В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ДУРДИЕВ УМИДЖОН ДУРДИМУРАТОВИЧ

ЎРАМА КЎРИНИШДАГИ ГИПЕРБОЛИК ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРДА МАХСУС ИККИ ЎЛЧОВЛИ ЯДРОЛАРНИ АНИҚЛАШ МАСАЛАЛАРИНИ ТАДҚИҚ ҚИЛИШ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА–МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Тошкент – 2020

УДК: 517.958

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ДУРДИЕВ УМИДЖОН ДУРДИМУРАТОВИЧ

ЎРАМА КЎРИНИШДАГИ ГИПЕРБОЛИК ИНТЕГРО– ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРДА МАХСУС ИККИ ЎЛЧОВЛИ ЯДРОЛАРНИ АНИҚЛАШ МАСАЛАЛАРИНИ ТАДҚИҚ ҚИЛИШ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА–МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Тошкент – 2020

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.2.PhD/FM460 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Бухоро давлат университети Физика-математика факультети “Математика” кафердасида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://kengash.mathinst.uz/) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Карчевский Андрей Леонидович** физика–математика фанлари доктори, профессор (Россия)
Расмий оппонентлар:	**Ашуров Равшан Раджабович** физика–математика фанлари доктори, профессор
	Ўразбоев Ғайрат Уразалиевич физика–математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И. Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «10» июл соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улуғбек тумани, Мирзо Улуғбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (+99871) 262-75-44, факс: (+99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (103 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улуғбек тумани, Мирзо Улуғбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (+99871) 262-75-44).

Диссертация автореферати 2020 йил «4» июл куни тарқатилди.
(2020 йил «4» июл даги 3 рақамли реестр баённомаси).

У.А. Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К. Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.,
катта илмий ходим

А.А. Аъзамов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Тескари масалалар астрономияга, квантларнинг тарқалиши назариясига, геофизикага, иссиқлик физикасига, тиббиётга, ҳамда ЭҲМ пайдо бўлиши билан замонавий илм – фаннинг барча соҳаларига кириб борди. Математик физикада тўғри масалаларнинг ечимини топиш учун тенгламанинг коэффициентларини, соҳа чегарасини, бошланғич ва чегаравий шартларни бериш лозим. Аммо амалиётда тенглама коэффициентларини ҳар доим ҳам бериб бўлмайди (эластикликлик назарияси – сейсмик қидирув, Максвелл – геоэлектрика, тўлқин тарқалиш тезлиги ва зичлиги – акустика, иссиқлик физикасида иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти ва иссиқлик манбаларининг зичлиги ва бошқалар). Ҳар доим ҳам бошланғич ва чегаравий шартларни, шунингдек, соҳа чегарасини ўлчаб бўлмайди. Бундай ҳолда, тадқиқотчилар тўғри масалани ечиш учун қўшимча маълумотни ўлчайдилар (сейсмограммалар, муҳит юзасидаги потенциал, ечимнинг спектрал хусусиятлари, сочиш берилганларини, томограммалар ва бошқалар) ва тескари масалани ечишга ҳаракат қилмоқдалар, яъни коэффициентларни, бошланғич ёки чегаравий шартларни, соҳа чегарасини топадилар.

Биринчи марта тескари масалалар XX–асрнинг бошларида сейсмиканинг тескари кинематик масаласи сифатида шакллантирилган ва бугунги кунда бундай масалалар назарияси замонавий математиканинг тез ривожланаётган соҳаси ҳисобланади. Ўтган асрнинг охиридан бошлаб, берилган жойларда тегишли майдонларни ўлчаш учун вақт ўзгарувчиси бўйича ўрама кўринишдаги гиперболик интегро–дифференциал тенгламаларда ядрони аниқлаш тескари масалалари пайдо бўлди. Табиий фанларда баъзи жараёнларни математик моделлаштиришда хотирага эга бўлган системалар деб аталувчи системаларга дуч келинадики, бу системаларнинг ўзини тутиши системанинг олдинги ҳолатига боғлиқ бўлиб, интегро–дифференциал тенгламалар билан ифодаланади. Бундай жараёнлар юз берадиган муҳитлар хотирага эга бўлган муҳитлар дейилади. Муайян шароитларда эластиклик ва (ёки) электромагнит тўлқинларнинг тарқалиш тенгламаларига “кечикувчан” ёки “таъсирдан сўнги” ҳодисаларини тасвирловчи ўрама кўринишдаги Вольтерра операторлари қўшилади. Сўнгги пайтларда бундай тенгламаларда ўрама ядросини аниқлаш масалаларига қизиқиш ошди. Бу бир томондан, яққол берилган хусусиятларга эга бўлган янги материалларнинг пайдо бўлиши билан боғлиқ бўлса, иккинчи томондан, замонавий супер асбоблар ёрдамида амалга оширилган ўлчовларнинг аниқлиги ошиши билан изоҳланади, бу эса тажриба натижаларни назария башорати билан таққослаш имконини беради.

Ўрама кўринишдаги интеграл ҳадларни ўз ичига олган Максвелл тенгламалар системаси дисперсияли электродинамик жараёнларни тавсифлайди. Эластиклик назариясининг интегро–дифференциал тенгламаларида бундай интеграл ҳад жисмнинг ёпишқоқлик таъсирига жавобгардир. Иккала холатда ҳам тенгламадаги ўрама ядролари одатда номаълум функциялардир. Электромагнит ва эластик тўлқинларнинг тарқалаши бу ядроларга боғлиқ. Шундай қилиб, интегро–дифференциал тенгламалар билан боғлиқ баъзи тескари масалаларни кўриб чиқиш зарурияти туғилади. Хотирага эга бўлган турли хил муҳит ва системаларда тўлқин жараёнлари ва ҳодисаларини ўрганиш, назарий ва замонавий ЭҲМларда амалга ошириладиган сонли усулларнинг ривожланишига туртки бўлди. Шуни ҳисобга олган ҳолда, математик моделлаштириш ва хотирали муҳитда электромагнит ва эластик тўлқинлар тарқалишининг интегро–дифференциал тенгламалари учун тўғри ва тескари масалаларнинг корректлигини ўрганиш, шунингдек, бундай масалалар учун самарали ҳисоблаш алгоритмларини ишлаб чиқиш назарий ва амалий жиҳатдан қизиқиш уйғотади. Шунинг учун ушбу диссертациядаги тадқиқотлар жуда долзарбдир.

2020 йил Илм-маърифат ва рақамли иқтисодиётни ривожлантириш йили деб эълон қилинди. Бугунги кунда давлатимиз раҳбарияти барча аниқ фанларнинг асоси бўлган математикани ривожлантиришга катта эътибор қаратмоқда. Ушбу диссертация маълум даражада Илм-маърифат ва рақамли иқтисодиётни ривожлантириш йилига бағишланган давлат дастурида ҳамда Ўзбекистон Республикаси Президентининг №-ПҚ-4387 рақамли қарорида “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И. Романовский номидаги математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”, 2017 йилнинг 17 февралдаги №-ПҚ-2789 “Фанлар Академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ва 2017 йилнинг 8 февралдаги №-ПФ-4947 “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”, 2018 йилнинг 5 июндаги № ПҚ-3775 “Олий таълим муассасаларида таълим сифатини ошириш ва уларнинг мамлакатда амалга оширилаётган кенг қамровли ислоҳотларда фаол иштирокини таъминлаш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”, шунингдек, ушбу фаолиятга оид бошқа меъёрий-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ҳизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Стационар бўлмаган жараёнларни тавсифловчи дифференциал ва интегро-дифференциал тенгламалар ва системалар учун динамик тескари масалалар фаол ўрганилмоқда. Бундай масалаларда, қоида тариқасида, қўшимча маълумот сифатида маълум вақтларда тегишли сиртдаги тўғри масала ечими излари берилган бўлади. Гиперболик тенгламалар ва системалар учун динамик тескари масалалар биринчи бўлиб А.С. Алексеев, М.М. Лаврентьев, В.Г.

Романов, А.С. Благовещенскийлар томонидан қўйилган ва тадқиқ қилинган. В.Г. Романов томонидан гиперболик тенгламалар ва системалар учун динамик тескари масалалар тизимли ўрганилди. Тескари динамик масалалар ечимларининг ягоналиги ва мавжудлиги ҳакидаги локал теоремаларни исботлаш усуллари, шунингдек, масалаларнинг ечимларини сонли ҳисоблаш усуллари В.Г. Романов томонидан ишлаб чикилган, ҳамда унинг шогирдлари В. Г. Яхно, С. И. Кабанихин, А.Л. Карчевский, Д.К. Дурдиев ва бошқаларнинг ишларида тескари масалаларни ўрганишда қўлланилган.

Ўрама ядрони аниқлашнинг тескари масалалари бўйича биринчи натижалар итальян математиклари А. Лоренци ва М. Грассели ишларида олинган. А.Лоренци, М.Грассели, С.И. Кабанихин, А.Л. Бухгейм, Н.И. Калинина, Я. Янно ишларида асосан силлиқ функциялар билан ифодаланувчи тақсимланган манбали ўрама кўринишдаги гиперболик ва параболик интегро-дифференциал тенгламаларда интеграл ҳад ядросини аниқлашнинг бир ўлчовли тескари масалалари ўрганилган. Ҳозирги кунда ушбу мавзу кўплаб олимларнинг илмий изланишлари ҳисобланади. В.Г. Романов, А.Л. Бухгейм ва Д.Қ. Дурдиев ишларида муҳитнинг бирор бир нуқтаси атрофида ёки муҳит чегарасида берилган дельта–функцияли бир ва кўп ўлчовли гиперболик типдаги чизиқли интегро–дифференциал тенгламалар ўрганилди. А.Л. Карчевский ишларида ёпишқоқ-эластиклик ва электродинамиканинг интегро–дифференциал тенгламалари ядросини тиклашнинг сонли ечиш усуллари келтирилган. Ушбу ишларда кўриб чиқилган дифференциал ва интегро–дифференциал тенгламалар учун динамик тескари масалалар ушбу тенгламаларнинг умумлашган ечимлари тўғрисида баъзи маълумотлар бўйича муҳит хотирасининг функциясини аниқлашдан иборат. Бу ерда ечимлар импулсли йўналтирилган “зарбалар” ёки “портлашлар” каби манбалардан келиб чиқадиган эластик ёки электромагнит тўлқинларнинг тарқалиш жараёнини тавсифлайди. Дифференциал тенгламаларнинг кўриб чиқилган умумлашган ечимлари, қоида тариқасида, фундаментал ечимлар дейилади.

Асосан, гиперболик дифференциал, интегро–дифференциал тенгламалар ва системалар учун тескари масалаларда ечилувчанлик муаммолари фақат номаълум коэффициентлар бир ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолларда ўрганилган. В.Г. Романов томонидан фазовий ўзгарувчилардан бири бўйича тригонометрик кўпҳад, бошқа ўзгарувчига нисбатан узлуксиз коэффициентли функциялар синфида телеграф тенгламасининг икки ўлчовли коэффициентини аниқлаш учун тескари масаласини ўрганиш усулини таклиф қилинган. Ушбу усулга асосланиб, ушбу диссертацияда ўрама кўринишдаги гиперболик интегро-дифференциал тенгламалар ва системаларда икки ўлчовли ядрони аниқлаш учун тескари масалалар ўрганилади. Юқорида келтирилган ишлар ичида В.Г. Романов ва А.Л. Карчевский ишлари масалаларнинг қўйилиши ва тадқиқот методи жиҳатидан, шунингдек сонли натижаларни олиш нуқтаи назаридан ушбу диссертация ишига яқин бўлиб ҳисобланади.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация мавзуси “Ўрама кўринишдаги гиперболик интегро–дифференциал тенгламаларда махсус икки ўлчовли ядроларни аниқлаш масалаларини тадқиқ қилиш” Бухоро давлат университети илмий кенгаши томонидан маъқулланган, “Математика” кафедрасида ва Ўзбекистон Республикаси инновацион ривожланиш вазирлигининг Ф-4-02 “Чексиз ҳолатлар тўпламига эга бўлган математик физика моделларининг термодинамикаси” мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади ўрама кўринишдаги иккинчи даражали гиперболик интегро-дифференциал тенгламаларда махсус икки ўлчовли ядрони аниқлаш тенгламасини ечиш усулларини яратиш, диагонал матрица функциясини ёпишқоқ-эластик тенгламалар системасидан аниқлаш, ҳамда ушбу тескари масалаларнинг ечимини ягоналигини, турғунлигини ва мавжудлигини ўрганишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

Ўрама кўринишдаги иккинчи тартибли гиперболик интегро-дифференциал тенглама учун бошланғич-чегаравий масала ечимининг турғунлик баҳосини олиш ва бир қийматли ечилувчанлигини ўрганиш. Интеграл ҳаднинг икки ўлчовли махсус ядросини тўғри масала ечимининг $x=0$ нуқтадаги қийматига кўра аниқлаш.

Интеграл ҳаднинг ядроси учта ўзгарувчига боғлиқ бўлганда, гиперболик интегро-дифференциал тенглама учун бошланғич-чегаравий масаласи ечимини бир қийматли ечилувчанлигини ўрганиш ва турғунлик баҳосини олиш. Ядронинг фазовий қисмини топишда тескари масалани тўғри масала ечимининг $x=0$ нуқтадаги қийматига кўра ўрганиш.

Бир жинсли анизотроп муҳитдаги ёпишқоқ-эластик тенгламалар системаси учун Коши масаласини қўйиш ва ўрганиш. Ёпишқоқ-эластик тенгламалар системасида диагонал матрица ядросини аниқлаш масаласини ўрганиш. Мавжудлик, ягоналик ва турғунлик баҳолари ҳақидаги теоремаларни олиш.

Қатламли муҳитнинг диэлектрик ўтказувчанлиги билан хотирали электродинамика тенгламалар системасидаги вақт частотасига боғлиқлигини аниқлаш учун сонли усулни қуриш.

