$ нормаллаштирувчи катталик баъзи $\boldsymbol{h}$ функциялар учун нол бўлиши ҳам мумкин. Бундай ҳолларда барча $\sigma \in \Omega_{V_n}$ конфигурациялар учун $\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}(\sigma) = \infty$ деб олинади. Бошқа томондан бундай ўлчовларнинг биз учун амалий аҳамияти камлигидан бу ҳолатларни ўлчов сифатида қабул қилмаслик мумкин.*

Юқорида (9), (10) каби берилган эҳтимоллик ўлчовлари чекли тўпламларда аниқланганини таъкидлаш жоиз. Табиийки, $\{V_n\}$ шарлар кетма-кетлиги дарахтнинг барча учларини қопловчи ўсувчи кетма-кетликдир. Демак, (9), (10) ёрдамида берилган ўлчовлардан фойдаланиб бутун дарахтда аниқланган лимит ўлчовни аниқлаш масаласи пайдо бўлади. Лимит ўлчовнинг асосий хусусияти бу чекли тўпламларда (9) каби аниқланган ўлчовлар билан устма-уст тушиши билан белгиланади, яъни Ω чексиз тўпламда аниқланган p-адик эҳтимоллик ўлчови $\mu_{\mathbf{h},\rho}$ учун қуйидаги шартнинг бажарилиши муҳим ҳисобланади

$$\mu_{\mathbf{h},\rho}\left(\left\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\right\}\right) = \mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}(\sigma_n), \quad \forall \sigma_n \in \Omega_{V_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Бу каби $\mu_{\mathbf{h},\rho}$ ўлчовларни ҳосил қилишда Колмогоровнинг ўлчовни давом эттириш ҳақидаги теоремасининг ноарҳимед вариантидан фойдаланиш мумкин. Бунинг учун (9) каби аниқланган ўлчовлар кетма-кетлиги мувофиқлашган бўлиши, яъни ҳар бир $n \geq 1$ бутун сонда

$$\sum_{\omega_{[n]} \in \Omega_{W_n}} \mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_{[n]}) = \mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \quad \forall \sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}} \tag{12}$$

муносабатни қаноатлантириши етарли. Бошқача айтганда (12) муносабат (11) шартни қаноатлантирувчи $\mu_{\mathbf{h},\rho}$ p-адик эҳтимоллик ўлчовининг мавжудлигини таъминлайди. Бундай $\mu_{\mathbf{h},\rho}$ ўлчовга берилган модел учун *умумлашган p-адик Гиббс ўлчови* дейилади.

Изинг-Поттс функцияси деб номланувчи қуйидаги p-адик акслантиришни қараймиз

$$f_{\theta,k}(x) = \left(\frac{\theta x+1}{x+\theta}\right)^k, \quad \theta = \rho^{2N} \in \mathbb{Q}_p \backslash \{-1,0,1\}. \tag{13}$$

$Fix(f_{\theta,k})$ билан $f_{\theta,k}(x)$ функциянинг барча қўзғалмас нуқталари тўпламини белгилаймиз. Қуйида $Fix(f_{\theta,k})$ тўплам ва Изинг модели учун барча трансляцион-инвариант умумлашган p-адик Гиббс ўлчовлари тўпламини боғловчи тасдиқни келтирамиз.

1-тасдиқ. $h \neq -1$ *p-адик Изинг-Поттс функциясининг қўзғалмас нуқтаси бўлсин. У ҳолда* $\mu_h := \mu_{\boldsymbol{h},\rho}$ *ўлчов Изинг модели учун трансляцион-инвариант умумлашган p-адик Гиббс ўлчови бўлади. Бунда ҳар бир* $x \in V$ *учун* $\boldsymbol{h}_x = (1, h)$ *деб олинмоқда. Шунингдек, бу ўлчов қуйидагича ҳисобланади*

$$\mu_h(\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}) = \frac{\rho^{H_n(\sigma)} h^{\sum_{x \in W_n} \delta_{1\sigma(x)}}}{(\rho^{-N}h+\rho^N)^{\frac{k(k^n-1)}{k-1}}(h+1)}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

бу ерда δ_{ij} *Кронеккер символи.*

2-тасдиқ. $\rho^{2N} \in \mathbb{Q}_p \backslash \{-1,0,1\}$ *ва Изинг модели учун* μ_h *трансляцион-инвариант умумлашган p-адик Гиббс ўлчови берилган бўлсин. У ҳолда қуйидагилар ўринли:*

(I) агар $|\rho|_p \neq 1$ *бўлса, у ҳолда* μ_h *чегараланган;*

(II) агар $|\rho|_p = 1$ *бўлса, у ҳолда* μ_h *ўлчов чегараланмаган бўлиши учун* $0 < |h + \rho^{2N}|_p < 1$ *ўринли бўлиши зарур ва етарли.*

$TIG\mathcal{G}_pM$ билан Изинг модели учун барча трансляцион-инвариант умумлашган p-адик Гиббс ўлчовлари тўпламини белгилаймиз.

8-теорема. $k \geq 2$ *ва* $|\rho^N|_p > 1$ *бўлсин. У ҳолда* Γ_+^k *дарахтда берилган p-адик Изинг модели учун* $card(TIG\mathcal{G}_pM) \geq 3$ *ўринли. Шунингдек, агар* $|\rho^{-N}|_p < |k-1|_p$ *бажарилса, у ҳолда қуйидаги ўринли*

$$card(TIG\mathcal{G}_pM) = \begin{cases} \mathcal{N}_{p,k-1} + 2, & \text{агар } k \text{ жуфт бўлса;} \\ \mathcal{N}_{p,k-1} + 1, & \text{агар } k \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

9-теорема. $k \geq 2$ *ва* $|\rho^N|_p < 1$ *бўлсин. У ҳолда* Γ_+^k *дарахтда берилган p-адик Изинг модели учун* $card(TIG\mathcal{G}_pM) \geq 1$ *ўринли. Шунингдек, агар* $|\rho^N|_p < |k+1|_p$ *бажарилса, у ҳолда қуйидаги ўринли*

$$card(TIG\mathcal{G}_pM) = \begin{cases} \mathcal{N}_{p,k+1} + 1, & \text{агар } k \text{ жуфт бўлса;} \\ \mathcal{N}_{p,k+1}, & \text{агар } k \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

Диссертациянинг **“p-Адик статистик моделларда хаос**” деб номланган учинчи боби p-адик статистик моделларга (Поттс ва SOS моделлари) мос акслантиришларнинг динамикасини тадқиқ этишга бағишланган. Ярим чексиз Кэли дарахтида берилган p-адик ва ҳақиқий Поттс моделларига мос динамик системалар учун траекториянинг асимптотик характери турлича бўлиши кўрсатилган. Маълумки, ярим чексиз Кэли дарахтидаги q та спин қийматли ҳақиқий Поттс модели учун $q+1$ та турли трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари мавжуд. Шунингдек, ҳақиқий ҳолда q та спин қийматли ферромагнетик Поттс модели учун ҳароратнинг иккита $0 < T'_{cr} < T_{cr}$ критик нуқталари мавжуд бўлиб, ҳароратнинг бу критик нуқталарга нисбатан жойлашувига қараб четки Гиббс ўлчовлари сони турлича бўлади, яъни ҳарорат кичик критик нуқтадан паст бўлса, q та четки Гиббс ўлчовлари, ҳарорат критик нуқталар орасида бўлса, $q+1$ та четки Гиббс ўлчовлари ва ҳарорат катта критик нуқтадан юқори бўлганда ягона четки Гиббс ўлчови мавжуд. p-Адик ҳолда эса бу модел учун Гиббс ўлчовлари тўплами ҳақиқий ҳолдагидан фарқ қилади. Масалан, q сони p сонига бўлинмаса, ихтиёрий тартибли Кэли дарахтида Поттс модели учун ягона p-адик Гиббс ўлчови мавжуд. Бу ҳолда умумлашган p-адик Гиббс ўлчови тушунчасини киритиш зарурати туғилади. Ушбу бобда p-адик Поттс моделига мос ихтиёрий даврий умумлашган p-адик Гиббс ўлчови мавжулигини кўрсатишда Поттс-Бете функциясининг хаотик характеридан фойдаланилган. Шунингдек, SOS модели учун p-адик Гиббс ўлчовининг мавжудлиги ва ягоналиги шартлари топилган.

p-Адик Поттс модели Изинг моделининг умумлашмаси бўлиб, унинг спин қийматлари $\Phi := \{1,2,\dots,q\}$ тўпламда ўзгаради.

Ω_{V_n} чекли тўпламда q та спин қийматли p-адик Поттс моделининг Ҳамилтониани қуйидагича берилади

$$\mathcal{H}(\sigma) = J\sum_{\langle x,y\rangle\in L_n}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \qquad \forall\sigma\in\Omega_{V_n}, \tag{14}$$

бу ерда $J\in\mathbb{Z}^{\times}$ ва $\langle x,y\rangle$ яқин қўшниларни ифодалайди, δ_{ij} эса Кронеккер символидир.

Γ_+^k ярим чексиз Кэли дарахтида берилган q та спин қийматли Поттс модели учун умумлашган p-адик Гиббс ўлчовини қурамиз.

Айтайлик, $\mathbf{h}: V\to\mathbb{Q}_p^q$ вектор функция берилган бўлсин, яъни ихтиёрий $x\in V$ учун $\mathbf{h}_x = (h_{1,x}, h_{2,x},\dots,h_{q,x})$. Бунда ҳар бир $i\in\{1,2,\dots,q\}$ индекс ва ихтиёрий $x\in V$ учун $h_{i,x}\in\mathbb{Q}_p^{\times}$ ўринли. Бирор $\rho\in\mathbb{Q}_p\backslash\{-1,0,1\}$ сон учун Ω_{V_n} чекли тўпламда $\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}$ p-адик эҳтимоллик ўлчовини қуйидагича аниқлаймиз

$$\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})}}\rho^{\mathcal{H}(\sigma)}\prod_{x\in W_n}h_{\sigma(x),x}, \qquad \forall\sigma\in\Omega_{V_n}. \tag{15}$$

Бу ерда $Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})}$ нормалловчи катталик.

Қуйидаги тасдиқ орқали $\{\mu_{\boldsymbol{h},\rho}^{(n)}\}_{n\geq 1}$ кетма-кетликнинг мувофиқлашган бўлишининг зарур ва етарли шартларини **h** вектор функция ёрдамида берамиз.

3-тасдиқ. *$\mathcal{H}$ – ярим чексиз Кэли дарахтида берилган q та спинли p-адик Поттс моделининг Ҳамилтониани бўлсин. $\boldsymbol{h}: V \to \mathbb{Q}_p^q$ вектор функцияга мос (15) формула билан аниқланган ўлчовлар кетма-кетлиги мувофиқлашган бўлиши учун ҳар бир $x \in V$ учда қуйидаги тенгликларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли:*

$$\frac{h_{i,x}}{h_{q,x}} = \prod_{y\in S(x)} \frac{\sum_{u=1}^{q} \rho^{J\delta_{iu}} h_{u,y}}{\sum_{u=1}^{q} \rho^{J\delta_{qu}} h_{u,y}}, \qquad i \in \{1,2,\dots,q-1\}. \tag{16}$$

10-теорема. $p = 2$, $\rho \in \mathcal{E}_2$ *ва* $m \leq [q/2]$ *берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли.*

(A) Агар қуйидаги

(A1) $|4m|_2 > max\{|\rho^J - 1|_2, |q|_2\}$ *ва* $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$;

(A2) $|4m|_2 = |\rho^J - 1|_2 = |q|_2$ *ва* $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$;

(A3) $|m|_2 > |\rho^J - 1|_2 = |q|_2 > |4m|_2$, $q \neq 2m$, $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$ *ва* $\sqrt{1-2a+b^2}$ *мавжуд, бунда* $a = \frac{q}{2m}$, $b = \frac{\rho^J - 1}{2m}$;

шартлардан камида биттаси бажарилса, у ҳолда айнан $2C_q^m$ *та трансляцион-инвариант 2-адик Гиббс ўлчовлари мавжуд.*

(B) Агар қуйидаги

(B1) $|4m|_2 > max\{|\rho^J - 1|_2, |q|_2\}$ *ва* $\rho^J \in \{1-q, 1+q\}$;

(B2) $|4m|_2 = |\rho^J - 1|_2 = |q|_2$ *ва* $\rho^J \in \{1-q, 1+q;$

(B3) $|m|_2 = |\rho^J - 1|_2 = |q|_2 > |4m|_2$ *ва* $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$;

(B4) $|m|_2 > |\rho^J - 1|_2 = |q|_2 > |4m|_2$ *ва* $\rho^J \in \{1-q, 1+q\}$;

(B5) $|\rho^J - 1|_2 = |q|_2 > |m|_2$ *ва* $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$;

(B6) $|m|_2 > |\rho^J - 1|_2 = |q|_2 > |4m|_2$, $q = 2m$, $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$ *ва* $\sqrt{b^2-1}$ *мавжуд, бу ерда* $b = \frac{\rho^J - 1}{q}$;

шартлардан камида биттаси бажарилса, у ҳолда айнан C_q^m *та трансляцион-инвариант 2-адик Гиббс ўлчовлари мавжуд.*

(C) Бошқа ҳолларда трансляцион-инвариант 2-адик Гиббс ўлчови мавжуд эмас.

11-теорема. $p \neq 2$, $\rho \in \mathcal{E}_p$ *ва* $m \leq [q/2]$ *берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли.*

(A) Агар қуйидаги

(A1) $|m|_p > max\{|\rho^J - 1|_p, |q|_p\}$ *ва* $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$;

(A2) $|m|_p = |\rho^J - 1|_p = |q|_p,\ 0 < |(\rho^J - 1)^2 - q^2|_p < |q^2|_p,$ $0 < |q - 2m|_p < |q|_p$ *ва шундай* $s \geq 1$ *бутун сон мавжудки,*

$$|p^{-2s}((\rho^J - 1)^2 - 4m(q-m))|_p = 1;$$

шартлардан камида биттаси бажарилса, у ҳолда айнан $2C_q^m$ *та трансляцион-инвариант p-адик Гиббс ўлчовлари мавжуд.*

(B) Агар қуйидаги

(B1) $|m|_p > max\{|\rho^J - 1|_p, |q|_p\}$ *ва* $\rho^J \in \{1-q, 1+q\}$;

(B2) $|m|_p < |\rho^J - 1|_p = |q|_p$ *ва* $0 < |(\rho^J - 1)^2 - q^2|_p < |q^2|_p$;

(B3) $|m|_p = |\rho^J - 1|_p = |q|_p$ *ва* $0 < |(\rho^J - 1)^2 - q^2|_p < |q^2|_p,\ |q - 2m|_p = |q|_p$;

(B4)$|m|_p = |\rho^J - 1|_p = |q|_p$ *ва* $\rho^J \in \{1-q, 1+q\}$ *ва* $0 < |q - 2m|_p < |q|_p$;

(B5) $q = 2m,\ |\rho^J - 1|_p = |q|_p,\ 0 < |(\rho^J - 1)^2 - q^2|_p < |q^2|_p$ *ва шундай* $s \geq 1$ *бутун сон мавжудки,* $|p^{-2s}((\rho^J - 1)^2 - q^2)|_p = 1$ *ўринли;*

шартлардан камида биттаси бажарилса, у ҳолда айнан C_q^m *та трансляцион-инвариант p-адик Гиббс ўлчовлари мавжуд.*

(C) Бошқа ҳолларда трансляцион-инвариант p-адик Гиббс ўлчови мавжуд эмас.

