В. И. РОМОНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

РАХМОНОВ ФАРҲОД ДЎСТМУРОДОВИЧ

ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН НОЛОКАЛ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ **бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ**

ТОШКЕНТ – 2022

UDK: УДК 517.953.5

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В. И. РОМОНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

РАХМОНОВ ФАРҲОД ДЎСТМУРОДОВИЧ

ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН НОЛОКАЛ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида № B2022.3.PhD/FM305 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус ва ингилиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (kengash.mathinst.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Юлдашев Турсун Камалдинович** физика-математика фанлари доктори, доцент
Расмий оппонентлар:	**Тахиров Жозил Останович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Қодирқулов Бахтиёр Жалилович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Хўжа Ахмад Яссавий номидаги Халқаро Қозоқ-Турк университети (Қозоғистон)**

Диссертация ҳимояси В. И. Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «01» ноябрь соат 17:30 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9- уй. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В. И. Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (146-рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 9- уй. Тел.: (+99871) 207-91-40.

Диссертация автореферати 2022-йил «14» октябр куни тарқатилди.
(2022-йил «14» октябрдаги 2-рақамли реестр баённомаси).

У. А. Розиқов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж. К. Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

А. А. Азамов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги
Илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда гидродинамика ва фильтрлаш жараёнлари моделларини тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Гидродинамиканинг фундаментал қонуниятларини кашф этиш бугунги кунда математик физиканинг классик ва ноклассик дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалари учун қўйилган тўғри ва тескари масалаларни ечишга олиб келинмоқда. Чизиқли ва ночизиқли дифференциал тенгламалар учун тескари ва нолокал чегаравий масалаларни ечиш астрономия, квант назарияси, геофизика, иссиқлик ўтказиш, математик биология ва бошқариш назарияси билан боғлиқ муаммоларни ҳал этишда муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Халқаро миқёсда қараганда, интегралли шартлар билан берилган дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламаларни тадқиқ этиш муҳим аҳамият касб этиб, бу борада олиб борилаётган тадқиқотлар интенсивлашиб бормоқда. Берилган параметрларнинг қийматларидан келиб чиққан ҳолда ечимларни қуриш, бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламаларнинг ечимларини ошкор кўринишларда топиш, тенгламалар квазичизиқли ёки ночизиқли бўлган ҳолларда эса уларни эквивалент тарзда ночизиқли интеграл тенгламага келтириш ва турли итерацион схемаларни қўллаш амалий жиҳатдан ўта муҳим ҳисобланади.

Мамлакатимизда ўзгарувчилардан биттаси бўйича иккинчи, учинчи ва тўртинчи тартибли ва бошқа ўзгарувчилар бўйича жуфт тартибли хусусий ҳосилаларни ўз ичига олган дифференциал тенгламаларни тадқиқ этишга алоҳида эътибор берилмоқда. Чунки бундай масалалар тадқиқотчидан алоҳида ёндашувни ва янгича мулоҳазалар юритишни кўпроқ талаб қилади. «Дифференциал тенгламалар ва математи физика, динамик системалар назарияси ва оптимал бошқариш» фанларининг устувор йўналишларида халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда математик физиканинг нолокал чегаравий масалаларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон “Ўзбекситон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида” ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В. И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасида таълим сифатини ошириш ва илмий тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги 292-сон қарори.

қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялар ривожланишининг устувор йўналишларга боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. "Математика, механика ва информатика" устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганганлик даражаси. В. А. Ильиннинг 1960 йилдаги машҳур мақоласидан кейин параболик ва гиперболик типдаги чизиқли дифференциал тенгламаларни ўрганишга бағишланган кўплаб илмий ишлар пайдо бўлди. Хусусан, Қ. Бойқузиевнинг илмий ишларида бузиладиган гиперболик ва параболик тенгламалар учун асосий аралаш масалалар ўрганилди. Ю. А. Дубинский ихтиёрий тартибли квазичизиқли ва параболик тенгламалар бўйича тадқиқотлар олиб борди. Н. А. Ионкин иссиқлик ўтказиш назариясида ноклассик чегаравий шартли масалаларни ўрганди.

Г. И. Чандировнинг докторлик диссертациясида ночизиқли гиперболик ва параболик тенгламалар учун қўйилган аралаш масалани ечишга Фурье қаторлари усулини қўлланилиши асослаб берилди. Қ. Х. Шабадиков ўзининг илмий натижаларида эса аралаш ҳосилалари олдида кичик параметр қатнашадиган псевдогиперболик ва псевдопараболик турдаги ночизиқли дифференциал тенгламалар учун аралаш масалани Фурье қаторлари усулида тадқиқ этди. Т. К. Юлдашев ўзининг илмий ишларида чизиқли ва чизиқсиз юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар учун аралаш масалаларни ўрганди. А. И. Журов, В. Ф. Зайцев ва А. Д. Полянинларнинг математик физика ва механиканинг чизиқсиз дифференциал тенгламаларини ўрганишга бағишланган ишлари мавжуд.

Бугунги кунда Р. Р. Ашуров, С. Умаров, О. С. Зикиров, Д. К. Ҳолиқов, Ж. О. Тахиров ва Р. Н. Тўраевларнинг ишларида турли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий масалалар ўрганилган. Эллиптик ва аралаш типдаги дифференциал тенгламалар учун турли чегаравий масалалар Ш. А. Алимов, Ю. П. Апаков, Р. Р. Ашуров, А. С. Бердышев, Б. Ж. Кадиркулов, Т. Д. Джураев, М. Мамажанов, А. Сопуев, Б. И. Исломов, О. Х. Абдуллаев, Г. Б. Умаров, М. Мирсабуров, И. Н. Хайруллаев, У. Э. Бобомуродов, С. Т. Чориев, Ж. Худжаев, М. Х. Рузиев, М. С. Салахитдинов, А. Хасанов, А. К. Уринов, К. Т. Каримов, А. О. Маманазаров, Ш. Т. Нишонов, А. В. Юлдашева каби олимларнинг ишларида ўрганилган. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тескари масалалар назарияси янги ва муҳим соҳа сифатида жуда тез ривожланмоқда. Бунга Ш. А. Алимов, Р. Р. Ашуров, М. С. Салахитдинов, А. С. Бердишев, С. З. Джамалов, Б. И. Исломов, У. Ш. Убайдуллаев ва бошқаларнинг ишларини келтириш мумкин.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университети Ўзбек-Исроил қўшма факультети илмий-тадқиқот ишлари режаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар учун нолокал тўғри ва тескари масалаларнинг конструктив ечимини қуришдан иборатдир.

Тадқиқот вазифалари ушбу ишда қуйидагилардан иборат:

бир жинсли юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал ва аралаш турдаги тенгламалар учун янги чегаравий масалаларни бир қийматли ечилиши учун етарли бўлган шартларни топиш ва масалалар ечимини Фурье қатори кўринишида қуриш;

параметрларнинг регуляр қийматларида юқори тартибли ҳамда айниган ядроли хусусий ҳосилали интегро-дифференциал тенгламалар учун аралаш тўғри ва тескари масалаларнинг бир қийматли ечилиши учун етарли бўлган шартларни топиш ва чегаравий масалалар ечимини Фурье қатор кўринишида қуриш;

юқори тартибли кўп ўлчовли хусусий ҳосилали чизиқсиз дифференциал, интегро-дифференциал ва аралаш тенгламалар биринчи марта кўрилган ва улар учун тескари аралаш ва чегаравий масалаларнинг бир қийматли классик ечилиши учун етарли бўлган шартларни топиш.

Тадқиқотнинг объекти. Юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал, интегро-дифференциал ва аралаш тенгламалар.

Тадқиқотнинг предмети. Аралаш, чегаравий ва тескари масалалар. Фурье қатори. Юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси. Айниган ядроли хусусий ҳосилали интегро-дифференциал тенгламалар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация натижаларини ҳал қилишда математик физика назарияси ҳамда интеграл тенгламалар ва тенгсизликлар назарияси, оддий дифференциал тенгламалар назарияси, функционал анализ, функциялар назарияси усулларидан фойдаланилди.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

бир жинсли юқори тартибли бир фазовий аргументли хусусий ҳосилали дифференциал, интегро-дифференциал ва аралаш тенгламалар учун аралаш ва нолокал чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланган;

параметрнинг регуляр қийматларида юқори тартибли икки фазовий аргументли хусусий ҳосилали дифференциал, интегро-дифференциал ва аралаш тенгламалар учун чегаравий ва аралаш тескари масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланган;

юқори тартибли хусусий ҳосилали кўп фазовий аргументли чизиқсиз дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар учун тескари масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси шундан иборатки, юқори тартибли хусусий ҳосилали чизиқли ва чизиқсиз дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар хусусиятларидан келиб чиқиб, ечимларни Фурье қатори кўринишида итерацион жараён ёрдамида қурилади.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги масалаларнинг коррект қўйилганлиги, қатъий математик усулларнинг қўлланилганлиги, математик исботларнинг тўла бажарилганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти олинган натижалардан юқори тартибли дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар учун сифат назариясини ривожлантиришда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти уларни автоматик бошқарув, чизиқсиз механика ва математик физиканинг бир қатор амалий масалаларини ечишда тадбиқ этиш мумкинлиги билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал масалалар бўйича олинган натижалар асосида:

параметрнинг регуляр қийматларида юқори тартибли икки фазовий аргументли хусусий ҳосилали дифференциал, интегро-дифференциал ва аралаш тенгламалар учун чегаравий ва аралаш тескари масалаларнинг бир қийматли ечимидан AP09259137 рақамли «Инволютив алмаштиришли интегро-дифференциал тенгламалар учун кўп нуқтали чегаравий масалаларнинг ечиш усулларини ишлаб чиқиш» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида чизиқли ва чизиқсиз дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларни бир қийматли ечимларини қуришда фойдаланилган (Хўжа Аҳмад Яссавий номидаги Қозоқ-Турк халқаро университетининг 2022 йил 17 июндаги №04/1674-сонли маълумотномаси, Қозоғистон). Илмий натижанинг қўлланиши инволютив алмаштиришли бир жинсли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун кўп нуқтали чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилиши учун етарли бўлган шартларни олишни имконини берган;

юқори тартибли хусусий ҳосилали кўп фазовий аргментли чизиқсиз дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар учун тескари масалаларнинг бир қийматли ечиш усулидан ОТ-Ф-4-(36+32) рақамли «Математик физика ва оптимал бошқарув масалаларини ечишнинг замонавий усулларини ишлаб чиқиш ва тоқ тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун ноклассик бошланғич ва спектрал масалалар ва уларнинг татбиқлари» мавзусидаги фундаментал лойиҳада хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун аралаш ва чегаравий масалаларни ечишда фойдаланилган (Ўзбекистон Миллий университетининг 2022 йил 13 июлдаги №04/11-4124-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланиши Штурм-Луивулл чизиқли дифференциал тенгламалари учун чегаравий масалалар ечимларини топишни имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 7 та халқаро илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича 7 та илмий мақола ва 7 та тезис чоп этилган. Шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та мақола чоп этилган. Булардан 4 та илмий мақола Scopus базасидаги хорижий журналларда эълон қилинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 117 бетни ташкил этган.

Талабгор ушбу диссертация ишида масалалар қўйиб бергани ва уни таёрлаш жараёнида берган фойдали маслаҳатлари учун илмий раҳбари Т. К. Юлдашевга ўзининг самимий миннатдорчилигини билдиради. Ушбу диссертацион тадқиқотни қўллаб қувватлагани учун устози Ш. Г. Касимовга ҳам ўз миннатдорчилигини билдиради.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурлиги асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича илмий-тадқиқотлар шарҳи ва муаммонинг ўрганганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертациянинг тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертация биринчи боби тўрт параграфдан иборат. Мазкур бобнинг **биринчи параграфида** кейинги боблар ва параграфларда қўлланиладиган ёрдамчи маълумотлар келтирилган.

Ушбу $\left\{ a(t)=(a_i(t)) \,\middle|\, a_i(t)\in C(\Omega_T)\,,\, i=1,2,... \right\}$ тўпламда иккита элементни қўшиш ва элементни скалярга кўпайтириш аммаллари аниқланган бўлсин. Бу тўплам чизиқли вектор фазодир. Биз вектор фазонинг $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\max\limits_{t\in\Omega_T}\left|a_i(t)\right|^2<\infty$ шартни қаноатлантирадиган элемантларини қараймиз. Бундай тўпламни $B_2(T)$ кўринишда белгилаймиз ва нормани қуйидагича киритамиз:

$$\| a(t)\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|a_i(t)\right|^2}\,.$$

$B_2(T)$ фазо Банах фазосидир.

Агар берилган $\varphi(x)$ силлиқ функция учун қуйидаги шартлар

$$\varphi_i(0)=\varphi_i(l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_i(0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_i(l)=...=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi_i(0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi_i(l)=0$$

бажарилса, у ҳолда бу шартларни биз Дирихле типидаги чегаравий шартлар бажарилди деб айтамиз.

Иккинчи параграфда бир фазовий ўлчовли $\Omega=\{(t,x)|\,0<t<T\,,\,0<x<l\}$ соҳада қуйидаги Бенни-Люк типидаги юқори жуфт тартибли дифференциал тенглама

$$D_{t,x}^{2+4k}[U(t,x)]=f(t,x) \qquad (1)$$

учун нолокал чегаравий масаланинг ягона ечилишини ўрганамиз, бу ерда

$$D_{t,x}^{2+4k}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right]+(-1)^{k+1}\omega\cdot w(t)\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},$$

T ва l берилган мусбат сонлар, k фиксирланган мусбат бутун сон, $0<\omega$ параметр, $0<w(t)\in C\,(\Omega_T)$, $f\,(t,x)\in C_{t,x}^{2+4k}(\Omega_T\times\Omega_l)$, $\Omega_T\equiv[0;T]$, $x\in\Omega_l\equiv[0;l]$.