Тадқиқотнинг объекти ўрама кўринишдаги гиперболик интегро-дифференциал тенгламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети ўрама кўринишдаги иккинчи даражали гиперболик интегро-дифференциал тенгламалар ва ёпишқоқ-эластик тенгламалар системаси учун икки ўлчовли тўғри ва тескари масалалардир.

Тадқиқотнинг усуллари. Тўғри масаланинг бир қийматли ечилувчанлигини иккинчи тур Волтерра типдаги интеграл тенгламалар билан алмаштириш ва кетма-кет яқинлашиш усулини қўллаш орқали исботланган. Сиқиб акслантириш усулига асосланиб, тескари масаланинг эквивалент интеграл тенгламалар системасига тадбиқ қилинган тескари масалаларнинг локал ечилувчанлиги исботланан. Турғунлик баҳоларини олиш учун интеграл тенгламалар баҳоланади ва Гронуолла тенгсизликлари қўлланилади. Шунингдек, қуйидаги ишда математик таҳлил ва математик физика тенгламаларининг бошқа усуллари ҳам қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Ўрама кўринишдаги иккинчи тартибли гиперболик интегро-дифференциал тенглама учун бошланғич-чегаравий масала ечимининг дифференциал хусусиятлари олинган.

Махсус икки ўлчовли ядрони аниқлаш учун, тўғри масала ечимининг $x=0$ нуқтадаги қийматига кўра, тескари масала ечимининг мавжудлик, ягоналик ва шартли турғунлик теоремалари исботланган.

Интеграл ҳаднинг ядроси учта ўзгарувчига боғлиқ бўлганда, гиперболик интегро-дифференциал тенглама учун бошланғич-чегаравий масаласи ечимини бир қийматли ечилувчанлиги ўрганилган ва турғунлик баҳоси олинган, ядронинг фазовий қисмини топиш учун тескари масала ечимининг мавжудлик, ягоналик ва шартли турғунлик теоремалари исботланган.

Бир жинсли анизотроп муҳитдаги ёпишқоқ-эластик тенгламалар системасида диагонал матрица ядросини аниқлаш масаласи ўрганилган ва мавжудлик, ягоналик ва турғунлик баҳолари ҳақидаги теоремалар олинган.

Қатламли муҳитнинг диэлектрик ўтказувчанлиги билан хотирали электродинамика тенгламалар системасидаги вақт частотасига боғлиқлигини аниқлаш учун сонли усул қурилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Иш назарий характерга эга, аммо асосли равишда мавжуд экспериментал маълумотларга асосланади. Олинган натижалар мутахассислар томонидан математик физиканинг тескари масалаларида, хусусан, гиперболик интегро-дифференциал тенгламалар ва системаларда бир ва кўп ўлчовли ўрамани аниқлаш масалаларида фойдаланиш учун тавсия қилиниши мумкин. Горизонтал қатламли муҳитда хотира функциясининг параметрларини аниқлаш учун сонли усул олинади.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Дифференциал тенгламалар назарияси, тескари ва нокоррект масалалар назарияси, анализ усуллари қўлланилганлиги, ҳамда исботлар ва математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Олинган натижаларнинг илмий аҳамияти шундан иборатки, улар математик физиканинг интегро-дифференциал тенгламалари учун тескари ва нокоррект масалалар назариясини янада ривожлантириш учун ишлатилиши мумкин. Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти шундан иборатки, уларни геофизик ва сейсмик кузатишлар моделларида, хотирали муҳитда эластик ва электромагнит тўлқинларнинг тарқалишида қўллаш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ўрама кўринишдаги гиперболик интегро-дифференциал тенгламаларда маҳсус икки ўлчовли ядроларни аниқлаш масалаларини тадқиқ қилишга оид олинган натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

Ўрама кўринишдаги гиперболик интегро-дифференциал тенгламаларда махсус икки ўлчовли ядроларни аниқлаш масалаларини тадқиқ қилишнинг таклиф этилган усулидан РНФ 18-19-00538 рақамли 01.01.2019-30.12.2019 даврдаги “Микро- ва наноқопламали сиртлардаги суюқлик томчиларининг динамикаси ва буғланиши” мавзусидаги лойиҳада қатламли муҳитнинг диэлектрик ўтказувчанлиги билан хотирали электродинамика тенгламалар системасидаги вакт частотасига боғлиқлигини аниқлаш учун сонли усул қуришда фойдаланилган (Россия Фанлар академияси Сибир бўлинмаси С.Л. Соболев номидаги Математика институти, 2020 йил 10 июндаги №705-5-250 рақамли маълумотнома). Илмий натижаларнинг қўлланилиши қатламли муҳитнинг диэлектрик ўтказувчанлиги билан хотирали электродинамика тенгламалар системасидаги вақт частотасига боғлиқлигини аниқлаш учун сонли усул қуриш имконини берган.

Ўрама кўринишдаги гиперболик интегро-дифференциал тенгламаларда маҳсус икки ўлчовли ядроларни аниқлаш масалаларини тадқиқ қилишнинг таклиф этилган усулидан ОТ-Атех-2018-340 рақамли 01.01.2018-31.12.2020 даврдаги “Икки тезликли муҳит динамикасининг амалий геофизик масалаларини назарий ва сонли тадқиқ этиш” мавзудаги лойиҳада ёпишқоқ–эластик тенгламалар системасида диагонал матрицали ядрони аниқлаш масаласининг ягоналик ва турғунлик баҳолари, мавжудлигини ўрганишда фойдаланилган (“Ўзбекистон Республикаси олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги”, 2020 йил 5 июндаги №89-03-1934 рақамли маълумотнома). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ёпишқоқ–эластик тенгламалар системасида диагонал матрицали ядрони аниқлаш масаласининг ягоналик ва турғунлик баҳолари, мавжудлигини ўрганиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, 5 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 3 та халқаро ва 2 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 6 та илмий иш чоп этилган, уларнинг барчаси Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари (PhD) асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда, жумладан, 4 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 120 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши-нинг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий ва маҳаллий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирил- ган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби «**Гиперболик интегро-дифференциал тенгламада махсус икки ўлчовли ядрони топиш масаласи»** деб аталади ва унда ўрама кўринишдаги иккинчи тартибли тескари гиперболик интегро-дифференциал тенгламалар учун тўғри масалалар кўриб чиқилади. Бу ерда номаълум ядронинг узлуксиз коэффициентли иккинчисига боғлиқ ҳолда ўзгарувчилардан бири бўйича тригометрик полином кўринишида оламиз.

1.1 параграфда биз кейинги параграфда қўйилган ва ўрганилган тескари масала учун тўғри масалани ўрганамиз. $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3_+$ учун интегро-дифференциал тенгламани

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = \int_0^t k(y,\tau) u(x,y,t-\tau) d\tau \tag{1}$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \delta'(t), \tag{2}$$

бошланғич ва чегаравий шартлар билан қаралган, бу ерда $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – Лаплас оператори, $\mathbb{R}^3_+ = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$, $\delta'(t)$ – Дирак функцияси ҳосиласи. (1) тенгламадаги k ядрони y фазовий ўзгарувчисига нисбатан $N \geq 0$ фиксирланган бутун сон билан

$$k(y,t) = \sum_{s=-N}^{N} k_s(t) e^{isy} \tag{3}$$

сонли Фурье қатор кўринишида ифодалаш мумкин дейлик. $\Omega(N, T, K)$ орқали $k_s, |s| \leq N$ коэффициентлари $[0, T]$ оралиғда узлуксиз бўлган ва

$$|k_s(t)| \leq K, \ \ t \in [0, T], \qquad -N \leq s \leq N.$$

шартларни қаноатлантирадиган $k(y, t)$ функциялар тўпламини белгилаймиз. $k(y, t) \in \Omega(N, T, K)$ учун (1), (2) масала ечими y га нисбатан 2π даврий функция ҳисобланади ва уни y бўйича чексиз Фурье қатори билан ифодалаш мумкин.

$$u(x,y,t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} u_s(x,t) e^{isy} \tag{4}$$

бу ерда (1) – (4) ифодалардан келиб чиқадиган коэффициентлар қуйидаги тенгламани қаноатлантиради

$$\frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x^2} + m^2 u_m(x,t) = \int_0^t \sum_{s=-N}^{N} k_s(\tau) u_{m-s}(x, t-\tau) d\tau, \tag{5}$$

$$u_m(x,t)|_{t<0} \equiv 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \delta_{0m}\delta'(t). \tag{7}$$

$$m \in \mathbb{Z}.$$

бу ерда δ_{0m} – Кронекер символи.

Қуйидаги теоремалар (5) – (7) тўғри масала ечимининг бир қийматли ечилувчанлигини ва турғунлик баҳоларини тавсифлайди:

Теорема 1. T – ихтиёрий мусбат сон бўлсин, $k_s(y,t) \in \Omega(N,T,K)$ ва $D(T) = ((x,t)|\ 0 \le x \le T - t)$. У ҳолда (5) – (7) масаланинг ечими мавжуд ва уни $D(T)$ соҳада қуйидаги

$$u_m(x,t) = -\delta_{0m}\delta(t-x) + v_m(x,t)\theta(t-x), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

кўринишда бериш мумкин, бу ерда $\theta(t)$ - Хевисайд функцияси: $t \ge 0$ учун $\theta(t) = 1$; $t < 0$ учун $\theta(t) = 0$ ва $v_m(x,t)$ функция $D'(T) = ((x,t)|\ 0 \le x \le t \le T - x)$ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи. Бундан ташқари, бу ечим ягона ва K, T га узлуксиз боғлиқ $C_1 = C_1(N,T,K) \ge 1$ ва $C_2 = C_2(N,T,K)$ ўзгармаслар мавжуд бўлиб, қўйидаги

$$|v_m(x,t)| \le C_1 \frac{KT^2}{2}, -N \le m \le N,$$

$$|v_m(x,t)| \le C_1 \frac{(KT^2)^{n+1}(2N+1)^n t^n}{2^{n+1} \cdot n!},$$

агар

$$(x,t) \in D'(T), Nn < |m| \le (n+1)N, n = 1,2,\dots,$$

ва

$$\left|\frac{\partial v_m(x,t)}{\partial t}\right| \le \frac{KT(1+m^2T^2)}{2}[1 + (2N+1)C_2], -N \le m \le N,$$

$$\left|\frac{\partial v_m(x,t)}{\partial t}\right| \le (1+m^2T^2)\frac{(KT)^{n+1}(2N+1)^n t^n}{2^{n+1} \cdot n!}\max\{C_1, (2N+1)C_2\},$$

агар

$$(x,t) \in D'(T), Nn < |m| \le (n+1)N, n = 1,2,\dots$$

баҳолар ўринли.

Теорема 2. $k(y,t)$, $\hat{k}(y,t)$ иккита $\Omega(N,T,K)$ тўпламдаги ихтиёрий функциялар бўлсин ва $u_m(x,t)$, $\hat{u}_m(x,t)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $k(y,t)$, $\hat{k}(y,t)$ билан (5) – (7) масала ечими бўлсин, мос равишда $\tilde{v}_m(x,t) = v_m(x,t) - \hat{v}_m(x,t)$, $\tilde{k}_s(t) = k_s(t) - \hat{k}_s(t)$. У ҳолда K, T га узлуксиз боғлиқ $C_3 = C_3(N,T,K) \ge 1$ ва $C_4 = C_4(N,T,K)$ ўзгармаслар мавжуд бўлиб, қуйидаги

$$|\tilde{v}_0(x,t)| \le C_3 \frac{\tilde{K}T^2}{2},$$

$$|\tilde{v}_m(x,t)| \le C_3 \frac{\tilde{K}T^2}{2}\frac{(KT^2(2N+1)t)^n}{2^n \cdot n!},$$

агар

$$(x,t) \in \bar{D}'(T), nN < |m| \le (n+1)N, n = 0,1,2,\dots$$

ва

$$\left|\frac{\partial \tilde{v}_m(x,t)}{\partial t}\right| \leq \widetilde{K}\left[\frac{T(1+m^2T^2)}{2} + C_4\frac{KT^2}{2}\frac{t}{1!}\right], |m| \leq N,$$

$$\left|\frac{\partial \tilde{v}_m(x,t)}{\partial t}\right| \leq C_4\widetilde{K}\,\frac{(KT^2(2N+1))^n}{2^2}\frac{t^n}{n!},$$

агар

$$(x,t) \in D^{'}(T), \qquad Nn < |m| \leq (n+1)N, , n = 1,2, \ldots,$$

баҳолар ўринли, бу ерда $\widetilde{K} = \max_{-N\leq s\leq N}\max_{0\leq t\leq T}\left|k_s(t) - \hat{k}_s(t)\right|$.

1.2 бўлимда биз тўғри масаланинг ечими ҳақидаги

$$u_m(0,t) = f_m(t), \tag{8}$$

$$t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{R}_+ = \{t \in R | t > 0\}, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N,$$

қўшимча маълумот бўйича, $k_s(t)$, $s = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$ функцияларни аниқлаш тескари масаласини ўрганамиз.

Таъриф 1. $k_s(t) \in C[0,\infty)$, $s = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$ функциялар (5) – (8) тескари масаланинг ечими дейилади, агар (5) – (7) тўғри масала ечими $u_m(x,t) \in D'(\mathbb{R}_+^2)$ (умумлашган функциялар синфидан, яъни тақсимот) $f_m(t) \in D'(\mathbb{R}_+)$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$ учун (8) тенгликни қаноатлантирса.

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + m^2$ операторнинг фундаментал ечимидан фойдаланиб, тўғри масалани $v_m(x,t)$ номаълум функцияларга нисбатан Вольтерра типидаги интеграл тенглама кўринишида ёзиш мумкин. Ушбу тенгламани дифференциаллаб ва қўшимча шартларни ҳисобга олган ҳолда, $k_m(t)$ функциялар учун тенгламалар система оламиз. Кейин, $k_m(t)$ учун интеграл тенгламаларнинг ўнг томонига $U = (U_{-N}, \ldots, U_N)$ операторни киритиб, уларни оператор тенглама сифатида қайта ёзишимиз мумкин,

$$k_m(t) = U_m\big(k_{-N}(t), \ldots, k_N(t)\big), \tag{9}$$

Кейинчалик, ушбу системага сиқиб акслантириш усули қўлланилади.