4-тасдиқ. Γ_+^2 *ярим чексиз Кэли дарахтида q та спинли p-адик Поттс модели учун* μ_h *трансляцион-инвариант Гиббс ўлчови берилган бўлсин. У ҳолда* μ_h *чегараланган бўлиши учун* $p \nmid q$ *муносабат ўринли бўлиши зарур ва етарли.*

Поттс-Бете функцияси деб номланувчи қуйидаги акслантиришни қараймиз

$$f_{\rho,k}(z) = \left(\frac{\rho^J z + q - 1}{z + \rho^J + q - 2}\right)^k, \qquad \rho \in \mathbb{Q}_p \backslash \{-1,0,1\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

Қуйидаги белгилашни қиламиз: $Sol_p(z^k + q - 1) \neq \emptyset$. $|q-1|_p = p^{-s}$, $s \geq 0$ шартни қаноатлантирувчи $q \geq 3$ натурал сони учун ўзаро кесишмайдиган шарлар бирлашмаси бўлган қуйидаги тўпламни аниқлаймиз

$$X = \cup_{i=1}^{\kappa_p} B(z_i, r). \tag{18}$$

Бу ерда $r = \left|p^{\frac{s+k}{k}}(\rho^J - 1)\right|_p$ ва z_i p-адик сони $s = 0$ учун (19) формула билан, $s \neq 0$ сони учун (20) формула билан аниқланган.

$$z_i = \begin{cases} 1-q+\eta_i(\rho^J-1), & \text{агар} \quad \xi_i+q-1 \not\equiv 0(mod\ p) \\ 1-q, & \text{агар} \quad \xi_i+q-1 \equiv 0(mod\ p), \end{cases} \quad (19)$$

бунда η_i берилган $\xi_i \in Sol_p(z^k+q-1),\ i=\overline{1,\kappa_p}$ учун қуйидаги таққосламанинг ечими

$$\eta_i(\xi_i-1)+\xi_i+q-1 \equiv 0(mod\ p).$$

Шунингдек, $s \neq 0$ бўлганда $\xi_i \in Sol_p(z^k+q-1),\ i=\overline{1,\kappa_p}$ учун

$$z_i = 1-q+p^{\frac{s}{k}}\xi_i(\rho^J-1). \quad (20)$$

12-теорема. $|q-1|_p = p^{-s},\ s \geq 0,\ \sqrt[k]{1-q} \in \mathbb{Q}_p$ *ва (18) формула билан аниқланган X тўплам берилган бўлсин. Агар* $\kappa_p \geq 2$ *ва* $|k|_p > p^{\frac{s(k-1)}{k}}|\rho^J-1|_p$ *бўлса, у ҳолда* $(X, J_{f_{\rho,k}}, f_{\rho,k})$ *транзитив* p*-адик итарувчи, яъни бу учлик* κ_p *та символдан иборат символик динамикага топологик қўшма бўлади.*

13-теорема. $k \geq 2$, $|q|_p < 1$ *ва* $z_0^* = 1$ *берилган бўлсин. У ҳолда* $(\mathbb{Q}_p, f_{\rho,k})$ *динамик системани қуйидаги тасдиқлар тўлиқ тавсифлайди:*

(A) Агар $|k|_p \leq |q+\rho^J-1|_p$ *бажарилса, у ҳолда* $Fix(f_{\rho,k}) = \{z_0^*\}$ *ва* $A(z_0^*) = Dom(f_{\rho,k})$ *ўринли.*

(B) Айтайлик, $|k|_p > |q+\rho^J-1|_p$ *ва* $|\rho^J-1|_p < |q^2|_p$ *ўринли бўлсин. У ҳолда* $f_{\rho,k}$ *акслантиришга нисбатан инвариант бўлган шундай бўшмас* $J_{f_{\rho,k}} \subset Dom(f_{\rho,k}) \backslash \mathcal{P}_{z^{(\infty)}}$ *тўплам мавжудки,*

$$A(z_0^*) = Dom(f_{\rho,k}) \backslash \left(\mathcal{P}_{z^{(\infty)}} \cup J_{f_{\rho,k}}\right)$$

ўринли бўлади. Шунингдек, қуйидагилар ўринли:

(B1) Агар ЭКУБ$(k, p-1) = 1$ *бўлса, у ҳолда шундай* $z_* \in Fix(f_{\rho,k})$ *мавжудки,* $z_* \neq z_0^*$ *ва* $J_{f_{\rho,k}} = \{z_*\}$ *ўринли;*

(B2) Агар ЭКУБ$(k, p-1) > 1$ *бўлса, у ҳолда* $(J_{f_{\rho,k}}, f_{\rho,k}, |\cdot|_p)$ *динамик система ЭКУБ*$(k, p-1)$ *та символдан иборат символик динамикага топологик қўшма бўлади.*

Диссертациянинг **“Суръектив ночизиқли Марков операторлари ва уларнинг динамикаси”** номли тўртинчи боби иккита асосий қисмдан иборат. Биринчи қисм (дастлабки тўрт параграфдан иборат) полиномиал стохастик операторларнинг суръективлигини ўрганишга бағишланган. Иккинчи қисмда (охирги учта параграф) бундай операторларнинг динамикаси ўрганилган. Бу натижалардан спин қийматлари саноқлита бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовларини тадқиқ этишда фойдаланиш мумкин. Бобнинг биринчи қисмида

чексиз ўлчамли симплексда аниқланган ночизиқли Марков операторларининг суръективлиги ва ортогоналликни сақлаши каби хоссалари ўрганилган. Маълумки, чекли ўлчамли ҳолда бу тушунчалар устма-уст тушади. Чексиз ўлчамли ҳолда бу тушунчалар умуман олганда бир хил эмаслиги мисоллар ёрдамида кўрсатилган. Шунингдек, операторнинг суръектив бўлиши учун етарли шартлар топилган. Олинган натижалардан Ҳаммерштейн интеграл операторларининг баъзи синфи учун мусбат ечим мавжудлигини текширишда фойдаланиш мумкинлиги кўрсатилган. Охирги учта параграфда чексиз ўлчамли симплексда аниқланган стохастик операторлар учун эргодиклик хоссасининг бажарилиши текширилган. Ҳақиқий l_1 фазодаги стохастик операторларнинг икки синфи $\mathcal{L}^+$ ва $\mathcal{L}^-$ аниқланган. Бу синфлардан олинган V операторлар учун кучли ω_V ва кучсиз $\omega_V^{(w)}$ лимит тўпламлар тўлиқ тавсифланган. Шунингдек, бу синфлардан олинган операторлар кучсиз эргодик бўлиши исботланган. $\mathcal{L}^-$ синфда кучсиз эргодик бўлиб, кучли эргодик бўлмаган операторлар мавжудлиги кўрсатилган. Бундан ташқари $\mathcal{L}^+$ ва $\mathcal{L}^-$ синфларга тегишли бўлган барча чизиқли операторлар таснифланган.

Бўш бўлмаган $E \subset \mathbb{N}$ тўплам берилган бўлсин. $r \geq 0$ сони учун қуйидаги тўпламларни аниқлаймиз

$$S_r^E = \{\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in E} \in \mathbb{R}^E \ : x_i \geq 0, \quad \sum_{i\in E} x_i = r\}, \quad \boldsymbol{B}_r^E = \bigcup_{\rho\in[0,r]} S_\rho^E.$$

Қулайлик учун $S_r^{\mathbb{N}}$ ўрнига S_r ва $\boldsymbol{B}_r^{\mathbb{N}}$ ўрнига $\boldsymbol{B}_r$ ёзувдан фойдаланамиз. Равшанки, ихтиёрий $r \geq 0$ учун $S_r \subset \ell_1$ ўринли.

Маълумки, $S_1 = convh(ExtrS_1)$ бўлиб, бу ерда $Extr(S_1)$ тўплам S_1 тўпламнинг четки нуқталари ва $convh(A)$ эса A тўпламнинг қаварик қобиғидир. S_1 тўпламнинг ихтиёрий четки нуқтаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\boldsymbol{e}_k = (\underbrace{0,\dots,0,1}_{k}, 0,0,\dots), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$|E| = n$ бўлганда S_1^E тўплам $n-1$- *ўлчамли симплекс* ва E саноқли бўлганда эса *чексиз ўлчамли симплекс* дейилади.

Биз қуйидаги тўпламлардан фойдаланамиз

$$intS_r = \{\boldsymbol{x} \in S_r : x_k > 0, \ k \in \mathbb{N}\}, \quad \partial S_r = S_r \backslash intS_r.$$

Айтайлик, $\mathcal{P} = (P_{i_1\dots i_m,k})_{i_1,\dots,i_m,k\in E}$ $m+1$-тартибли гиперматрица бўлсин. $m+1$-тартибли гиперматрицанинг элементлари учун ихтиёрий $i_1, i_2, \dots, i_m, k \in E$ индексларда

$$P_{i_1\dots i_m,k} \geq 0, \quad \sum_{n\in E} P_{i_1\dots i_m,n} = 1 \tag{21}$$

ўринли бўлса, бу матрицага стохастик матрица дейилади. Берилган $m+1$-тартибли стохастик гиперматрица учун $\boldsymbol{B}_1^E$ тўпламда V операторни қуйидагича аниқлаймиз

$$(V(\boldsymbol{x}))_k = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_m \in E} P_{i_1 i_2 \dots i_m,k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}, \quad k \in E. \tag{22}$$

(21), (22) формулалар ёрдамида берилган операторга *m-тартибли полиномиал стохастик оператор* (қисқача m-тартибли ПСО) дейилади. Умумийликка зиён етказмаган ҳолда $(1,2,\dots,m)$ сонларининг ихтиёрий π ўрин алмаштиришлари учун $P_{i_1 \dots i_m,k} = P_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(m)},k}$ деб ҳисоблаш мумкин.

1-лемма. *$V-m$-тартибли ПСО бўлсин. У ҳолда қуйидагилар ўринли*

$$V(S_1^E) \subset S_1^E, \qquad V(\boldsymbol{B}_1^E \backslash S_1^E) \subset \boldsymbol{B}_1^E \backslash S_1^E.$$

2-лемма. *$V-$ m-тартибли ПСО бўлсин. У ҳолда V оператор $\boldsymbol{B}_1^E$ тўпламда суръектив бўлиши учун унинг S_1^E тўпламда суръектив бўлиши зарур ва етарли.*

Агар $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in S_1^E$ векторлар учун $supp(\boldsymbol{x}) \cap supp(\boldsymbol{y}) = \varnothing$ ўринли бўлса, у ҳолда бу векторлар *ортогонал дейилади* ва $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ каби ёзилади. Равшанки, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in S_1^E$ векторларнинг ортогоналлиги ихтиёрий $k \in E$ индексларда $x_k y_k = 0$ муносабатга тенг кучли. Шу боис, биз қуйидаги ёзувдан фойдаланамиз: $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \sum_{k \in E} x_k y_k$.

1-таъриф. *S_1^E тўпламда аниқланган $V-$ m-тартибли ПСО ихтиёрий ортогонал векторларни яна ортогонал векторларга ўтказса, бу операторга ортогоналликни сақловчи ПСО (қисқача ОС ПСО) дейилади.*

14-теорема. *Ихтиёрий $i \in \mathbb{N}$ индексда $V(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i$ шартни қаноатлантирувчи m-тартибли ПСО берилган бўлсин. У ҳолда қуйидагилар тенг кучли:*

(i) V оператор ортогоналликни сақлайди;
(ii) $k \notin \{i_1,\dots,i_m\}$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $i_1,\dots,i_m,k \in \mathbb{N}$ учун $P_{i_1 \dots i_m,k} = 0$ ўринли;

(iii) Ихтиёрий $\boldsymbol{x} \in S_1$ ва $k \geq 1$ учун $(V(\boldsymbol{x}))_k = x_k \mathcal{A}_k(\boldsymbol{x})$ ўринли. Бу ерда $\mathcal{A}_k(\boldsymbol{x}) = x_k^{m-1} + \sum_{j=1}^{m-1} C_m^j x_k^{m-1-j} \sum_{i_{m+1-j},\dots,i_m \neq k} P_{k \dots k i_{m+1-j} \dots i_m,k} x_{i_{m+1-j}} \cdots x_{i_m}$.

15-теорема. *Ихтиёрий $i \in \mathbb{N}$ индексда $V(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i$ шартни қаноатлантирувчи m-тартибли ПСО берилган бўлсин. У ҳолда қуйидагилар тенг кучли:*

(A) V оператор ортогоналликни сақлайди;
(B) V оператор суръектив;
(C) V оператор қуйидаги хоссаларга эга:

(C1) $V^{-1}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i, \ \ \forall i \in \mathbb{N},$

(C2) $V^{-1}\left(int\Gamma_{\boldsymbol{e}_{i_1}\boldsymbol{e}_{i_2}}\right) = int\Gamma_{\boldsymbol{e}_{i_1}\boldsymbol{e}_{i_2}}, \ \ \forall i_1, i_2 \in \mathbb{N},$

…….....

(Cm) $V^{-1}\left(int\Gamma_{\boldsymbol{e}_{i_1}\cdots\boldsymbol{e}_{i_m}}\right) = int\Gamma_{\boldsymbol{e}_{i_1}\cdots\boldsymbol{e}_{i_m}}, \ \ \forall i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}.$

5-тасдиқ. *S_1 тўпламда $V-$ m-тартибли суръектив ПСО берилган бўлсин. У ҳолда шундай $\{j_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$ кетма-кетлик мавжудки, ҳар бир $k \in \mathbb{N}$ индексда $P_{j_k j_k \dots j_k, k} = 1$ ўринли.*

Қуйидаги тасдиқ ПСОнинг суръективлиги учун етарли шартни ифодалайди.

6-тасдиқ. *S_1 тўпламда $V-$ m-тартибли ПСО берилган бўлсин. Айтайлик, шундай $\{j_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}$ кетма-кетлик мавжуд бўлсинки, $supp(\boldsymbol{x}) \subset \{j_n\}_{n\geq 1}$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\boldsymbol{x} \in S_1$ вектор учун*

$$(V(\boldsymbol{x}))_k = x_{j_k} \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j x_{j_k}^{m-1-j} \sum_{i_{m+1-j},\dots,i_m \neq j_k} P_{j_k \dots j_k i_{m+1-j} \dots i_m, k} x_{i_{m+1-j}} \cdots x_{i_m},$$

$$P_{j_k \dots j_k, k} = 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

ўринли бўлсин. У ҳолда V суръектив оператор бўлади.