1-масаланинг қўйилиши. Шундай $U\,(t,x)$ функцияни топамизки, бу функция (1) дифференциал тенгламани ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$U\,(T,x)+\int_0^T U\,(t,x)\,d\,t=\varphi_1(x),\;\; 0\le x\le l, \tag{2}$$

$$U_t\,(T,x)+\int_0^T U_t\,(t,x)\,t\,d\,t=\varphi_2\,(x),\;\; 0\le x\le l, \tag{3}$$

$$u(t,0)=u(t,l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,l)=...=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,l)=0, \tag{4}$$

$$U\,(t,x)\in C\,(\bar{\Omega})\cap C_{t,x}^{2,2k}(\Omega)\cap C_{t,x}^{2+4k}(\Omega), \tag{5}$$

бу ерда $\varphi_i(x)\,(i=1,2)$ берилган силлиқ функциялар ва бу функциялар учун Дирихле типидаги чегаравий шартлар бажарилади

$$\varphi_i\,(0)=\varphi_i\,(l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_i\,(0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_i\,(l)=...=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi_i\,(0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi_i\,(l)=0.$$

Ҳудди шунингдек, $f\,(t,x)$ берилган фукция учун ҳам иккинчи аргумент бўйича қуйидаги Дирихле типидаги чегаравий шартлар бажарилади

$$f\,(t,0)=\;f\,(t,l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,f\,(t,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,f\,(t,l)=...=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\,f\,(t,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\,f\,(t,l)=0.$$

(1)-(5) чегаравий масаланинг нотривиал ечимини қуйидаги Фурье қатори кўринишида қидирамиз

$$U\,(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\,(t)\,\vartheta_n\,(x),$$

бу ерда $u_n\,(t)=\int_0^l U\,(t,x)\,\vartheta_n\,(x)\;d\,x,\qquad \vartheta_n\,(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin\frac{\pi\,n}{l}x,\quad n=1,2,\,...$

Биз $f\,(t,x)$ функцияни ҳам Фурье қаторига ёйилади деб оламиз

$$f\,(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\,(t)\,\vartheta_n\,(x),\quad f_n\,(t)=\int_0^l f\,(t,x)\,\vartheta_n\,(x)\,d\,x.$$

У ҳолда қуйидаги интеграл тенгламаларнинг саноқли системасига келамиз

$$u_n\,(t)=\varphi_{1,n}\,D_0+\varphi_{2,n}\,D_1(t)+D_{2,n}\,(t)+\int_0^T H_n\,(t,s)\,u_n\,(s)\,d\,s, \tag{6}$$

бу ерда $D_0=\dfrac{1}{1+T}$, $D_1(t)=\dfrac{t}{1+T}-\dfrac{2+T}{2(1+T)^2}$,

$$D_{2,n}\,(t)=h_n\,(t)-\frac{1}{1+T}\left[\int_0^T h_n\,(t)\,d\,t+h_n\,(T)\right]-\left(\frac{2+T}{2(1+T)^2}+\frac{t}{1+T}\right)\left[\int_0^T h_n'\,(t)\,t\,d\,t+h_n'\,(T)\right],$$

$$h_n(t)=\int_0^t \frac{f_n(s)(t-s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}ds,\ \lambda_n=\frac{\mu_n^{2k}}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}},\quad \mu_n^{4k}=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^{4k},$$

$$H_n(t,s)=\begin{cases} H_{1,n}(s), & t\le s\le T,\\ H_{2,n}(t,s), & 0\le s<t,\end{cases}\qquad H_{2,n}(t,s)=H_{1,n}(s)+\lambda_n\omega\cdot(t-s)w(s),$$

$$H_{1,n}(s)=-\frac{\lambda_n\omega}{1+T}\left[\frac{2(T-s)+(T-s)^2}{2}+\left(\frac{2+T}{2(1+T)}+s\right)(T-s+1)\right]w(s).$$

(6) формуладан фойдаланиб, (1)-(5) масаланинг формал ечимини Фурье қатори кўринишида ҳосил қиламиз:

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left[\varphi_{1,n}D_0+\varphi_{2,n}D_1(t)+D_{2,n}(t)+\int_0^T H_n(t,s)u_n(s)ds\right]. \tag{7}$$

Фараз қилайлик, (1) тенгламада $f(t,x)=\alpha(t)\beta(x)$ ўринли бўлсин. У ҳолда $D_{2,n}(t)$ қуйидаги кўринишга келади

$$D_{2,n}(t)=\beta_n\bar{D}_{2,n}(t)=\bar{h}_n(t)-\frac{1}{1+T}\left[\int_0^T\bar{h}_n(t)dt+\bar{h}_n(T)\right]-\left(\frac{2+T}{2(1+T)^2}+\frac{t}{1+T}\right)\times$$

$$\times\left[\int_0^T\bar{h}'_n(t)t\,dt+\bar{h}'_n(T)\right],\ \bar{h}_n(t)=\int_0^t\frac{\alpha(s)(t-s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}ds,\ \beta_n=\int_0^l\beta(x)\vartheta_n(x)dx.$$

Интеграл тенгламаларнинг саноқли системаси (6) ва Фурье қатори (7) ларни қуйидагича ёзамиз

$$u_n(t)=I(t;u_n)\equiv\varphi_{1,n}D_0+\varphi_{2,n}D_1(t)+\beta_n\bar{D}_{2,n}(t)+\int_0^T H_n(t,s)u_n(s)ds, \tag{8}$$

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left[\varphi_{1,n}D_0+\varphi_{2,n}D_1(t)+\beta_n\bar{D}_{2,n}(t)+\int_0^T H_n(t,s)u_n(s)ds\right]. \tag{9}$$

(8) интеграл тенгламларнинг саноқли системасидаги силлиқ функциялар $\bar{D}_{2,n}(t)$, $H_n(t,s)$ учун қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$C_1=\max\left\{\|\bar{D}_2(t)\|_{B_2(T)};\ \|\bar{D}''_2(t)\|_{B_2(T)}\right\}<\infty, \tag{10}$$

$$C_2=\max\left\{\int_0^T\|H(t,s)\|_{B_2(T)}ds;\ \int_0^T\|H''(t,s)\|_{B_2(T)}ds\right\}<\infty, \tag{11}$$

$$C_3=\max\left\{\int_0^T\|H_3(t,s)\|_{B_2(T)}ds;\ \int_0^T\|H''_3(t,s)\|_{B_2(T)}ds\right\}<\infty, \tag{12}$$

$$H_{3,n}(t,s)=n^{4k}H_n(t,s).$$

Силлиқлик шартлари. $\varphi_i(x),\ \beta(x)\in C^{4k}(\Omega_l),\ i=1,2$ функциялар Ω_l соҳада $4k+1$ марта бўлакли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.

1-теорема. $C_2<1$, (10)-(12) *ва силлиқлик шартлари бажарилсин. У ҳолда* $B_2(T)$ *фазода* (8) *саноқли система ягона ечимга эга. Ечимни қуйидаги итерацион жараён ёрдамида қуриш мумкин:*

$$u_n^0(t)=\varphi_{1,n}D_0+\varphi_{2,n}D_1(t)+\beta_n\bar{D}_{2,n}(t),\quad u_n^{p+1}(t)=I(t;u_n^p),\ p=0,1,2,...$$

2-Теорема. *Биринчи теорема шартлари бажарилсин. У ҳолда* $U(t,x)$ *номаълум функция* (9) *Фурье қаторидан аниқланади.* (9) *функция* (5) *синфга тегишли бўлади.*

Учинчи параграфда эса юқори жуфт тартибли хусусий ҳосилали Бенни-Люк типидаги интегро-дифференциал тенглама учун аралаш масаланинг классик ечимини излаймиз. $\Omega=\{(t,x)|\,0<t<T\,,\,0<x<l\}$ соҳада қуйидаги тенгламани қараймиз

$$D_{t,x}^{2+4k}U(t,x)=\nu\int_0^T K(t,s)U(s,x)\,ds+\alpha(t)\beta(x), \qquad (13)$$

бу ерда $D_{t,x}^{2+4k}=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(-1)^k\dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}+\dfrac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right]+(-1)^{k+1}\omega\cdot w(t)\dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}$,

$0\neq K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{p}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t),\,b_i(s)\in C[0;T]$. Бу ерда $a_i(t),\ i=\overline{1,p}$ функциялар системаси ва $b_i(s),\ i=\overline{1,p}$ функциялар системаси чизиқли боғлиқ эмас. $\beta(x)$ фукция учун Дирихле типидаги чегаравий шартлар бажарилади.

2-масаланинг қўйилиши. Шундай $U(t,x)$ функцияни топамизки, бу функция (13) интегро-дифференциал тенгламани ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$U(T,x)=\varphi_1(x),\qquad U_t(T,x)=\varphi_2(x),\quad 0\le x\le l,$$

$$u(t,0)=u(t,l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,l)=\ldots=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,l)=0,$$

$$U(t,x)\in C(\bar\Omega)\cap C_{t,x}^{2,2k}(\Omega)\cap C_{t,x}^{2+4k}(\Omega),$$

бу ерда $\varphi_i(x)\,(i=1,2)$ берилган силлиқ функциялар ва бу функциялар учун Дирихле типидаги чегаравий шартлар бажарилади. Ушбу масала аввалги параграфдаги масала сингари ўрганаилади.

Биринчи бобнинг тўртинчи параграфида берилган $\Omega=\{(t,x)|\,-T<t<T\,,\,0<x<l\}$ соҳада

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\partial}{\partial t}+(-1)^k\dfrac{\partial^{2k+1}}{\partial t\,\partial x^{2k}}+\dfrac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right]U(t,x)=a_1(t)b_1(x), & t>0,\\[2ex] \left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+(-1)^k\dfrac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\,\partial x^{2k}}+\omega^2\dfrac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right]U(t,x)=a_2(t)b_2(x), & t<0\end{cases} \qquad (14)$$

кўринишдаги аралаш типдаги юқори тартибли дифференциал тенгламани қараймиз, бу ерда $a_1(t)\in C[0;T]$, $a_2(t)\in C[-T;0]$, $b_i(x)\in C\left(\Omega_l\right)$, $i=1,2$, $\Omega_l\equiv[0;l]$.

3-масаланинг қўйилиши. Берилган Ω соҳада шундай номаълум функция $U(t,x)$ ни топамизки, бу функция ушбу

$$U(t,x)\in C(\bar\Omega)\cap C^1(\Omega)\cap C^{1,4k}(\Omega_+)\cap C^{2,4k}(\Omega_-)\cap C_{t,x}^{1+2k}(\Omega_+)\cap C_{t,x}^{2+2k}(\Omega_-) \qquad (15)$$

синфда (14) аралаш дифференциал тенгламани ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирсин:

$$\int_{-T}^{0} U(t,x)\,dt = \varphi(x),\ 0 \le x \le l, \qquad (16)$$

$$U(t,0) = U(t,l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,l) = ... = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{2k-2}}U(t,0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{2k-2}}U(t,l) = 0, \qquad (17)$$

бу ерда $\varphi(x)$ берилган силлиқ функция, $\Omega_- = \{(t,x)|\ -T < t < 0,\ 0 < x < l\}$, $\Omega_+ = \{(t,x)|\ 0 < t < T,\ 0 < x < l\}$, $\bar{\Omega} = \{(t,x)|\ -T \le t \le T,\ 0 \le x \le l\}$.

Бундан ташқари, $\varphi(x)$ функция учун Дирихле типидаги чегаравий шартлар бажарилсин деб оламиз.

(15)-(17) масала ечимининг тегишлилик синфидан келиб чиқадики, изланаётган ечимлар учун ушбу узлуксиз улаш шартлари бажарилади $U(0+0,x) = U(0-0,x)$, $U_t(0+0,x) = U_t(0-0,x)$. У ҳолда ечимларнинг қуйидаги ифодаларига эга бўламиз:

$$u_n(t,\omega) = \varphi_n M_{11,n}(t,\omega) + b_{1,n} M_{12,n}(t) + b_{2,n} M_{13,n}(t,\omega),\ t > 0, \qquad (18)$$

$$u_n(t,\omega) = \varphi_n M_{21,n}(t,\omega) + b_{2,n} M_{22,n}(t,\omega),\ t < 0, \qquad (19)$$

бу ерда $M_{11,n}(t,\omega) = \dfrac{\lambda_n^k \omega^2}{\sigma_{0,n}(\omega)}\theta_{1,n}(t),\ M_{12,n}(t) = h_{1,n}(t),\ \theta_{1,n}(t) = \exp\left\{-\lambda_n^{2k} t\right\}$,

$$\theta_{2,n}(t,\omega) = \cos\lambda_n^k \omega t - \frac{\lambda_n^k}{\omega}\sin\lambda_n^k \omega t,\ M_{13,n}(t,\omega) = -M_{11,n}(t,\omega)\int_{-T}^{0} h_{2,n}(t,\omega)\,dt,$$

$$M_{21,n}(t,\omega) = \frac{\lambda_n^k \omega^2}{\sigma_{0,n}(\omega)}\theta_{2,n}(t,\omega),\ M_{22,n}(t,\omega) = h_{2,n}(t,\omega) - M_{21,n}(t,\omega)\int_{-T}^{0} h_{2,n}(t,\omega)\,dt,$$

$$h_{1,n}(t) = \int_0^t \exp\left\{-\lambda_n^{2k}(t-s)\right\} a_1(s)\,ds,\ h_{2,n}(t) = \frac{1}{\lambda_n^k \omega}\int_0^t \sin\lambda_n^k \omega(t-s)\, a_2(s)\,ds,$$

Қуйидаги шарт бажарилиши талаб қилинади

$$\sigma_{0,n}(\omega) = \omega\sin\lambda_n^k \omega T + \lambda_n^k - \lambda_n^k \cos\lambda_n^k \omega T \ne 0,\ \lambda_n^{2k} = \frac{\mu_n^{4k}}{1+\mu_n^{2k}},\ \mu_n^{2k} = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^{2k}. \qquad (20)$$

ω параметрнинг $\left|\sigma_{0,n}(\omega)\right| > 0$ шартни бажарувчи регуляр қийматларини қараймиз. Ечимларнинг (18) ва (19) ифодаларини Фурье қаторига қўйиб, (15)-(17) масаланинг формал ечимини ҳосил қиламиз:

$$U(t,x,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x)\left[\varphi_n M_{11,n}(t,\omega) + b_{1,n} M_{12,n}(t) + b_{2,n} M_{13,n}(t,\omega)\right],\ t > 0, \qquad (21)$$

$$U(t,x,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x)\left[\varphi_n M_{21,n}(t,\omega) + b_{2,n} M_{22,n}(t,\omega)\right],\ t < 0. \qquad (22)$$

Силлиқлик шарти. $\varphi(x), b_i(x) \in C^{2k}(\Omega_l)$ функциялар Ω_l соҳада $2k+1$ марта бўлакли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.

1-лемма. (20) *шарт, силлиқлик шартлари, ҳамда қуйидаги шартлар*

$$C_1 = \max\left\{\sup_{n\in N}\max_{\substack{0\le t\le T\\ i=1,2,3}}\left|M_{1i,n}(t,\omega)\right|; \sup_{n\in N}\max_{\substack{0\le t\le T\\ i=1,2,3}}\left|M''_{1i,n}(t,\omega)\right|\right\} < \infty;$$

$$C_2 = \max\left\{\sup_{n\in N}\max_{\substack{0\le t\le T\\ j=1,2}}\left|M_{2j,n}(t,\omega)\right|; \sup_{n\in N}\max_{\substack{0\le t\le T\\ j=1,2}}\left|M''_{2j,n}(t,\omega)\right|\right\} < \infty$$

бажарилсин. У ҳолда ω *параметрнинг регуляр қийматлари учун* (21) *ва* (22) *қаторлар абсолют ва текис яқинлашади. Бундан ташқари, бу қаторлар* (15) *синфга тегишли бўлади.*

3-теорема. *Айтайлик, биринчи* 1-*лемма шартлари бажарилсин. У ҳолда* ω *параметрнинг регуляр қийматларида* (14)-(17) *чегаравий масала учун* Ω *соҳада берилган* (15) *синфга тегишли ягона ечим мавжуд.*

Иккинчи бобда икки ўзгарувчили фазовий соҳада дифференциал, интегро-дифференциал ва аралаш типдаги тенгламалар учун чизиқли тескари масалалар кўриб чиқилади.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида икки фазовий ўлчовли $\Omega = \{(t,x,y) \mid 0 < t < T,\ 0 < x, y < l\}$ соҳада қуйидаги дифференциал тенглама учун нолокал чегаравий масаланинг классик ечимини излаймиз:

$$D_{t,x,y}^{2+4k+4k}[U(t,x,y)] = \alpha(t)\,\beta(x,y), \qquad (23)$$

бу ерда

$$D_{t,x,y}^{2+4k+4k} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(-1)^k\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\right) + \left(\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}}\right)\right] + (-1)^{k+1}\omega\cdot w(t)\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\right),$$

$0 < w(t),\ \alpha(t) \in C(\Omega_T)$, $\Omega_T \equiv [0;T]$, $(x,y) \in \Omega_l^2 \equiv [0;l]^2$, $\beta(x,y) \in C(\Omega_l^2)$ эса қайта аниқланучи функция.