Теорема 3. Ифода

$$f_m(t) = -\delta_{0m}\delta(t) + \theta(t)g_m(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad |m| \leq N,$$

тўғри бўлсин. Бундан ташқари, берилганлар

$$v_m(0,t) = g_m(t), t > 0, |m| \leq N$$

қуйидаги

$$g_m(t) \in C^2[0,T], \qquad g_m(0) = {g'}_m(0) = 0, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$$

ва

$$G = \max_{-N\leq s\leq N}\left\|{g''}_m(t)\right\|_{C[0,T]}.$$

шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда шундай $T_0 \in (0,T)$ сони мавжуд бўлиб, (9) оператор тенгламалар $\Omega_0(N, T_0, 2G)$ соҳада ягона ечимга эга.

1.3 параграфда бошланғич-чегаравий масала

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle\, u = \int_0^t k\,(x,y,\tau)u(x,y,t-\tau)d\tau, \tag{10}$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \delta^{'}(t). \tag{11}$$

бошланғич ва чегаравий шартлар билан қаралган.

Бу ерда $k(x,y,t)$ ядро маълум функция деб ҳисобланади. Айтайлик, ушбу ядро

$$k(x,y,t) = k_0(t)p(x,y), \tag{12}$$

кўринишга эга бўлсин, бу ерда $k_0(t) \in C^1[0,\infty),\ k_0(0) \neq 0.$
$p(x,y)$ функцияни y фазовий ўзгарувчисига нисбатан $N \geq 0$ фиксирланган бутун сон билан

$$p(x,y) = \sum_{s=-N}^{N} p_s\,(x)e^{isy} \tag{13}$$

сонли Фурье қатори кўринишида ифодалаш мумкин дейлик. $\Omega(N,T,K)$ орқали $p_s,\ |s| \leq N$, коэффициентлари $[0,X],\ X > 0$ оралиғда узлуксиз бўлган ва

$$|p_s(x)| \leq P, x \in [0,X],\ \ -N \leq s \leq N.$$

шартларни қаноатлантирадиган $k(y,t)$ функциялар тўпламини белгилаймиз. $p(x,y) \in \Omega(N,X,P)$ учун (10), (11) масала ечими y га нисбатан 2π даврий функция ҳисобланади ва уни y бўйича чексиз Фурье қатори билан ифодалаш мумкин.

$$u(x,y,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m\,(x,t)e^{imy}, \tag{14}$$

бу ерда (10) – (14) ифодалардан келиб чиқадиган коэффициентлар қуйидаги тенгламани қаноатлантиради

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\right)u_m(x,t) = \sum_{s=-N}^{N} p_s\,(x)\int_0^t k_0\,(\tau)u_{m-s}(x,t-\tau)d\tau \tag{15}$$

$$u_m(x,t)|_{t<0} \equiv 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \delta_{0m}\delta'(t), \tag{17}$$

$$m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

бу ерда δ_{0m} – Кронекер символи.

Берилган $k_0(t),\ p_s(x),\ s = 0, \pm1, \pm2\pm, \ldots$ функциялар учун, (15) – (17) муносабатларни қаноатлантирувчи (умумлашган маънода) $u_m(x,t),\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ функцияларни топиш масаласига тўғри масала дейилади.

Ушбу бўлимнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

Теорема 4. T – ихтиёрий мусбат сон бўлсин, $p(x,y) \in \Omega(N,X,P)$. У ҳолда (15) – (17) масаланинг ечими мавжуд ва уни $D(T)$ соҳада қуйидаги

$$u_m(x,t) = -\delta_{0m}\delta(t-x) + v_m(x,t)\theta(t-x),\quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

кўринишда бериш мумкин, бу ерда $\theta(t)$ - Хевисайд функцияси: $t \geq 0$ учун $\theta(t) = 1;\ t < 0$ учун $\theta(t) = 0$ ва $v_m(x,t)$ функция $D'(T) = ((x,t)|\ 0 \leq x \leq t \leq T - x)$ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи. Бундан ташқари, бу ечим ягона ва K, T га узлуксиз боғлиқ $C_1 = C_1(N,T,K) \geq 1$ ўзгармас мавжуд бўлиб, қуйидаги

$$|v_m(x,t)| \le C_1 \frac{KT^2P}{4}, -N \le m \le N,$$
$$|v_m(x,t)| \le C_1 \frac{(KT^2P)^{n+1}(2N+1)^n t^n}{4^{n+1} \cdot n!},$$
агар
$$(x,t) \in \overline{D'}(T), Nn < |m| \le (n+1)N, n = 1,2, \ldots.$$
баҳолар ўринли.

Теорема 5. $p(x,y)$, $\hat{p}(x,y)$ иккита $\Omega(N,X,P)$ тўпламдаги ихтиёрий функциялар бўлсин ва $u_m(x,t)$, $\hat{u}_m(x,t)$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $p(x,y)$, $\hat{p}(x,y)$ билан (15) – (17) масала ечими бўлсин, мос равишда $\tilde{v}_m(x,t) = v_m(x,t) - \hat{v}_m(x,t)$, $\tilde{p}_s(x) = p_s(x) - \hat{p}_s(x)$. У ҳолда K, T га узлуксиз боғлиқ $C_2 = C_2(N,T,K,P) \ge 1$ ўзгармас мавжуд бўлиб, қуйидаги
$$|\tilde{v}_0(x,t)| \le C_2 \frac{K\tilde{P}T^2}{4},$$
$$|\tilde{v}_m(x,t)| \le C_2 \frac{K\tilde{P}T^2}{4} \frac{(KPT^2(2N+1)t)^n}{4^n \cdot n!},$$
агар
$$(x,t) \in \overline{D'}(T), nN < |m| \le (n+1)N, n = 0,1,2, \ldots,$$
баҳолар ўринли, бу ерда $\tilde{P} = \max_{-N \le s \le N} \max_{0 \le x \le T/2} |\tilde{p}_s(x)|$.

1.4 бўлимда биз (15) – (17) тўғри масаланинг ечими ҳақидаги
$$u_m(0,t) = f_m(t), \tag{8}$$
$$t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{R}_+ = \{t \in R | t > 0\}, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N,$$
қўшимча маълумот бўйича, $p_m(x)$, $m = 0, \pm1, \pm2\pm, \ldots, \pm N$ функцияларни аниқлаш тескари масаласини ўрганамиз.

Таъриф 2. $p_m(x) \in C[0,\infty)$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$ функциялар (15) – (18) тескари масаланинг ечими дейилади, агар (15) – (17) тўғри масала ечими $u_m(x,t) \in D'(\mathbb{R}^2_+)$ (умумлашган функциялар синфидан, яъни тақсимот) $f_m(t) \in D'(\mathbb{R}_+)$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$ учун (18) тенгликни қаноатлантирса.

Бу ерда, 1.2 бўлимдаги каби, $p_m(t)$ функциялар учун интеграл тенгламалар сиситемаси олинади. Ушбу интеграл тенгламаларнинг ўнг томонига $U = (U_{-N}, \ldots, U_N)$ операторни киритиб, уларни оператор тенглама сифатида қайта ёзишимиз мумкин,
$$p_m(t) = U_m\big(p_{-N}(t), \ldots, p_N(t)\big), \tag{19}$$
Кейинчалик, ушбу системага сиқиб акслантириш усули қўлланилади.

Теорема 6. Ифода
$$f_m(t) = -\delta_{0m}\delta(t) + \theta(t) g_m(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad |m| \le N,$$
тўғри бўлсин. Бундан ташқари, берилганлар
$$v_m(0,t) = g_m(t), t > 0, |m| \le N$$
қуйидаги
$$g_m(t) \in C^2[0,T], \qquad g_m(0) = g'_m(0) = 0, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$$
ва
$$G = \max_{-N \le s \le N} \left\| g''_m(t) \right\|_{C[0,T]}.$$

шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда шундай $T_0 \in (0,T)$ сони мавжуд бўлиб, (19) оператор тенгламалар $\Omega_0(N, T_0/2, 2G)$ соҳада ягона ечимга эга.

Диссертациянинг **“Бир жинсли анизотроп муҳитдаги ёпишқоқ-эластик тенгламалар системаси учун тескари масала”** деб номланган иккинчи боби доимий зичлик ва эластиклик модули бўлган муҳитдаги ёпишқоқ-эластиклик тенгламалар системасида диагонал матрицали ядрони аниқлаш масаласини ўрганишга бағишланган.

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ учун интегро-дифференциал тенгламалар системасини

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f(x,t), \qquad i = 1,2,3, \tag{20}$$

$$u_i|_{t<0} \equiv 0, \qquad i = 1,2,3, \tag{21}$$

бошланғич шартлар билан кўриб чиқамиз.

Бу ерда $u_i(x,t)$, $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t),\ u_3(x,t))^{\mathrm{T}}$ силжиш вектор функцияси компоненталари ҳисобланади, T – транспонирлаш белгиси, T_{ij} орқали ёпишқоқ-эластик муҳит билан боғлиқ кучланишлар тензори белгиланган. Аниқроғи,

$$T_{ij}(x,t) = \sum_{k,l=1}^{3} \left\{ c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x,t) + \int_0^t K_i\,(\tau) c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x, t-\tau) d\tau \right\}, \tag{22}$$

$f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))^{\mathrm{T}}$ - ташқи куч, $\rho > 0 -$ муҳит зичлиги.

2.1 параграфда (20) – (21) тўғри масала, тойдирилган манба фаъзонинг белгиланган нуқтасида тўпланган, аммо вақт бўйича тақсимланган ҳол учун ўрганилган, демак $f(x,t)$ қуйидаги

$$f(x,t) = \vec{e}\delta(x)\theta(t) f_0(t) \tag{23}$$

кўринишга эга, бу ерда $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)^{\mathrm{T}} -$ берилган куч йўналишини аниқлайдиган бирлик вертор; $\theta(t) -$ Хевисайд функцияси; $\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) -$ фазонинг $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ нуқтасида тўпланган Диракнинг дельта-функцияси; $f_0(t)$ – берилган силлиқ скаляр функция.

(22) тенгликдаги c_{ijkl} коэффициентлар муҳитнинг эластиклик модулидир. $K(t) = (K_1, K_2, K_3)(t)$ – муҳитнинг релаксация функцияси. Эластиклик модулларини қуйидаги шартларга мувофиқ 6×6 матрица жиҳатидан қулай тарзда тасвирланган, жуфт (i,j) индексни $i,j = 1,2,3$ битта индексга $\alpha = 1,2,\dots,6$: $(11) \to 1$, $(22) \to 2$, $(33) \to 3$, $(23) = (32) \to 4$, $(13) = (31) \to 5$, $(12) = (21) \to 6$ тегизиш. Ушбу мослик симметрия $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$ хусусиятларига кўра мумкин. Қўшимча симметрия $c_{ijkl} = c_{klij}$ хоссаси, матрицанинг барча $C = (c_{\alpha\beta})_{6\times6}$ модуллари симметрично эканлигини англатади, бу ерда $\alpha = (ij)$, $\beta = (kl)$. Маълумки, $\rho > 0$ ва $C = (c_{\alpha\beta})_{6\times6}$ матрица мусбат аниқланган.

Таъриф 3. $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)(x,t)$ векторни берилган $K(t) = diag(K_1, K_2, K_3)(t)$, $C = \left(c_{\alpha\beta}\right)_{(6\times6)}$ матрицалар ва $\rho > 0$ сони учун (20) – (23)

дан аниқлаш масаласига тўғри масала дейилади.

$U(\nu,t)=(U_1,U_2,U_3)^{\mathrm{T}}(\nu,t)$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ га нисбатан $u(x,t)=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}(x,t)$ функциянинг Фурье алмаштириши бўлсин, яъни

$$U_j(\nu,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_j\,(x,t)e^{i<x,\nu>}dx,\ \ \nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\in\mathbb{R}^3,\ \ j=1,2,3, \qquad (24)$$

$$<x,\nu>=\sum_{j=1}^{3} x_j\,\nu_j,$$

бу ерда ν - алмаштириш параметри.