16-теорема. *S_1 тўпламда $V-$ m-тартибли суръектив ПСО берилган бўлсин. Агар V ортогоналликни сақласа, у ҳолда натурал сонларнинг шундай π ўрин алмаштиришлари мавжудки, ихтиёрий $i_1, \dots, i_m, k \in \mathbb{N}$ учун*

$$P_{i_1 \dots i_m, k} = 0, \quad if \ \ \pi(k) \notin \{i_1, \dots, i_m\}$$

ўринли бўлади.

Ихтиёрий $V: S_1^E \to S_1^E$ операторга стохастик оператор дейилади. Биз айнан стохастик операторларни ўрганамиз. S_1 тўпламда аниқланган V оператор учун $\{V^n(\boldsymbol{x}_0)\}_{n=0}^{\infty}$ билан $\boldsymbol{x}_0 \in S_1$ векторнинг V операторга нисбатан траекториясини белгилаймиз. Шунингдек, $\omega_V(\boldsymbol{x}_0)$ (мос равишда $\omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0)$) билан $\{V^n(\boldsymbol{x}_0)\}_{n=0}^{\infty}$ тўпламнинг ℓ_1-нормага нисбатан (мос равишда координата бўйича яқинлашишга нисбатан) лимит нуқталари тўпламини белгилаймиз. Яъни,

$$\omega_V(\boldsymbol{x}_0) := \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} V^k(\boldsymbol{x}_0)}^{\|\cdot\|}.$$

$$\omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0) := \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} V^k(\boldsymbol{x}_0)}^{d},$$

бу ерда d қуйидагича аниқланган метрика

$$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|a_k - b_k|}{1+|a_k - b_k|}, \quad \forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \ell_1.$$

3-лемма. $\boldsymbol{b} \in \ell_\infty$ *ва қуйидагича аниқланган чизиқли функционал берилган бўлсин:*

$$\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \ell_1$$

У ҳолда $\varphi_{\boldsymbol{b}}$ *функционал* $\boldsymbol{B}_1$*тўпламда координата бўйича яқинлашувчи бўлиши учун* $\boldsymbol{b} \in c_0$ *бўлиши зарур ва етарли.*

$\varphi: S_1 \to \mathbb{R}$ функционал ℓ_1 маъносида узлуксиз ва бирор V стохастик оператор учун ҳар бир $\boldsymbol{x} \in S_1$ векторда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(V^n(\boldsymbol{x}))$ мавжуд бўлса, бу функционалга V операторнинг *Ляпунов функцияси* дейилади.

Равшанки, агар φ функционал V учун Ляпунов функцияси бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(V^n(\boldsymbol{x}_0)) = \boldsymbol{x}^*$ муносабатдан $\omega_V(\boldsymbol{x}_0) \subset \varphi^{-1}(\boldsymbol{x}^*)$ келиб чиқади. Демак, $\omega_V(\boldsymbol{x}_0)$ тўпламни тўлиқ таҳлил қилиш учун имкон қадар кўпроқ Ляпунов функцияларини қуриш керак экан.

Таъкидлаш жоизки, стохастик оператор учун $\omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0)$ тўпламни тадқиқ қилишда одатдаги Ляпунов функцияси кўп ҳолларда самарали бўлмайди. Шу боис ℓ_1 −нормада узлуксизликдан кўра енгилроқ, масалан, координата бўйича узлуксиз бўлган чизиқли функционаллар учун “Ляпунов функцияси” тушунчасини киритамиз.

Дастлаб, $\{b_k\}$ камаювчи кетма-кетликни $\boldsymbol{b}_\downarrow$ каби белгилаймиз, яъни

$$\boldsymbol{b}_\downarrow = (b_1, b_2, b_3 \dots,), \quad \Leftrightarrow \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$$

Агар $\varphi: \boldsymbol{B}_1 \to \mathbb{R}$ координата бўйича узлуксиз функционал учун ҳар бир $\boldsymbol{x} \in S_1$ векторда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(V^n(\boldsymbol{x}))$ мавжуд бўлса, бу функционалга V операторнинг *квази-Ляпунов функцияси* дейилади.

3-лемма $\boldsymbol{B}_1$тўпламда аниқланган барча координата бўйича узлуксиз чизиқли функционалларни таснифловчи муҳим натижа эканлигини таъкидлаган ҳолда стохастик операторларнинг янги икки синфини аниқлаймиз. Бунинг учун берилган $\boldsymbol{b}_\downarrow \in c_0$ кетма-кетликка мос чизиқли функционални қуйидагича аниқлаймиз

$$\varphi_{\boldsymbol{b}_\downarrow}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k.$$

2-таъриф. V *стохастик оператор берилган бўлсин. Агар ихтиёрий* $\boldsymbol{b}_\downarrow \in c_0$ *ва ҳар бир* $\boldsymbol{x} \in S_1$ *вектор учун* $\left\{\varphi_{\boldsymbol{b}_\downarrow}(V^n(\boldsymbol{x}))\right\}_{n\geq 0}^{\infty}$ *ўсувчи (мос равишда камаювчи) бўлса, у ҳолда бу оператор* $\mathcal{L}^+$ *(мос равишда* $\mathcal{L}^-$*) синфга тегишли дейилади.*

7-тасдиқ. $\boldsymbol{x}_0 \in S_1$ *берилган бўлсин. У ҳолда қуйидагилар ўринли:*

(i) Агар $V \in \mathcal{L}^+$ *бўлса, у ҳолда* $\omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0) \subset S_1$ *ўринли;*

(ii) Агар $V \in \mathcal{L}^-$ *бўлса, у ҳолда шундай* $r \leq 1$ *топиладики,* $\omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0) \subset S_r$ *ўринли.*

17-теорема. $\boldsymbol{x}_0 \in S_1$ *берилган бўлсин. У ҳолда қуйидагилар ўринли:*

(i) Агар $V \in \mathcal{L}^+$ *бўлса, у ҳолда* $\omega_V(\boldsymbol{x}_0) = \omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0)$ *ўринли;*

(ii) Агар $V \in \mathcal{L}^-$ *бўлса, у ҳолда* $\omega_V(\boldsymbol{x}_0) = \omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0)$ *бўлиши* $\omega_V(\boldsymbol{x}_0) \neq \varnothing$ *муносабатга тенг кучли.*

18-теорема. $V \in \mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^-$ *берилган бўлсин. У ҳолда* V *оператор кучсиз эргодик бўлади. Шунингдек, агар* $V \in \mathcal{L}^+$ *бўлса, у ҳолда* V *оператор эргодик бўлади.*

ХУЛОСА

Диссертация иши ҳақиқий ва ноарҳимед вектор фазоларда чизиқли ва ночизиқли динамик системаларни тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Чизиқли операторларнинг гиперцикликлиги ва суперцикликлиги ҳақидаги маълум (ҳақиқий ва комплекс ҳолда) теоремаларнинг ноарҳимед муқобили исботланди. Ноарҳимед c_0 фазода умумлашган юкланган чапга суриш операторлари тушунчаси киритилди ва уларнинг гиперциклик, суперциклик, циклик бўлиши учун мезонлар олинди.

2. p-Адик сонлар майдонида мономиал тенглама тадқиқ қилинди ва унинг барча илдизлари тўплами тавсифланди. Шунингдек, олинган натижанинг татбиқи сифатида p-адик 1-Липшиц функцияларнинг қўзғалмас нуқталар тўплами тавсифланди.

3. Ярим чексиз Кэли дарахтида берилган p-адик Изинг модели учун барча трансляцион-инвариант умумлашган p-адик Гиббс ўлчовлари тўплами тавсифланди. Шунингдек, бундай ўлчовларнинг чегараланган бўлиши учун зарур ва етарли шартлар топилди.

4. Ярим чексиз Кэли дарахтида берилган p-адик Изинг-Ваннименус модели учун p-адик Гиббс ўлчовининг мавжудлиги кўрсатилди. p-Адик рационал функцияларнинг динамикасини ўрганиш орқали бу модел учун Гиббс ўлчовлари қурилди.

5. p-Адик ($p \geq 3$) Поттс-Бете функциясининг динамикаси ўрганилди. Параметрларнинг баъзи қиматларида бу функциянинг динамикаси хаотик характерга эгалиги исботланди. Натижада ярим чексиз Кэли дарахтида берилган p-адик Поттс модели учун ихтиёрий тартибли даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлиги кўрсатилди.

6. $m + 1$ та спин қийматли p-адик SOS модели тадқиқ қилинди. Бу модел учун параметрнинг баъзи қийматларида глобал маънода фаза алмашишлари мажуд эмаслиги кўрсатилди. Фаза алмашиши мавжуд бўлиши учун $p|(m + 1)$ ўринли бўлиши зарурлиги исботланди. Бу модел учун p-адик Гиббс ўлчовларининг чегараланганлик мезонлари топилди.

7. Чексиз ўлчамли ночизиқли Марков операторларининг суръективлиги ва ортогоналликни сақлаши хоссалари ўрганилди. Марков операторларининг суръективлиги учун етарли шартлар топилди. Олинган натижаларнинг Ҳаммерштейн типидаги интеграл операторларнинг баъзи синфлари учун мусбат ечим мавжудлигини текширишдаги татбиқлари келтирилди.

8. Полиномиал стохастик операторлар (ПСО) учун кучли ва кучсиз омега лимит тўпламлар тадқиқ қилинди. ПСОларнинг янги синфлари ($\mathcal{L}^+$ ва $\mathcal{L}^-$) киритилди. Бу синфдан олинган операторларнинг кучсиз эргодиклиги исботланди. Шунингдек, $\mathcal{L}^+$ ва $\mathcal{L}^-$ синфларга тегишли барча чизиқли операторлар таснифланди.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

KHAKIMOV OTABEK NORBUTA UGLI

APPLICATIONS OF INFINITE DIMENSIONAL AND NON-ARCHIMEDEAN DYNAMICAL SYSTEMS TO THE THEORY OF GIBBS MEASURES

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF SCIENCE (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2022

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2022.1.DSc/FM186.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, english, russian (resume)) on the website (https://kengash.mathinst.uz) and the "Ziyonet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific consultant:	**Rozikov Utkir Abdulloyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Mukhamedov Farrukh Maksutovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Khrennikov Andrei Yur'evich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Ikromov Isroil Akramovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Eshmatov Farkhod Hasanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher
Leading organization:	**Namangan State University**

Defense will take place « 29 » July 2022 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky (is registered № 143) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on « 13 » July 2022 year
(Mailing report № 2 on « 13 » July 2022 year)

A. Azamov
Deputy Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., senior researcher

U.U. Jamilov
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., senior researcher

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

Actuality and demand of the theme of dissertation. Many scientific and practical researches conducted around the world are mostly focused on the theory of discrete dynamical systems. The concept of dynamical systems theory has its origins in Newtonian mechanics. There, as in other natural sciences and engineering disciplines, the evolution rule of dynamical systems is given implicitly by a relation that gives the state of the system only a short time into the future. Before the advent of fast computing machines, studying a dynamical system required sophisticated mathematical techniques and could only be accomplished for a small class of dynamical systems. It is known that the dynamical systems theory have many applications in the branches of science like as an engineering, biology, physics, chemistry, economics, psychology etc.

Nowadays in the world, it is important to define the set of all periodic Gibbs measures for lattice systems with a finite or countable set of spin values. We notice that the studying such kind problems leads us to consider discrete dynamical systems over vector spaces. Knowing asymptotical behavior of the trajectory of the corresponding dynamical system, we can describe the set of all translation-invariant or periodic Gibbs measures for a given Hamiltonian. For this reason, studying main properties of non-Archimedean discrete dynamical systems like as regularity, minimality, ergodicity, topological mixing and chaoticity are very important. On the other hand, the last researches show that dynamical systems will have interesting aspects in p-adic settings. Moreover, p-adic dynamical systems are often used in the cryptography and coding theory, which proves the p-adic numbers are not worse than real numbers.

In our country, much attention has been paid to develop important directions of dynamical systems which have applications to the applied and fundamental sciences. In particular, significant results have been achieved in studying periodic orbits of real and p-adic mappings for classical models defined in lattice systems with a finite or countable set of spin values, and in solving practical problems through measure theory. Investigations on the international level in such important areas as the mathematical physics, non-Archimedean functional analysis, theory of non-Archimedean measures and theory of discrete dynamical systems considered as the main task of fundamental research[1]. In this way, the development of non-Archimedean dynamical systems theory for the mappings associated by statistical physics models with at most countable spin values plays a crucial role in the implementation this decree.

The subject and object of research of this dissertation are in line with tasks identified in the Decrees and Resolutions of the President of the Republic of Uzbekistan of February 7, 2017, PF-4947 , “On the strategy of action for the further development of the Republic of Uzbekistan”, PQ-4387 dated July 9, 2019 “On state

[1] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017 year 18 May “On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan” № 292.

support for the further development of mathematics education and science, as well as measures to radically improve the activities of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan", PQ-4708 of May 7, 2020 "On measures to improve the quality of education and research in the field of mathematics" as well as in other regulations related to basic sciences.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, "Mathematics, Mechanics and Computer Science".

Review of foreign research on the topic of the dissertation. Research on the theory of discrete dynamical systems and the theory of Gibbs measures of lattice systems has led research centers and universities in leading foreign countries, including Institute of Physics (Serbia), V.A.Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Science (Russia), Institute of Mathematics of National Academy of Science of Ukraine (Ukraine), Mathematical Institute of Serbian Academy of Science (Serbia), Federal Research Center "Computer science and Control" (Russia), Linnaeus University (Sweden), Indiana University (USA), Weierstrass Research Institute in Berlin, Technical University of Berlin, University of Bonn and Bochum Ruhr University (Germany), International Center for Theoretical Physics and La Sapienza University of Rome (Italy), University of Marseille and University of Paris (France), United Arab Emirates University (UAE), University of Leeds (UK), University of Melbourne (Australia), Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute (Mexico), International Islamic University of Malaysia (Malaysia).