4-масаланинг қўйилиши. Шундай $\{U(t,x,y);\ \beta(x,y)\}$ функциялар жуфтлигини топамизки, бу жуфтликдаги биринчи функция (23) дифференциал тенгламани ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$U(T,x,y) + \int_0^T U(t,x,y)\,dt = \varphi_1(x,y), \quad 0 \le x, y \le l, \qquad (24)$$

$$U_t(T,x,y) + \int_0^T U_t(t,x,y)\,t\,dt = \varphi_2(x,y), \quad 0 \le x, y \le l, \qquad (25)$$

$$u(t,0,y) = u(t,l,y) = u(t,x,0) = u(t,x,l) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,l,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x,0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x,l) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,0,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,l,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,x,0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,x,l) =$$

$$= \ldots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,0,y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,l,y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,x,0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,x,l) =$$

$$=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}u(t,0,y)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}u(t,l,y)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}u(t,x,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}u(t,x,l)=0, \quad (26)$$

$$U(t,x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C_{t,x,y}^{2,2k,2k}(\Omega)\cap C_{t,x,y}^{2+4k+0}(\Omega)\cap C_{t,x,y}^{2+0+4k}(\Omega), \quad (27)$$

$$U(t_0,x,y)=\psi(x,y),\ \ 0<t_0<T, \quad 0\le x,y\le l, \quad (28)$$

бу ерда $\varphi_i(x,y)(i=1,2)$, $\psi(x,y)$ берилган силлиқ функциялар ва улар иккала аргументи бўйича ҳам Дирихле типидаги чегаравий шартларни қаноатлантиради. Шунингдек, $\beta(x,y)$ фукция учун ҳам иккала аргументи бўйича Дирихле типидаги чегаравий шарт бажарилади деб оламиз.

Берилган тенгламанинг нотривиал ечимларини қуйидаги Фурье қатори кўринишида қидирамиз

$$U(t,x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(t)\vartheta_{n,m}(x,y),\ \ u_{n,m}(t)=\int_0^l\int_0^l U(t,x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)\,dx\,dy,$$

бу ерда $\vartheta_{n,m}(x,y)=\frac{2}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}y,\ \ n,m=1,2,\ldots$ Биз $\beta(x,y)$ функцияни ҳам Фурье қаторига ёйилади деб оламиз

$$\beta(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\beta_{n,m}\vartheta_{n,m}(x,y),\ \ \beta_{n,m}=\int_0^l\int_0^l\beta(x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)\,dx\,dy.$$

У ҳолда берилган тенглама (23) дан қуйидаги интеграл тенгламаларнинг саноқли системасига келамиз

$$u_{n,m}(t)=\varphi_{1,n,m}D_0+\varphi_{2,n,m}D_1(t)+\beta_{n,m}D_{2,n,m}(t)+\int_0^T H_{n,m}(t,s)u_{n,m}(s)\,ds, \quad (29)$$

бу ерда $D_0=\frac{1}{1+T}$, $D_1(t)=\frac{t}{1+T}-\frac{2+T}{2(1+T)^2}$,

$$D_{2,n,m}(t)=h_{n,m}(t)-\frac{1}{1+T}\left[\int_0^T h_{n,m}(t)\,dt+h_{n,m}(T)\right]-\left(\frac{2+T}{2(1+T)^2}+\frac{t}{1+T}\right)\times$$

$$\times\left[\int_0^T h'_{n,m}(t)\,t\,dt+h'_{n,m}(T)\right],\ H_{n,m}(t,s)=\begin{cases}H_{1,n,m}(s), & t\le s\le T,\\ H_{2,n,m}(t,s), & 0\le s<t,\end{cases}$$

$$h_{n,m}(t)=\int_0^t\frac{\alpha(s)(t-s)}{1+\mu_{n,m}^{2k}+\mu_{n,m}^{4k}}\,ds,\ \lambda_{n,m}=\frac{\mu_{n,m}^{2k}}{1+\mu_{n,m}^{2k}+\mu_{n,m}^{4k}},\quad \mu_{n,m}^{2k}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k}\left(n^{2k}+m^{2k}\right),$$

$$H_{1,n,m}(s)=-\frac{\lambda_{n,m}\omega}{1+T}\left[\frac{2(T-s)+(T-s)^2}{2}+\left(\frac{2+T}{2(1+T)}+s\right)(T-s+1)\right]w(s),$$

$$H_{2,n,m}(t,s)=H_{1,n,m}(s)+\mu_{n,m}^{2k}\omega\cdot(t-s)\,w(s).$$

(29) дан фойдаланиб, ассосий номаълум функция учун Фурье қаторини оламиз

$$U(t,x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\vartheta_{n,m}(x,y)\Big[\varphi_{1,n,m}D_0+\varphi_{2,n,m}D_1(t)+$$

$$+\beta_{n,m}D_{2,n,m}(t)+\int_0^T H_{n,m}(t,s)u_{n,m}(s)\,ds\Big]. \quad (30)$$

(28) қўшимча шартдан фойдаланиб, (30) Фурье қаторидан қуйидаги саноқли системани ҳосил қиламиз

$$\beta_{n,m}=\psi_{n,m}\,\chi_{1,n,m}+\varphi_{1,n,m}\,\chi_{2,n,m}+\varphi_{2,n,m}\,\chi_{3,n,m}-\int\limits_0^T \bar{H}_{n,m}(t_0,s)u_{n,m}(s)\,ds, \qquad (31)$$

бу ерда $\chi_{1,n,m}=\dfrac{1}{D_{2,n,m}(t_0)},\ \chi_{2,n,m}=-\dfrac{D_0}{D_{2,n,m}(t_0)},\ \chi_{3,n,m}=-\dfrac{D_1(t_0)}{D_{2,n,m}(t_0)},$

$$D_{2,n,m}(t_0)\neq 0,\ \ \bar{H}_{n,m}(t_0,s)=\frac{H_{n,m}(t_0,s)}{D_{2,n,m}(t_0)},\ \ \psi_{n,m}=\int\limits_0^l\int\limits_0^l \psi(x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)\,dx\,dy.$$

(31) формуладан фойдаланиб, $\beta(x,y)$ функция учун қуйидаги Фурье қаторини ҳосил қиламиз

$$\beta(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\vartheta_{n,m}(x,y)\Big[\psi_{n,m}\,\chi_{1,n,m}+\varphi_{1,n,m}\,\chi_{2,n,m}+\varphi_{2,n,m}\,\chi_{3,n,m}-$$

$$-\int\limits_0^T \bar{H}_{n,m}(t_0,s)u_{n,m}(s)\,ds\Big]. \qquad (32)$$

(29) формулага (31) формулани қўйсак, қуйидаги интеграл тенгламаларнинг саноқли системасига келамиз

$$u_{n,m}(t)=I(t;u_{n,m})\equiv\psi_{n,m}E_{1,n,m}(t)+\varphi_{1,n,m}E_{2,n,m}(t)+\varphi_{2,n,m}E_{3,n,m}(t)+$$

$$+\int\limits_0^T H_{3,n,m}(t,s)u_{n,m}(s)\,ds, \qquad (33)$$

бу ерда $E_{1,n,m}(t)=\chi_{1,n,m}D_{2,n,m}(t),\ E_{2,n,m}(t)=D_0+\chi_{2,n,m}D_{2,n,m}(t),$

$$E_{3,n,m}(t)=D_1(t)+\chi_{3,n,m}D_{2,n,m}(t),\ H_{3,n,m}(t,s)=H_{n,m}(t,s)-D_{2,n,m}(t)\bar{H}_{n,m}(t_0,s).$$

(33) интеграл тенгламларнинг саноқли системасидаги силлиқ функциялар $E_{i,n,m}(t)\ (i=1,2,3),\ H_{1,n,m}(t,s)$ учун қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$C_1=\max\left\{\max_{i=1,2,3}\max_{0\le t\le T}\sup_{n,m}\left|E_{i,n,m}(t)\right|;\ \max_{i=1,2,3}\max_{0\le t\le T}\sup_{n,m}\left|E''_{i,n,m}(t)\right|\right\}<\infty, \qquad (34)$$

$$C_2=\max\left\{\int\limits_0^T\left\|H_3(t,s)\right\|_{B_2(T)}ds;\ \int\limits_0^T\left\|H''_3(t,s)\right\|_{B_2(T)}ds\right\}<\infty, \qquad (35)$$

$$C_3=\max\left\{\int\limits_0^T\left\|H_4(t,s)\right\|_{B_2(T)}ds;\ \int\limits_0^T\left\|H''_4(t_0,s)\right\|_{B_2(T)}ds\right\}<\infty, \qquad (36)$$

$$C_4=\max\left\{\int\limits_0^T\left\|H_5(t,s)\right\|_{B_2(T)}ds;\ \int\limits_0^T\left\|H''_5(t_0,s)\right\|_{B_2(T)}ds\right\}<\infty, \qquad (37)$$

бу ерда

$$H_{4,n,m}(t,s)=n^{4k}H_{3,n,m}(t,s),\ H_{5,n,m}(t,s)=m^{4k}H_{3,n,m}(t,s).$$

Силлиқлик шартлари. $\varphi_i(x,y),\ \psi(x,y),\ i=1,2$ функциялар Ω_l^2 соҳада $8k+2$ марта бўлакли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.

5-теорема. $C_2<1$ *ва* (34)-(37) *силлиқлик шартлари бажарилсин. У ҳолда* $B_2(T)$ *фазода* (33) *саноқли система ягона ечимга эга. Ечимни қуйидаги итерацион жараён ёрдамида топиш мумкин:*

$$\begin{cases} u_{n,m}^{0}(t) = \psi_{n,m} E_{1,n,m}(t) + \varphi_{1,n,m} E_{2,n,m}(t) + \varphi_{2,n,m} E_{3,n,m}(t), \\ u_{n,m}^{p+1}(t) = I_1(t; u_{n,m}^{p}), \;\; p = 0,1,2,... \end{cases}$$

6-теорема. *Бешинчи теореманинг барча шартлари бажарилсин. У ҳолда* (32) *қатор абсолют ва текис яқинлашади.*

Шундай қилиб (32) Фурье қатор кўринишидаги қайта аниқланувчи функция маълум. (33) формуладан фойдаланиб, (31) қаторни қуйидагича ёзиб оламиз

$$U(t,x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \vartheta_{n,m}(x,y) \Big[\psi_{n,m} E_{1,n,m}(t) + \varphi_{1,n,m} E_{2,n,m}(t) +$$

$$+ \varphi_{2,n,m} E_{3,n,m}(t) + \int_0^T H_{3,n,m}(t,s) u_{n,m}(s)\, d\, s \Big]. \tag{38}$$

7-теорема. *Бешинчи теореманинг барча шартлари бажарилсин. У ҳолда* $U(t,x,y)$ *функция* (38) *Фурье қатори кўринишда аниқланади. Шунингдек,* (38) *функция* (27) *синфга тегишли бўлади.*

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида эса худди юқоридаги параграфга ўхшаш икки фазовий ўлчовли $\Omega = \{(t,x,y) \,|\, 0 < t < T,\ 0 < x, y < l\}$ соҳада қуйидаги айниган ядроли интегро-дифференциал тенглама учун тескари аралаш масаланинг классик ечими ўрганилади:

$$D_{t,x,y}^{2+4k+4k} U(t,x,y) = \nu \int_0^T K(t,s) U(s,x,y)\, d\, s + \alpha(t) \beta(x,y), \tag{39}$$

бу ерда

$$D_{t,x,y}^{2+4k+4k} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(-1)^k \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} \right) + \left(\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}} \right) \right] + (-1)^{k+1} \omega \cdot w(t) \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} \right),$$

$0 \neq K(t,s) = \sum_{i=1}^{p} a_i(t) b_i(s)$, $\quad a_i(t), b_i(s) \in C[0;T]$. Бу ерда $a_i(t),\ i = \overline{1,p}$ функциялар системаси ва $b_i(s),\ i = \overline{1,p}$ функциялар системаси чизиқли боғлиқ эмас. $\beta(x,y)$ қайта аниқланувчи фукция учун иккала аргументи бўйича ҳам Дирихле типидаги чегаравий шартлар бажарилади деб оламиз.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида $\Omega = \{(t,x,y) \,|\, -T < t < T,\ 0 < x, y < l\}$ соҳада ушбу

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (-1)^k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} \right) + \left(\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}} \right) \right] U(t,x,y) = \\ = a_1(t) b_1(x,y), \quad t > 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (-1)^k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} \right) + \omega^2 \left(\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}} \right) \right] U(t,x,y) = \\ = a_2(t) b_2(x,y), \quad t < 0, \end{cases} \tag{40}$$

аралаш типдаги юқори тартибли дифференциал тенгламани қараймиз, бу ерда $a_1(t)\in C\,[0;T],\ a_2(t)\in C\,[-T;0],\qquad b_i\,(x)\in C\left(\Omega_l^2\right)$ қайта аниқланувчи функциялар, $i=1,2.$

Учинчи боб фазовий кўп ўзгарувчили дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламлалар учун чизиқсиз тескари масалаларга бағишланган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида кўп ўлчовли $\Omega=\{(t,x)|\,0<t<T\,,\,0<x<l\}$ соҳада қуйидаги юқори жуфт тартибли дифференциал тенглама учун нолокал тескари масаланинг классик ечимини излаймиз

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{i=1}^{m}\left((-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}}+\frac{\partial^{4k}}{\partial x_i^{4k}}\right)+(-1)^{k+1}\omega\cdot w(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}}\right]U\,(t,x)=$$

$$=\alpha\,(t)\left[\beta(x)+f\left(x,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta(y,\beta(y))\,d\,y\right)\right],\tag{41}$$

$0<w(t)\in C\ (\Omega_T),\ 0\neq\alpha\,(t)\in C\ (\Omega_T)\qquad f\,(t,\beta)\in C_x^{4k}(\Omega_l^m\times R),\ \int\limits_{\Omega_l^m}\left|\Theta(x,\beta(x))\right|dx<\infty,$

$\Theta(x,\beta)\in C(\Omega_l^m\times R),\quad x\in\Omega_l^m\equiv[0;l]^m,\ \ \beta(x)\in C(\Omega_l^m)$ қайта аниқланувчи функция. $\beta(x),\ f\,(x,\cdot)$ функциялар учун Дирихле типидаги чегаравий шартлар бажарилади деб оламиз.