Теорема 7. $U(\nu,t)=(U_1,U_2,U_3)^{\mathrm{T}}(\nu,t)$, (24) формула орқали аниқланган $u(x,t)=\left(u_{1,}u_2,u_3\right)^{\mathrm{T}}(x,t)$ функциянинг Фурье алмаштириши бўлсин. У ҳолда U вектор-функцияга нисбатан (20) – (22) Коши масаласи қуйидаги

$$\rho I\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=Q(\nu)U(\nu,t)+\int\limits_0^t K\,(t-\tau)Q(\nu)U(\nu,\tau)d\tau+\vec{e}\theta(t)f_0(t),$$
$$\nu\in R^3, t\in R,$$
$$U|_{t<0}\equiv 0,$$

кўринишга эга, бу ерда I бирлик 3×3 ўлчовли матрица,

$$Q(\nu)=-\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13}\\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23}\\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33}\end{pmatrix}, \qquad (25)$$

$Q_{ij}(\nu)$, $1\le i\le 3$, $1\le j\le 3$, ν бўйича иккинчи тартибли бир жинсли кўпҳадлар:

$$Q_{11}(\nu)=c_{11}\nu_1^2+2c_{16}\nu_1\nu_2+c_{66}\nu_2^2+2c_{15}\nu_1\nu_3+2c_{56}\nu_2\nu_3+c_{55}\nu_3^2;$$
$$Q_{12}(\nu)=c_{16}\nu_1^2+(c_{12}+c_{66})\nu_1\nu_2+c_{62}\nu_2^2+(c_{14}+c_{56})\nu_1\nu_3+(c_{52}+c_{64})\nu_2\nu_3+c_{54}\nu_3^2;$$
$$Q_{13}(\nu)=c_{15}\nu_1^2+(c_{14}+c_{65})\nu_1\nu_2+c_{64}\nu_2^2+(c_{13}+c_{55})\nu_1\nu_3+(c_{63}+c_{54})\nu_2\nu_3+c_{53}\nu_3^2;$$
$$Q_{21}(\nu)=c_{61}\nu_1^2+(c_{21}+c_{66})\nu_1\nu_2+c_{26}\nu_2^2+(c_{41}+c_{65})\nu_1\nu_3+(c_{25}+c_{46})\nu_2\nu_3+c_{45}\nu_3^2;$$
$$Q_{22}(\nu)=c_{66}\nu_1^2+2c_{26}\nu_1\nu_2+c_{22}\nu_2^2+2c_{64}\nu_1\nu_3+2c_{24}\nu_2\nu_3+c_{44}\nu_3^2; \qquad (26)$$
$$Q_{23}(\nu)=c_{65}\nu_1^2+(c_{64}+c_{25})\nu_1\nu_2+c_{24}\nu_2^2+(c_{45}+c_{63})\nu_1\nu_3+(c_{23}+c_{44})\nu_2\nu_3+c_{43}\nu_3^2;$$
$$Q_{31}(\nu)=c_{51}\nu_1^2+(c_{41}+c_{56})\nu_1\nu_2+c_{46}\nu_2^2+(c_{31}+c_{55})\nu_1\nu_3+(c_{36}+c_{45})\nu_2\nu_3+c_{35}\nu_3^2;$$
$$Q_{32}(\nu)=c_{56}\nu_1^2+(c_{46}+c_{52})\nu_1\nu_2+c_{42}\nu_2^2+(c_{54}+c_{36})\nu_1\nu_3+(c_{32}+c_{44})\nu_2\nu_3+c_{34}\nu_3^2;$$
$$Q_{33}(\nu)=c_{55}\nu_1^2+2c_{45}\nu_1\nu_2+c_{44}\nu_2^2+2c_{35}\nu_1\nu_3+2c_{34}\nu_2\nu_3+c_{33}\nu_3^2.$$

2.1 бўлимда (22) формула ёрдамида (20) тенгликга кирувчи $K(t)=diag(K_1,K_2,K_3)(t), t\ge 0,$ матрица функциясини аниқлаш учун тескари масала ўрганилган, агар (20) – (23) тўғри масала ечими учун $\nu = \nu_0,\ t > 0$ (24) Фурье алмаштиришига нисбатан қуйидаги қўшимча маълумот маълум бўлса, яъни

$$U(\nu_0, t) = g(t), \qquad g(t) = (g_1, g_2, g_3)^T(t), \tag{27}$$

бу ерда $g(t)$ - берилган силлиқ вектор-функция, $\nu_0 \in \mathbb{R}^3$ – берилган сонли вектор.

Таъриф 4. Тескари масала ечими деб, (20) – (23) масала ечимининг (27) шартни қаноатлантирувчи $K(t) = diag(K_1, K_2, K_3)(t)$ матрица функциясига айтилади.

Қуйидаги ягоналик ҳақидаги теорема исботланган.

Теорема 8. Ихтиёрий $T,\ T > 0$ белгилаймиз. Фараз қилайлик, $g(t) \in C^5[0, T],\ \ f_0(t) \in C^3[0, T]$ ва қуйидаги

$$g(0) = 0,\ \ g^{'}(0) = 0,\ \ f_0(0) \neq 0,\ \ g^{''}(0) = \frac{\vec{e}}{\rho} f_0(0),\ \ g^{'''}(0) = \frac{\vec{e}}{\rho} f^{'}{}_0(0),$$

$$g^{(4)}(0) = \frac{Q(\nu_0)\vec{e}}{\rho^2} f_0(0) + \frac{\vec{e}}{\rho} f''{}_0(0),\ \ e_i \neq 0, i = 1,2,3$$

мослаш шартлари бажарилган. Бундан ташқари, $\sum_{j=1}^{3} Q_{ij}(\nu_0)\vec{e}_j =: q_i(c_{kl}, \nu_0, e_k) \neq 0, \nu_0 \neq 0$, бу ерда $Q(\nu)$ ва $Q_{ij}(\nu),\ 1 \leq i, j \leq 3$ мос равишда (25) ва (26) формулар ёрдамида аниқланган. У ҳолда, (20) – (24), (27) тескари масаланинг ягона ечими мавжуд ва

$$K(t) = diag(K_1, K_2, K_3)(t) \in C[0, T].$$

$G(\gamma)$ орқали 8-теоремадаги шартларни қаноатлантирувчи $g(t),\ f_0(t)$ функциялар тўпламини белгилаймиз, ва $\max\left\{\max_{1\leq i\leq 3}\|g_i(t)\|_{C^5[0,T]}, \|f_0(t)\|_{C^2[0,T]}\right\} \leq \gamma < \infty,\ \ t \in [0, T],\ \ i = 1,2,3,\ \ \gamma$ – берилган сон.

Изоҳ 1. 8-теоремадаги барча мослаш шартлари, учунчи шартдан ташқари, вуктор шаклида ёзилган.

2.3 бўлимда тескари масала ечимининг турғунлик баҳолари ҳақида теорема олинган.

$A(\gamma)$ ва $B(\gamma_0)$ орқали, баъзи $T > 0$ учун

$$\max_{1\leq i\leq 3}\|K_i\|_{C[0,T]} \leq \gamma, \quad \max_{1\leq i\leq 3}\|g_i\|_{C^5[0,T]} \leq \gamma_0$$

бу ерда γ ва γ_0 мусбат ўзгармас сонлар, шартларни қаноатлантирувчи $K_i(t) \in C[0, T],\ \ g_i(t) \in C^5[0, T]$ функциялар тўпламини, мос равишда, белгилаймиз.

Теорема 9. $K^m(t) = diag\left(K_1^m(t), K_2^m(t), K_3^m(t)\right) \in A(\gamma)$ мос равишда берилган $g^m(t), \in B(\gamma_0),\ f_0^m(t),\ m = 1,2$ билан (20) – (24), (27) тескари масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда $T, \rho, \gamma, \gamma_0, e_i,\ i = 1, 2, 3$ сонларга ва $Q(\nu_0)$ матрица элементларига боғлиқ C_0 мусбат ўзгармас сон мавжуд бўлиб, қуйидаги

$$\sum_{i=1}^{3}\left\|K_i^1 - K_i^2\right\|_{C[0,T]} \leq C_0\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|g_i^1 - g_i^2\right\|_{C^5[0,T]} + \|f_0^1 - f_0^2\|_{C^3[0,T]}\right].$$

турғунлик баҳоси ўринли.

Айирманинг нормаси тузилади, интегралларнинг қийматлари баҳоланади. Кейин Гронуолл тенгсизлиги қўлланилади.

Диссертациянинг учинчи бобини **“Қатламли муҳитнинг диэлектрик сингдирувчанлигининг вақт частотасига боғлиқлигини сонли аниқлаш”** деб номланади. Бу бобда биз n – қатламли x_3^k – чегара бўлимли муҳитни кўрамиз, $x_3^0 = 0$; k - қатлам $[x_3^{k-1}, x_3^k]$ интервалда жойлашган, охирги $N + 1$ (тагидаги) қатлам - $[x_3^N, \infty)$, $(-\infty, 0]$ – ҳаво. Ҳар бир қатламнинг физик хусусиятлари диэлектрик сингдирувчанлик ε, ўтказувчанлик σ ва муҳит хотираси характеристикалари, яъни берилган функциялар x_3, $0 < x_3 < \infty$ ўзгарувчининг бўлакли ўзгармас функцияларидир, масалан, $\varepsilon_k - \varepsilon(x_3)$ бўлакли ўзгармас функциянинг k - қатламдаги қиймати.

3.1 бўлимда Максвелл интегро-дифференциал тенгламалар системаси кўриб чиқилган ва E_2 электр майдон компонентаси учун тенгламага келтирилган. Тўғри масала ечимини топиш учун қатламли қайта ҳисоблаш усулидан фойдаланилган.

Максвелл интегро-дифференциал тенгламалар системасини кўриб чиқамиз:

$$\nabla \times H = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) D(x,t) + \sigma E + j, \quad \nabla \times E = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) B(x,t),$$
$$(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+,$$

бу ерда D ва B - электромагнит майдони индукцияси, E ва H - электромагнит майдон кучланиши, j - ён оқимлар зичлиги, ε – диэлектрик сингдирувчанлик, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, ε_0 – вакуумнинг диэлектрик сингдирувчанлиги, ε_r – нисбий диэлектрик сингдирувчанлик, σ – муҳит ўтқазувчанлиги.

$$D(x,t) = \varepsilon E + \int_0^t \varphi\,(x_3, t - \tau) E(x,\tau) d\tau,$$

бу ерда $\varphi(t)$ - муҳит хотирасини тавсифловчи вактнинг скаляр функцияси. Ушбу функция ўз аргументининг барча қийматлари учун чекланган ва $t \to \infty$ бўлганда нолга интилади.

$$B(x,t) = \mu H(x,t),$$

бу ерда $E = (E_1, E_2, E_3)^T$, $H = (H_1, H_2, H_3)^T$.

Айтайлик, электромагнит майдонни жонлантирувчи қуйидаги кўринишдаги сим манбаи ҳисобланади:

$$j = j^0 \delta(x_1, x_3) F(t), \;\; j^0 = (0,1,0)^T.$$

Дастлабки вақт моментида муҳит тинч ҳолатда бўлган деб ҳисоблаймиз, яъни

$$E|_{t<0} \equiv 0, \;\; H|_{t<0} \equiv 0.$$

Бундай ҳолда, Максвелл тенгламалари иккита мустақил қисм системасига бўлинади ва оддий алмаштиришлардан кейин E_2 электр майдон компонентлари учун қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2}+\int_0^t \varphi\,(x_3,t-\tau)\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2}(x_1,x_3,\tau)d\tau+\sigma E_2=\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_2}{\partial x_3^2}. \qquad (28)$$

Электромагнит майдоннинг тангенциал компоненталари узлуксизлиги сабабли муҳитнинг узулиш нуқталарида қуйидаги ёпиштириш шартларини оламиз:

$$[E_2]_{x_3^k}=0,\quad \left[\frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right]_{x_3^k}=0. \qquad (29)$$

$x_3^0=0$ нуқтадаги қуйидаги шартларни оламиз:

$$[E_2]_{x_3^0}=0,\quad \left[\frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right]_{x_3^0}=\delta(x_1)F'(t), \qquad (30)$$

бошланғич шартлар

$$E_2|_{t<0}\equiv 0. \qquad (31)$$

Тескари масала: Агар (28) – (31) тўғри масала ечими ҳақида

$$E_2|_{x_3=0}=g(x_1,t). \qquad (32)$$

қушимча маълумот маълум бўлса, $\varphi=\varphi(x_3,t)$ функцияни топинг.

Маълумки, муҳитнинг кенг доираси учун хотира функциясини қуйидаги функция орқали бериш мумкин:

$$\varphi(x_3,t)=\varepsilon_0 A\mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

Шубҳасиз, горизонтал-қатламли муҳит учун A ва γ, x_3 ўзгарувчили бўлакли ўзгармас функция ҳисобланади.

Биз частотали соҳада тўғри масалани ҳосил қиламиз. Бунинг учун (28) га x_1 ўзгарувчи бўйича Фурье алмаштиришини ва t вақт ўзгарувчиси бўйича Лаплас алмаштиришини қўллаймиз. Яъни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-r^2u=0,\quad r^2=\lambda^2+\sigma p\mu_0+\mu_0\varepsilon_0 p^2\left(\varepsilon_r+\frac{A_k}{\gamma_k+p}\right),\mathrm{Re}r>0, \qquad (33)$$

ҳосил қиламиз, бу ерда x_1 ўзгарувчи бўйича E_2 функциясининг Фурье ва t бўйича Лаплас образи, λ ва $p=\beta+i\omega$ – Фурье ва Лаплас алмаштиришлари параметри, β – сўниш параметри, ω – доиравий частота, $\omega=2\pi f$ ва f – вақт частотаси.

Ёпиштириш шартлари

$$[u]_{x_3^k}=0,\quad \left[\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]_{x_3^k}=0, \qquad (34)$$

$$[u]_{x_3^0}=0,\quad \left[\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]_{x_3^0}=\mu pF(p). \qquad (35)$$

кўринишга эга бўлади.

Берилган шартларга чексизликда сўниш шартини ҳам қўшиш керак

$$u\to 0\ \ (x_3\to\pm\infty). \qquad (36)$$

(32) қўшимча шарт қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u|_{x_3=0}=g(\lambda,p). \qquad (37)$$

A ва γ бўлакли ўзгармас функцияларни аниқлаш учун частотали соҳада (33) – (37) тескари масалани невязка функционалини минимизациялаш орқали ечиш мумкин

$$J[A,\gamma] = \sum_{k=1}^{N_\omega} |\, u(\lambda,0,p) - g(\lambda,p)|^2, \quad p = \beta + i\omega_k, \tag{38}$$

бу ерда ω_k бирор чегараланган интервалга тегишли, N_ω - шу интервалдаги частоталар сони, λ - аниқ ўзгармас.

Невязка функционалани (38) ҳисоблаш учун (33) – (36) тўғри масалани тез ечиш керак ёки, аниқроғи, $u(\lambda,0,p)$ ни қийматини топиш керак. Шу мақсадда қатламли қайта ҳисоблаш усулидан фойдаланилади.

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = y(x_3)u(x_3), \tag{39}$$

тенгликни қаноатлантирувчи $y(x_3)$ функцияни кўриб чиқамиз, бу ерда u (33) дифференциал тенгламанинг ечими. y функцияси Риккати тенгламасини қаноатлантиришини кўриш осон

$$y' + y^2 = r^2. \tag{40}$$

(34) ёпиштириш шартлари туфайли қуйидаги ёпиштириш шартларини олиш мумкин:

$$[y]_{x_3^k} = 0. \tag{41}$$

Ҳар бир k - қатламда (40) тенгламанинг ечимини қуйидагича олиш мумкин:

$$y(x_3) = r_k \frac{(y^k + r_k)e^{2r_k\left(x_3 - x_3^k\right)} + (y^k - r_k)}{(y^k + r_k)e^{2r_k\left(x_3 - x_3^k\right)} - (y^k - r_k)},$$

бу ерда $y^k \equiv y\left(x_3^k - 0\right)$.