The results of the scientific research on non-Archimedean dynamical systems have been solved a number of current problems, including the following scientific results: development of *p*-adic string theory (V.A.Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Science, Russia), development of non-Archimedean probability theory (V.A.Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Science, Russia; Linnaeus University, Sweden; Institute of Physics, Serbia), development of non-Archimedean operator theory (Institute of Mathematics of National Academy of Science of Ukraine, Ukraine; Mathematical Institute of Serbian Academy of Science, Serbia), it is applied the dynamics of *p*-adic mappings to computer sciences (Federal Research Center "Computer science and Control", Russia), it is given a chaoticity criterion of *p*-adic dynamical systems (University of Marseille and University of Paris-Est, France), it is classified translational-invariant Gibbs measures for the ferromagnetic Potts model on the Cayley tree of arbitrary order (University of Bochum Ruhr, Germany), it is studied boundary law for Potts model (University of Leeds, UK), it is proved that the Gibbs measures are not unique for the SOS model (Weierstrass Research Institute in Berlin, Technical University of Berlin, Germany), development of *p*-adic Gibbs measure theory (United Arab Emirates University, UAE) paramagnetic, ferromagnetic and antiferromagnetic phase transitions were found for the competing Ising model on a Cayley tree

(University of Melbourne, Australia), it is studied monomial equation over the field of p-adic numbers (International Islamic University of Malaysia, Malaysia).

Today there are a number of studies on the non-Archimedean dynamical systems and their applications to the theory Gibbs measures, including: studying asymptotical behavior of the trajectory, in particular, checking the main properties of the dynamical systems like as minimality, ergodicity, chaoticity and topological mixing, therefore, describing the set of all translation-invariant p-adic Gibbs measures for a given Hamiltonian with at most countable spin values, studying the existence of phase transition for the model, boundedness problem of p-adic measures, checking singularity such kind measures.

The degree of scrutiny of the problem. Linear dynamics is a young and rapidly evolving branch of functional analysis, which was probably born in 1982 with the Toronto Ph.D. thesis of C.Kitai. It has become rather popular, thanks to the efforts of many mathematicians including G. Godefroy, J.H.Shapiro, K.G.Grosse-Erdman. In particular, hypercyclicity and supercyclicity of weighted bilateral shifts were characterized by H.Salas. S.Shkarin proved the existence of bounded linear operator T satisfying the Kitai's Criterion on each separable infinite-dimensional Banach space. A.N.Kochibei developed a non-Archimedean spectral theorem for linear operators on non-Archimedean Banach spaces.

At present, p-adic analysis is a rapidly developing trend in mathematics. Numerous applications of p-adic numbers have resulted in the theory of p-adic differential equations, p-adic probability theory, p-adic mathematical physics by V.I.Volovich, S.Albeverio, A,Yu.Khrennikov, R.Cianci, V.S.Anashin. It is known that p-adic numbers are also closely connected with Diophantine equations, that is, with finding all the solutions of a system of polynomial equations or giving a bound for the number of the solutions over the field of p-adic numbers. A.Yu. Khrennikov, E. Yureva found a criterion for the existence of a root of 1-Lipschitz functions, which is a generalization of monomial equation. Moreover, they were able to prove the analogue of Hensel's lemma for 1-Lipschitz functions.

It is known that Kolmogorov extension's theorem plays a crucial role in the theory of Gibbs measures. N.N.Ganikhodjaev, F.M.Mukhamedov and U.A. Rozikov proved a non-Archimedean analogue of Kolmogorov extension theorem. Therefore, the theory of p-adic probability was constructed by A.Yu.Khrennikov, S. Yamada, van Rooij, S.V.Ludkovski, Le Ny, F.M.Mukhamedov, N.N.Ganikhodjaev, U.A.Rozikov.

One of the main results in the theory of p-adic discrete dynamical systems was obtained by A.H.Fan, S.L.Fan, L.Liao, Y.F,Wang. Namely, the authors were able to find a criterion on chaoticity of dynamical systems of p-adic mappings. Moreover, by L.Liao it were constructed a lot of p-adic mappings which for any initial point had dense orbit.

In recent decades in the game theory, evolutionary and dynamical aspects of quadratic dynamical systems have dramatically increased in popularity. J.Hofbauer and K.Sigmund's book serves as a very good introduction to this theory. We point

out that the Volterra operators, in the discrete setting, describe the discrete time zero-sum evolutionary game dynamics. In this direction, zero-sum games and their evolutionary dynamics were studied by E.Akin and V.Losert. On the other hand, by the researches of T.Nagylaki, it is important to investigate dynamics of the Volterra system when the spices in the system are huge. Roughly speaking, what happens if the game involves a large number of players? This naturally leads our attention to the following problem: what is the dynamical behaviour of Volterra operators on an infinite dimensional simplex? A certain construction of infinite dimensional Volterra operators was studied by F.M.Mukhamedov, H.Akin, S.Temir. We notice that a class of Volterra quadratic stochastic operators is a subset of the set of all polynomial stochastic operators.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of scientific research Institute, where the dissertation is carried out. The dissertation work is done in accordance with the planned theme of scientific research Institute of Mathematics F4-FA-F013 “Operator and non-associative algebras, dynamical systems and its applications to statistical mechanics and population biology” (2012-2016), YoF-4-3 + YoF-4-4 “Leibniz algebras, probability measures of spin systems and Lie algebras on graphs” (2016-2017) and OT-F4-82 – “Local differentiation in operator and non-associative algebras and automorphisms, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems” (2017-2020).

The aim of research work is to construct the *p*-adic Gibbs measures for models associated by non-Archimedean discrete dynamical systems over Banach spaces, to find surjectivity criterions of Polynomial Stochastic Operator and to describe omega limiting sets for such kind operators on space of absolutely summable sequences.

Research problems:

prove non-Archimedean analogue of well-known (in real and complex settings) theorems of hypercyclic and supercyclic linear operators on *F*-spaces;

study generalized weighted backward shift operators over non-Archimedean sequence spaces;

describe the set of all solutions of the monomial equation over the field of *p*-adic numbers;

construct generalized *p*-adic Gibbs measures for the *p*-adic Ising model on a semi-infinite Cayley tree and describe the set of all translation-invariant Gibbs measures for the model;

study a phase transition problem for the *p*-adic Ising-Vannimenus model on a semi-infinite Cayley tree;

study the asymptotical behavior of the trajectory for *p*-adic Potts-Bethe mapping;

describe the set of all periodic generalized *p*-adic Gibbs measures for the *p*-adic Potts model on a semi-infinite Cayley tree.

construct *p*-adic Gibbs measure for Solid on Solid (SOS) model. Obtain some conditions on parameters such that there exists a unique Gibbs measure for the model;

obtain necessity and sufficiency conditions on surjectivity of Polynomial Stochastic Operators in infinite dimensional simplex;

describe the omega limiting sets for Polynomial Stochastic Operators.

The research object: *p*-adic numbers, hypercyclic/supercyclic operators, Cayley tree, lattice models, *p*-adic Gibbs measures, chaos, non-linear Markov operators, Hammerstein integral operator, omega limiting sets.

The research subject: Theory of groups and graphs, Algebra and number theory, Gibbs and non-Archimedean measures theory, theory of discrete dynamical systems, symbolic dynamics, non-linear Markov processes and integral equations.

Research methods: In the research the methods of functional analysis, group theory, measures theory, theory of dynamical systems, stochastic processes and nonlinear integral equations theory are used.

The scientific novelty of the research consists of the following:

criterions for the hypercyclicity, supercyclicity and cyclicity of generalized weighted backward shift operators over non-Archimedean sequence spaces were obtained;

a set of all translation-invariant generalized *p*-adic Gibbs measures for the *p*-adic Ising model on a semi-infinite Cayley tree was described and the existence of phase transition for the *p*-adic Ising-Vannimenus model was shown;

it was proved the chaoticity of dynamical system for *p*-adic Potts-Bethe mapping and the set of all periodic generalized *p*-adic Gibbs measures for the *p*-adic Potts model on a semi-infinite Cayley tree was described;

p-adic Gibbs measures for Solid on Solid (SOS) model were constructed and the exact values of parameters for the uniqueness of such kind measures were found;

necessity and sufficiency conditions on surjectivity of Polynomial Stochastic Operators in infinite dimensional simplex were obtained;

the strong and the weak omega limiting sets for some class of Polynomial Stochastic Operators were described.

Practical results of the research consists of the following:

The description of the set of all solutions of the monomial equation over the field of *p*-adic numbers can be used to describe the set of all translation-invariant generalized *p*-adic Gibbs measures for lattice systems;

The methods of checking chaotic characters of the *p*-adic Potts-Bethe mapping have been used to construct infinitely many periodic generalized *p*-adic Gibbs measures.

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using the methods of functional analysis (especially, non-Archimedean functional analysis), methods of discrete dynamical systems, Gibbs and non-Archimedean measure theory, methods of nonlinear operator theory, and theorems on fixed points. The obtained results are mathematically strongly proved.

Scientific and practical significance of research results. The scientific importance of the results of the research work is explained by the fact that various models of *p*-adic statistical mechanics with at most countable set of spin values on

the semi-infinite Cayley tree can be used in the studying of thermodynamic properties by finding *p*-adic Gibbs measures.

The practical significance of the research determines by obtaining chaoticity criterion for the *p*-adic Potts-Bethe mapping using the solution of the monomial equations over the field of *p*-adic numbers, it gives opportunity to construct infinitely many generalized *p*-adic Gibbs measures.

Implementation of the research results. The scientific results obtained during the research of the dissertation are implemented in the following research projects:

The description of the set of all periodic *p*-adic Gibbs measures for Potts model were used to find periodic points of *p*-adic rational functions in papers of foreign scientific journals (*p*-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Application, 2021, 13(4); Results in Mathematics, 2020, 75(3); Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 105; Mathematical Physics Analysis and Geometry, 2015, 18(1)). The application of the scientific results made it possible to analysis considering thermodynamics of physics systems.

The chaoticity of the *p*-adic Potts-Bethe mapping were used to study asymptotical behavior of the trajectory of *p*-adic rational mappings in papers of foreign scientific journals (Reviews in Mathematical Physics, 2021, 33(10); *p*-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Application, 2020, 12(3); Entropy, 2019, 21(11); Science China Mathematics, 2018, 61(12)). The application of the scientific results made it possible to decompose the *p*-adic dynamical systems into minimal subsets.

The description of the set of all translation-invariant generalized *p*-adic Gibbs measures for the *p*-adic Ising-Vannimenus model on a semi-infinite Cayley tree and the existence of phase transition for the model were used in the finding non-Archimedean measures in papers of foreign scientific journals (Journal of Mathematical Physics, 2022, 63(1); Journal of Mathematical Physics, 2020, 61(1); Journal of Statistical Physics, 2018, 171(6)). The application of the scientific results made it possible to construct non-Archimedean unbounded measures.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed in 5 international and 10 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 25 research papers have been published in the scientific journals, all of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the DSc thesis, in addition 1 of them were included in the Chapter of the *p*-adic Methodology in STEAM-H "*Advances in Non-Archimedean Analysis and Applications*", Springer, Switzerland, 2021.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 193 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In the introduction besides the motivation of research theme and correspondence to the priority research areas of science and technology of the Republic, we present a review of international research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem, formulate our goals and objectives, identify the object and subject of study, and state scientific novelty and practical results of the research. Moreover, we reduce the theoretical and practical importance of the obtained results, and give information on the implementation of the research results, the published works and the structure of dissertation.

The first chapter of the thesis, titled **"Linear dynamics on non-Archimedean normed vector spaces and applications of monomial equation"** consists of two main parts. The first one is devoted to the dynamics of linear operators over non-Archimedean vector spaces. The second part is the foundamental base of the chapters 2 and 3. The first section contains the basics of non-Archimedean vector spaces. In the second section it has been proved non-Archimedean analogues of the well-known theorems about hypercyclicity and supercyclicity of the linear operators on topological vector spaces. It has been proved that the hypercyclicity of linear operator is infinite dimensional phenomenon. In the third and fifth sections it has been considered linear operators like as generalized weighted shift and identity plus weighted shift operators on non-Archimedean c_0 space. We notice that such kind operators are the generalizations of the well-known shift operators over sequence spaces. In the real case, only weighted shift operators were studied by many. In the sixth section it has been considered an equation of the form $x^q = a$ over p-adic number fields. In last section of the chapter it has been provided applications to solving some nonlinear equations over $\mathbb{Q}_p$. We observe that the result obtained in the last sections of the chapter makes it possible to investigate the dynamical behaviour of p-adic Potts-Bethe type functions (particularly, p-adic Ising-Potts mappings in Chapter 2) for certain values of the parameters. The chaoticity for such kind functions will be investigated in Chapter 3.

Let X and Y be topological vector spaces over non-Archimedean valued field $\mathbb{K}$. By $L(X,Y)$ we denote the set of all continuous linear operators from X to Y. If $X = Y$ then $L(X,Y)$ is denoted by $L(X)$. In what follows, we use the following terminology: T is a linear continuous operator on X means that $T \in L(X)$. The T-*orbit* of a vector $\boldsymbol{x} \in X$, for some operator $T \in L(X)$, is the set

$$O(\boldsymbol{x},T) := \{T^n(\boldsymbol{x}); n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

An operator $T \in L(X)$ is called *hypercyclic* if there exists some vector $\boldsymbol{x} \in X$ such that its T-orbit is dense in X. The corresponding vector $\boldsymbol{x}$ is called T-*hypercyclic*, and the set of all T-hypercyclic vectors is denoted by $HC(T)$. Similarly, T is called *supercyclic* if there exists a vector $\boldsymbol{x} \in X$ such that whose projective orbit

$$\mathbb{K} \cdot O(\boldsymbol{x},T) := \{\lambda T^n(\boldsymbol{x}); n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

is dense in X. The vector $\boldsymbol{x} \in X$ with a dense projective T-orbit, is called T-supercyclic vector and the set of all T-supercyclic vectors is denoted by $SC(T)$. Finally, we recall that T is called *cyclic* if there exists $\boldsymbol{x} \in X$ such that

$$\mathbb{K}[T]\boldsymbol{x} := \ span\ O(\boldsymbol{x}, T) = \{P(T)(\boldsymbol{x}) : P \quad polynomial\ \}$$

is dense in X and such kind of vectors are called T-cyclic vectors. The set of all T-cyclic vectors is denoted by $CC(T)$.

Theorem 1. *Let X be a separable F-space and $T \in L(X)$. Then the following statements are equivalent:*

(i) T is hypercyclic;
(ii) T is ***topologically transitive****; that is, for each pair of non-empty open sets (U, V) there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Theorem 2. *Let X be a separable F-space, and $T \in L(X)$. Then the following statements are equivalent:*

(i) T is supercyclic;

(ii) For each pair of non-empty open sets (U, V) there exist $n \in \mathbb{N}$ and $\lambda \in \mathbb{K}$ such that $\lambda T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Let us consider an infinite dimensional upper-triangular matrix $\mathcal{W} = (w_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ over a non-Archimedean field $\mathbb{K}$, such that

$$\sup_{i,j}\{|w_{i,j}|\} < \infty, \qquad w_{k,l} = 0, \qquad \forall k \geq l. \tag{1}$$

For a given $\mathcal{W}$ with (1), we define the following linear operator on c_0 by

$$B_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{e}_n) = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \text{if} \quad n = 1; \\ \sum_{j=1}^{n-1} w_{j,n}\boldsymbol{e}_j, & \text{if} \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{2}$$

The linear operator (2) is called *the generalized weighted backward shift* operator. Recall that if matrix $\mathcal{W}$ has the following extra condition $w_{k,l} = 0$ for all $k \neq l + 1$, then the corresponding linear operator $B_{\mathcal{W}}$ is reduced to *weighted backward shift*. In this setting, the operator acts as follows: $B_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{0}$ and $B_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{e}_n) = w_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}$ if $n \geq 2$, where $w_{n-1} := w_{n-1,n}$ is called a *weighted backward shift*. Here, $\boldsymbol{w} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. The operator $B_{\boldsymbol{w}}$ is called a *backward shift* if $w_n = 1$ for all $n \geq 1$, and such a shift is denoted by B.