7-масаланинг қўйилиши. Шундай $\{U\,(t,x);\beta(x)\}$ функциялар жуфтлигини топамизки, бу жуфтликдаги биринчи функция (41) дифференциал тенгламани ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$U\,(T,x)+\int\limits_0^T U\,(t,x)\,d\,t=\varphi_1(x),\quad 0\le x\le l\,,\tag{42}$$

$$U_t\,(T,x)+\int\limits_0^T U_t\,(t,x)\,t\,d\,t=\varphi_2\,(x),\quad 0\le x\le l,\tag{43}$$

$$U\,(t,0,x_2,...,x_m)=U\,(t,l,x_2,...,x_m)=U\,(t,x_1,0,x_3,...,x_m)=U\,(t,x_1,l,x_3,...,x_m)=$$
$$=...=U\,(t,x_1,x_2,...,x_{m-1},0)=U\,(t,x_1,x_2,...,x_{m-1},l)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}U\,(t,0,x_2,...,x_m)=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}U\,(t,l,x_2,...,x_m)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}U\,(t,x_1,0,x_3,...,x_m)=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}U\,(t,x_1,l,x_3,...,x_m)=$$
$$=...=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}U\,(t,x_1,x_2,...,x_{m-1},0)=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}U\,(t,x_1,x_2,...,x_{m-1},l)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}U\,(t,x_1,0,x_3,...,x_m)=\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}U\,(t,x_1,l,x_3,...,x_m)=$$
$$=...=\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}U\,(t,x_1,x_2,...,x_{m-1},0)=\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}U\,(t,x_1,x_2,...,x_{m-1},l)=$$

$$=\ldots=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_1^{4k-2}}U(t,0,x_2,\ldots,x_m)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_1^{4k-2}}U(t,l,x_2,\ldots,x_m)=$$

$$=\ldots=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_1^{4k-2}}U(t,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_1^{4k-2}}U(t,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},l)=$$

$$=\ldots=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_m^{4k-2}}U(t,0,x_2,\ldots,x_m)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_m^{4k-2}}U(t,l,x_2,\ldots,x_m)=$$

$$=\ldots=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_m^{4k-2}}U(t,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_m^{4k-2}}U(t,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},l)=0, \qquad (44)$$

$$U(t,x)\in C(\bar{\Omega})\cap C_{t,x}^{2,2k}(\Omega)\cap$$

$$\cap C_{t,x_1,x_2,\ldots,x_m}^{2+4k+0+\ldots+0}(\Omega)\cap C_{t,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m}^{2+0+4k+0+\ldots+0}(\Omega)\cap\ldots\cap C_{t,x_1,\ldots,x_{m-1},x_m}^{2+0+\ldots+0+4k}(\Omega), \quad (45)$$

$$U(t_0,x)=\psi(x),\quad 0<t_0<T,\quad 0\le x\le l, \qquad (46)$$

бу ерда $\varphi_i(x)(i=1,2),\psi(x)$ берилган силлиқ функциялар ва бу функциялар учун Дирихле типидаги чегаравий шартлар бажарилади. (41) тенгламанинг нотривиал ечимларини қуйидаги Фурье қатори кўринишида қидирамиз

$$U(t,x)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x),\ u_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\int_{\Omega_l^m}U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx,$$

бу ерда $\int_{\Omega_l^m}U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\int_0^l\ldots\int_0^l U(t,x)\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx_1\cdot\ldots\cdot dx_m$,

$$\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)=\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\sin\frac{\pi n_1}{l}x_1\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\pi n_m}{l}x_m.$$

Биз қуйидаги функцияларни ҳам Фурье қаторига ёйилади деб оламиз

$$\beta(x)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\beta_{n_1,\ldots,n_m}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x),\ f(x,\cdot)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x),$$

бу ерда $\beta_{n_1,\ldots,n_m}=\int_{\Omega_l^m}\beta(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx,\ f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)=\int_{\Omega_l^m}f(x,\cdot)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx.$

У ҳолда берилган тенгламадан қуйидаги интеграл тенгламаларнинг саноқли системасини ҳосил қиламиз

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t)=I_1(t;u_{n_1,\ldots,n_m},\beta_{n_1,\ldots,n_m})\equiv\varphi_{1,n_1,\ldots,n_m}D_0+\varphi_{2,n_1,\ldots,n_m}D_1(t)+$$

$$+\left(\beta_{n_1,\ldots,n_m}+f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)\right)D_{2,n_1,\ldots,n_m}(t)+\int_0^T H_{n_1,\ldots,n_m}(t,s)u_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds, \quad (47)$$

бу ерда

$$f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)=\int_{\Omega_l^m}f\left(x,\int_{\Omega_l^m}\Theta\left(y,\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\beta_{n_1,\ldots,n_m}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)\right)dy\right)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx,$$

$$D_0=\frac{1}{1+T},\ D_1(t)=\frac{t}{1+T}-\frac{2+T}{2(1+T)^2},$$

$$D_{2,n_1,\dots,n_m}(t)=h_{n_1,\dots,n_m}(t)-\frac{1}{1+T}\left[\int_0^T h_{n_1,\dots,n_m}(t)\,d\,t+h_{n_1,\dots,n_m}(T)\right]-\left(\frac{2+T}{2(1+T)^2}+\frac{t}{1+T}\right)\times$$

$$\times\left[\int_0^T h'_{n_1,\dots,n_m}(t)\,t\,d\,t+h'_{n_1,\dots,n_m}(T)\right],\ H_{n_1,\dots,n_m}(t,s)=\begin{cases}H_{1,n_1,\dots,n_m}(s), & t\le s\le T,\\ H_{2,n_1,\dots,n_m}(t,s), & 0\le s<t,\end{cases}$$

$$H_{1,n_1,\dots,n_m}(s)=-\frac{\lambda_{n_1,\dots,n_m}}{1+T}\left[\frac{2(T-s)+(T-s)^2}{2}+\left(\frac{2+T}{2(1+T)}+s\right)(T-s+1)\right]\omega(s),$$

$$H_{2,n_1,\dots,n_m}(t,s)=H_{1,n_1,\dots,n_m}(s)+\lambda_{n_1,\dots,n_m}(t-s)\,\omega(s),\ h_{n_1,\dots,n_m}(t)=\int_0^t\frac{\alpha(s)(t-s)\,d\,s}{1+\mu^{2k}_{n_1,\dots,n_m}+\mu^{4k}_{n_1,\dots,n_m}},$$

$$\lambda_{n_1,\dots,n_m}=\frac{\mu^{2k}_{n_1,\dots,n_m}}{1+\mu^{2k}_{n_1,\dots,n_m}+\mu^{4k}_{n_1,\dots,n_m}},\quad \mu^{2k}_{n_1,\dots,n_m}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k}\left(n_1^{2k}+n_2^{2k}+\ldots+n_m^{2k}\right).$$

(47) формуладан фойдаланиб, асосий номаълум функция учун қуйидаги қаторни ҳосил қиламиз

$$U(t,x)=\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\Big[\varphi_{1,n_1,\dots,n_m}D_0+\varphi_{2,n_1,\dots,n_m}D_1(t)+$$

$$+\Big(\beta_{n_1,\dots,n_m}+f_{n_1,\dots,n_m}(\cdot)\Big)D_{2,n_1,\dots,n_m}(t)+\int_0^T H_{n_1,\dots,n_m}(t,s)\,u_{n_1,\dots,n_m}(s)\,d\,s\Big].\qquad(48)$$

(48) Фурье қатори (41)-(45) тўғри масалалар формал ечимидир. (46) қўшимча шартдан фойдаланиб, (48) Фурье қаторини инобатга олган ҳолда қайта аниқланувчи функциянинг Фурье коэффиценти учун қуйидаги чизиқсиз саноқли системани ҳосил қиламиз

$$\beta_{n_1,\dots,n_m}=I_2(t;u_{n_1,\dots,n_m},\beta_{n_1,\dots,n_m})\equiv\psi_{n_1,\dots,n_m}\chi_{1,n_1,\dots,n_m}+\varphi_{1,n_1,\dots,n_m}\chi_{2,n_1,\dots,n_m}+$$

$$+\varphi_{2,n_1,\dots,n_m}\chi_{3,n_1,\dots,n_m}-f_{n_1,\dots,n_m}(\cdot)-\int_0^T\bar H_{n_1,\dots,n_m}(t_0,s)\,u_{n_1,\dots,n_m}(s)\,d\,s,\qquad(49)$$

бу ерда

$$\chi_{1,n_1,\dots,n_m}=\frac{1}{D_{2,n_1,\dots,n_m}(t_0)},\ \chi_{2,n_1,\dots,n_m}=-\frac{D_0}{D_{2,n_1,\dots,n_m}(t_0)},\ \chi_{3,n_1,\dots,n_m}=-\frac{D_1(t_0)}{D_{2,n_1,\dots,n_m}(t_0)},$$

$$D_{2,n_1,\dots,n_m}(t_0)\ne 0,\ \ \bar H_{n_1,\dots,n_m}(t_0,s)=\frac{H_{n_1,\dots,n_m}(t_0,s)}{D_{2,n_1,\dots,n_m}(t_0)},\ \psi_{n_1,\dots,n_m}=\int_{\Omega_l^m}\psi(x)\,\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\,d\,x.$$

(49) формулани $\beta(x)$ нинг Фурье қаторига қўйсак, қуйдагини ҳосил қиламиз

$$\beta(x)=\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\Big[\psi_{n_1,\dots,n_m}\chi_{1,n_1,\dots,n_m}+\varphi_{1,n_1,\dots,n_m}\chi_{2,n_1,\dots,n_m}+$$

$$+\varphi_{2,n_1,\dots,n_m}\chi_{3,n_1,\dots,n_m}-f_{n_1,\dots,n_m}(\cdot)-\int_0^T\bar H_{n_1,\dots,n_m}(t_0,s)\,u_{n_1,\dots,n_m}(s)\,d\,s\Big].\qquad(50)$$

(47) интеграл тенгламларнинг саноқли системасидаги силлиқ функциялар $D_{2,n_1,n_2,\dots n_m}(t)$, $\overline{H}_{n_1,n_2,\dots n_m}(t,s)$ учун қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$C_1 = \max\left\{ \| D_2(t) \|_{B_2(T)} ; \| D''_2(t) \|_{B_2(T)} \right\} < \infty, \tag{51}$$

$$C_2 = \max\begin{cases} \left\{ \int_0^T \| H(t,s) \|_{B_2(T)} ds ; \int_0^T \| H''(t,s) \|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \\ \left\{ \int_0^T \| \bar{H}(t,s) \|_{B_2(T)} ds ; \int_0^T \| \bar{H}''(t,s) \|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \end{cases} \tag{52}$$

$$C_{i+2} = \max\left\{ \int_0^T \| H_i(t_0,s) \|_{B_2(T)} ds ; \int_0^T \| H''_i(t_0,s) \|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \tag{53}$$

бу ерда $H_{i+2,n_1,\dots,n_m}(t,s) = n_i^{4k} H_{n_1,\dots,n_m}(t,s), \ i = \overline{1,m}.$

Силлиқлик шартлари. $\varphi_i(x), \psi(x), \beta(x) \in C^{4k}(\Omega_l^m), \ f(x,\cdot) \in C_x^{4k}(\Omega_l^m \times R)$, $i = 1, 2$ функциялар Ω_l^m соҳада $(4k+1)m$ марта бўлакли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.

8-теорема. (51)-(53) *шартлар, силлиқлик шартлари ҳамда қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1) $\max\left\{ \| \chi_1 \|_{\ell_2} ; \| \chi_2 \|_{\ell_2} ; \| \chi_3 \|_{\ell_2} \right\} < \infty;$

2) $\left| f(x,\gamma_1) - f(x,\gamma_2) \right| \le M_0(x) \left| \gamma_1 - \gamma_2 \right|; \ 0 < \left\| M_0(x) \right\|_{L_2\left(\Omega_l^m\right)} < \infty;$

3) $\left| \Theta(x,\beta_1) - \Theta(x,\beta_2) \right| \le \Theta_0(x) \left| \beta_1 - \beta_2 \right|, \ 0 < \left\| \Theta_0(x) \right\|_{L_2\left(\Omega_l^m\right)} < \infty;$

4) $\rho < 1,$ *где* $\rho = \max\left\{ 2C_1 \left(1 + \left\| M_0(x) \right\|_{L_2\left(\Omega_l^m\right)} \left\| \Theta_0(x) \right\|_{L_2\left(\Omega_l^m\right)} \right); C_2 + C_3 \right\}.$

У ҳолда тегишли $B_2(T)$ *ва* ℓ_2 *фазоларда* (47) *ва* (49) *саноқли системаларнинг ҳар бири ягона ечимга эга. Бу ечимларни қуйидаги итерацион жараён ёрдамида топиш мумкин:*

$$\begin{cases} u^0_{n_1,\dots,n_m}(t) = \varphi_{1,n_1,\dots,n_m} D_0 + \varphi_{2,n_1,\dots,n_m} D_1(t), \\ u^{p+1}_{n_1,\dots,n_m}(t) = I_1(t; u^p_{n_1,\dots,n_m}, \beta^p_{n_1,\dots,n_m}), \ p = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta^0_{n_1,\dots,n_m} = \psi_{n_1,\dots,n_m} \chi_{1,n_1,\dots,n_m} + \varphi_{1,n_1,\dots,n_m} \chi_{2,n_1,\dots,n_m} + \varphi_{2,n_1,\dots,n_m} \chi_{3,n_1,\dots,n_m}, \\ \beta^{p+1}_{n_1,\dots,n_m} = I_2(t; u^p_{n_1,\dots,n_m}, \beta^p_{n_1,\dots,n_m}), \ p = 0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

9-теорема. *Саккизинчи теореманинг барча шартлари бажарилсин. У ҳолда* (50) *қатор абсолют ва текис яқинлашади.*

10-теорема. *Саккизинчи теореманинг барча шартлари бажарилсин. У ҳолда* $U(t,x)$ *функция* (48) *Фурье қатори кўринишида аниқланади. Шунингдек, бу функция* (45) *синфга тегишли бўлади.*

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида кўп ўлчовли $\Omega = \{(t,x) | \ 0 < t < T, \ 0 < x < l\}$ соҳада аввалги параграфдагига ўхшаш қуйидаги юқори жуфт тартибли Бенни-Люк типидаги интегро-дифференциал тенглама учун чизиқсиз тескари чегаравий масалани қараймиз

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{i=1}^{m}\left((-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}}+\frac{\partial^{4k}}{\partial x_i^{4k}}\right)+(-1)^{k+1}\omega\cdot w(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}}\right]U(t,x)=$$

$$=\nu\int_0^T K(t,s)U(s,x)\,ds+\alpha(t)\left[\beta(x)+f\left(x,\int_{\Omega_l^m}\Theta(y,\beta(y))\,dy\right)\right],$$

бу ерда $0<w(t),\ 0\neq\alpha(t)\in C\,(\Omega_T)$, $f(x,\beta)\in C_x^{4k}(\Omega_l^m\times R)$, $\int_{\Omega_l^m}\left|\Theta(x,\beta(x))\right|dx<\infty$, $\Theta(x,\beta)\in C(\Omega_l^m\times R)$, $\Omega_T\equiv[0;T]$, $x\in\Omega_l^m\equiv[0;l]^m$, $\beta(x)\in C\left(\Omega_l^m\right)$ қайта аниқланувчи функция, $0\neq K(t,s)=\sum_{i=1}^{p}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t),b_i(s)\in C[0;T]$. Бу ерда $a_i(t)$, $i=\overline{1,p}$ функциялар системаси ва $b_i(s)$, $i=\overline{1,p}$ функциялар системаси чизиқли боғлиқ эмас. $\beta(x)$, $f(x,.)$ функциялар учун барча аргументлари бўйича Дирихле типидаги чегаравий шартлар бажарилади.