Бу (36) чегара шартини қаноатлантириш натижасида, $[x_3^N, \infty)$ пастги қатламда (40) Риккати тенгламаси ечими

$$y(x_3) = -r_{N+1},$$

кўринишни олади, ҳаводa эса

$$y(x_3) = r_0.$$

(41) ёпиштириш шартлари туфайли $y(x_3^k + 0) = y(x_3^k - 0) \equiv y^k$ га эга бўламиз.

(35) ёпиштириш шартлари ва (39) тенглик қуйидаги ифодаларни олишга имкон беради:

$$y(0+0)u(0+0) - y(0-0)u(0-0) = \mu p F(p), \;\; u(0+0) - u(0-0) = 0.$$

Бу ердан

$$u(\lambda,0,p) = \frac{\mu p F(p)}{y^0 - y(0-0)}.$$

келиб чиқади.

Юқоридагиларга асосланиб, $u(\lambda,0,p)$ қийматини топиш учун қуйидаги алгоритмни ёзиш мумкин:

- қатламли қайта ҳисоблашни амалга оширамиз

$$y^N = -r_{N+1},$$

$$y^{k-1} = r_k \frac{(y^k + r_k)e^{2r_k\left(x_3^{k-1} - x_3^k\right)} + (y^k - r_k)}{(y^k + r_k)e^{2r_k\left(x_3^{k-1} - x_3^k\right)} - (y^k - r_k)}, \;\; k = \overline{N,1},$$

процедура оҳирида $y^0 \equiv y(0+0)$ қийматга эга бўламиз.

- $y(0-0) = r_0$ ни ҳисоблаймиз.
- $u(\lambda, 0, p)$ ни ҳисоблаймиз:

$$u(\lambda, 0, p) = \mu \frac{pF(p)}{y^0 - r_0}.$$

3.2 бўлимда невязка функционалани минимизациялаш учун қўшма градиентлар усулидан фойдаланилган ва невязка функционаланинг градиенти ҳисобланган.

A ва γ бўлакли ўзгармас функциялар бўлгани ва m-қатламнинг ҳотираси A_m ва γ_m ўзгармас қийматлар билан тавсифлангани сабабли, (38) $J[A,\gamma]$ невязка функционалини $2N$ аргументли функция сифатида кўриб чиқиш мумкин: $J[\ldots, A_m, \ldots, \ldots, \gamma_m, \ldots]$. У ҳолда унинг градиенти ушбу вектор бўлади:

$$\nabla J[\ldots, A_m, \ldots, \ldots, \gamma_m, \ldots] = \left(\ldots, \frac{\partial J}{\partial A_m}, \ldots, \ldots, \frac{\partial J}{\partial \gamma_m}, \ldots\right)^T. \quad (42)$$

Қуйидаги тенгсизликни қараймиз:

$$\Phi(\ldots, A_m, \ldots) \le \Phi(\ldots, A_m + h_A, \ldots) \text{ ва } \Phi(\ldots, A_m, \ldots) \le \Phi(\ldots, A_m - h_A, \ldots), \quad (43)$$

$$\Phi(\ldots, \gamma_m, \ldots) \le \Phi\big(\ldots, \gamma_m + h_\gamma, \ldots\big) \text{ ва } \Phi(\ldots, \gamma_m, \ldots) \le \Phi\big(\ldots, \gamma_m - h_\gamma, \ldots\big). \quad (44)$$

(42) да хусусий ҳосилаларни ҳисоблаш учун қуйидаги ифодалардан фойдаланиш мумкин:

$$\frac{\partial J}{\partial A_m} = \begin{cases} 0, & \text{агар (43) бажарилса,} \\ \dfrac{J(\ldots, A_m + h_A, \ldots) - J(\ldots, A_m - h_A, \ldots)}{2h_A}, & \text{акс ҳолда,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_m} = \begin{cases} 0, & \text{агар (44) бажарилса,} \\ \dfrac{J\big(\ldots, \gamma_m + h_\gamma, \ldots\big) - J\big(\ldots, \gamma_m - h_\gamma, \ldots\big)}{2h_\gamma}, & \text{акс ҳолда.} \end{cases}$$

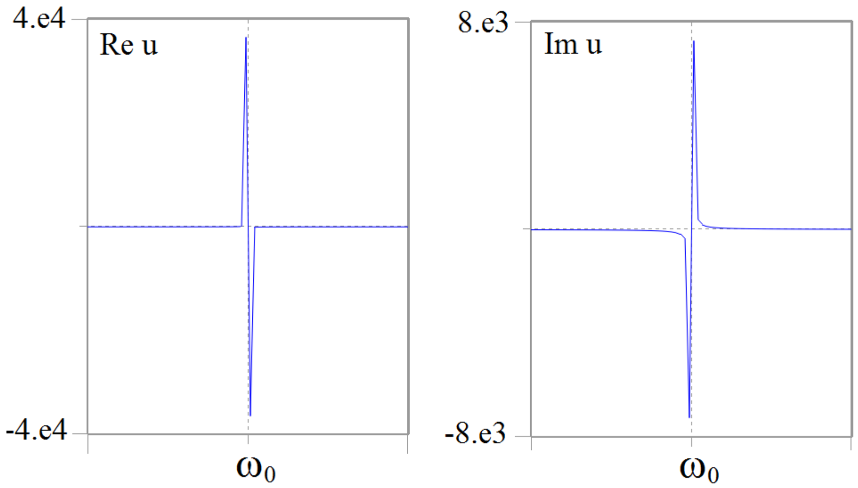
Манба ҳаракатининг вақтга боғлиқлиги

$$F(t) = A_0 \mathrm{e}^{-a_0 t} \cos(\omega_0 t).$$

функция орқали аниқланади деб ҳисоблаймиз.

Бу ерда A_0 - манба амплитудаси, a_0 параметри сўниш тезлигини аниқлайди, $\omega_0 = 2\pi f_0$ частота элтувчидир. Сонли тажрибаларда қуйида $A_0 = 10^5$, $a_0 = 10^2$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 500$ МГц деб оламиз.

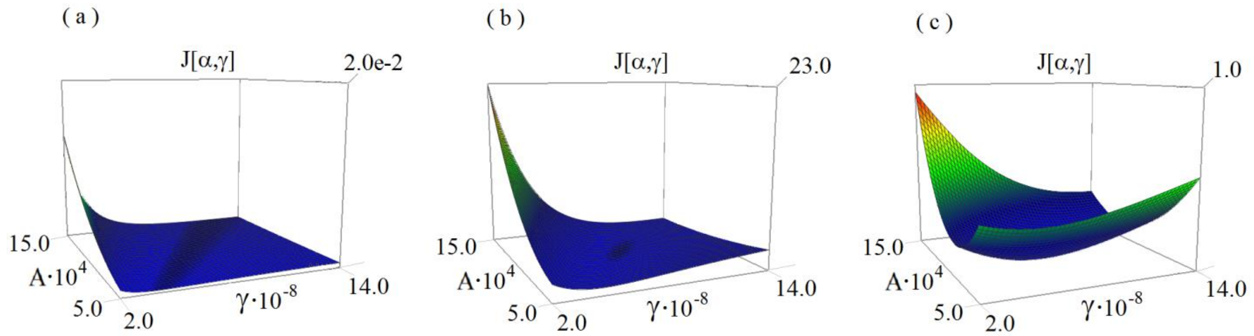
Эътибор бериш жоизки, агар тўғри масалани ечишда ω частота ω_0 га яқин бўлса, тўғри масала ечими сезиларли даражада ўсади ёки камаяди (1-расм.)



1-расм. ω параметр ω_0 атрофида ўзгарганда $u(0,p)$ миқдорнинг ҳолати.

Муҳитнинг қуйидаги ҳақиқий моделини кўриб чиқамиз (1-жадвал):

	z_k, м	σ, См/м	ε_r	$A \cdot 10^4$, 1/с	$\gamma \cdot 10^{-8}$, 1/с
ҳаво	-	0.0	1.0	0.0	0.0
1-қатлам	0.3	0.0020	20.0	10.0	3.5
2-қатлам	0.7	0.0022	25.0	25.0	8.8
3-қатлам	1.0	0.0015	15.0	22.0	7.9
4-қатлам	1.3	0.0018	20.0	18.0	8.2
5-қатлам	-	0.0025	25.0	0.0	00



2-расм. Вақт частотасининг турли хил интерваллари ишлатилганда невязка функционалининг ўзини тутиши a) $f \in [20,80]$ МГц, b) $f \in [200,400] \cup [600,800]$ МГц, c) $f \in [2,8]$ ГГц.

2-расм да турли частотали интерваллар танланганида невязка функционалининг ўзини тутиши келтирилган. Бу расм A_1 ва γ_1 қийматларни етарли катта чегараларда вариациалаш ёрдамида олинган, бошқа қийматлар ўзгаришсиз қолди (бошқа $\{A_k, \gamma_k\}$ жуфт миқдорларнинг вариацияси шунга ўхшаш натижаларга олиб келади).

Сонли моделлаштириш натижалари шуни кўрсатадики, невязка функционалининг энг катта ўзгаришлари $[200,400] \cup [600,800]$ МГц оралиқдан ишлатилган частоталарда содир бўлади, яъни ушбу частота интервалида комплекс диэлектрик сингдиришнинг частотага энг катта боғлиқлиги берилган.

3.3 бўлимда тескари масаланинг сонли ечими берилган. Невязка функционалини (39) минимизациялаш учун қўшма градиентлар усули қўлланилган. Яъни, минимизацилаш кетма-кетлиги қуйидагича ташкил қилинган:

$$G^{k+1} = G^{k} - \theta_k P_k, \quad G = \begin{bmatrix} A \\ \gamma \end{bmatrix},$$

бу ерда k - итерация номери, G^0 - қидирилаётган функциялар учун бошланғич яқинлашиш, P_k - қўшма йўналиш ва

$$P_0 = J'[G^0], \;\; P_k = J'[G^k] + \beta_k P_{k-1}, \;\; \beta_k = \frac{\| J'[G^k] \|^2}{\| J'[G^{k-1}] \|^2}, \;\; k = 1,2,\ldots,$$

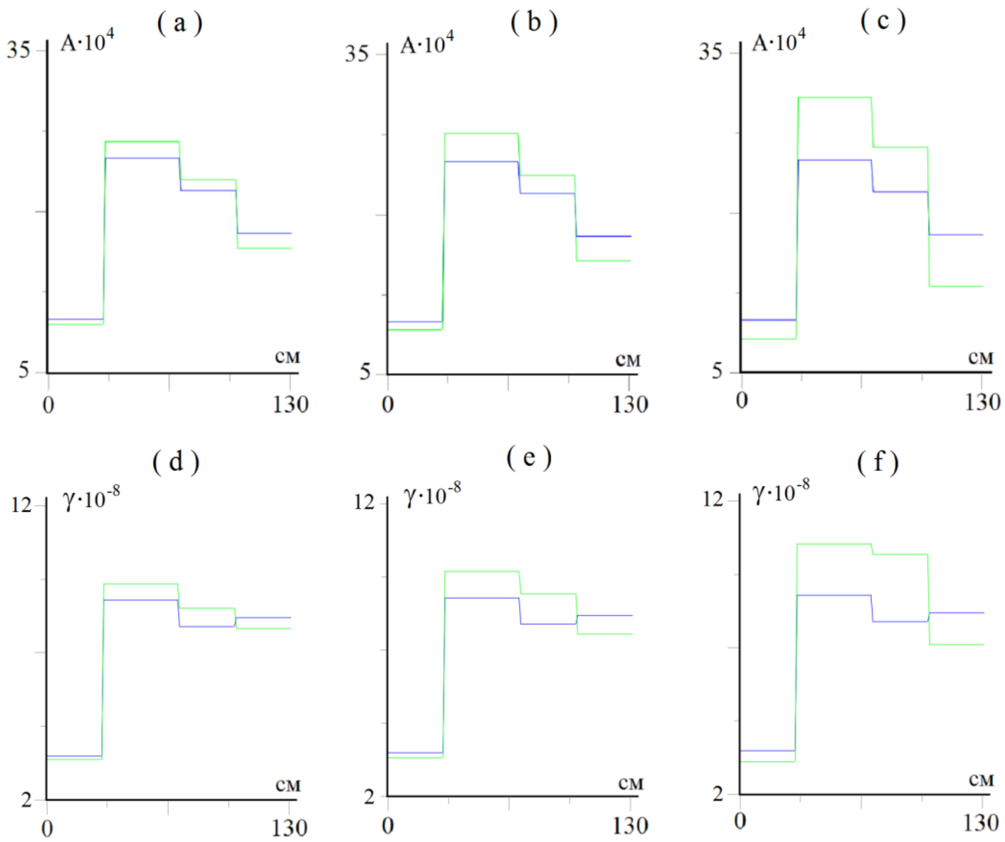
параметр θ_k – бир ўзгарувчили функцияни минимизациялаш масаласи ечимининг усул қадами:

$$\theta_k = \arg \min_{\theta>0} J\,[G^k - \theta P_k].$$

Тескари масалани сонли ечиш учун қуйидаги параметрлардан фойдаланилган:

- невязка функционалани қуриш учун: $f_0 = 500$ учун, иккита $f \in [200,400]$ ва $[600,800]$ МГц интерваллардан фойдаланилади, $N_{\omega,1} = 3000$ ва $N_{\omega,2} = 3000$ вақт частоталари сони, $\beta = 10^{-4}$;
- невязка функционалининг градиентини ҳисоблаш учун: $h_A = 10^{-7}$ ва $h_\gamma = 10^{-7}$;
- θ_k қўшма градиентлар усулининг қадами 10^{-8} аниқлик билан ҳисобланган.