Theorem 3. *Let $\mathcal{W}$ be a matrix given by (1). Assume that $w_{k,k+1} \neq 0$ for all $k \geq 1$. Then the generalized weighted backward shift operator $B_{\mathcal{W}}$ is supercyclic on c_0.*

Corollary 1. *Let $\mathcal{W}$ be a matrix given by (1). Assume that $w_{k,k+1} \neq 0$ for all $k \geq 1$. Then the generalized weighted backward shift $B_{\mathcal{W}}$ is cyclic on c_0.*

Theorem 4. *Let $\mathcal{W}$ be a matrix given by (1) with an extra condition,*

$$\sup_j\{|w_{k,j}|\} = |w_{k,k+1}| \neq 0, \quad for\ any \quad k \geq 1. \tag{3}$$

Then, $B_{\mathcal{W}}$ is hypercyclic on c_0 if $\limsup_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} |w_{i,i+1}| = \infty$.

For a given $\mathcal{W}$ with (1), we denote

$$T_{\mathcal{W}} := I + B_{\mathcal{W}}, \tag{4}$$

that is, for any $\boldsymbol{x} \in c_0$

$$(T_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{x}))_k = x_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} w_{k,j}x_j, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Theorem 5. *Let $\mathcal{W}$ be a matrix given by (1). If* $\sup_{j\geq 1}\{|w_{1,j}|\} = 0$, *then the following statements are equivalent:*

(i) $T_{\mathcal{W}}$ *is supercyclic on* c_0*;*

(ii) $T_{\mathcal{W}'}$ *is hypercyclic on* c_0*, where* $\mathcal{W}' = (w'_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ *and* $w'_{i,j} = w_{i+1,j+1}$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$.

Theorem 6. *Let $\mathcal{W}$ be an infinite dimensional matrix (1) with the extra condition (3). Then for the operator $T_{\mathcal{W}}$ given by (4) the following statements hold:*

(i) $HC(T_{\mathcal{W}}) \neq \emptyset$ *if* $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} |w_{j,j+1}| = \infty$;

(ii) $SC(T_{\mathcal{W}}) \neq \emptyset$ *if* $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=2}^{n} |w_{j,j+1}| = \infty$.

Let $\mathbb{Q}_p$ be a field of p-adic numbers. Recall that any $x \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ can be uniquely represented in the canonical form

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots), \tag{5}$$

where $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ and the integers x_j satisfy: $x_0 > 0$, $0 \leq x_j \leq p-1$. In this case, $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

In what follows, to simplify our calculations, we are going to introduce new symbols "O" and "o" (Roughly speaking, these symbols replace the notation "$\equiv (mod\ p^k)$" without noticing about power of k). Namely, for a given p-adic number x by $O[x]$ we mean a p-adic number with the norm $p^{-\gamma(x)}$, i.e. $|x|_p = |O(x)|_p$. By $o[x]$, we mean a p-adic number with a norm strictly less than $p^{-\gamma(x)}$, i.e. $|o(x)|_p < |x|_p$. For instance, if $x = 1 - p + p^2$, we can write $x = O[1]$, $x - 1 = o[1]$ or $x - 1 + p = o[p]$. Therefore, the symbols $O[\cdot]$ and $o[\cdot]$ make our work easier when we need to calculate the p-adic norm of p-adic numbers. It is easy to see that $y = O[x]$ if and only if $x = O[y]$.

Let $a \in \mathbb{Q}_p$ and $r > 0$. The set $B(a,r) := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a| < r\}$ is called the *open ball with radius r about a*. We recall that $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ and $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}$ are the set of all *p-adic integers* and *p-adic units*, respectively.

We are going to describe all solutions of the following equation

$$x^k = a, \quad k \in \mathbb{N}, \ a \in \mathbb{Q}_p \tag{6}$$

in $\mathbb{Q}_p$. Let us first notice that the equation (6) can be considered over $\mathbb{Z}_p^*$. Indeed, any nonzero p-adic number x has a unique representation of the form $x = \frac{x^*}{|x|_p}$, where $x^* \in \mathbb{Z}_p^*$. After substituting the forms $x = \frac{x^*}{|x|_p}$, $a = \frac{a^*}{|a|_p}$ into (6), we can get that $\left(\frac{x_*}{|x|_p}\right)^k = \frac{a_*}{|a|_p}$. This means that Eq. (6) has a solution in $\mathbb{Q}_p$ whenever $a \in \mathbb{Q}_p$ if and only if $|a|_p = p^{kl}$ for some $l \in \mathbb{Z}$ and the equation $x_*^k = a_*$ has a solution in $\mathbb{Z}_p^*$. Hence, we may always assume that $a \in \mathbb{Z}_p^*$ when we consider the equation (6).

Recall that $b \in \mathbb{Z}$ is called an *m-th power residue modulo p* if the congruence equation $x^m \equiv b(mod\ p)$ has a solution in $\mathbb{Z}$. In the sequel, we always assume that $p \geq 3$. It is well-known that $b \in \mathbb{Z}$ is an m-th power residue modulo p if and only if $b^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1(mod\ p)$, where $d = (m, p-1)$. For a given $a \in \mathbb{Z}_p^*$, we denote

$$Sol_p(x^k - a) = \{\xi \in \mathbb{F}_p : \xi^k - a = o[1]\} \text{ and } \kappa_p = card\big(Sol_p(x^k - a)\big),$$

where $\mathbb{F}_p$ is a ring of integers modulo p. We notice that $0 \leq \kappa_p \leq k$. We observe that the condition $Sol_p(x^k - a) \neq \emptyset$ is equivalent to a_0 is k-th power residue modulo p.

Theorem 7. *Let $p \geq 3$ and $k = mp^s$, where $(p, m) = 1$, $s \geq 0$. Assume that $a \in \mathbb{Z}_p^*$ has the following canonical form*

$$a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots,$$

and $Sol_p(x^k - a) \neq \emptyset$. Then the followings statements are equivalent:

(i) the equation (6) has a solution;

(ii) $a = a_0^{p^s} + o[p^s]$;

(iii) for any $\xi \in Sol_p(x^k - a)$ Eq. (6) has a unique solution in $B(\xi, 1)$.

Recall that the p-adic exponential is defined by

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

which converges for every $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$. Denote

$$\mathcal{E}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - 1|_p < p^{-1/(p-1)}\}.$$

We notice that $\mathcal{E}_p$ is the range of the p-adic exponential function.

Corollary 2. *Let $p \geq 3$ and $k = mp^s$, where $(p, m) = 1$, $s \geq 0$. Then for any $a \in \mathbb{Z}_p^*$ with canonical representation $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$, there exists $x_* \in \mathbb{Z}_p^*$ such that $x_*^k = a + o[k^2]$ iff the following statements hold:*

1) $Sol_p(x^k - a) \neq \emptyset$;

2) $a = a_0^{p^s} + o[p^s]$.

Corollary 3. *Let* $p \geq 3$ *and* $a \in \mathcal{E}_p$. *Then the following statements hold:*

(i) if $|k|_p \leq |a-1|_p$ *then (6) has no solution.*

(ii) if $|k|_p > |a-1|_p$ *then (6) has exactly* κ_p *solutions* $x_{\xi_i} \in B(\xi_i, 1)$, $i \in \{1,2,\dots,\kappa_p\}$, *where* $\xi_i \in Sol_p(x^k - a)$.

Remark 1. *Thanks to Corollary 3, every* $a \in \mathcal{E}_p$ *with* $|a-1|_p < |k|_p$ *has a single* k*-th root on* $\mathcal{E}_p$, *which is called the principal* k*-th root and it is denoted by* $\sqrt[k]{a}$. *In what follows, when we write* $\sqrt[k]{a}$ *for given* $a \in \mathcal{E}_p$ *we always mean the principal* k*-th root of* a.

In the second chapter, titled "***p*-Adic Gibbs measures for the Ising type models on semi-infinite Cayley tree**" it was constructed generalized *p*-adic Gibbs measures for the Ising type statsitical models (especially, Ising model and Ising-Vannimenus model) on semi-infinite Cayley tree of arbitrary order. It was analyzed the occurrence of a phase transition by the use of a *p*-adic probability theory. To carry out this research, generalized *p*-adic Gibbs measures were investigated for the Ising model on the semi-infinite Cayley tree owing to the fact that this specific model has broad theoretical and practical applications. To explore translation-invariant generalized *p*-adic Gibbs measures, we described the set of fixed points of the Ising-Potts mapping which appears by means of renormalization group. This description allowed us to establish the phase transition. In the real setting, the phase transition yields the singularity of the limiting Gibbs measures. However, it was shown that the generalized *p*-adic Gibbs measures do not exhibit the mentioned type of singularity; this phenomena is called a strong phase transition. In the second part of the chapter, a *p*-adic analogue of the Ising-Vannimenus model is considered. Moreover, it was also shown the existence of the phase transition depending on the order *k* of the Cayley tree and prime *p*. We point out that in the *p*-adic setting there are several kinds of phase transitions such as *strong phase transition*, *phase transition*. Here, by the *phase transition* we mean the existence of at least two non-trivial generalized *p*-adic Gibbs measures such that one of them is bounded and the second one is unbounded.

By $\Gamma_+^k = (V, L)$ we denote a semi-infinite Cayley tree of order $k \geq 1$ with the root x^0 (whose each vertex has exactly $k+1$ edges, except for the root x^0, which has k edges). In this notation, V stands for the set of vertices and L is the set of edges. Two vertices x and y are called *nearest neighbors* if they are joined through an edge $\langle x, y\rangle \in L$. A collection of the pairs $\langle x, x_1\rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y\rangle$ is called a *path* from x to y. The distance $d(x, y)$ on the Cayley tree, is the length of the shortest path from x to y.

Let us set

$$W_n = \{x \in V\colon\ d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \cup_{m=0}^{n} W_m, \quad L_n = \{\langle x, y\rangle \in L\colon\ x, y \in V_n\}.$$

Recall a coordinate structure in Γ_+^k: for the vertex x^0 we put (0) and for a vertex $x \in W_n$, $n \geq 1$ we put $(i_1, \dots, i_n)$, here $i_m \in \{1, \dots, k\}$, $1 \leq m \leq n$.

For $x = (i_1, \dots, i_n)$ we denote

$$S(x) = \{(x, i)\colon\ 1 \leq i \leq k\}, \tag{7}$$

here (x, i) means that $(i_1, \dots, i_n, i)$. This set is called a set of *direct successors* of x.

Let us define on Γ_+^k a binary operation $\circ\colon \Gamma_+^k \times \Gamma_+^k \to \Gamma_+^k$ as follows: for any two elements $x = (i_1, \dots, i_n)$ and $y = (j_1, \dots, j_m)$ put

$$x \circ y = (i_1, \dots, i_n) \circ (j_1, \dots, j_m) = (i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m),$$

$$x \circ x^{(0)} = x^{(0)} \circ x = (i_1, \dots, i_n) \circ (0) = (i_1, \dots, i_n).$$

By means of the defined operation Γ_+^k becomes a noncommutative semigroup with a unit. Using this semigroup structure one defines translations $\tau_g\colon \Gamma_+^k \to \Gamma_+^k$, $g \in \Gamma_+^k$ by $\tau_g(x) = g \circ x$. It is clear that $\tau_{(0)} = id$.

Let $G \subset \Gamma_+^k$ be a sub-semigroup of Γ_+^k and $h\colon \Gamma_+^k \to Y$ be a Y-valued function defined on Γ_+^k. We say that h is *G-periodic* if $h(\tau_g(x)) = h(x)$ for all $g \in G$ and $x \in \Gamma_+^k$. Any Γ_+^k-periodic function is called *translation invariant*.

For each $m \geq 2$ we put

$$G_m = \{x \in \Gamma_+^k\colon\ d(x, x^0) \equiv 0 (mod\ m)\}. \tag{8}$$

One can check that G_m is a sub-semigroup of Γ_+^k.

By $\Phi = \{-1,1\}$ we denote the state space and it is assigned to each vertex of the tree $\Gamma_+^k = (V, \Lambda)$. A configuration σ on V is then defined as a function $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$; in a similar manner, one defines configurations σ_n and $\omega_{[n]}$ on V_n and W_n, respectively. The set of all configurations on V (resp. V_n, W_n) coincides with $\Omega = \Phi^V$ (resp. $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$). For given configurations $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ and $\omega_{[n]} \in \Omega_{W_n}$ we define their concatenations as follows:

$$(\sigma_{n-1} \vee \omega_{[n]})(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), & \text{if} \quad x \in V_{n-1}, \\ \omega_{[n]}(x), & \text{if} \quad x \in W_n. \end{cases}$$

One can see that $\sigma_{n-1} \vee \omega_{[n]} \in \Omega_{V_n}$.

The p-adic Ising model's Hamiltonian on Ω_{V_n} is defined by

$$H_n(\sigma) = N \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y), \qquad \forall \sigma \in \Omega_{V_n}, \tag{8}$$

where $N \in \mathbb{Z}$ $(N \neq 0)$ is a coupling constant.

Now, we are going to provide a construction of generalized p-adic Gibbs measures of for the model (8) on Γ_+^k. To do so, let $\mathbf{h}\colon V \to \mathbb{Q}_p^{\Phi}$ be a function, i.e.