ХУЛОСА

Диссертацияда қуйидаги асосий натижаларга эришилди:

1. Параметрнинг регуляр қийматларида битта, иккита ва кўп фазовий ўзгарувчили юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилиши учун етарли бўлган шартлар аниқланган.
2. Параметрларнинг регуляр қийматларида битта, иккита ва кўп фазовий ўзгарувчили айниган ядроли юқори тартибли хусусий ҳосилали интегро-дифференциал тенгламалар учун аралаш масалаларнинг бир қийматли ечилиши учун етарли бўлган шартлар аниқланган.
3. Параметрнинг регуляр қийматларида битта ва иккита фазовий ўзгарувчили псевдопараболик-псевдогиперболик типдаги юқори тартибли аралаш дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилиши учун етарли бўлган шартлар топилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В. И. РОМАНОВСКОГО**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

РАХМОНОВ ФАРХОД ДУСТМУРОДОВИЧ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2022.3.PhD/FM305.

Диссертация выполнена в национальном университете Узбекистана имени М. Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Юлдашев Турсун Камалдинович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Тахиров Жозил Останович** доктор физико-математических наук, профессор
	Кадиркулов Бахтиёр Жалилович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Международный Казахско-Турецкий университет имени Ходжа Ахмеда Ясави (Казахстан)**

Защита диссертации состоится «01» ноября 2022 года в 17:30 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В. И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В. И. Романовского (зарегистрирована за № 146). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «14» октября 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от «14» октября 2022 года).

У. А. Розиков
Председатель Научного совета
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж. К. Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник

А. А. Азамов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской (PhD) диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. В современном математическом исследовании краевые задачи встречаются при решении задач гидродинамики. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению прямых и обратных задач для уравнений, не имеющих аналогов в классической математической физике. Теория обратных задач возникла прежде всего при решении задач астрономии, квантовой теории рассеяния, геофизики и т.д. Нелокальные краевые задачи возникают при математическом моделировании влагопереноса, при изучении задач математической биологии, задач управления и других.

Сейчас в мировом масштабе стало актуальным исследование дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с заданными интегральными условиями. Во многих ведущих научных центрах мира проводятся исследования нелокальных краевых и обратных задач для линейных и нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений; изучаются существование и единственность решений. Большой интерес представляют: построение решений исходя из значений заданных параметров, в случае однородных и неоднородных уравнений построение явного вида решений, а в случае квазилинейных и нелинейных уравнений приведение такого уравнения к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению и применение различных итерационных схем.

Проведение исследований на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Дифференциальные уравнения и математическая физика, теория динамических систем» обозначены как основные цели и направления деятельности исследователей[1]. Следует подчеркивать, что интегро-дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка с вырожденным ядром и действительными параметрами при нелокальных интегральных условиях до сих пор остаются мало изученными.

Исследования, проводимые в рамках данной диссертационной работы, соответствуют решению задач обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. После известной работы Ильина В.А. от 1960 года появились большое количество работ, посвященные изучению линейных дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов. В частности, здесь можно отметить монографию Байкузиева К., где изучены основные смешанные задачи для вырождающихся гиперболических и параболических уравнений. Дубинский Ю.А. изучает квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка. Ионкин Н.И. изучает краевую задачу теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.

Чандиров Г.И. в своей докторской диссертации обосновал применения метода рядов Фурье к решению смешанной задачи для нелинейных гиперболических и параболических уравнений. Шабадиков К.Х. в своей кандидатской диссертации методом рядов Фурье изучал смешанную задачу для нелинейных дифференциальных уравнений псевдогиперболического и псевдопараболического типов с малым параметром при смешанных производных. Юлдашев Т.К. в своих работах изучал смешанные задачи для линейных и нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. Изучению нелинейных дифференциальных уравнений математической физики и механики также посвящены работы Полянина А.Д., Зайцева В.Ф. и В.Ф., Журова А.И.

Сегодня встречается большое количество работ математиков, где изучаются разного вида нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Здесь можно отметить работы: Ашурова Р.Р., Умарова С., Зикирова О.С., Холикова Д.К., Тахирова Ж.О., Тураева Р.Н. Важные результаты получены при изучении дифференциальных уравнений эллиптического и смешанного типов. Здесь следует отметить работы: Алимова Ш.А., Апакова Ю.П., Ашурова Р.Р., Бердышева А.С., Кадиркулова Б.Ж., Джураева Т.Д., Мамажанова М., Сопуева А., Исломова Б.И., Абдуллаева О.Х., Умаровой Г.Б., Мирсабурова М., Хайруллаева И.Н., Бобомуродова У.Э., Чориевой С.Т., Худжаева Ж., Рузиева М.Х., Салахитдинова М.С., Хасанова А., Уринова А.К., Каримова К.Т., Маманазарова А.О., Нишоновой Ш.Т. и Юлдашевой А.В.

Теория обратных задач как новый и важный раздел теории дифференциальных уравнений в частных производных развивается очень быстрыми темпами. По обратным задачам следует отметить работы: Алимова Ш.А., Ашурова Р.Р., Салахитдинова М.С., Бердышева А.С., Джамалова С.З., Исломова Б.И., Убайдуллаева У.Ш. и многих других.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Узбекско-Израильского совместного факультета Национального университета Узбекистана.

Целью исследования является исследования однозначной разрешимости и конструктивное построение решений нелокальных прямых и обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

установить достаточные условия однозначной разрешимости нелокальных прямых и обратных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с одной, двумя и многими пространственными переменными; построение решений этих задач в виде рядов Фурье;

установить при регулярных значениях параметров достаточные условия однозначной разрешимости смешанных прямых и обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с вырожденным ядром и одной, двумя и многими пространственными переменными; построение решений задач в виде рядов Фурье;

установить достаточные условия однозначной классической разрешимости прямой и обратной краевой задач для нелинейных дифференциальных уравнений смешанного типа высокого порядка с одной и двумя пространственными переменными.

Объект исследования. Дифференциальные, смешанные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка.

Предмет исследования. Смешанные, краевые и обратные задачи. Ряды Фурье, теория дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, теория интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с вырожденным ядром.

Методы исследования. При выводе результатов диссертации используются идеи и методы теории функций, функционального анализа, обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, интегральных неравенств и уравнений математической физики.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказана однозначная разрешимость прямой и обратной нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с одной, двумя и многими пространственными переменными;

для регулярных значений параметров доказана однозначная разрешимость смешанных прямых и обратных смешанных задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с вырожденным ядром и одной, двумя и многими пространственными переменными;

доказана однозначная разрешимость прямых и обратных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений смешанного типа в частных производных высокого порядка с одной и двумя пространственными переменными.

Практические результаты исследования состоят в том, что для линейных и нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с вырожденным ядром предложена методика построения решений итерационного процесса, сходящийся к решению исходных задач.

Достоверность результатов исследования. Достоверность и обоснованность полученных результатов исследования обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в развитии качественной теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка.

Практическое значение результатов, полученных в диссертационной работе, определяется тем, что полученные результаты могут найти применение при решении ряда прикладных задач теории автоматического регулирования, нелинейной механики и математической физики.

Внедрение результатов исследования. На основе результатов, полученных для нелокальных задач для дифференциальных уравнений с дифференциальными уравнениями высших порядков:

по разрешимости смешанных и краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка были использованы при построении решений нелокальных краевых и смешанных задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка при выполнении международном проекта AP09259137 «Разработка методов решения многоточечных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с инволютивными преобразованиями» (Справка международного Казахско-Турецкого университета имени Ходжа Ахмеда Ясави за номером № 04/1674 от 17 июня 2022г., Казахстан). Использование научного результата позволило им установить достаточные условия однозначной разрешимости многоточечных краевых задач для однородных дифференциальных уравнений в частных производных с инволютивными преобразованиями.

методика исследования смешанных и краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных были использованы при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений типа Штурма-Луивулля при выполнении научно-исследовательских работ по проекту ОТ-Ф-4-(36+32) «Разработка новых методов решения задач математической физики и оптимального управления. Неклассические начальные и спектральные задачи и их приложения для уравнений в частных производных нечетного порядка» (Справка Национального университета Узбекистана за номером № 04/11-4124 от 13 июля 2022 года). Использование научного результата позволило им построить решения краевых задач для линейных дифференциальных уравнений Штурма-Луивулля.

Апробация результатов исследования. Обсуждались на семи международных научных конференциях.

Публикация результатов исследования. Материалы диссертационного исследования опубликованы в 7 научных статьях и в 7 тезисах международных конференций. Все статьи опубликованы в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора наук. Четыре статьи опубликованы в зарубежных журналах, входящих в базу Scopus.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 117 страниц.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Юлдашеву Т. К. за постановку задач и за полезные советы при подготовке данной диссертационной работы. Автор считает благодарность своему наставнику Ш. Г. Касимову за поддержку этого диссертационного исследования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования по приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, анализирована степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, раскрыт теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации состоит из четырех параграфов. **В первом параграфе** приведены вспомогательные материалы, которые будут использовании в последующих параграфах и главах.

В множестве $\left\{ a(t) = (a_i(t)) \middle| \, a_i(t) \in C(\Omega_T) \, , \, i = 1, 2, ... \right\}$ определяются операции сложения двух элементов и умножение элемента на скаляр покоординатно. Данное множество является линейным векторным пространством. Рассматриваются те элементы этого векторного пространства, которые удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \max\limits_{t \in \Omega_T} \left| a_i(t) \right|^2 < \infty.$ Это множество обозначается через $B_2(T)$ и снабжается нормой $\| a(t) \|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \max\limits_{t \in \Omega_T} \left| a_i(t) \right|^2}$.

Пространство $B_2(T)$ является банаховым пространством.

Если для заданной гладкой функции $\varphi(x)$ имеют место

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_i(0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_i(l) = ... = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \varphi_i(0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \varphi_i(l) = 0,$$

то говорят, что для этой функции выполняются граничные условия типа Дирихле.

Во втором параграфе в одномерной пространственной области $\Omega = \{(t,x) | \, 0 < t < T, \, 0 < x < l\}$ исследуется однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для дифференциальных уравнений типа Бенни-Люк высокого четного порядка

$$D_{t,x}^{2+4k}[U(t,x)] = f(t,x) \tag{1}$$

где $D_{t,x}^{2+4k} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(-1)^k \dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \dfrac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right] + (-1)^{k+1}\omega \cdot w(t)\dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}$, k - заданное положительное целое число, $0 < \omega -$ параметр, $0 < w(t) \in C\,(\Omega_T)$, $f(t,x) \in C_{t,x}^{2+4k}(\Omega_T \times \Omega_l)$, $\Omega_T \equiv [0;T]$, $x \in \Omega_l \equiv [0;l]$.

Постановка задачи 1. Найдем функцию $U(t,x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), следующим условиям

$$U(T,x) + \int_0^T U(t,x)\,dt = \varphi_1(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$U_t(T,x) + \int_0^T U_t(t,x)\,t\,dt = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,l) = \ldots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,l) = 0, \tag{4}$$

$$U(t,x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{t,x}^{2,2k}(\Omega) \cap C_{t,x}^{2+4k}(\Omega), \tag{5}$$

где $\varphi_i(x)\,(i = 1,2)$ заданные гладкие функции и для них имеют место граничные условия типа Дирихле

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_i(0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_i(l) = \ldots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi_i(0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi_i(l) = 0.$$

Мы также предполагаем, что для заданной функции $f(t,x)$ верны по второму аргументу следующие граничные условия типа Дирихле

$$f(t,0) = f(t,l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,l) = \ldots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}f(t,0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}f(t,l) = 0.$$

Нетривиальные решения краевой задачи (1)-(5) ищутся в виде ряда Фурье

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\vartheta_n(x),$$

где $u_n(t) = \int_0^l U(t,x)\,\vartheta_n(x)\,dx, \quad \vartheta_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi n}{l}x, \quad n = 1, 2, \ldots$

Предполагаем, что следующая функция тоже разлагается в ряд Фурье

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\vartheta_n(x), \quad f_n(t) = \int_0^l f(t,x)\,\vartheta_n(x)\,dx.$$

Тогда придем к следующей счетной системе интегральных уравнений

$$u_n(t) = \varphi_{1,n}D_0 + \varphi_{2,n}D_1(t) + D_{2,n}(t) + \int_0^T H_n(t,s)\,u_n(s)\,ds, \tag{6}$$

где $D_0=\dfrac{1}{1+T}$, $D_1(t)=\dfrac{t}{1+T}-\dfrac{2+T}{2(1+T)^2}$,

$$D_{2,n}(t)=h_n(t)-\frac{1}{1+T}\left[\int_0^T h_n(t)\,d\,t+h_n(T)\right]-\left(\frac{2+T}{2(1+T)^2}+\frac{t}{1+T}\right)\times$$

$$\times\left[\int_0^T h'_n(t)\,t\,d\,t+h'_n(T)\right],\ h_n(t)=\int_0^t\frac{f_n(s)(t-s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}d\,s,$$

$$\lambda_n=\frac{\mu_n^{2k}}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}},\quad \mu_n^{4k}=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^{4k},\ H_n(t,s)=\begin{cases}H_{1,n}(s), & t\le s\le T,\\ H_{2,n}(t,s), & 0\le s<t,\end{cases}$$

$$H_{1,n}(s)=-\frac{\lambda_n\omega}{1+T}\left[\frac{2(T-s)+(T-s)^2}{2}+\left(\frac{2+T}{2(1+T)}+s\right)(T-s+1)\right]w(s),$$

$$H_{2,n}(t,s)=H_{1,n}(s)+\lambda_n\omega\cdot(t-s)\,w(s).$$

Подставляя представление коэффициентов Фурье (6) неизвестной функции в ряд Фурье, получаем формальное решение краевой задачи (1)-(5)

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left[\varphi_{1,n}D_0+\varphi_{2,n}D_1(t)+D_{2,n}(t)+\int_0^T H_n(t,s)u_n(s)\,d\,s\right].\qquad(7)$$

Предположим, что $f(t,x)=\alpha(t)\beta(x)$ в уравнении (1). Тогда функция $D_{2,n}(t)$ принимает вид

$$D_{2,n}(t)=\beta_n\bar{D}_{2,n}(t)=\bar{h}_n(t)-\frac{1}{1+T}\left[\int_0^T\bar{h}_n(t)\,d\,t+\bar{h}_n(T)\right]-\left(\frac{2+T}{2(1+T)^2}+\frac{t}{1+T}\right)\times$$

$$\times\left[\int_0^T\bar{h}'_n(t)\,t\,d\,t+\bar{h}'_n(T)\right],\ \bar{h}_n(t)=\int_0^t\frac{\alpha(s)(t-s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}d\,s,\ \beta_n=\int_0^l\beta(x)\vartheta_n(x)\,d\,x.$$

Счетная система интегральных уравнений (6) и ряд Фурье (7) примут соответствующий вид

$$u_n(t)=I(t;u_n)\equiv\varphi_{1,n}D_0+\varphi_{2,n}D_1(t)+\beta_n\bar{D}_{2,n}(t)+\int_0^T H_n(t,s)u_n(s)\,d\,s,\qquad(8)$$

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left[\varphi_{1,n}D_0+\varphi_{2,n}D_1(t)+\beta_n\bar{D}_{2,n}(t)+\int_0^T H_n(t,s)u_n(s)\,d\,s\right].\qquad(9)$$

Предполагается, что для гладких функций $\bar{D}_{2,n}(t)$, $H_n(t,s)$ из (8) справедливы следующие условия:

$$C_1=\max\left\{\|\bar{D}_2(t)\|_{B_2(T)};\ \|\bar{D}''_2(t)\|_{B_2(T)}\right\}<\infty,\qquad(10)$$

$$C_2=\max\left\{\int_0^T\|H(t,s)\|_{B_2(T)}ds;\ \int_0^T\|H''(t,s)\|_{B_2(T)}ds\right\}<\infty,\qquad(11)$$

$$C_3=\max\left\{\int_0^T\|H_3(t,s)\|_{B_2(T)}ds;\ \int_0^T\|H''_3(t,s)\|_{B_2(T)}ds\right\}<\infty,\qquad(12)$$

$$H_{3,n}(t,s)=n^{4k}H_n(t,s).$$

Условия гладкости. Пусть для функций $\varphi_i(x),\ \beta(x)\in C^{4k}(\Omega_l),\ i=1,2$

в области Ω_l существуют кусочно-непрерывные производные порядка $4k+1$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия гладкости,* (10)-(12*) и условия:* $C_2 < 1$. *Тогда счетная система* (8) *однозначно разрешима в пространстве* $B_2(T)$. *При этом искомое решение может быть найдено из следующего итерационного процесса:*

$$u_n^0(t) = \varphi_{1,n} D_0 + \varphi_{2,n} D_1(t) + \beta_n \bar{D}_{2,n}(t),\ u_n^{p+1}(t) = I(t; u_n^p),\ \ p = 0,1,2,...$$

Теорема 2. *Пусть выполняется условия теоремы* 1. *Тогда неизвестная функция* $U(t,x)$ *определяется с помощью ряда Фурье* (9). *При этом функция* (9) *принадлежит классу* (5).