Тескари масалада горизонтал-қатламли хотира муҳитнинг параметрлари бўлган A_k ва α_k лар аниқланган. Бошланғич яқинлашиш $A_k = 5 \cdot 10^{-4}$ 1/с ва $\alpha_k = 10^8$ 1/с $(k = \overline{1,4})$. Сонли тажрибаларнинг натижалари 3-расм да келтирилган.



3-расм. a)-c) A, d)-f) γ параметрларнинг тикланиши, тескари масала берилганларининг хатолиги a), d) 3%, b), e) 5% ва c), f) 10%. Аниқ қийматлар кўк чизиқ билан, тикланган қийматлар яшил чизиқ билан берилган.

Тикланган параметрларнинг таҳлили шуни кўрсатадики, (37) тескари масала берилганларида 3% хатолик бўлса, параметрларни тиклашда максимал нисбий хатолик A_k $(k = \overline{1,4})$ - 7% ни ташкил қилади, γ_k $(k = \overline{1,4})$ – 8%, 5% хатоликда, мос равишда – 12% ва 13%, 10% хатоликда, мос равишда – 26% ва 27%.

ХУЛОСА

Диссертацияда гиперболик типдаги интегро–дифференциал тенгламаларда интеграл ҳаднинг ядросини аниқлаш учун икки ўлчовли динамик тескари масалаларнинг корректлилиги ўрганилган. Интегро-дифференциал тенгламалар учун тескари масалалар Вольтерра типидаги иккинчи турдаги интеграл тенгламалар системасига келтириб ечиш усуллари олинган. Ўрама кўринишдаги ўнг томонида интеграл оператор бўлган гиперболик интегро-дифференциал тенгламаларнинг кенг синфи учун тескари масалалар кўриб чиқилган. Горизонтал–қатламли муҳит учун хотира функцияси параметрларини аниқлашнинг сонли усули келтирилган.

- Ўрама кўринишдаги иккинчи тартибли гиперболик интегро-дифференциал тенглама учун бошланғич-чегаравий масала ечимининг дифференциал хоссалари олинган. Махсус икки ўлчовли ядрони аниқлаш учун, тўғри масала ечимининг $x=0$ нуқтадаги қийматига кўра, тескари масала ечимининг мавжудлик, ягоналик ва шартли турғунлик теоремалари исботланган.

- Интеграл ҳаднинг ядроси учта ўзгарувчига боғлиқ бўлганда, гиперболик интегро-дифференциал тенглама учун бошланғич-чегаравий масаласи ечимини бир қийматли ечилувчанлиги ўрганилган ва турғунлик баҳоси олинган. Ядронинг фазовий қисмини топиш бўйича қўйилган тескари масала ечимининг мавжудлик, ягоналик ва шартли турғунлик теоремалари исботланган.
- Бир жинсли анизотроп муҳитдаги ёпишқоқ-эластик тенгламалар системаси учун Коши масаласини ўрганилган. Ёпишқоқ-эластик тенгламалар системасида диагонал матрица ядросини аниқлаш масаласи ўрганилган. Мавжудлик, ягоналик ва турғунлик баҳолари ҳақидаги теоремалар олинган.
- Қатламли муҳитнинг диэлектрик ўтказувчанлиги билан хотирали электродинамика тенгламалар системасидаги вақт частотасига боғлиқлигини аниқлаш учун сонли усул қурилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО**

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДУРДИЕВ УМИДЖОН ДУРДИМУРАТОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ДВУМЕРНЫХ ЯДЕР В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА СВЁРТКИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2020

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.2.PhD/FM460.

Диссертация выполнена на кафедре «Математика» Физико-математического факультета Бухарского государственного университета.

Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz

Научный консультант:	**Карчевский Андрей Леонидович** доктор физико-математических наук, профессор (Россия)
Официальные оппоненты:	**Ашуров Равшан Раджабович** доктор физико-математических наук, профессор
	Уразбоев Гайрат Уразалиевич доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «10» июля 2020 года в 10:00 часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Института математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81. Тел.: (+99871) 262-75-44, факс: (+99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института математики имени В.И. Романовского (регистрационный номер №103). (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81. Тел.: (+99871) 262-75-44).

Автореферат диссертации разослан «4» июля 2020 года.
(протокол рассылки № 3 от «4» июля 2020 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

У.А. Розиков
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.А. Аъзамов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Обратные задачи возникли в астрономии, квантовой теории рассеяния, геофизике, теплофизике, медицине, а с появлением ЭВМ проникли во все направления современной науки. Для нахождения решения прямых задач математической физики требуется задать коэффициенты уравнения, границу области, начальные и граничные условия. Но на практике не всегда можно задать коэффициенты уравнений (теории упругости – сейсморазведка, Максвелла – геоэлектрика, скорость распространения волн и плотность – акустика, коэффициент теплопроводности и плотность тепловых источников в теплофизике и т.д.). Не всегда можно измерить начальные и граничные условия, а также границу области. В этом случае исследователи измеряют дополнительную информацию о решении прямой задачи (сейсмограммы, потенциал на поверхности среды, спектральные характеристики решения, данные рассеяния, томограммы и т.п.) и пытаются решить обратную задачу, то есть найти коэффициенты, начальные или граничные условия, границу области.

Впервые обратная задача была сформулирована в начале XX века как обратная кинематическая задача сейсмики и сегодняшний день теория таких задач представляет собой бурно развивающееся направление современной математики. Начиная с конца прошлого столетия возникли обратные задачи нахождения ядра в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях типа свёртки по временной переменной по измерению соответствующих полей в доступных местах. При математическом моделировании некоторых процессов в естественных науках описываемые интегро-дифференциальные уравнения типа свёртки встречаются так называемые системы с памятью, поведение которых зависит от всей предыстории процесса. Среда, в которой происходят такие процессы, называется средой с памятью или с последействием. При определенных условиях в уравнения распространения упругих и (или) электромагнитных волн добавляются волтерровы операторы типа свертки, которые описывают явления "запаздывания" или "последействия". В последнее время, наблюдается повышенный интерес к задачам определения свёрточного ядра в таких уравнениях. Это с одной стороны, по-видимому, связано с появлением новых материалов, в значительной мере обладающих указанными свойствами, а с другой стороны, объясняется повышением точности измерений, проводимых с помощью современных суперприборов, что дает возможность сравнивать результаты эксперимента с предсказанием теории.

Система уравнений Максвелла, содержащая интегральные члены типа свёртки, описывает электродинамические процессы с дисперсией. В интегро-дифференциальных уравнениях теории упругости такой интегральный член отвечает за влияние вязкости материала. В обоих случаях свёрточные ядра, входящие в уравнения, являются обычно неизвестными функциями. Распространение электромагнитных и упругих волн зависит от этих ядер.

Таким образом, мы приходим к необходимости рассмотрения некоторых обратных задач, связанных с интегро-дифференциальными уравнениями. Исследование волновых процессов и явлений в разнообразных средах и системах с памятью в свою очередь стимулировало развитие теоретических и численных методов, реализуемых на современных ЭВМ. С учетом этого правильное математическое моделирование и изучение корректности прямых и обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений распространения электромагнитных и упругих волн в средах с памятью, а также разработка эффективных вычислительных алгоритмов для таких задач представляет как теоретический, так и практический интерес. Поэтому проведенные исследования в этой диссертационной работе являются весьма актуальными. Отметим, что в главу 3 настоящей диссертации составили результаты, полученные автором в Новосибирском государственном университете во время стажировки как победителя гранта фонда «Эл-юрт умиди».

2020 год объявлен в нашей стране Годом развития науки, просвещения и цифровой экономики. На сегодняшний день большое внимание руководством нашего государства уделяется развитию математики, как основе всех точных наук. Эта диссертационная работа в определенной степени служит осуществлению задач, обозначенных в государственной Программе Года развития науки, просвещения и цифровой экономики, в постановлении Президента Республики Узбекистан №-ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», №-ПП-2789 "О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности" от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 "О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан" от 8 февраля 2017 года, № ПП-3775 "О дополнительных мерах по повышению качества образования в высших образовательных учреждениях и обеспечению их активного участия в осуществляемых в стране широкомасштабных реформах" от 5 июня 2018 года, а также в других нормативно - правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствие с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. "Математика, механика и информатика".

Степень изученности проблемы. Для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и систем, описывающих нестационарные процессы, активно изучаются динамические обратные задачи. В таких задачах, как правило, в качестве дополнительной информации задается след решения соответствующей прямой задачи на некоторой времени подобной поверхности. Первые постановки динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем были сформулированы и исследованы А.С. Алексеевым, М.М. Лаврентьевым, В.Г. Романовым, А.С. Благовещенским. Систематическое исследование динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем было проведено В. Г. Романовым. Методика доказательства локальных теорем существования и единственности решения обратных динамических задач, теорем единственности и условной устойчивости "в целом", а также численные подходы решения задач, развитые В. Г. Романовым, были применены в исследовании широкого круга обратных задач в работах его учеников В. Г. Яхно, С. И. Кабанихина, А.Л. Карчевского, Д.К. Дурдиева и др.

Первые результаты для обратных задач определения свёрточного ядра были получены в работах итальянских математиков А.Лоренци и М. Грассели. В работах А.Лоренцы, М.Грассели, С.И. Кабанихина, А.Л. Бухгейма, Н.И. Калининой, Я. Янно в основном исследовались одномерные обратные задачи определения ядра интегрального члена в гиперболических и параболических интегро-дифференциальных уравнениях типа свёртки с распределенными источниками с гладкими функциями возмущения. В настоящее время эта тема является предметом научных исследований многих ученых. В работах В.Г. Романова, А.Л. Бухгейма и Д.К. Дурдиева изучались одно- и многомерные обратные задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа с сосредоточенными (дельта – образными) источниками, локализованными в окрестности фиксированной точки или на поверхности рассматриваемой области. В работах, А.Л. Карчевского проведены численные разработки восстановления ядра интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости и электродинамики. Рассматриваемые в этих работах динамические обратные задачи для дифференциальных уравнений состоят в определении функции памяти среды по некоторой информации об обобщенных решениях этих уравнений. Здесь обобщенные решения описывают процессы распространения упругих или электромагнитных волн, возникающих от источников типа импульсных направленных "ударов" или "взрывов". Рассматриваемые обобщенные решения дифференциальных уравнений, как правило, являются фундаментальными решениями.

Во многом вопросы разрешимости в обратных задачах для гиперболических дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений и систем изучены лишь в тех случаях, когда определяемые коэффициенты зависят от одной переменной (в случае коэффициентных обратных задачах от пространственной, а в случае обратных задач определения ядра от временной). В.Г. Романовым предложен метод исследования обратной задачи определения двумерного коэффициента телеграфного уравнения в классе функций, являющихся тригонометрическими полиномами по одной из пространственных переменных с непрерывными коэффициентами относительно другой переменной. На основе этого метода в данной диссертационной работе исследуются обратные задачи определения двумерных ядер в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях и системах типа свёртки. Отметим, что работы В.Г. Романова и А.Л. Карчевского, в своей постановке и методике изучения, а также в плане получения численных результатов, наиболее близки к диссертационной работе.

Связь темы диссертации с научно- исследовательскими работами института, в котором выполняется диссертация. Тема диссертационной работы "Исследования задач определения специальных двумерных ядер в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях типа свёртки" утверждена на ученом совете Бухарского государственного университета и выполнена с плановой тематикой кафедры "Математика" и гранта Ф-4-02 «Термодинамика моделей математической физики с бесконечным множеством состояний» Министерства инновационного развития Республики Узбекистан, где соискатель участвует в реализации тем проекта.

Целью исследования настоящей диссертационной работы является построение методов решения задач определения специальных двумерных ядер в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях второго порядка типа свёртки, определение диагональной матричной функции из системы уравнений вязкоупругости, а также исследование единственности, устойчивости и существования решения этих обратных задач.

Задачи исследования: Основными задачами исследования являются:

Исследование однозначной разрешимости и получение оценок устойчивости начально-краевой задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа свёртки. Определение двумерного специального ядра интегрального члена по заданному в точке $x = 0$ решению прямой задачи.

Изучение однозначной разрешимости и получение оценок устойчивости решения начально-краевой задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения, когда ядро интегрального члена зависит от трёх переменных и исследование обратной задачи нахождения пространственной части ядра по известному в точке $x = 0$ решению прямой задачи.

Постановка и исследование задачи Коши для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах. Изучение задачи определения диагонального матричного ядра из системы уравнений вязкоупругости. Получение теорем существования, единственности и оценки устойчивости.

Построение численного метода по определению зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты в системе уравнений электродинамики с памятью.

Объектом исследования являются гиперболические интегро-дифференциальные уравнения типа свёртки.

Предметом исследования являются двумерные прямые и обратные задачи для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа свёртки и система уравнений вязкоупругости.

Методы исследования: Однозначная разрешимость прямых задач доказана заменой задачи интегральными уравнениями второго рода вольтеровского типа и дальнейшим применениям метода последовательных приближений. На основе метода сжимающих отображений проводится доказательство локальной разрешимости обратных задач, примененных к системе интегральных уравнений эквивалентной обратной задачи. Для получения оценок устойчивости оцениваются интегральные уравнения и применяется неравенства Гронуолла. А также в работе использованы другие методы математического анализа и уравнений математической физики.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Получены дифференциальные свойства решения начально-краевой задачи гиперболического интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа свёртки с нулевым начальным условием и сосредоточенным источником возмущения на границе.

Доказаны теоремы существования, единственности и условной устойчивости решения обратной задачи определения двумерного ядра по заданному в точке $x = 0$ решению прямой задачи.

Исследована однозначная разрешимость прямой задачи, состоящей в определении решения начально-краевой задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения типа свёртки с трёхмерным свёрточным ядром, доказаны теоремы существования, единственности и условной устойчивости решения обратной задачи, нахождения пространственной части ядра интегрального члена.

Изучены задачи определения диагональной матричной функции из системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах, доказаны теоремы локальной однозначной разрешимости и установлена оценка условной устойчивости решения обратной задачи.