$\mathbf{h}_x = (h_{-1,x}, h_{1,x})$, where $h_{\pm 1,x} \in \mathbb{Q}_p$, $x \in V$. Given $\rho \in \mathbb{Q}_p \backslash \{-1,0,1\}$, we define a p-adic probability measure $\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}$ on Ω_{V_n} as follows:

$$\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})}} \rho^{H_n(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}, \tag{9}$$

here $Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})}$ is the corresponding normalizing factor (which is called *partition function*) is given by

$$Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})} = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \rho^{H_n(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}. \tag{10}$$

Remark 2. *Note that, in general, $Z_{n,\rho}^{(\boldsymbol{h})}$ could be zero for some $\boldsymbol{h}$. In that case, formally, we may assume that $\mu_{\boldsymbol{h},\rho}^{(n)}(\sigma) = \infty$ for all $\sigma \in \Omega_{V_n}$. However, such kind of measures are not interested. Hence, when it occurs we say there is no measure, for that $\boldsymbol{h}$.*

To establish a phase transition, the existence of an infinite volume distribution with given finite-dimensional distributions is important in a p-adic setting. Namely, one needs to find a p-adic probability measure $\mu_{\mathbf{h},\rho}$ on Ω such that

$$\mu_{\mathbf{h},\rho}\left(\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}\right) = \mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}(\sigma_n), \quad \forall \sigma_n \in \Omega_{V_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

We point out that to find such kind of measure $\mu_{\mathbf{h},\rho}$, we are going to employ the *non-Archimedean Kolmogorov's extension Theorem* which is based on the *compatibility condition*. Namely, the measures $\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}$, $n \geq 1$ satisfy the *compatibility condition* if

$$\sum_{\omega_{[n]} \in \Omega_{W_n}} \mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_{[n]}) = \mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \quad \forall \sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}. \tag{12}$$

This condition yields the existence of a unique p-adic measure $\mu_{\mathbf{h},\rho}$ defined on Ω with a required condition (11). Such a measure $\mu_{\mathbf{h},\rho}$ is said to be *a genaralized p-adic Gibbs measure* corresponding to the model.

The function $f_{\theta,k}$ is called *Ising-Potts mapping* and is defined by

$$f_{\theta,k}(x) = \left(\frac{\theta x + 1}{x + \theta}\right)^k, \quad \theta = \rho^{2N} \in \mathbb{Q}_p \backslash \{-1,0,1\}. \tag{13}$$

In what follows, $Fix(f_{\theta,k})$ denotes the set of all fixed points of $f_{\theta,k}(h)$. The following result shows a relation between $Fix(f_{\theta,k})$ and the set of all translation-invariant generalized p-adic Gibbs measures for the Ising model.

Proposition 1. *Let $h \neq -1$ be a fixed point of $f_{\theta,k}(h)$. Then $\mu_h := \mu_{\boldsymbol{h},\rho}$ is a translation-invariant generalized p-adic Gibbs measure of the Ising model, where $\boldsymbol{h}_x = (1, h)$ for every $x \in V$. Moreover,*

$$\mu_h(\{\sigma \in \Omega: \sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}) = \frac{\rho^{H_n(\sigma)} h^{\sum_{x \in W_n} \delta_{1\sigma(x)}}}{(\rho^{-N}h+\rho^N)^{\frac{k(k^n-1)}{k-1}}(h+1)}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

where δ_{ij} is a Kronecker's symbol.

Propositon 2. *Let $\rho^{2N} \in \mathbb{Q}_p \backslash \{-1,0,1\}$ and μ_h be a translation-invariant generalized p-adic Gibbs measure of the Ising model. Then the following statements are true:*

(I) *if $|\rho|_p \neq 1$, then μ_h is bounded;*

(II) *if $|\rho|_p = 1$, then μ_h is unbounded iff $0 < |h + \rho^{2N}|_p < 1$.*

By $TIG\mathcal{G}_pM$ we denote the set of all translation-invariant generalized p-adic Gibbs measures for the Ising model.

Theorem 8. *Let $k \geq 2$ and $|\rho^N|_p > 1$. Then for the Ising model on Γ_+^k it holds $card(TIG\mathcal{G}_pM) \geq 3$. Moreover, if $|\rho^{-N}|_p < |k-1|_p$ then*

$$card(TIG\mathcal{G}_pM) = \begin{cases} \mathcal{N}_{p,k-1} + 2, & if\ \ k\ \ is\ \ even; \\ \mathcal{N}_{p,k-1} + 1, & if\ \ k\ \ is\ \ odd. \end{cases}$$

Theorem 9. *Let $k \geq 2$ and $|\rho^N|_p < 1$. Then for the Ising model on Γ_+^k it holds $card(TIG\mathcal{G}_pM) \geq 1$. Moreover, if $|\rho^N|_p < |k+1|_p$ then*

$$card(TIG\mathcal{G}_pM) = \begin{cases} \mathcal{N}_{p,k+1} + 1, & if\ \ k\ \ is\ \ even; \\ \mathcal{N}_{p,k+1}, & if\ \ k\ \ is\ \ odd. \end{cases}$$

The third chapter, titled "**Chaos in *p*-adic statistical lattice models**" devoted to the study dynamics of the mappings associated by *p*-adic statistical models (Potts model and SOS model). In the conclusion, it is worth to mention some brief description of the differences of behavior between classical (real) and *p*-adic Potts models on the semi-infinite Cayley tree. In the real case, for the ferromagnetic *q*-state Potts model there are $q+1$ distinct translation invariant Gibbs measures. Moreover, there are two critical temperatures $0 < T'_{cr} < T_{cr}$ such that: if $T \in (T'_{cr}; T_{cr})$ there are $q+1$ extreme Gibbs measures; if $T \leq T'_{cr}$ there are q extreme Gibbs measures coexist; if $T \geq T_{cr}$ then there is only one Gibbs measures. In the *p*-adic setting, for the same model there are several *p*-adic Gibbs measures when $k = 2$ and $p \geq 3$. If *q* is not divisible by *p*, then there is only one *p*-adic Gibbs measure. If $q = 2$ (then model resuces to the Ising model), there is only one *p*-adic Gibbs measure, i.e. there is no phase transition. If *q* is divisible by *p*, then it appears several several regimes for the existence of phase transitions. These are the interesting differences between real and *p*-adic Potts models. In the present chapter, we reviewed a phase transition problem and its connection with chaoticity of the RG transformation, for the *p*-adic Potts model over the Cayley tree. A more general notion of *p*-adic Gibbs measure is considered which depends on parameter $\rho \in \mathbb{Q}_p$. Such a measure is called *generalized p-adic Gibbs measure*. When ρ equals to *p*-adic exponent, then it coincides with the usual *p*-adic Gibbs measure. We have

considered two regimes with respect to the values of $|\rho|_p$. Namely, in the first regime, one takes $\rho = exp_p(J)$ for some $J \in \mathbb{Q}_p$, in the second we let $|\rho|_p < 1$. In each regime, we found conditions for the existence of generalized p-adic Gibbs measures. Moreover, it was studied a p-adic SOS model with a $m+1$ spin values. It was found conditions under which a phase transition does not occur in the model. We showed that if $p \mid (m+1)$, then a phase transition occurs. A criterion for the boundedness of p-adic Gibbs measures is found.

We consider *p-adic Potts model* on a semi-infinite Cayley tree, where the spin takes values in the set $\Phi := \{1,2,\dots,q\}$, and is assigned to the vertices of the tree.

The Hamiltonian of q-state p-adic Potts model on Ω_{V_n} is

$$\mathcal{H}(\sigma) = J\sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \qquad \forall \sigma \in \Omega_{V_n} \tag{14}$$

where $J \in \mathbb{Z}$ is a coupling constant, $\langle x,y\rangle$ stands for nearest neighbor vertices and δ_{ij} is the Kroneker's symbol.

Let us construct generalized p-adic Gibbs measures for the model q-state Potts model on Γ_+^k.

Assume that $\mathbf{h}: V \to \mathbb{Q}_p^q$ is a function, i.e. $\mathbf{h}_x = (h_{1,x}, h_{2,x}, \dots, h_{q,x})$, where $h_{i,x} \in \mathbb{Q}_p \backslash \{0\}$ for every $i \in \{1,2,\dots,q\}$ and for any $x \in V$. Given $\rho \in \mathbb{Q}_p \backslash \{-1,0,1\}$ let us consider a p-adic probability measure $\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_{\mathbf{h},\rho}^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})}} \rho^{\mathcal{H}(\sigma)} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}, \qquad \forall \sigma \in \Omega_{V_n}. \tag{15}$$

Here $Z_{n,\rho}^{(\mathbf{h})}$ is the corresponding normalizing factor or *partition function.*

The following statement describes conditions on $\mathbf{h}$ guaranteeing compatibility of the sequence of probability distributions $\{\mu_{\boldsymbol{h},\rho}^{(n)}\}_{n\geq 1}$.

Proposition 3. *Let $\mathcal{H}$ be a Hamiltonian of q-state p-adic Potts model on a semi-infinite Cayley tree. For a given vector valued function $\boldsymbol{h}: V\backslash\{x^0\} \to \mathbb{Q}_p^q$ a sequence of p-adic probability measures $\{\mu_{\boldsymbol{h},\rho}^{(n)}\}_{n\geq 1}$ given by (15) is compatible iff for every $x \in V$ it hold the following equalities:*

$$\frac{h_{i,x}}{h_{q,x}} = \prod_{y \in S(x)} \frac{\sum_{u=1}^{q} \rho^{J\delta_{iu}} h_{u,y}}{\sum_{u=1}^{q} \rho^{J\delta_{qu}} h_{u,y}}, \qquad i \in \{1,2,\dots,q-1\}. \tag{16}$$

Theorem 10. *Let $p = 2$, $\rho \in \mathcal{E}_2$ and $m \leq [q/2]$. Then the following statements hold.*

(A) There exist $2C_q^m$ of translation-invariant 2-adic Gibbs measures if at least one of the following conditions is satisfied:

(A1) $|4m|_2 > max\{|\rho^J - 1|_2, |q|_2\}$ and $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$;

(A2) $|4m|_2 = |\rho^J - 1|_2 = |q|_2$ and $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$;

(A3) $|m|_2 > |\rho^J - 1|_2 = |q|_2 > |4m|_2,\ q \neq 2m,\ \rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$ *and there exists* $\sqrt{1-2a+b^2}$, *where* $a = \frac{q}{2m},\ b = \frac{\rho^J - 1}{2m}$.

(B) There exist C_q^m *of translation-invariant* 2*-adic Gibbs measures if at least one of the following conditions is satisfied:*

(B1) $|4m|_2 > max\{|\rho^J - 1|_2, |q|_2\}$ *and* $\rho^J \in \{1-q, 1+q\}$;

(B2) $|4m|_2 = |\rho^J - 1|_2 = |q|_2$ *and* $\rho^J \in \{1-q, 1+q;$

(B3) $|m|_2 = |\rho^J - 1|_2 = |q|_2 > |4m|_2$ *and* $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$;

(B4) $|m|_2 > |\rho^J - 1|_2 = |q|_2 > |4m|_2$ *and* $\rho^J \in \{1-q, 1+q\}$;

(B5) $|\rho^J - 1|_2 = |q|_2 > |m|_2$ *and* $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$;

(B6) $|m|_2 > |\rho^J - 1|_2 = |q|_2 > |4m|_2,\ q = 2m,\ \rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$ *and there exists* $\sqrt{b^2-1}$, *where* $b = \frac{\rho^J - 1}{q}$.

(C) Otherwise there does not exist any translation-invariant 2*-adic Gibbs measure.*

Theorem 11. *Let* $p \neq 2, \rho \in \mathcal{E}_p$ *and* $m \leq [q/2]$. *Then the following statements hold.*

(A) There exist $2C_q^m$ *of translation-invariant* p*-adic Gibbs measures if at least one of the following conditions is satisfied:*

(A1) $|m|_p > max\{|\rho^J - 1|_p, |q|_p\}$ *and* $\rho^J \notin \{1-q, 1+q\}$;

(A2) $|m|_p = |\rho^J - 1|_p = |q|_p,\ 0 < |(\rho^J - 1)^2 - q^2|_p < |q^2|_p,\ 0 < |q - 2m|_p < |q|_p$ *and there exists an integer number* $s \geq 1$ *such that*

$$|p^{-2s}((\rho^J - 1)^2 - 4m(q-m))|_p = 1;$$

(B) There exist C_q^m *of translation-invariant* p*-adic Gibbs measures if at least one of the following conditions is satisfied:*

(B1) $|m|_p > max\{|\rho^J - 1|_p, |q|_p\}$ *and* $\rho^J \in \{1-q, 1+q\}$;

(B2) $|m|_p < |\rho^J - 1|_p = |q|_p$ *and* $0 < |(\rho^J - 1)^2 - q^2|_p < |q^2|_p$;

(B3) $|m|_p = |\rho^J - 1|_p = |q|_p$ *and* $0 < |(\rho^J - 1)^2 - q^2|_p < |q^2|_p,\ |q - 2m|_p = |q|_p$;

(B4) $|m|_p = |\rho^J - 1|_p = |q|_p$ *and* $\rho^J \in \{1-q, 1+q\}$ *and* $0 < |q - 2m|_p < |q|_p$;

(B5) $q = 2m,\ |\rho^J - 1|_p = |q|_p,\ 0 < |(\rho^J - 1)^2 - q^2|_p < |q^2|_p$ *and there exists an integer number* $s \geq 1$ *such that* $|p^{-2s}((\rho^J - 1)^2 - q^2)|_p = 1$.

(C) Otherwise there does not exist any translation-invariant p*-adic Gibbs measure.*

Proposition 4. *Let μ_h be a translation-invariant p-adic Gibbs measure for q-state Potts model on Γ_+^2. Then μ_h is bounded iff $p \nmid q$.*

We consider the following function

$$f_{\rho,k}(z) = \left(\frac{\rho^J z+q-1}{z+\rho^J+q-2}\right)^k, \qquad \rho \in \mathbb{Q}_p \backslash \{-1,0,1\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

which is called *Potts-Bethe mapping*.

Let us consider the case $Sol_p(z^k + q - 1) \neq \emptyset$.

For a given $q \geq 3$ with $|q-1|_p = p^{-s}$, $s \geq 0$ we define the set

$$X = \cup_{i=1}^{\kappa_p} B(z_i, r), \qquad (18)$$

which is a finite union of disjoint balls. Here, $r = \left|p^{\frac{s+k}{k}}(\rho^J - 1)\right|_p$ and z_i is defined by (19) if $s = 0$ and by (20) if $s \neq 0$.

$$z_i = \begin{cases} 1 - q + \eta_i(\rho^J - 1), & \text{if} \quad \xi_i + q - 1 \not\equiv 0 (mod\ p) \\ 1 - q, & \text{if} \quad \xi_i + q - 1 \equiv 0 (mod\ p), \end{cases} \qquad (19)$$

where η_i be a solution of

$$\eta_i(\xi_i - 1) + \xi_i + q - 1 \equiv 0 (mod\ p),$$

for a given $\xi_i \in Sol_p(z^k + q - 1)$, $i = \overline{1, \kappa_p}$.

$$z_i = 1 - q + p^{\frac{s}{k}} \xi_i (\rho^J - 1) \qquad (20)$$

where $\xi_i \in Sol_p(z^k + q - 1)$, $i = \overline{1, \kappa_p}$.

Theorem 12. *Let $|q-1|_p = p^{-s}$, $s \geq 0$ and $\sqrt[k]{1-q} \in \mathbb{Q}_p$. Let X be a set defined as (18). If $\kappa_p \geq 2$ and $|k|_p > p^{\frac{s(k-1)}{k}} |\rho^J - 1|_p$ then $(X, J_{f_{\rho,k}}, f_{\rho,k})$ is a transitive p-adic repeller, i.e. this triple is topologically conjugate to the full shift dynamics of κ_p symbols.*

Theorem 13. *Let $k \geq 2$, $|q|_p < 1$ and $z_0^* = 1$. Then the dynamical structure of the system $(\mathbb{Q}_p, f_{\rho,k})$ is described as follows:*

(A) If $|k|_p \leq |q + \rho^J - 1|_p$ then $Fix(f_{\rho,k}) = \{z_0^*\}$ and $A(z_0^*) = Dom(f_{\rho,k})$.