В третьем параграфе в прямоугольной области $\Omega = \{(t,x) |\, 0 < t < T,\, 0 < x < l\}$ аналогично исследуется классическая разрешимость краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Бенни-Люк

$$D_{t,x}^{2+4k} U(t,x) = \nu \int_0^T K(t,s) U(s,x)\, d\,s + \alpha(t)\beta(x), \tag{13}$$

где $D_{t,x}^{2+4k} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(-1)^k \dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \dfrac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right] + (-1)^{k+1} \omega \cdot w(t) \dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}$, $0 < w(t),\ \alpha(t) \in C\ (\Omega_T)$,

$0 \neq K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i(t) b_i(s)$, $\quad a_i(t),\, b_i(s) \in C[0;T]$. Здесь предполагается, что система функций $a_i(t)$, $i = \overline{1,p}$ и система функций $b_i(s)$, $i = \overline{1,p}$ являются линейно независимыми. Мы предполагаем, что для заданной функции $\beta(x)$ верны граничные условия типа Дирихле.

Постановка задачи 2. Найдем функцию $U(t,x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (13), следующим условиям

$$U(T,x) = \varphi_1(x), \qquad U_t(T,x) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le l,$$

$$u(t,0) = u(t,l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,l) = ... = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} u(t,0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} u(t,l) = 0,$$

$$U(t,x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{t,x}^{2,2k}(\Omega) \cap C_{t,x}^{2+4k}(\Omega),$$

где $\varphi_i(x)\,(i = 1,2)$ заданные гладкие функции и имеют место граничные условия типа Дирихле.

В четвертом параграфе первой главы в области $\Omega = \{(t,x) |\, -T < t < T,\, 0 < x < l\}$ рассматривается смешанное дифференциальное уравнение вида

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} + (-1)^k \dfrac{\partial^{2k+1}}{\partial t\, \partial x^{2k}} + \dfrac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right] U(t,x) = a_1(t) b_1(x), \qquad t > 0, \\ \left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + (-1)^k \dfrac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\, \partial x^{2k}} + \omega^2 \dfrac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right] U(t,x) = a_2(t) b_2(x), \quad t < 0 \end{cases} \tag{14}$$

где $a_1(t) \in C[0;T]$, $\ a_2(t) \in C[-T;0]$, $\ b_i(x) \in C\left(\Omega_l\right)$, $i = 1,2$.

Постановка задачи 3. Найти в области Ω неизвестную функцию $U(t,x)$ из класса:

$$U(t,x)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1\left(\Omega\right)\cap C^{1,4k}(\Omega_+)\cap C^{2,4k}(\Omega_-)\cap C_{t,x}^{1+2k}(\Omega_+)\cap C_{t,x}^{2+2k}(\Omega_-), \quad (15)$$

удовлетворяющую смешанным уравнениям (14), следующим граничным условиям

$$\int\limits_{-T}^{0} U(t,x)\,d\,t=\varphi(x),\ 0\le x\le l, \quad (16)$$

$$U(t,0)=U(t,l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,l)=...=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{2k-2}}U(t,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{2k-2}}U(t,l)=0, \quad (17)$$

где $\varphi(x)$ - заданная гладкая функция, $\Omega_-=\{(t,x)|\ -T<t<0,\ 0<x<l\}$, $\Omega_+=\{(t,x)|\ 0<t<T,\ 0<x<l\}$, $\bar{\Omega}=\{(t,x)|\ -T\le t\le T,\ 0\le x\le l\}$.
Для функции $\varphi(x)$ выполняются граничные условия типа Дирихле.

Из класса принадлежности (15) решения задачи (14)-(17) следует, что выполняются условия непрерывного склеивания: $U(0+0,x)=U(0-0,x)$, $U_t(0+0,x)=U_t(0-0,x)$. Тогда из уравнения (14) приходим к представлениям

$$u_n(t,\omega)=\varphi_n M_{11,n}(t,\omega)+b_{1,n}M_{12,n}(t)+b_{2,n}M_{13,n}(t,\omega),\ t>0, \quad (18)$$

$$u_n(t,\omega)=\varphi_n M_{21,n}(t,\omega)+b_{2,n}M_{22,n}(t,\omega),\ t<0, \quad (19)$$

где $M_{11,n}(t,\omega)=\dfrac{\lambda_n^k\omega^2}{\sigma_{0,n}(\omega)}\theta_{1,n}(t),\ M_{12,n}(t)=h_{1,n}(t),\ \theta_{1,n}(t)=\exp\left\{-\lambda_n^{2k}t\right\}$,

$$\theta_{2,n}(t,\omega)=\cos\lambda_n^k\omega t-\frac{\lambda_n^k}{\omega}\sin\lambda_n^k\omega t,\ M_{13,n}(t,\omega)=-M_{11,n}(t,\omega)\int\limits_{-T}^{0}h_{2,n}(t,\omega)\,d\,t,$$

$$M_{21,n}(t,\omega)=\frac{\lambda_n^k\omega^2}{\sigma_{0,n}(\omega)}\theta_{2,n}(t,\omega),\ M_{22,n}(t,\omega)=h_{2,n}(t,\omega)-M_{21,n}(t,\omega)\int\limits_{-T}^{0}h_{2,n}(t,\omega)\,d\,t,$$

$$h_{1,n}(t)=\int\limits_0^t\exp\left\{-\lambda_n^{2k}(t-s)\right\}a_1(s)\,d\,s,\ h_{2,n}(t)=\frac{1}{\lambda_n^k\omega}\int\limits_0^t\sin\lambda_n^k\omega(t-s)a_2(s)\,d\,s.$$

Пусть выполняется условие

$$\sigma_{0,n}(\omega)=\omega\sin\lambda_n^k\omega T+\lambda_n^k-\lambda_n^k\cos\lambda_n^k\omega T\ne 0,\ \lambda_n^{2k}=\frac{\mu_n^{4k}}{1+\mu_n^{2k}},\ \mu_n^{2k}=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^{2k}. \quad (20)$$

Рассмотрим регулярные значения параметра ω, для которых выполняется условие: $|\sigma_{0,n}(\omega)|>0$ Подставим представления (18) и (19) в ряд Фурье и получим формальное решение задачи (14)-(17)

$$U(t,x,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left[\varphi_n M_{11,n}(t,\omega)+b_{1,n}M_{12,n}(t)+b_{2,n}M_{13,n}(t,\omega)\right],\ t>0, \quad (21)$$

$$U(t,x,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left[\varphi_n M_{21,n}(t,\omega)+b_{2,n}M_{22,n}(t,\omega)\right],\ t<0. \quad (22)$$

Условия гладкости. Мы предполагаем, что функции $\varphi(x), b_i(x) \in C^{2k}(\Omega_l)$ в области Ω_l имеют кусочно-непрерывные производные до порядка $2k+1$.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (20), *условия гладкости и*

$$C_1 = \max\left\{ \sup_{n\in N} \max_{\substack{0\le t\le T \\ i=1,2,3}} \left| M_{1i,n}(t,\omega) \right|; \sup_{n\in N} \max_{\substack{0\le t\le T \\ i=1,2,3}} \left| M''_{1i,n}(t,\omega) \right| \right\} < \infty;$$

$$C_2 = \max\left\{ \sup_{n\in N} \max_{\substack{0\le t\le T \\ j=1,2}} \left| M_{2j,n}(t,\omega) \right|; \sup_{n\in N} \max_{\substack{0\le t\le T \\ j=1,2}} \left| M''_{2j,n}(t,\omega) \right| \right\} < \infty.$$

Тогда для регулярных значений параметра ω *ряды* (21) *и* (22) *сходятся абсолютно. При этом функции* (21) *и* (22) *принадлежат классу* (15).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда при регулярных значениях параметра* ω *для краевой задачи* (14)-(17) *существует единственное классическое решение, принадлежащее классу* (15) *в области* Ω.

Во второй главе рассматриваются линейные обратные задачи для дифференциальных, интегро-дифференциальных и смешанных уравнений с двумя пространственными переменными.

В первом параграфе второй главы в двумерной области $\Omega = \{(t,x,y) \,|\, 0<t<T,\ 0<x,y<l\}$ исследуется классическая разрешимость нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения

$$D_{t,x,y}^{2+4k+4k}[U(t,x,y)] = \alpha(t)\,\beta(x,y), \tag{23}$$

где

$$D_{t,x,y}^{2+4k+4k} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(-1)^k\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\right) + \left(\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}}\right)\right] + (-1)^{k+1}\omega\cdot w(t)\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\right),$$

$0 < w(t),\ \alpha(t) \in C(\Omega_T)$ $\quad (x,y) \in \Omega_l^2 \equiv [0;l]^2,$ $\quad \beta(x,y) \in C(\Omega_l^2)$ – функция переопределения.

Постановка задачи 4. Найдем пару функций $\{U(t,x,y);\ \beta(x,y)\}$, первая из которых удовлетворяет дифференциальному уравнению (23), следующим условиям

$$U(T,x,y) + \int_0^T U(t,x,y)\,dt = \varphi_1(x,y), \quad 0 \le x,y \le l, \tag{24}$$

$$U_t(T,x,y) + \int_0^T U_t(t,x,y)\,t\,dt = \varphi_2(x,y), \quad 0 \le x,y \le l, \tag{25}$$

$$u(t,0,y) = u(t,l,y) = u(t,x,0) = u(t,x,l) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,l,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x,0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x,l) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,0,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,l,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,x,0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,x,l) =$$

$$=\ldots=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,0,y)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,l,y)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,x,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,x,l)=$$

$$=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}u(t,0,y)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}u(t,l,y)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}u(t,x,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}u(t,x,l)=0, \quad (26)$$

$$U(t,x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^{2,2k,2k}_{t,x,y}(\Omega)\cap C^{2+4k+0}_{t,x,y}(\Omega)\cap C^{2+0+4k}_{t,x,y}(\Omega), \qquad (27)$$

где $\varphi_i(x,y)(i=1,2)$, $\psi(x,y)$ – заданные гладкие функции и имеют место граничные условия типа Дирихле. Мы также предполагаем, что для функции $\beta(x,y)$ верны граничные условия типа Дирихле по обоим аргументам.

Нетривиальные решения прямой задачи разыскиваются в виде ряда Фурье

$$U(t,x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(t)\vartheta_{n,m}(x,y),$$

где $u_{n,m}(t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^l U(t,x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)\,d\,x\,d\,y$, $\vartheta_{n,m}(x,y)=\dfrac{2}{l}\sin\dfrac{\pi n}{l}x\sin\dfrac{\pi m}{l}y.$

Предполагаем, что функция $\beta(x,y)$ тоже разлагается в ряд Фурье

$$\beta(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\beta_{n,m}\,\vartheta_{n,m}(x,y),\quad \beta_{n,m}=\int\limits_0^l\int\limits_0^l\beta(x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)\,d\,x\,d\,y.$$

Тогда получим счетную систему интегральных уравнений

$$u_{n,m}(t)=\varphi_{1,n,m}D_0+\varphi_{2,n,m}D_1(t)+\beta_{n,m}D_{2,n,m}(t)+\int\limits_0^T H_{n,m}(t,s)u_{n,m}(s)\,d\,s, \qquad (29)$$

где $D_0=\dfrac{1}{1+T}$, $D_1(t)=\dfrac{t}{1+T}-\dfrac{2+T}{2(1+T)^2}$,

$$D_{2,n,m}(t)=h_{n,m}(t)-\frac{1}{1+T}\left[\int\limits_0^T h_{n,m}(t)\,d\,t+h_{n,m}(T)\right]-\left(\frac{2+T}{2(1+T)^2}+\frac{t}{1+T}\right)\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^T h'_{n,m}(t)\,t\,d\,t+h'_{n,m}(T)\right],\quad H_{n,m}(t,s)=\begin{cases}H_{1,n,m}(s), & t\le s\le T,\\ H_{2,n,m}(t,s), & 0\le s<t,\end{cases}$$

$$h_{n,m}(t)=\int\limits_0^t\frac{\alpha(s)(t-s)}{1+\mu^{2k}_{n,m}+\mu^{4k}_{n,m}}\,d\,s,\ \lambda_{n,m}=\frac{\mu^{2k}_{n,m}}{1+\mu^{2k}_{n,m}+\mu^{4k}_{n,m}},\quad \mu^{2k}_{n,m}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k}\left(n^{2k}+m^{2k}\right),$$

$$H_{1,n,m}(s)=-\frac{\lambda_{n,m}\omega}{1+T}\left[\frac{2(T-s)+(T-s)^2}{2}+\left(\frac{2+T}{2(1+T)}+s\right)(T-s+1)\right]w(s),$$

$$H_{2,n,m}(t,s)=H_{1,n,m}(s)+\mu^{2k}_{n,m}\omega\cdot(t-s)\,w(s).$$

Подставляя представление коэффициентов Фурье (29) главной неизвестной функции в ряд Фурье, получаем

$U(t,x,y)=$

$$=\sum_{n,m=1}^{\infty}\vartheta_{n,m}(x,y)\left[\varphi_{1,n,m}D_0+\varphi_{2,n,m}D_1(t)++\beta_{n,m}D_{2,n,m}(t)+\int\limits_0^T H_{n,m}(t,s)u_{n,m}(s)\,d\,s\right].(30)$$

Используя дополнительное условие (28), из ряда Фурье (30) получаем следующую нелинейную счетную систему для коэффициентов Фурье функции переопределения

$$\beta_{n,m} = \psi_{n,m}\,\chi_{1,n,m} + \varphi_{1,n,m}\,\chi_{2,n,m} + \varphi_{2,n,m}\,\chi_{3,n,m} - \int_0^T \bar{H}_{n,m}(t_0,s)\,u_{n,m}(s)\,d\,s, \qquad (31)$$