Для горизонтально - слоистой среды построен численный метод по определению зависимости диэлектрической проницаемости от частоты из системы уравнений Максвелла с памятью.

Практические результаты исследования. Работа носит теоретический характер, однако существенно основывается на имеющихся экспериментальных данных. Полученные результаты могут быть рекомендованы для использования специалистам по обратным задачам математической физики, в частности, для задач определения одномерных и многомерных свёрточных ядер в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях и системах. Получен численный метод определения параметров функции памяти для горизонтально-слоистой среды.

Достоверность результатов исследования основана на строгости математических рассуждений и доказательств, использовании методов теории некорректных и обратных задач, теории дифференциальных уравнений, анализа.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость полученных результатов выражается в том, что они могут быть использованы для дальнейшего развития теории обратных и некорректных задач для интегро-дифференциальных уравнений математической физики. Практическая значимость результатов исследований заключается в том, что их можно применить к моделям геофизических и сейсмических наблюдений, к распространению упругих и электромагнитных волн в средах с памятью.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Предложенная методика исследования задач определения специальных двумерных ядер в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях типа свёртки, использовались при определении диэлектрической проницаемости, зависящей от временной частоты, для слоистых покрытий в проекте “Динамика и испарение капель жидкости на поверхностях с микро- и нанопокрытиями ” в период 01.01.2019-30.12.2019, регистрационный номер РНФ 18-19-00538 (Институт Математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, письмо №705-5-250 от 10.06.2020 г.). Используя полученные результаты, разработан численный метод по определению диэлектрической проницаемости, зависящей от временной частоты, для слоистых покрытий.

Предложенная методика исследования задач определения специальных двумерных ядер в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях типа свёртки, использовалась при определении диагонального ядра системы уравнений вязкоупругости в проекте “Теоретическое и численное исследования прикладных геофизических задач динамики двухскоростных сред” за период 01.01.2018-31.12.2020, регистрационный номер ОТ-Атех-2018-340 («Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан», письмо №89-03-1934 от 05.06.2020 г.). Используя полученные результаты, были изучены задачи определения диагональной матричной функции из системы уравнений вязкоупругости.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на 5 научно-практических конференциях, в том числе на 3 международных и 2 республиканских.

Опубликованность результатов. По теме диссертации опубликовано 6 научных работ, которые входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 4 опубликованы в зарубежных журналах и 2 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации 120 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных и отечественных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется **«Задачи нахождения специального двумерного ядра в интегро-дифференциальном гиперболическом уравнении»** и в ней рассматривается прямые для обратных гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях второго порядка типа свёртки. При этом предполагается, что неизвестное ядро имеет вид тригонометрического полинома по одной из переменных с непрерывными коэффициентами, зависящими от другой.

В параграфе 1.1 изучается прямая задача, для которой в следующем параграфе поставлена и исследована обратная задача. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение для $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3_+$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = \int_0^t k(y,\tau) u(x,y,t-\tau) d\tau \tag{1}$$

с начальным и граничным условиям

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \delta'(t), \tag{2}$$

где $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $\mathbb{R}^3_+ = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$, $\delta'(t)$ – производная функции Дирака.

Предположим, что ядро k в уравнении (1.1.1) может быть представлено в виде конечного ряда Фурье по пространственной переменной y

$$k(y,t) = \sum_{s=-N}^{N} k_s(t) e^{isy} \tag{3}$$

с фиксированным целым числом $N \geq 0$. Обозначим через $\Omega(N, T, K)$ множество функций $k(y, t)$, для которых коэффициенты $k_s, |s| \leq N$ являются непрерывными функциями на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяют условиям

$$|k_s(t)| \leq K, \quad t \in [0, T], \qquad -N \leq s \leq N.$$

Для $k(y,t) \in \Omega(N,T,K)$ решение задача (1), (2) является 2π – периодической функцией относительно y и она может быть представлена бесконечным рядом Фурье по y

$$u(x,y,t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} u_s(x,t)e^{isy} \tag{4}$$

где, как следует из соотношений (1) - (4), коэффициенты удовлетворяют следующему уравнения

$$\frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x^2} + m^2 u_m(x,t) = \int_0^t \sum_{s=-N}^{N} k_s(\tau) u_{m-s}(x,t-\tau)d\tau, \tag{5}$$

$$u_m(x,t)|_{t<0} \equiv 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \delta_{0m}\delta'(t). \tag{7}$$

$$m \in \mathbb{Z}.$$

где δ_{0m} – символ Кронокера.

Следующие теоремы характеризуют однозначную разрешимость и оценку устойчивости решения прямой задачи (5) – (7):

Теорема 1. Пусть T - произвольное положительное число, $k_s(y,t) \in \Omega(N,T,K)$ и $D(T) = ((x,t)|\ 0 \le x \le T-t)$. Тогда решение задачи (5) – (7) существует и может быть представлена в области $D(T)$ в виде

$$u_m(x,t) = -\delta_{0m}\delta(t-x) + v_m(x,t)\theta(t-x), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\theta(t)$ функция Хевисайда: $\theta(t) = 1$ для $t \ge 0$; $\theta(t) = 0$ для $t < 0$ и $v_m(x,t)$ - непрерывно дифференцируемые функции в области $D'(T) = ((x,t)|\ 0 \le x \le t \le T-x)$. Кроме того, это решение единственно и существуют положительные постоянные $C_1 = C_1(N,T,K) \ge 1$ и $C_2 = C_2(N,T,K)$, непрерывно зависящие от K, T, такие, что выполняются оценки

$$|v_m(x,t)| \le C_1 \frac{KT^2}{2}, -N \le m \le N,$$

$$|v_m(x,t)| \le C_1 \frac{(KT^2)^{n+1}(2N+1)^n t^n}{2^{n+1} \cdot n!},$$

если

$$(x,t) \in D'(T), Nn < |m| \le (n+1)N, n = 1,2, \dots,$$

и

$$\left|\frac{\partial v_m(x,t)}{\partial t}\right| \le \frac{KT(1+m^2T^2)}{2}[1+(2N+1)C_2], -N \le m \le N,$$

$$\left|\frac{\partial v_m(x,t)}{\partial t}\right| \le (1+m^2T^2)\frac{(KT)^{n+1}(2N+1)^n t^n}{2^{n+1} \cdot n!} \max\{C_1, (2N+1)C_2\},$$

если

$$(x,t) \in D'(T), Nn < |m| \le (n+1)N, n = 1,2, \dots .$$

Теорема 2. Пусть $k(y,t)$, $\hat{k}(y,t)$ - две произвольные функции множества $\Omega(N,T,K)$ и $u_m(x,t)$, $\hat{u}_m(x,t)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, -$ решения задачи (5) – (7) с $k(y,t)$, $\hat{k}(y,t)$, соответственно и $\tilde{v}_m(x,t) = v_m(x,t) -$

$\hat{v}_m(x,t)$, $\tilde{k}_s(t) = k_s(t) - \hat{k}_s(t)$. Тогда существуют константы $C_3 = C_3(N,T,K) \geq 1$ и $C_4 = C_4(N,T,K)$, непрерывно зависящие от K, T, такие что справедливы оценки

$$|\tilde{v}_0(x,t)| \leq C_3 \frac{\widetilde{K}T^2}{2},$$

$$|\tilde{v}_m(x,t)| \leq C_3 \frac{\widetilde{K}T^2}{2} \frac{(KT^2(2N+1)t)^n}{2^n \cdot n!},$$

если

$$(x,t) \in \bar{D}'(T), nN < |m| \leq (n+1)N, n = 0,1,2, \ldots$$

и

$$\left|\frac{\partial \tilde{v}_m(x,t)}{\partial t}\right| \leq \widetilde{K}\left[\frac{T(1+m^2T^2)}{2} + C_4 \frac{KT^2}{2}\frac{t}{1!}\right], |m| \leq N,$$

$$\left|\frac{\partial \tilde{v}_m(x,t)}{\partial t}\right| \leq C_4 \widetilde{K} \frac{(KT^2(2N+1))^n}{2^2}\frac{t^n}{n!},$$

если

$$(x,t) \in D'(T), \qquad Nn < |m| \leq (n+1)N,, n = 1,2, \ldots,$$

где $\widetilde{K} = \max_{-N \leq s \leq N} \max_{0 \leq t \leq T} \left|k_s(t) - \hat{k}_s(t)\right|$.

В параграфе 1.2 изучена обратная задача, которая заключается в определении функции $k_s(t)$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$ если относительно решения прямой задачи (5) – (7) известна дополнительная информация

$$u_m(0,t) = f_m(t), \tag{8}$$

$$t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{R}_+ = \{t \in R | t > 0\}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N.$$

Определение 1. Функции $k_s(t) \in C[0,\infty)$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$ называется решением обратной задачи (5) – (8) если соответствующее решение прямой задачи (5) – (7) $u_m(x,t) \in D'(\mathbb{R}_+^2)$ (из класса обобщенных функций, т.е. распределения) удовлетворяет равенствам (8) для $f_m(t) \in D'(\mathbb{R}_+)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$.

Используя, фундаментальное решение оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + m^2$, прямая задача может быть написана в виде интегрального уравнения типа Вольтерра относительно неизвестных функций $v_m(x,t)$. Продифференцировав это уравнение и учитывая дополнительные условия получаем систему уравнений относительно искомых функций $k_m(t)$. Далее, вводя оператор $U = (U_{-N}, \ldots, U_N)$ в правой части интегральных уравнений для $k_m(t)$, мы можем переписать их как операторные уравнения

$$k_m(t) = U_m\big(k_{-N}(t), \ldots, k_N(t)\big), \tag{9}$$

Далее, к этой системе применяется метод сжатых отображений.

Теорема 3. Пусть представление

$$f_m(t) = -\delta_{0m}\delta(t) + \theta(t) g_m(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad |m| \leq N,$$

верно. Кроме того, пусть данные

$$v_m(0,t) = g_m(t), t > 0, |m| \leq N$$

удовлетворяют следующим условиям

$$g_m(t) \in C^2[0,T], \qquad g_m(0) = g'_m(0) = 0, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$$
и
$$G = \max_{-N \le s \le N} \left\| g''_m(t) \right\|_{C[0,T]}.$$
Тогда существует число $T_0 \in (0,T)$ такое, что операторные уравнения (9) имеют единственное решение, принадлежащее множеству $\Omega_0(N, T_0, 2G)$.

В параграфе 1.3 рассмотрена начально-краевая задача
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = \int_0^t k\,(x,y,\tau) u(x,y,t-\tau) d\tau, \tag{10}$$
с начальными и граничными условиями
$$u|_{t<0} \equiv 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \delta'(t). \tag{11}$$
Здесь ядро $k(x,y,t)$ считается известной функцией. Предположим, что это ядро представимо в виде
$$k(x,y,t) = k_0(t) p(x,y), \tag{12}$$
где $k_0(t) \in C^1[0,\infty)$, $k_0(0) \ne 0$. Считаем, что функция $p(x,y)$ имеет вид конечного ряда Фурье по переменной y:
$$p(x,y) = \sum_{s=-N}^{N} p_s\,(x) e^{isy} \tag{13}$$
с фиксированным целым числом $N \ge 0$. Пусть $\Omega(N,X,P)$ обозначает множество функций $p(x,y)$, для которых коэффициенты p_s, $|s| \le N$, являются непрерывными функциями на интервале $[0,X]$, $X > 0$ и удовлетворяют условиям ограниченности:
$$|p_s(x)| \le P, x \in [0,X], \ -N \le s \le N.$$
Отметим, что для $p(x,y) \in \Omega(N,X,P)$ решение задач (10) и (11) является 2π −периодической функцией от y и может быть представлено рядом Фурье
$$u(x,y,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m\,(x,t) e^{imy}, \tag{14}$$
где, как следует из соотношений (10) - (14), коэффициенты удовлетворяют следующему уравнения
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\right) u_m(x,t) = \sum_{s=-N}^{N} p_s\,(x) \int_0^t k_0\,(\tau) u_{m-s}(x,t-\tau) d\tau \tag{15}$$
$$u_m(x,t)|_{t<0} \equiv 0, \tag{16}$$
$$\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \delta_{0m} \delta'(t), \tag{17}$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
где δ_{0m} – символ Кронокера.

Для заданных функций $k_0(t)$, $p_s(x)$, $s = 0, \pm 1, \pm 2 \pm, \ldots$ мы называем прямой задачей задачу нахождения функций $u_m(x,t)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ удовлетворяющих (в обобщенном смысле) соотношениям (15) – (17).

Основными результатами этого параграфа являются следующие утверждения:

Теорема 4. Пусть T- произвольное положительное число, $p(x,y) \in \Omega(N,X,P)$. Тогда решение задачи (15)-(17) существует и может быть представлено в $D(T)$ в виде

$$u_m(x,t) = -\delta_{0m}\delta(t-x) + v_m(x,t)\theta(t-x), m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда: $\theta(t) = 1$ для $t \geq 0$; $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ и $v_m(x,t)$ – непрерывно дифференцируемые функции в области $D(T) = ((x,t)|\, 0 \leq x \leq t \leq T - x)$. Более того, это решение единственно, и существуют положительные постоянные $C_1 = C_1(N,T,K,P) \geq 1$, непрерывно зависящие от $K := \| k_0(t) \|_{C^1[0,T]}$, T, такие, что имеют место оценки

$$|v_m(x,t)| \leq C_1 \frac{KT^2P}{4}, -N \leq m \leq N,$$

$$|v_m(x,t)| \leq C_1 \frac{(KT^2P)^{n+1}(2N+1)^n t^n}{4^{n+1} \cdot n!},$$

если

$$(x,t) \in \overline{D'}(T), Nn < |m| \leq (n+1)N, n = 1,2, \ldots.$$

Теорема 5. Пусть $p(x,y)$, $\hat{p}(x,y)$ - две произвольные функции множества $\Omega(N,X,P)$ и $u_m(x,t)$, $\hat{u}_m(x,t)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, - решения задачи (15) – (17) с $p(x,y)$, $\hat{p}(x,y)$, соответственно и $\tilde{v}_m(x,t) = v_m(x,t) - \hat{v}_m(x,t)$, $\tilde{p}_s(x) = p_s(x) - \hat{p}_s(x)$. Тогда существует константа $C_2 = C_2(N,T,K,P) \geq 1$ непрерывно зависит от K, T, такие что справедливы оценки

$$|\tilde{v}_0(x,t)| \leq C_2 \frac{K\tilde{P}T^2}{4},$$

$$|\tilde{v}_m(x,t)| \leq C_2 \frac{K\tilde{P}T^2}{4} \frac{(KPT^2(2N+1)t)^n}{4^n \cdot n!},$$

если

$$(x,t) \in \overline{D'}(T), nN < |m| \leq (n+1)N, n = 0,1,2, \ldots,$$

где $\tilde{P} = \max_{-N \leq s \leq N} \max_{0 \leq x \leq T/2} |\tilde{p}_s(x)|$.