(B) Assume that $|k|_p > |q + \rho^J - 1|_p$ and $|\rho^J - 1|_p < |q^2|_p$. Then there exists a non empty set $J_{f_{\rho,k}} \subset Dom(f_{\rho,k}) \backslash \mathcal{P}_{z^{(\infty)}}$ which is invariant with respect to $f_{\rho,k}$ and

$$A(z_0^*) = Dom(f_{\rho,k}) \backslash \left(\mathcal{P}_{z^{(\infty)}} \cup J_{f_{\rho,k}}\right).$$

Moreover, if $(k, p-1)$ is the greatest common factor of k and $p-1$, then the followings hold:

(B1) if $(k, p-1) = 1$ *then there exists* $z_* \in Fix(f_{\rho,k})$ *such that* $z_* \neq z_0^*$ *and* $J_{f_{\rho,k}} = \{z_*\}$;

(B2) if $(k, p-1) \geq 2$ *then* $(J_{f_{\rho,k}}, f_{\rho,k}, |\cdot|_p)$ *is a transitive p-adic repeller, i.e. this triple is topologically conjugate to the full shift dynamics of* $(k, p-1)$ *symbols.*

The fourth chapter, titled **"Surjectivity of non-linear Markov operators and its dynamics**" consists of two main parts. The first part (the first four sections of the chapter) was devoted to the studying of surjectivity of Polynomial Stochastic Operators. In the second part (the last three sections of the chapter) it was studied the dynamics of such kind operators. I believe that all results of the chapter will be useful in the theory of Gibbs measures for the statistical models with countable spin values. A nonlinear Markov chain is a discrete time stochastic process whose transitions depend on both the current state and the current distribution of the process. The nonlinear Markov chain over an infinite state space can be identified by a continuous mapping (the so-called nonlinear Markov operator) defined on a set of all probability distributions (which is a simplex). In the first part of this chapter, the surjectivity and orthogonal preserving property of the associated infinite dimensional nonlinear Markov operators are investigated. An example of an orthogonal preserving nonlinear Markov operator is provided which is not necessary to be surjective (in finite dimensional setting these notions are equivalent), and therefore, we found some sufficient conditions for the operator to be surjective. Furthermore, an application of the obtained results has been given to the solvability of certain class of Hammerstein integral equations. In the last three sections, the ergodicity question for general infinite dimensional stochastic operators is investigated. It was introduced two classes $\mathcal{L}^+$ and $\mathcal{L}^-$ of nonlinear stochastic operators acting on the simplex of l_1-space. For each operator V from these classes, the omega limiting sets ω_V and $\omega_V^{(w)}$ are studied with respect to l_1-norm and pointwise convergence, respectively. As a consequence of the investigation, we establish that every operator from the introduced classes is weak ergodic. However, if V belongs to $\mathcal{L}^-$, then it is not ergodic (w.r.t l_1-norm) while V is weak ergodic. Besides, all linear stochastic operators belonging to the classes $\mathcal{L}^+$ and $\mathcal{L}^-$ are described.

Let E be a subset of $\mathbb{N}$. For a given $r \geq 0$ we denote

$$S_r^E = \{\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in E} \in \mathbb{R}^E \ : x_i \geq 0, \quad \textstyle\sum_{i\in E} x_i = r\}, \quad \boldsymbol{B}_r^E = \bigcup_{\rho\in[0,r]} S_\rho^E.$$

For the sake of convenience, we always write S_r instead of $S_r^{\mathbb{N}}$ and $\boldsymbol{B}_r$ instead of $\boldsymbol{B}_r^{\mathbb{N}}$. We notice that $S_r \subset \ell_1$ for any $r \geq 0$.

It is known that $S_1 = convh(ExtrS_1)$, where $Extr(S_1)$ is the extremal points of S_1 and $convh(A)$ is the convex hall of a set A. Any extremal point of S_1 has the following form:

$$\boldsymbol{e}_k = (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{k}, 0, 0, \dots), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Recall that the set S_1^E is called $n-1$- *dimensional simplex* if $|E| = n$ and *an infinite dimensional simplex* if E is countable.

Here and henceforth we denote

$$intS_r = \{\boldsymbol{x} \in S_r : x_k > 0,\ k \in \mathbb{N}\}, \quad \partial S_r = S_r \backslash intS_r.$$

Let $\mathcal{P} = (P_{i_1 \dots i_m, k})_{i_1, \dots, i_m, k \in E}$ be a $m+1$-ordered hypermatrix. An $m+1$-ordered hypermatrix $\mathcal{P}$ is called stochastic if for any $i_1, i_2, \dots, i_m, k \in E$ if one has

$$P_{i_1 \dots i_m, k} \geq 0, \quad \sum_{n \in E} P_{i_1 \dots i_m, n} = 1. \tag{21}$$

For a given $m+1$-ordered stochastic hypermatrix $\mathcal{P}$ we define an operator V on $\boldsymbol{B}_1^E$ by

$$(V(\boldsymbol{x}))_k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m \in E} P_{i_1 i_2 \dots i_m, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}, \quad \forall k \in E. \tag{22}$$

The operator (21), (22) is called *m-ordered polynomial stochastic operator* (in short m-ordered PSO). Without loss of generality, we may always assume that $P_{i_1 \dots i_m, k} = P_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(m)}, k}$ for any permutation π of $(1,2, \dots, m)$.

Lemma 1. *Let V be an m-ordered PSO. Then one has*

$$V(S_1^E) \subset S_1^E, \qquad V(\boldsymbol{B}_1^E \backslash S_1^E) \subset \boldsymbol{B}_1^E \backslash S_1^E.$$

Lemma 2. *Let V be an m-ordered PSO. Then V is surjective on $\boldsymbol{B}_1^E$ iff it is surjective on S_1^E.*

Recall that two vectors $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S_1^E$ are called *orthogonal* (denoted by $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$) if $supp(\boldsymbol{x}) \cap supp(\boldsymbol{y}) = \varnothing$. If $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S_1^E$, then one can see that $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ if and only if $x_k y_k = 0$ for all $k \in E$. In what follows, we denote $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \sum_{k \in E} x_k y_k$.

Definition 1. *An m-ordered PSO V defined on S_1^E is called orthogonal preserving PSO (OP PSO) if for any $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S_1^E$ with $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ one has $V(\boldsymbol{x}) \perp V(\boldsymbol{y})$.*

Theorem 14. *Let V be an m-ordered PSO such that $V(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i$ for every $i \in \mathbb{N}$. The following statement are equivalent:*

(i) *V is an OP;*
(ii) *For any $i_1, \dots, i_m, k \in \mathbb{N}$ one has $P_{i_1 \dots i_m, k} = 0$ if $k \notin \{i_1, \dots, i_m\}$;*
(iii) *For any $\boldsymbol{x} \in S_1$ and $k \geq 1$ it holds $(V(\boldsymbol{x}))_k = x_k \mathcal{A}_k(\boldsymbol{x})$, where $\mathcal{A}_k(\boldsymbol{x}) = x_k^{m-1} + \sum_{j=1}^{m-1} C_m^j x_k^{m-1-j} \sum_{i_{m+1-j}, \dots, i_m \neq k} P_{k \dots k i_{m+1-j} \dots i_m, k} x_{i_{m+1-j}} \cdots x_{i_m}$.*

Theorem 15. *Let V be a m-ordered PSO such that $V(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i$ for all $i \in \mathbb{N}$. Then the following statements are equivalent:*

(A) *V is orthogonal preserving;*
(B) *V is surjective;*
(C) *V satisfy the following conditions:*

(C1) $V^{-1}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i, \ \forall i \in \mathbb{N}$,

(C2) $V^{-1}\left(int\Gamma_{\boldsymbol{e}_{i_1}\boldsymbol{e}_{i_2}}\right) = int\Gamma_{\boldsymbol{e}_{i_1}\boldsymbol{e}_{i_2}}, \ \ \forall i_1, i_2 \in \mathbb{N},$

…….....

(Cm) $V^{-1}\left(int\Gamma_{\boldsymbol{e}_{i_1}\cdots\boldsymbol{e}_{i_m}}\right) = int\Gamma_{\boldsymbol{e}_{i_1}\cdots\boldsymbol{e}_{i_m}}, \ \ \forall i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}.$

Proposition 5. *Let V be a surjective m-ordered PSO on S_1. Then there exists a sequence $\{j_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$ such that $P_{j_k j_k \dots j_k, k} = 1$ for all $k \in \mathbb{N}$.*

Next result gives a sufficient condition for the surjectivity of PSO.

Proposition 6. *Let V be an m-ordered PSO on S_1. Assume that there exists a sequence $\{j_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}$ such that for any $\boldsymbol{x} \in S_1$ with $supp(\boldsymbol{x}) \subset \{j_n\}_{n\geq 1}$ one has*

$$(V(\boldsymbol{x}))_k = x_{j_k} \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j x_{j_k}^{m-1-j} \sum_{i_{m+1-j},\dots,i_m \neq j_k} P_{j_k \dots j_k i_{m+1-j} \dots i_m, k} x_{i_{m+1-j}} \cdots x_{i_m},$$

$$P_{j_k \dots j_k, k} = 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Then V is surjective.

Theorem 16. *Let V be a surjective m-ordered PSO. If V is OP, then there exists a permutation π of natural numbers such that for any $i_1, \dots, i_m, k \in \mathbb{N}$*

$$P_{i_1 \dots i_m, k} = 0, \quad if \ \ \pi(k) \notin \{i_1, \dots, i_m\}.$$

Every mapping $V: S_1^E \to S_1^E$ is called *stochastic*. We deal with such kind of operators. For a given operator V on S_1, by $\{V^n(\boldsymbol{x}_0)\}_{n=0}^{\infty}$ we denote the trajectory of a point $\boldsymbol{x}_0 \in S_1$ under V. By $\omega_V(\boldsymbol{x}_0)$ (respectively, $\omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0)$) we denote the set of limit points of $\{V^n(\boldsymbol{x}_0)\}_{n=0}^{\infty}$ with respect to ℓ_1-norm (respectively, pointwise convergence). Namely, one has

$$\omega_V(\boldsymbol{x}_0) := \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} V^k(\boldsymbol{x}_0)}^{\|\cdot\|}.$$

Similarly, we have

$$\omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0) := \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} V^k(\boldsymbol{x}_0)}^{d},$$

here d is the metric given by

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}, \qquad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \ell_1.$$

Lemma 3. *Let $\boldsymbol{b} \in \ell_\infty$, then the linear functional $\varphi_{\boldsymbol{b}}$ given by*

$$\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \ell_1$$

is pointwise continuous on $\boldsymbol{B}_1$ iff $\boldsymbol{b} \in c_0$.

Recall that an ℓ_1-continuous function $\varphi: S_1 \to \mathbb{R}$ is called a *Lyapunov function* for stochastic operator V if the limit $\lim_{n\to\infty} \varphi(V^n(\boldsymbol{x}))$ exists for any initial point $\boldsymbol{x} \in S_1$.

Obviously, if φ is Lyapunov function for V and $\lim_{n\to\infty} \varphi(V^n(\boldsymbol{x}_0)) = \boldsymbol{x}^*$, then $\omega_V(\boldsymbol{x}_0) \subset \varphi^{-1}(\boldsymbol{x}^*)$. Consequently, to determine more precisely of $\omega_V(\boldsymbol{x}_0)$ we should construct as much as possible Lyapunov functions.

However, to investigate $\omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0)$ of stochastic operator usual Lyapunov functions may not be applicable. Therefore, we want to introduce a notion *quasi Lyapunov function* which is pointwise continuous rather than ℓ_1-norm continuity.

First, we denote by $\boldsymbol{b}_\downarrow$ a non-increasing sequence $\{b_k\}$, i.e.

$$\boldsymbol{b}_\downarrow = (b_1, b_2, b_3 \dots,), \quad \text{such that} \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$$

A pointwise continuous function $\varphi: \boldsymbol{B}_1 \to \mathbb{R}$ is called a *quasi Lyapunov function* for V if $\lim_{n\to\infty} \varphi(V^n(\boldsymbol{x}))$ exists for any initial point $\boldsymbol{x} \in S_1$.

We note that in Lemma 3 it has been described all pointwise continuous linear functionals defined on $\boldsymbol{B}_1$. Based on that result, we introduce the following class of stochastic operators. Given a sequence $\boldsymbol{b}_\downarrow \in c_0$ let us denote

$$\varphi_{\boldsymbol{b}_\downarrow}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k.$$

Definition 2. *We say a stochastic operator V belongs to the class $\mathcal{L}^+$ (resp. $\mathcal{L}^-$) if for every $\boldsymbol{b}_\downarrow \in c_0$ and for any $\boldsymbol{x} \in S_1$ the sequence $\left\{\varphi_{\boldsymbol{b}_\downarrow}(V^n(\boldsymbol{x}))\right\}_{n\geq 0}^{\infty}$ is increasing (resp. decreasing).*

Proposition 7. *Let $\boldsymbol{x}_0 \in S_1$. Then the following statements hold:*
(i) If $V \in \mathcal{L}^+$ then $\omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0) \subset S_1$;
(ii) If $V \in \mathcal{L}^-$ then $\omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0) \subset S_r$ for some $r \leq 1$.

Theorem 17. *Let $\boldsymbol{x}_0 \in S_1$. Then the following statements hold:*
(i) If $V \in \mathcal{L}^+$ then $\omega_V(\boldsymbol{x}_0) = \omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0)$;
(ii) If $V \in \mathcal{L}^-$, then $\omega_V(\boldsymbol{x}_0) = \omega_V^{(w)}(\boldsymbol{x}_0)$ iff $\omega_V(\boldsymbol{x}_0) \neq \varnothing$.

Theorem 18. *Let $V \in \mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^-$. Then V is weak ergodic. Moreover, if $V \in \mathcal{L}^+$ then V is ergodic.*

CONCLUSION

The dissertation is devoted to the study dynamics of linear and non-linear operators over Archimedean and non-Archimedean vector spaces.

The main results of the research are as follows:

1. Non-Archimedean analogues of some well-known theorems on hypercyclicity and supercyclicity of linear operators are proved. Some generalized weighted backward shift operators on non-Archimedean c_0 space is introduced. Criterions of hypercyclicity, supercyclicity and cyclicity of such kind of operators are obtained.

2. A monomial equation over p-adic number fields is studied. The set of all solutions of the equation is described. Moreover, as an application of the monomial equation to a fixed point problem for the p-adic Lipschitz functions is given.