где $\chi_{1,n,m} = \dfrac{1}{D_{2,n,m}(t_0)}, \; \chi_{2,n,m} = -\dfrac{D_0}{D_{2,n,m}(t_0)}, \; \chi_{3,n,m} = -\dfrac{D_1(t_0)}{D_{2,n,m}(t_0)},$

$$D_{2,n,m}(t_0) \neq 0, \;\; \bar{H}_{n,m}(t_0,s) = \frac{H_{n,m}(t_0,s)}{D_{2,n,m}(t_0)}, \;\; \psi_{n,m} = \int_0^l\int_0^l \psi(x,y)\,\vartheta_{n,m}(x,y)\,d\,x\,d\,y.$$

Подставляя представление (31) в ряд Фурье, получаем

$$\beta(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \vartheta_{n,m}(x,y)\Big[\psi_{n,m}\,\chi_{1,n,m} + \varphi_{1,n,m}\,\chi_{2,n,m} + \varphi_{2,n,m}\,\chi_{3,n,m} -$$

$$-\int_0^T \bar{H}_{n,m}(t_0,s)\,u_{n,m}(s)\,d\,s\Big]. \qquad (32)$$

Подставляя представление (31) в (29), получаем счетную систему интегральных уравнений (ССИУ)

$$u_{n,m}(t) = I(t;u_{n,m}) \equiv \psi_{n,m}\,E_{1,n,m}(t) + \varphi_{1,n,m}\,E_{2,n,m}(t) + \varphi_{2,n,m}\,E_{3,n,m}(t) +$$

$$+\int_0^T H_{3,n,m}(t,s)\,u_{n,m}(s)\,d\,s, \qquad (33)$$

где $E_{1,n,m}(t) = \chi_{1,n,m} D_{2,n,m}(t), \; E_{2,n,m}(t) = D_0 + \chi_{2,n,m} D_{2,n,m}(t),$

$$E_{3,n,m}(t) = D_1(t) + \chi_{3,n,m} D_{2,n,m}(t), \; H_{3,n,m}(t,s) = H_{n,m}(t,s) - D_{2,n,m}(t)\bar{H}_{n,m}(t_0,s).$$

Предполагается, что для гладких функций $E_{i,n,m}(t)\; (i=1,2,3), \; H_{1,n,m}(t,s)$ справедливы следующие условия:

$$C_1 = \max\left\{\max_{i=1,2,3}\max_{0\le t\le T}\sup_{n,m}\left|E_{i,n,m}(t)\right|;\; \max_{i=1,2,3}\max_{0\le t\le T}\sup_{n,m}\left|E''_{i,n,m}(t)\right|\right\} < \infty, \qquad (34)$$

$$C_2 = \max\left\{\int_0^T \|H_3(t,s)\|_{B_2(T)}\,ds;\; \int_0^T \|H''_3(t,s)\|_{B_2(T)}\,ds\right\} < \infty, \qquad (35)$$

$$C_3 = \max\left\{\int_0^T \|H_4(t,s)\|_{B_2(T)}\,ds;\; \int_0^T \|H''_4(t_0,s)\|_{B_2(T)}\,ds\right\} < \infty, \qquad (36)$$

$$C_4 = \max\left\{\int_0^T \|H_5(t,s)\|_{B_2(T)}\,ds;\; \int_0^T \|H''_5(t_0,s)\|_{B_2(T)}\,ds\right\} < \infty, \qquad (37)$$

где $H_{4,n,m}(t,s) = n^{4k} H_{3,n,m}(t,s), \; H_{5,n,m}(t,s) = m^{4k} H_{3,n,m}(t,s).$

Условия гладкости. Пусть для функций $\varphi_i(x,y), \psi(x,y), \;\; i=1,2$ в области Ω_l^2 существуют кусочно-непрерывные производные порядка $8k+2$.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия гладкости,* (34)-(37) *и условие:* $C_2 < 1$. *Тогда счетная система* (33) *однозначно разрешима в пространстве* $B_2(T)$. *При этом искомое решение может быть найдено из следующего итерационного процесса:*

$$u_{n,m}^{0}(t)=\psi_{n,m}E_{1,n,m}(t)+\varphi_{1,n,m}E_{2,n,m}(t)+\varphi_{2,n,m}E_{3,n,m}(t),\ u_{n,m}^{p+1}(t)=I_1(t;u_{n,m}^{p}),\ p=0,1,2,...$$

Теорема 6. *Предположим, что все условия теоремы* 5 *выполняются. Тогда ряд* (32) *сходится абсолютно и равномерно.*

Мы определили функцию переопределения в виде ряда Фурье (32). Подставляя представление (31) в ряд (30), получаем

$$U(t,x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\vartheta_{n,m}(x,y)\Big[\psi_{n,m}E_{1,n,m}(t)+\varphi_{1,n,m}E_{2,n,m}(t)+$$
$$+\varphi_{2,n,m}E_{3,n,m}(t)+\int_0^T H_{3,n,m}(t,s)u_{n,m}(s)\,ds\Big]. \qquad (38)$$

Теорема 7. *Пусть все условия теоремы* 5 *выполняются. Тогда неизвестная функция* $U(t,x,y)$ *определяется с помощью ряда* (38). *При этом эта функция (38) принадлежит классу* (27).

Во втором параграфе в двумерной области $\Omega=\{(t,x,y)|\,0<t<T,\,0<x,y<l\}$ аналогично исследуется классическая разрешимость обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Бенни-Люк высокого четного порядка с вырожденным ядром

$$D_{t,x,y}^{2+4k+4k}U(t,x,y)=\nu\int_0^T K(t,s)U(s,x,y)\,ds+\alpha(t)\beta(x,y), \qquad (39)$$

где

$$D_{t,x,y}^{2+4k+4k}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(-1)^k\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\right)+\left(\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}+\frac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}}\right)\right]+(-1)^{k+1}\omega\cdot w(t)\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\right),$$

$0<w(t),\ \alpha(t)\in C\,(\Omega_T),\ \ \Omega_l^2\equiv[0;l]^2,\ \ \beta(x,y)\in C\left(\Omega_l^2\right)$ – функция переопределения, $0\neq K(t,s)=\sum_{i=1}^{p}a_i(t)b_i(s)$, $\ a_i(t),b_i(s)\in C[0;T]$. Здесь предполагается, что система функций $a_i(t),\ i=\overline{1,p}$ и система функций $b_i(s),\ i=\overline{1,p}$ являются линейно независимыми. Мы предполагаем, что для функции переопределения верны граничные условия типа Дирихле по обоим аргументам.

В третьем параграфе в области $\Omega=\{(t,x,y)|-T<t<T,\,0<x,y<l\}$ рассматривается смешанное дифференциальное уравнение вида

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\partial}{\partial t}+(-1)^k\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}+\dfrac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\right)+\left(\dfrac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}+\dfrac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}}\right)\right]U(t,x,y)=\\ =a_1(t)b_1(x,y),\quad t>0,\\ \left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+(-1)^k\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}+\dfrac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\right)+\omega^2\left(\dfrac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}+\dfrac{\partial^{4k}}{\partial y^{4k}}\right)\right]U(t,x,y)=\\ =a_2(t)b_2(x,y),\quad t<0,\end{cases} \qquad (40)$$

$a_1(t)\in C\,[0;T]$, $\ a_2(t)\in C\,[-T;0]$, функции $b_i(x,y)\in C\left(\Omega_l^2\right)$ являются функциями переопределения, $i=1,2$.

Третья глава посвящена нелинейным обратным задачам для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с многими пространственными переменными.

В первом параграфе третьей главы в многомерной области $\Omega = \{(t, x) | \, 0 < t < T, \, 0 < x < l\}$ исследуется классическая разрешимость нелокальной обратной краевой задачи для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого четного порядка

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^{m} \left((-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial x_i^{4k}} \right) + (-1)^{k+1} \omega \cdot w(t) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}} \right] U(t, x) =$$

$$= \alpha(t) \left[\beta(x) + f\left(x, \int_{\Omega_l^m} \Theta(y, \beta(y)) \, d\, y \right) \right], \tag{41}$$

где $0 < w(t) \in C\,(\Omega_T), \; 0 \neq \alpha(t) \in C\,(\Omega_T)$ $\quad f(x, \beta) \in C_x^{4k}(\Omega_l^m \times R),$

$\int_{\Omega_l^m} \left| \Theta(x, \beta(x)) \right| dx < \infty, \; \Theta(x, \beta) \in C(\Omega_l^m \times R), \; x \in \Omega_l^m \equiv [0; l]^m, \; \beta(x) \in C(\Omega_l^m)$ – функция переопределения. Мы предполагаем, что для функций $\beta(x), \; f(x, \cdot)$ имеют место граничные условия типа Дирихле по пространственным аргументам.

Постановка задачи 7. Найдем пару функций $\{U(t, x); \, \beta(x)\}$, первая из которых удовлетворяет дифференциальному уравнению (41), следующим условиям

$$U(T, x) + \int_0^T U(t, x) \, d\, t = \varphi_1(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{42}$$

$$U_t(T, x) + \int_0^T U_t(t, x) \, t \, d\, t = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{43}$$

$$U(t, 0, x_2, ..., x_m) = U(t, l, x_2, ..., x_m) = U(t, x_1, 0, x_3, ..., x_m) = U(t, x_1, l, x_3, ..., x_m) =$$

$$= ... = U(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 0) = U(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, l) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} U(t, 0, x_2, ..., x_m) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} U(t, l, x_2, ..., x_m) =$$

$$= ... = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} U(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} U(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, l) =$$

$$= ... = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} U(t, 0, x_2, ..., x_m) = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} U(t, l, x_2, ..., x_m) =$$

$$= ... = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} U(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} U(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, l) =$$

$$= ... = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_1^{4k-2}} U(t, 0, x_2, ..., x_m) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_1^{4k-2}} U(t, l, x_2, ..., x_m) =$$

$$= ... = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_1^{4k-2}} U(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, 0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_1^{4k-2}} U(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, l) =$$

$$= \ldots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_m^{4k-2}} U(t,0,x_2,\ldots,x_m) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_m^{4k-2}} U(t,l,x_2,\ldots,x_m) =$$

$$= \ldots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_m^{4k-2}} U(t,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x_m^{4k-2}} U(t,x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},l) = 0, \qquad (44)$$

$$U(t,x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,2k}_{t,x}(\Omega) \cap$$

$$\cap C^{2+4k+0+\ldots+0}_{t,x_1,x_2,\ldots,x_m}(\Omega) \cap C^{2+0+4k+0+\ldots+0}_{t,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m}(\Omega) \cap \ldots \cap C^{2+0+\ldots+0+4k}_{t,x_1,\ldots,x_{m-1},x_m}(\Omega), \quad (45)$$

$$U(t_0,x) = \psi(x), \ \ 0 < t_0 < T, \quad 0 \le x \le l, \qquad (46)$$

где $\varphi_i(x)(i=1,2)$, $\psi(x)-$ заданные гладкие функции и имеют место граничные условия типа Дирихле.

Нетривиальные решения задачи прямой задачи ищутся в виде ряда Фурье

$$U(t,x) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u_{n_1,\ldots,n_m}(t)\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x),$$

где $u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = \int\limits_{\Omega_l^m} U(t,x)\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx, \quad n_1,\ldots,n_m = 1,2,\ldots,$

$$\int\limits_{\Omega_l^m} U(t,x)\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx = \int\limits_0^l \ldots \int\limits_0^l U(t,x)\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_m,$$

$$\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \sin\frac{\pi n_1}{l} x_1 \cdot \ldots \cdot \sin\frac{\pi n_m}{l} x_m.$$

Предполагаем, что следующие функции тоже разлагаются в ряд Фурье

$$\beta(x) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \beta_{n_1,\ldots,n_m}\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \ \ f(x,\cdot) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x),$$

где $\beta_{n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \beta(x)\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx,\ \ f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot) = \int\limits_{\Omega_l^m} f(x,\cdot)\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx.$

Тогда получим счетную систему

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t) = I_1(t; u_{n_1,\ldots,n_m}, \beta_{n_1,\ldots,n_m}) \equiv \varphi_{1,n_1,\ldots,n_m} D_0 + \varphi_{2,n_1,\ldots,n_m} D_1(t) +$$

$$+ \left(\beta_{n_1,\ldots,n_m} + f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot)\right) D_{2,n_1,\ldots,n_m}(t) + \int\limits_0^T H_{n_1,\ldots,n_m}(t,s)\,u_{n_1,\ldots,n_m}(s)\,ds, \qquad (47)$$

где $f_{n_1,\ldots,n_m}(\cdot) = \int\limits_{\Omega_l^m} f\left(x, \int\limits_{\Omega_l^m} \Theta\left(y, \sum\limits_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \beta_{n_1,\ldots,n_m}\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)\right) dy\right) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx,$

$$D_0 = \frac{1}{1+T}, \ \ D_1(t) = \frac{t}{1+T} - \frac{2+T}{2(1+T)^2},$$

$$D_{2,n_1,\ldots,n_m}(t) = h_{n_1,\ldots,n_m}(t) - \frac{1}{1+T}\left[\int\limits_0^T h_{n_1,\ldots,n_m}(t)\,dt + h_{n_1,\ldots,n_m}(T)\right] - \left(\frac{2+T}{2(1+T)^2} + \frac{t}{1+T}\right) \times$$

$$\times \left[\int\limits_0^T h'_{n_1,\ldots,n_m}(t)\,t\,dt + h'_{n_1,\ldots,n_m}(T)\right], \ H_{n_1,\ldots,n_m}(t,s) = \begin{cases} H_{1,n_1,\ldots,n_m}(s), & t \le s \le T, \\ H_{2,n_1,\ldots,n_m}(t,s), & 0 \le s < t, \end{cases}$$

$$H_{1,n_1,\dots,n_m}(s) = -\frac{\lambda_{n_1,\dots,n_m}}{1+T}\left[\frac{2(T-s)+(T-s)^2}{2} + \left(\frac{2+T}{2(1+T)}+s\right)(T-s+1)\right]\omega(s),$$

$$H_{2,n_1,\dots,n_m}(t,s) = H_{1,n_1,\dots,n_m}(s) + \lambda_{n_1,\dots,n_m}(t-s)\,\omega(s),$$

$$h_{n_1,\dots,n_m}(t) = \int_0^t \frac{\alpha(s)(t-s)\,d\,s}{1+\mu^{2k}_{n_1,\dots,n_m}+\mu^{4k}_{n_1,\dots,n_m}},$$

$$\lambda_{n_1,\dots,n_m} = \frac{\mu^{2k}_{n_1,\dots,n_m}}{1+\mu^{2k}_{n_1,\dots,n_m}+\mu^{4k}_{n_1,\dots,n_m}}, \quad \mu^{2k}_{n_1,\dots,n_m} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k}\left(n_1^{2k}+n_2^{2k}+\dots+n_m^{2k}\right).$$

Подставляя представление коэффициентов Фурье (47) главной неизвестной функции в ряд Фурье, получаем

$$U(t,x) = \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\Big[\varphi_{1,n_1,\dots,n_m} D_0 + \varphi_{2,n_1,\dots,n_m} D_1(t) +$$

$$+\Big(\beta_{n_1,\dots,n_m} + f_{n_1,\dots,n_m}(\cdot)\Big) D_{2,n_1,\dots,n_m}(t) + \int_0^T H_{n_1,\dots,n_m}(t,s)\,u_{n_1,\dots,n_m}(s)\,d\,s\Big]. \qquad (48)$$

Ряд Фурье (48) является формальным решением прямой задачи (41)-(45).