3. The set of all translation-invariant generalized p-adic Gibbs measures for the p-adic Ising model on semi-infinite Cayley tree is described. Moreover, necessity and sufficiency conditions on boundedness of such kind of measures are obtained.

4. For the p-adic Ising-Vannimenus model on a semi-infinite Cayley tree the existence of p-adic Gibbs measure is proved. The studying dynamics of p-adic rational functions allowed us to construct new Gibbs measures for the model.

5. The dynamics of p-adic (where $p \geq 3$) Potts-Bethe mapping is studies. It was shown that under some conditions on parameters the dynamics of p-adic Potts-Bethe mapping has a chaotic character. As a conclusion of that fact, we inferred the existence of any periodic Gibbs measure for the p-adic Potts model on semi-infinite Cayley tree.

6. A p-adic SOS model with $m + 1$ spin values is studied. It is shown that under some conditions a phase transition does not occur in the model. It is showed that if $p \mid (m + 1)$ then a phase transition occurs for the model. As corollary, it was formulated a criterion for the boundedness of p-adic Gibbs measures for the model.

7. The surjectivity and orthogonal preserving property of the associated infinite dimensional nonlinear Markov operators are investigated. An example of an orthogonal preserving nonlinear Markov operator is provided, which is not necessary to be surjective (in finite dimensional setting these notions are equivalent), and therefore, we found some sufficient conditions for the operator to be surjective. Furthermore, an application of the obtained results has been given to the solvability of certain class of Hammerstein integral equations.

8. Strong and weak omega limiting sets of Polynomial Stochastic Operators (PSOs) are studied. New classes of PSOs (denoted by $\mathcal{L}^+$ and $\mathcal{L}^-$) are introduced. Weak ergodicity of the operators from the introduced classes is established. All linear stochastic operators belonging to the classes $\mathcal{L}^+$ and $\mathcal{L}^-$ are described.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ХАКИМОВ ОТАБЕК НОРБУТА УГЛИ

ПРИЛОЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ И НЕАРХИМЕДОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ К ТЕОРИИ ГИББСОВСКИХ МЕР

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ – 2022

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.1.DSc/FM186.

Диссертация выполнена в Институте Математики.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (https://kengash.mathinst.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультанты:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Мухамедов Фаррух Максутович доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Хренников Андрей Юрьевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Икромов Исроил Акрамович доктор физико-математических наук, профессор
	Эшматов Фарход Хасанович доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Наманганский Государственный университет**

Защита диссертации состоится « 29 » июля 2022 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99878)207-91-40, e-mail: mathinst@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 143). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99878) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 13 » июля 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от « 13 » июля 2022 года).

А. Азамов
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

У.У. Жамилов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Объект исследования: *p*-адические числа, гиперциклические и суперциклические операторы, дерево Кэли, решетчатые модели, *p*-адические гиббсовские меры, хаос, нелинейные марковские операторы, интегральный оператор Гаммерштейна, омега предельные множества.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получены необходимые и достаточные условия гиперцикличности, суперцикличности и цикличности обобщенного взвешенного оператора левого сдвига над неархимедовым пространством последовательностей;

описано множество всех трансляционно-инвариантных обобщенные *p*-адических гиббсовских мер для *p*-адической модели Изинга на полубесконечном дереве Кэли и показано существование фазового перехода для *p*-адической модели Изинга;

доказана хаотичность динамической системы *p*-адического отображения Поттса-Бете и описано множество всех периодических обобщенных *p*-адических гиббсовских мер для *p*-адической модели Поттса на полубесконечном дереве Кэли;

построена *p*-адическая гиббсовская мера для модели SOS и получены некоторые условия на параметры, при которых для этой модели существует единственная *p*-адическая гиббсовская мера;

получены необходимые и достаточные условия суръективности полиномиальных стохастических операторов в бесконечномерном симплексе и описаны сильные и слабые омега предельные множества для некоторого класса полиномиальных стохастических операторов.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Описание множества периодических *p*-адических гиббсовских мер для модели Поттса на полубесконечном дереве Кэли было использовано в статьях зарубежных научных журналов (*p*-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Application, 2021, 13(4); Results in Mathematics, 2020, 75(3); Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 105; Mathematical Physics Analysis and Geometry, 2015, 18(1)) при нахождении периодических точек *p*-адических рациональных функций. Применение научных результатов позволило проводить анализ термодинамики рассмотренных физических систем.

Хаотичность *p*-адического отображения Поттса-Бете были использованы при изучении асимптотического поведения траектории *p*-адического рационального отображения в статьях зарубежных научных журналов (Reviews in Mathematical Physics, 2021, 33(10); *p*-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Application, 2020, 12(3); Entropy, 2019, 21(11); Science China Mathematics, 2018, 61(12)). Применение научных результатов позволило разложить *p*-адические динамические системы на минимальные подмножества.

Описание множества трансляционно-инвариантных обобщенных p-адических гиббсовских мер и существование фазового перехода для модели Изинга-Ваннименуса на полубесконечном дереве Кэли были использованы при нахождении неархимедовых мер в статьях зарубежных научных журналов (Journal of Mathematical Physics, 2022, 63(1); Journal of Mathematical Physics, 2020, 61(1); Journal of Statistical Physics, 2018, 171(6)). Применение научных результатов позволило построить неархимедовы неограниченные меры.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 193 страницы.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Rozikov U.A., Khakimov O.N., Description of all translation-invariant *p*-adic Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. // *Markov Processes and Related fields*, 2015, **21**(1), pp.177-204. (3.Scopus. IF=0.567)
2. Mukhamedov F.M., Saburov M., Khakimov O.N., On *p*-adic Ising-Vannimenus model on a Cayley tree. // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.*, 2015, P05032, doi:10.1088/1742-5468/2015/05/P05032. (3.Scopus. IF=2.091)
3. Mukhamedov F.M., Saburov M., Khakimov O.N., Translation-invariant *p*-adic quasi Gibbs measures for the Ising-Vannimenus model on a Cayley tree. // *Theoretical and Mathematical Physics*, 2016, **187**(1), pp.583-602. (3.Scopus. IF=0.425)
4. Mukhamedov F.M., Khakimov O.N., Phase transition and chaos: *p*-adic Potts model on a Cayley tree. // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2016, **87**, pp.190-196. (3.Scopus. IF=1.5)
5. Mukhamedov F.M., Khakimov O.N., On metric properties of unconventional limit sets of contractive non-Archimedean dynamical systems. // *Dynamical Systems*, 2016, **31**(4), pp.506-524. (3.Scopus. IF=0.576)
6. Mukhamedov F.M., Khakimov O.N., On limit sets of contractive functions on *p*-adic field. // *Innovations Through Mathematical and Statistical Research AIP Conference Proceedings*, 2016, doi: 10.1063/1.4952542. (3.Scopus.)
7. Mukhamedov F.M., Khakimov O.N., On periodic Gibbs measures of *p*-adic Potts model on a Cayley tree. // *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 2016, **8**(3), pp.225-235. (3.Scopus. IF=0.368)
8. Mukhamedov F.M., Khakimov O.N., On a generalized self-similarity in the *p*-adic field. // *Fractals*, 2016, **24**(4), 1650041. (3.Scopus. IF=3.665)
9. Khakimov O.N., *p*-Adic Solid-on-Solid model on a Cayley tree. // *Theoretical and Mathematical Physics*, 2017, **193**(3), pp.1881-1894. (3.Scopus. IF=0.409)
10. Mukhamedov F.M, Khakimov O.N., On Julia Set and Chaos in *p*-adic Ising Model on the Cayley Tree. // *Mathematical Physics Analysis and Geometry*, 2017, **20**(23). (3.Scopus. IF=0.545)
11. Mukhamedov F.M., Akin H., Khakimov O.N., Gibbs measures and free energies of Ising-Vannimenus model on the Cayley tree. // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.*, 2017, P053208, doi:10.1088/1742-5468/aa6c88. (3.Scopus. IF=2.404)
12. Mukhamedov F.M., Khakimov O.N., Chaotic behavior of the Potts-Bethe

mapping. // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, 2018, **38**(1), pp.231-245. (3.Scopus. IF=1.392)

13. Mukhamedov F., Khakimov O., Dynamics of linear operators on non-Archimedean vector spaces. // *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 2018, **25**, pp.85-105. (3.Scopus. IF=0.403)
14. Mukhamedov F., Khakimov O., Embong A., On surjective second order non-linear Markov operators and associated nonlinear integral equations. // *Positivity*, 2018, **22**(5), pp.1445-1459. (3.Scopus. IF=1.030)
15. Mukhamedov F., Khakimov O., *p*-Adic monomial equations and their perturbations. // *Izvestiya: Mathematics*, 2020, **84**(2), pp.152-165. (3.Scopus. IF=1.057)
16. Mukhamedov F., Khakimov O., Embong A., Solvability of non-linear integral equations and surjectivity of non-linear Markov operators. // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, **43**(15), pp.9102-9118. (3.Scopus. IF=0.719)
17. Mukhamedov F., Khakimov O., Embong A., Ergodicities of infinite dimensional non-linear stochastic operators. // *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 2020, **19**(79), p.20. (3.Scopus. IF=1.019)
18. Mukhamedov F., Khakimov O., Embong A., On omega limiting sets of infinite dimensional Volterra operators. // *Nonlinearity*, 2020, **33**, pp.5875-5904. (3.Scopus. IF=1.571)
19. Mukhamedov F., Khakimov O., Translation-invariant generalized *p*-adic Gibbs measures for the Ising model on Cayley trees. // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, **44**(16), pp.12302-12316. (3.Scopus. IF=0.702)
20. Mukhamedov F., Khakimov O., Embong A., Projective surjectivity of quadratic stochastic operators on L_1 and its application. // *Chaos, Solitons and Fractal*, 2021, **148**, 111034. (3.Scopus. IF=1.647)
21. Mukhamedov F., Khakimov O., Chaotic behavior of the *p*-adic Potts-Bethe mapping II. // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2021, doi:10.1017/etds.2021.96. (3.Scopus. IF=1.309)
22. Mukhamedov F., Khakimov O., Souissi A., Supercyclic and hypercyclic generalized weighted backward shifts over a non-Archimedean $c_0(N)$ space. // *Mathematics*, 2021, **9**(22), 2986. (3.Scopus. IF=0.538)
23. Mukhamedov F., Khakimov O., Chaos in *p*-adic statistical lattice models: Potts Model. // Chapter of the *p*-adic Methodology in STEAM-H "*Advances in Non-Archimedean Analysis and Applications*", Springer, Switzerland, 2021. (3.Scopus.)
24. Mukhamedov F., Khakimov O., Souissi A., A Few Remarks on Supercyclicity of Non-Archimedean Linear Operators on $c_0(N)$. // *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications*, 2022, **14**(1), pp.64-76. (3.Scopus. IF=0.606)

25. Khakimov O.N., On dynamics of Cezaro operator on S^{m-1}. // *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Applications. ICQPRT 2021*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2022 390, 2022. doi:10.1007/978-3-031-06170-7_21. (3.Scopus.)

II бўлим (2 часть; part 2)

26. Mukhamedov F.M., Khakimov O.N., Phase transition and Chaos in *p*-Adic Ising Model on the Cayley tree // *4-th international workshop on nonlinear and modern mathematical physics*, 2017, 4-8 May, Putrajaya, Malaysia, pp.25.
27. Khakimov O.N., Mukhamedov F.M., Embong A., Infinite dimensional Volterra quadratic stochastic operators // *Operator Algebras, Quantum Probability & Innovative Applications*, 2018, 7-8 February, Al Ain, UAE.
28. Khakimov O.N., On surjective second order non-linear Markov operators // *Abstract of Uzbek-Russian conference "Non classic equations of Mathematical Physics and its Applications"*, 2019, 24-26 October, Tashkent, pp.201-203.
29. Khakimov O.N., On surjective infinite dimensional quadratic stochastic operators // *Abstract of Conferance "Actual problems and applications"*, 2019, 4-5 October, Karshi, pp.62-64.
30. Khakimov O.N., Chaotic behavior of the *p*-adic Potts-Bethe mapping // *Abstracts of the international conference "Modern problems of geometry and topology and its applications"*, 2019, 21-23 November, Tashkent, pp.52-53.
31. Khakimov O.N., The existence of generalized Gibbs measures for the *p*-adic Potts model // *Abstracts of the Republican Scientific Conference "The main problems of Mathematics and Applied Mathematics in the age of globalization"*, 2021, June 1-2, Tashkent, pp.127-129.
32. Khakimov O.N., On dynamics of Cezaro operator on S^{m-1} // *The 41-st International Conference on Quantum Probability and related topics*, 2021, 28 March 1 April, UAE, pp.71-72.
33. Khakimov O.N., Chaotic behavior of the *p*-adic Potts-Bethe mapping II // *Abstracts of the Republican Scientific Conference with the participation of foreign scientists "Differential equations and related problems of analysis",* Bukhara, November 04–05, 2021, pp.35-36.
34. Khakimov O.N., Dynamics of $I + B_{\boldsymbol{b}}$ on $c_0(N)$. // *Abstracts of the Republican Scientific Conference with the participation of foreign scientists "Differential equations and related problems of analysis",* Bukhara, November 04–05, 2021, pp.37-38.
35. Khakimov O.N., Gibbs measures for Ising model on a Cayley tree // *Abstracts of the VII International Scientific Conference of Young Scientist "Modern problems of Applied Mathematics and Information Technologies Al-Khwarizmi-2021",* Fergana, November 15–17, 2021, pp.83.

36. Khakimov O.N., On *p*-adic Gibbs measures for countable state Potts model on a Cayley tree // *Collection materials of the Republican scientific and practical conference "Theoretical Foundations and Applied Problems of Modern Mathematics",* Andijan, Mart 28, 2022, pp.53-54.
37. Khakimov O.N., On dynamics of Riesz type stochastic operators // *Collection materials of the Republican scientific and practical conference "Theoretical Foundations and Applied Problems of Modern Mathematics",* Andijan, Mart 28, 2022, pp.54-55.
38. Khakimov O.N., Non-singularity of non-periodic Gibbs measures for the Ising model // *Abstracts of the Conference of Young Scientist "Mathematics, Mechanics and Intellectual Technologies",* Tashkent, April 21–22, 2022, pp.22-24.
39. Khakimov O.N., Surjectivity of polynomial stochastic operators on infinite dimensional simplex // *Abstracts of the Conference "New theorems of young mathematicians"*, Namangan, May 13-14, 2022, pp.49.
40. Pardayev Sh., Yahyayeva R., Khakimov O.N., Applications of monomial equation over *p*-adic number field // *Abstracts of the Conference "New theorems of young mathematicians"*, Namangan, May 13-14, 2022, pp.71-72.

Автореферат “Ўзбекистон математика журнали” таҳририятида 2022 йил 30 июнда таҳрирдан ўтказилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,75. Адади 100 дона. Буюртма № 50/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.