Используя дополнительное условие (46), из ряда Фурье (48) получаем следующую нелинейную счетную систему для коэффициентов Фурье функции переопределения

$$\beta_{n_1,\dots,n_m} = I_2(t; u_{n_1,\dots,n_m}, \beta_{n_1,\dots,n_m}) \equiv \psi_{n_1,\dots,n_m}\chi_{1,n_1,\dots,n_m} + \varphi_{1,n_1,\dots,n_m}\chi_{2,n_1,\dots,n_m} +$$

$$+\varphi_{2,n_1,\dots,n_m}\chi_{3,n_1,\dots,n_m} - f_{n_1,\dots,n_m}(\cdot) - \int_0^T \bar{H}_{n_1,\dots,n_m}(t_0,s)\,u_{n_1,\dots,n_m}(s)\,d\,s, \qquad (49)$$

где $f_{n_1,\dots,n_m}(\cdot) = \int_{\Omega_l^m} f\left(x, \int_{\Omega_l^m} \Theta\left(y, \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \beta_{n_1,\dots,n_m}\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(y)\right)d\,y\right)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\,d\,x,$

$$\chi_{1,n_1,\dots,n_m} = \frac{1}{D_{2,n_1,\dots,n_m}(t_0)}, \quad \chi_{2,n_1,\dots,n_m} = -\frac{D_0}{D_{2,n_1,\dots,n_m}(t_0)}, \quad \chi_{3,n_1,\dots,n_m} = -\frac{D_1(t_0)}{D_{2,n_1,\dots,n_m}(t_0)},$$

$$D_{2,n_1,\dots,n_m}(t_0) \neq 0, \quad \bar{H}_{n_1,\dots,n_m}(t_0,s) = \frac{H_{n_1,\dots,n_m}(t_0,s)}{D_{2,n_1,\dots,n_m}(t_0)}, \quad \psi_{n_1,\dots,n_m} = \int_{\Omega_l^m} \psi(x)\,\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\,d\,x.$$

Подставляя представление (49) в ряд Фурье, получаем

$$\beta(x) = \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\Big[\psi_{n_1,\dots,n_m}\chi_{1,n_1,\dots,n_m} + \varphi_{1,n_1,\dots,n_m}\chi_{2,n_1,\dots,n_m} +$$

$$+\varphi_{2,n_1,\dots,n_m}\chi_{3,n_1,\dots,n_m} - f_{n_1,\dots,n_m}(\cdot) - \int_0^T \bar{H}_{n_1,\dots,n_m}(t_0,s)\,u_{n_1,\dots,n_m}(s)\,d\,s\Big]. \qquad (50)$$

Предполагается, что для гладких функций $D_{2,n_1,\dots,n_m}(t)$, $\bar{H}_{n_1,\dots,n_m}(t,s)$ справедливы следующие условия:

$$C_1 = \max\left\{\left\| D_2(t)\right\|_{B_2(T)}; \left\| D_2''(t)\right\|_{B_2(T)}\right\} < \infty, \qquad (51)$$

$$C_2 = \max\begin{cases}\left\{\int\limits_0^T \| H(t,s) \|_{B_2(T)} ds;\ \int\limits_0^T \| H''(t,s) \|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \\ \left\{\int\limits_0^T \| \bar{H}(t,s) \|_{B_2(T)} ds;\ \int\limits_0^T \| \bar{H}''(t,s) \|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty,\end{cases} \tag{52}$$

$$C_{i+2} = \max\left\{\int\limits_0^T \| H_i(t_0,s) \|_{B_2(T)} ds;\ \int\limits_0^T \| H_i''(t_0,s) \|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \tag{53}$$

где $H_{i+2,n_1,\dots,n_m}(t,s) = n_i^{4k} H_{n_1,\dots,n_m}(t,s),\ i = \overline{1,m}.$

Условия гладкости. Пусть для функций $\varphi_i(x), \psi(x), \beta(x) \in C^{4k}(\Omega_l^m)$, $f(x,\cdot) \in C_x^{4k}(\Omega_l^m \times R)$, $i = 1,2$ в области Ω_l^m существуют кусочно-непрерывные производные порядка $(4k+1)m.$

Теорема 8. *Пусть выполняются условия гладкости,* (51)-(53) *и следующие условия:*

1) $\max\left\{\| \chi_1 \|_{\ell_2}; \| \chi_2 \|_{\ell_2}; \| \chi_3 \|_{\ell_2}\right\} < \infty;$

2) $| f(x,\gamma_1) - f(x,\gamma_2) | \le M_0(x) | \gamma_1 - \gamma_2 |;\ 0 < \left\| M_0(x) \right\|_{L_2\left(\Omega_l^m\right)} < \infty;$

3) $\left| \Theta(x,\beta_1) - \Theta(x,\beta_2) \right| \le \Theta_0(x) \left| \beta_1 - \beta_2 \right|,\ 0 < \left\| \Theta_0(x) \right\|_{L_2\left(\Omega_l^m\right)} < \infty;$

4) $\rho < 1,$ *где* $\rho = \max\left\{2C_1\left(1 + \left\| M_0(x) \right\|_{L_2\left(\Omega_l^m\right)} \left\| \Theta_0(x) \right\|_{L_2\left(\Omega_l^m\right)}\right); C_2 + C_3\right\}.$

Тогда система из счетных систем (47) *и* (49) *однозначно разрешима в пространствах* $B_2(T)$ *и* ℓ_2. *При этом искомое решение может быть найдено из следующего итерационного процесса:*

$$\begin{cases} u^0_{n_1,\dots,n_m}(t) = \varphi_{1,n_1,\dots,n_m} D_0 + \varphi_{2,n_1,\dots,n_m} D_1(t), \\ u^{p+1}_{n_1,\dots,n_m}(t) = I_1(t; u^p_{n_1,\dots,n_m}, \beta^p_{n_1,\dots,n_m}),\ p = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta^0_{n_1,\dots,n_m} = \psi_{n_1,\dots,n_m} \chi_{1,n_1,\dots,n_m} + \varphi_{1,n_1,\dots,n_m} \chi_{2,n_1,\dots,n_m} + \varphi_{2,n_1,\dots,n_m} \chi_{3,n_1,\dots,n_m}, \\ \beta^{p+1}_{n_1,\dots,n_m} = I_2(t; u^p_{n_1,\dots,n_m}, \beta^p_{n_1,\dots,n_m}),\ p = 0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

Теорема 9. *Предположим, что все условия теоремы* 8 *выполняются. Тогда ряд* (50) *сходится абсолютно и равномерно.*

Теорема 10. *Предположим, что все условия теоремы* 8 *выполняются. Тогда основная неизвестная функция* $U(t,x)$ *определяется с помощью ряда* (48). *При этом функция (48) принадлежит классу* (45).

Во втором параграфе в многомерной области $\Omega = \{(t,x) | \, 0 < t < T,\ 0 < x < l\}$ аналогично рассматривается обратная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Бенни-Люк высокого четного порядка

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{i=1}^m\left((-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial x_i^{4k}}\right) + (-1)^{k+1}\omega \cdot w(t)\sum_{i=1}^m \frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}}\right] U(t,x) =$$

$$= \nu \int_0^T K(t,s)U(s,x)\,d\,s + \alpha(t)\left[\beta(x) + f\left(x, \int_{\Omega_l^m} \Theta(y,\beta(y))\,d\,y\right)\right],$$

$0 < w(t),\ 0 \neq \alpha(t) \in C\,(\Omega_T)$, $f(x,\beta) \in C_x^{4k}(\Omega_l^m \times R)$, $\int_{\Omega_l^m} |\Theta(x,\beta(x))| dx < \infty$, $\Theta(x,\beta) \in C(\Omega_l^m \times R)$, $\Omega_T \equiv [0;T]$, $x \in \Omega_l^m \equiv [0;l]^m$, $\beta(x) \in C\left(\Omega_l^m\right)$ функция переопределения, $0 \neq K(t,s) = \sum_{i=1}^{p} a_i(t) b_i(s)$, $a_i(t), b_i(s) \in C[0;T]$. Здесь предполагается, что система функций $a_i(t)$, $i = \overline{1,p}$ и система функций $b_i(s)$, $i = \overline{1,p}$ являются линейно независимыми. Мы предполагаем также, что для функций $\beta(x)$, $f(x,.)$ имеют место граничные условия типа Дирихле по пространственным переменным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Для регулярных значений параметра установлены достаточные условия однозначной разрешимости линейных и нелинейных прямых и обратных нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с одной, двумя и многими пространственными переменными.
2. Для регулярных значений параметров установлены достаточные условия однозначной разрешимости линейных и нелинейных прямых и обратных смешанных задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с вырожденным ядром и одной, двумя и многими пространственными переменными.
3. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости линейных и нелинейных прямых и обратных краевых задач для дифференциальных уравнений псевдопараболо-псевдогиперболического типа высокого порядка с одной и двумя пространственными переменными.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V. I. ROMANOVSKIY

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

RAKHMONOV FARHOD DO‘STMURODOVICH

NONLOCAL PROBLEMS FOR HIGHER ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

01.01.02-Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2022.3.PhD/FM305.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" of information and educational portal http://www.ziyonet.uz.

Scientific supervisor:	**Yuldashev Tursun Kamaldinovich** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Docent
Official opponents:	**Takhirov Jozil Ostanovich** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor
	Qodirqulov Bakhtiyor Jalilovich Doctor of Sciences in Physics and Mathematics
Leading organization:	**International Kazakh-Turkish University named after Khoja Akhmed Yasavi (Kazakhstan)**

Defense will take place «01» november 2022 at 17:30 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website : www.mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy (is registered № 146) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «14» October 2022 year
(Mailing report № 2 on «14» October 2022 year)

U. A. Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J. K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Senior researcher

A. A. Azamov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study the solvability of direct and inverse problems and construct their solution for higher-order partial differential and integro-differential equations.

Research problems:

To establish sufficient conditions for the unique solvability of direct and inverse nonlocal boundary value problems for higher-order partial differential equations with one, two and many spatial variables; construction of solutions to these boundary value problems in the form of Fourier series;

To establish, for regular values of the parameters, sufficient conditions for the unique solvability of mixed direct and inverse problems for higher-order partial integro-differential equations with a degenerate kernel and one, two and many spatial variables; construction of these solutions to mixed value problems in the form of Fourier series;

To establish sufficient conditions for the unique classical solvability of the direct and inverse boundary value problems for higher-order mixed partial differential equations with one and two spatial variables.

The research object. Higher-order partial differential, mixed differential and integro-differential equations.

The research subject. Mixed, boundary and inverse problems. Fourier series, the theory of higher-order partial differential equations, the theory of higher-order partial integro-differential differential equations with a degenerate kernel.

Scientific novelty of the research work consists the proof of following statements:

the unique solvability of direct and inverse nonlocal boundary value problems for higher-order partial differential equations with one, two and many spatial variables;

unique solvability of mixed direct and inverse problems for higher-order partial integro-differential equations with a degenerate kernel and one, two and many spatial variables;

the unique classical solvability of the direct and inverse boundary value problems for higher-order mixed partial differential equations with one and two spatial variables.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation on:

the solvability of mixed and boundary value problems for partial differential and integro-differential equations of higher order were used in the construction of solutions to non-local boundary and mixed problems for linear and non-linear partial differential equations of the fourth order the implementation of project AP09259137 "Development of methods for solving multipoint boundary value problems for integro-differential equations with involutive transformations" (Certificate of the International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmed Yasavi, No. 04/1674 dated June 17, 2022, Kazakhstan). The use of the scientific result allowed them to establish sufficient conditions for the unique solvability of multipoint boundary value problems for homogeneous partial differential equations with involutive transformations; establish, for regular values of the parameter.

The methodology for studying mixed and boundary value problems for linear partial differential equations was used in the study of boundary value problems for differential equations of the Sturm-Liouville type when performing research work on project No. OT-F-4-(36+32) “Development of new methods for solving problems of mathematical physics and optimal control+nonclassical initial and spectral problems and their applications for partial differential equations of odd order” (Reference from National University of Uzbekistan, No. 04/11-4124 dated July 13, 2022). The use of the scientific result allowed them to construct solutions to boundary value problems for linear Sturm-Liouville differential equations.

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 7 international scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the dissertation 7 research papers have been published in the scientific journals, all of them are included in the list of journals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending the PhD thesis, in addition 4 of them were published in international journals and 3 papers published in national mathematical journals.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The general volume of the thesis is 117 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Yuldashev T. K., Islamov Yu. N., Rakhmonov F. D. On an inverse problem for a differential equation of pseudoparabolic-pseudohyperbolic type // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020. № 3 (27). С. 40-54.
2. Рахмонов Ф. Д. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого порядка с нелинейной функцией переопределения // Бюллетень института математики. 2021. Т. 4. № 6. С. 100-112. (01.00.00, № 17).
3. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. On a Benney–Luke type differential equation with nonlinear boundary value conditions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. 42 (15). P. 3761-3772. (3.Scopus. IF=0.53).
4. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. On a boundary value problem for Benney–Luke type differential equation with nonlinear function of redefinition and integral conditions // Transactions of Azerbaijan National Academy of Sciences, Issue Mathematics. 2021. № 41. P 172-183. (3.Scopus. IF=0.221).
5. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal problem for a nonlinear fractional mixed type integro-differential equation with spectral parameters // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365. № 060003. (3.Scopus. IF=0.189).
6. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal inverse problem for a pseudoheperbolic-pseudoelliptic type differential equation //AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365. № 060004. (3.Scopus. IF=0.189).
7. Рахмонов Ф. Д. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром // Бюллетень Института математики. 2022. Vol. 5. №1. С. 88-101. (01.00.00, № 17).

II бўлим (II часть; II part)

8. Рахмонов Ф. Д. О разрешимости задачи теории теплопроводности с двумя нелокальными краевыми условиями // Материалы межд. научная конф. “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование”, 22-27 июня, 2015 г. Улан-Удэ. С. 247-248.
9. Рахмонов Ф. Д. О разрешимости задачи теории теплопроводности с двумя нелокальными краевыми условиями. Материалы межд. научная конф. “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы”, 25-29 июня, 2018 г. Стерлитамак. С. 44-45.
10. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal problem for a nonlinear fractional mixed type integro-differential equation with spectral parameters //

Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference “Computational Models and Technologies”. August 24-25, 2020. Tashkent. P. 182-184.

11. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal inverse problem for a pseudoheperbolic-pseudoelliptic type differential equation // Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference “Computational Models and Technologies”. August 24-25, 2020. Tashkent. P. 184-186.
12. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Inverse boundary value problem for Benny-Luke type differential equation of even order // Традиционная межд. апрельская мат. конференция, посвященная 75-летию академика Т. Ш. Кальменова. 5–8 апреля 2021 г. Алматы, С. 108–109.
13. Рахмонов Ф.Д. Краевая задача для дифференциального уравнения псевдопараболо-псевдогиперболического типа // Abstracts of international scientific conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”. September 23-24, 2022 y. Samarkand, P. 299-300.
14. Рахмонов Ф. Д. Смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Бенни-Люк высокого порядка с вырожденным ядром // Материалы международной научной конференции «Актуальные задачи математики, механики и информатики». 8-9 сентября 2022 г. Караганда. С. 140-141.

Автореферат «Ўзбекистон Математика журнали» таҳририятида 2022 йил
3 октябрда таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги
матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,75. Адади 100 дона. Буюртма № 63/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.