В параграфе 1.4 исследована обратная задача определения коэффициентов $p_m(x)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \pm, \ldots, \pm N$ разложения (13), если известна относительно решения прямой задачи (15) – (17) дополнительная информация

$$u_m(0,t) = f_m(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} | t > 0\}, \tag{18}$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N.$$

Определение 2. Функции $p_m(x) \in C[0,\infty)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$ называются решением обратных задач (15) − (17) и (18), если соответствующее решение прямой задачи (15) − (17) $u_m(x,t) \in D'(\mathbb{R}_+^2)$ (из класса обобщенных функций, т. е. распределений) удовлетворяет равенству (18) для $f_m(t) \in D'(\mathbb{R}_+)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$.

Здесь также, как и в параграфе 1.2 получена система интегральных уравнений относительно искомых функций $p_m(t)$. Вводя оператор $U = (U_{-N}, \dots, U_N)$ для правых частей этих интегральных уравнений могут быть получены операторные уравнения

$$p_m(t) = U_m\big(p_{-N}(t), \dots, p_N(t)\big), \tag{19}$$

Далее, к этой системе применяется метод сжатых отображений.

Теорема 6. Пусть представление

$$f_m(t) = -\delta_{0m}\delta(t) + \theta(t)g_m(t), \qquad t \in R, |m| \le N$$

верно. Кроме того, пусть данные

$$v_m(0,t) = g_m(t), \qquad t > 0, \qquad |m| \le N$$

удовлетворяют следующим условиям:

$$g_m(t) \in C^2[0,T], \quad g_m(0) = g'_m(0) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N.$$

и

$$G = \max_{-N \le m \le N} \left\| g''_m(t) \right\|_{C[0,T]}.$$

Тогда существует число $T_0 \in (0,T)$ такое, что операторные уравнения (19) имеют единственное решение, принадлежащее множеству $\Omega_0(N, T_0/2, 2G)$.

Вторая глава диссертации, названной **«Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах»** посвящена изучению задаче определения диагонального матричного ядра из системы уравнений вязкоупругости в среде с постоянной плотностью и модулями упругости.

Рассмотрим систему интегро – дифференциальных уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f(x,t), \qquad i = 1,2,3 \tag{20}$$

для $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ с начальными условиями

$$u_i|_{t<0} \equiv 0, \qquad i = 1,2,3. \tag{21}$$

Здесь $u_i(x,t)$ являются компонентами вектор-функции смещения $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))^{\mathrm{T}}$, Т – знак транспонирования, через T_{ij} обозначен тензор напряжений, связанный с вязкоупругой средой. Точнее, мы имеем

$$T_{ij}(x,t) = \sum_{k,l=1}^{3} \left\{ c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x,t) + \int_0^t K_i(\tau) c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x, t-\tau) d\tau \right\}, \tag{22}$$

$f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))^{\mathrm{T}}$ – внешняя сила; $\rho > 0$ – плотность среды.

В параграфе 2.1 прямая задача (20) – (21) исследована для случая, когда источник возмущения сосредоточен в фиксированной точке пространства, но распределен по времени, то есть функция $f(x,t)$ имеет вид

$$f(x,t) = \vec{e}\delta(x)\theta(t)f_0(t), \tag{23}$$

где $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)^{\mathrm{T}}$ – заданный единичный вектор, который определяет направление силы; $\theta(t)$ – функция Хевисайда, $\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ – дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке пространства $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, $f_0(t)$ – заданная гладкая скалярная функция.

В равенстве (22) коэффициенты c_{ijkl} являются модулями упругости среды. $K(t) = (K_1, K_2, K_3)(t)$ – функция релаксации среды. Модули упругости удобно описывать в терминах 6×6 матрицы в соответствии со следующими соглашениями, касающимися пары (i, j) индексов $i, j = 1,2,3$ к одному индексу $\alpha = 1,2, \dots, 6$: $(11) \to 1$, $(22) \to 2$, $(33) \to 3$, $(23) = (32) \to 4$, $(13) = (31) \to 5$, $(12) = (21) \to 6$. Это соответствие возможно благодаря свойствам симметрии $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$. Дополнительное свойство симметрии $c_{ijkl} = c_{klij}$ подразумевает, что матрица $C = (c_{\alpha\beta})_{6\times 6}$ всех модулей симметрично, где $\alpha = (ij)$, $\beta = (kl)$. Известно, что $\rho > 0$, и матрица $C = (c_{\alpha\beta})_{6\times 6}$ – положительно определена.

Определение 3. Задача, в которой вектор $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)(x,t)$ должен быть определен из (20) – (23) для заданных матриц $K(t) = diag(K_1, K_2, K_3)(t)$, $C = \left(c_{\alpha\beta}\right)_{(6\times 6)}$ и число $\rho > 0$ будет называться прямой задачей.

Пусть $U(\nu, t) = (U_1, U_2, U_3)^{\mathrm{T}}(\nu, t)$ есть образ Фурье функции $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}(x,t)$ по $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, т.е.

$$U_j(\nu, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_j(x,t) e^{i<x,\nu>} dx, \ \ \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{R}^3, \ \ j = 1,2,3, \qquad (24)$$

$$< x, \nu > = \sum_{j=1}^{3} x_j \nu_j,$$

где ν – параметр преобразования.

Теорема 7. Пусть $U(\nu, t) = (U_1, U_2, U_3)^{\mathrm{T}}(\nu, t)$ – образ Фурье функции $u(x,t) = \left(u_{1,} u_2, u_3\right)^{\mathrm{T}}(x,t)$, определенный по формуле (24). Тогда задача Коши (20) – (22) относительно вектор функции U имеет вид

$$\rho I \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = Q(\nu) U(\nu, t) + \int\limits_0^t K(t-\tau) Q(\nu) U(\nu, \tau) d\tau + \vec{e}\theta(t) f_0(t),$$

$$\nu \in R^3, t \in R,$$

$$U|_{t<0} \equiv 0,$$

где I – единичная матрица размерности 3×3,

$$Q(\nu) = -\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}, \qquad (25)$$

$Q_{ij}(\nu)$, $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 3$ являются однородными многочленами второго порядка по ν:

$Q_{11}(\nu) = c_{11}\nu_1^2 + 2c_{16}\nu_1\nu_2 + c_{66}\nu_2^2 + 2c_{15}\nu_1\nu_3 + 2c_{56}\nu_2\nu_3 + c_{55}\nu_3^2;$

$$Q_{12}(\nu) = c_{16}\nu_1^2 + (c_{12} + c_{66})\nu_1\nu_2 + c_{62}\nu_2^2 + (c_{14} + c_{56})\nu_1\nu_3 + (c_{52} + c_{64})\nu_2\nu_3 + c_{54}\nu_3^2;$$
$$Q_{13}(\nu) = c_{15}\nu_1^2 + (c_{14} + c_{65})\nu_1\nu_2 + c_{64}\nu_2^2 + (c_{13} + c_{55})\nu_1\nu_3 + (c_{63} + c_{54})\nu_2\nu_3 + c_{53}\nu_3^2;$$
$$Q_{21}(\nu) = c_{61}\nu_1^2 + (c_{21} + c_{66})\nu_1\nu_2 + c_{26}\nu_2^2 + (c_{41} + c_{65})\nu_1\nu_3 + (c_{25} + c_{46})\nu_2\nu_3 + c_{45}\nu_3^2;$$
$$Q_{22}(\nu) = c_{66}\nu_1^2 + 2c_{26}\nu_1\nu_2 + c_{22}\nu_2^2 + 2c_{64}\nu_1\nu_3 + 2c_{24}\nu_2\nu_3 + c_{44}\nu_3^2; \qquad (26)$$

$$Q_{23}(\nu) = c_{65}\nu_1^2 + (c_{64} + c_{25})\nu_1\nu_2 + c_{24}\nu_2^2 + (c_{45} + c_{63})\nu_1\nu_3 + (c_{23} + c_{44})\nu_2\nu_3 + c_{43}\nu_3^2;$$
$$Q_{31}(\nu) = c_{51}\nu_1^2 + (c_{41} + c_{56})\nu_1\nu_2 + c_{46}\nu_2^2 + (c_{31} + c_{55})\nu_1\nu_3 + (c_{36} + c_{45})\nu_2\nu_3 + c_{35}\nu_3^2;$$
$$Q_{32}(\nu) = c_{56}\nu_1^2 + (c_{46} + c_{52})\nu_1\nu_2 + c_{42}\nu_2^2 + (c_{54} + c_{36})\nu_1\nu_3 + (c_{32} + c_{44})\nu_2\nu_3 + c_{34}\nu_3^2;$$
$$Q_{33}(\nu) = c_{55}\nu_1^2 + 2c_{45}\nu_1\nu_2 + c_{44}\nu_2^2 + 2c_{35}\nu_1\nu_3 + 2c_{34}\nu_2\nu_3 + c_{33}\nu_3^2,$$

В параграфе 2.1 исследована обратная задача определения матричной функции
$$K(t) = diag(K_1, K_2, K_3)(t),$$
$t \geq 0$, входящую в равенства (20) посредством формулы (22), если относительно образа Фурье (24) решения прямой задачи (20) – (23) для $\nu = \nu_0$, $t > 0$ известна дополнительная информация, т.е. задана вектор-функция:
$$U(\nu_0, t) = g(t), \qquad g(t) = (g_1, g_2, g_3)^T(t). \qquad (27)$$
где $g(t)$ – заданная гладкая вектор-функция, а $\nu_0 \in \mathbb{R}^3$ – заданный числовой вектор.

Определение 4. Решением обратной задачи является матричная функция $K(t) = diag(K_1, K_2, K_3)(t)$ такая, что соответствующее ей решение задачи (20) – (23) удовлетворяет условию (27).

Доказана следующая теорема о единственности.

Теорема 8. Фиксируем произвольное T, $T > 0$. Предположим, что $g(t) \in C^5[0,T]$, $f_0(t) \in C^3[0,T]$ и выполнены следующие условия согласования:
$$g(0) = 0, \ g'(0) = 0, \ f_0(0) \neq 0, \ g''(0) = \frac{\vec{e}}{\rho} f_0(0), \ g'''(0) = \frac{\vec{e}}{\rho} f'_0(0),$$
$$g^{(4)}(0) = \frac{Q(\nu_0)\vec{e}}{\rho^2} f_0(0) + \frac{\vec{e}}{\rho} f''_0(0), \ e_i \neq 0, i = 1,2,3.$$
Кроме того, $\sum_{j=1}^{3} Q_{ij}(\nu_0)\vec{e}_j =: q_i(c_{kl}, \nu_0, e_k) \neq 0, \nu_0 \neq 0$, где $Q(\nu)$ и $Q_{ij}(\nu)$, $1 \leq i,j \leq 3$ определяются формулами (25) и (26), соответственно. Тогда обратная задача (20) – (24), (27) имеет единственное решение, такое, что
$$K(t) = diag(K_1, K_2, K_3)(t) \in C[0,T].$$

Через $G(\gamma)$ обозначим множество функций $g(t), f_0(t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 8, и $\max\left\{\max_{1\le i\le 3}\|g_i(t)\|_{C^5[0,T]}, \|f_0(t)\|_{C^2[0,T]}\right\} \le \gamma < \infty$, $t \in [0,T]$, $i = 1,2,3$, γ – заданное число.

Замечание 1. Все условия согласования в теореме 8, кроме третьего записаны в векторной форме.

В параграфе 2.3 получена теорема об оценке устойчивости решения обратной задачи.

Обозначим через $A(\gamma)$ и $B(\gamma_0)$ множества функций $K_i(t) \in C[0,T]$, $g_i(t) \in C^5[0,T]$, удовлетворяющих при некотором $T > 0$ условиям

$$\max_{1\le i\le 3}\|K_i\|_{C[0,T]} \le \gamma, \quad \max_{1\le i\le 3}\|g_i\|_{C^5[0,T]} \le \gamma_0$$

с положительными постоянными γ и γ_0, соответственно.

Теорема 9. Пусть $K^m(t) = diag\left(K_1^m(t), K_2^m(t), K_3^m(t)\right) \in A(\gamma)$ является решением обратной задачи (20) – (24), (27) с данными $g^m(t), \in B(\gamma_0)$, $f_0^m(t)$, $m = 1,2$, соответственно. Тогда существует положительная постоянная C_0, зависящая от чисел $T, \rho, \gamma, \gamma_0, e_i$, $i = 1, 2, 3$ и элементов матрицы $Q(\nu_0)$, такая что справедлива следующая оценка устойчивости:

$$\sum_{i=1}^{3}\left\|K_i^1 - K_i^2\right\|_{C[0,T]} \le C_0\left[\sum_{i=1}^{3}\left\|g_i^1 - g_i^2\right\|_{C^5[0,T]} + \|f_0^1 - f_0^2\|_{C^3[0,T]}\right].$$

Составляется норма разностей, оценивается значения интегралов. Далее применяется неравенство Гроноулла.

Третья глава диссертации называется «**Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты**». В этой главе рассмотрим среду – $\boldsymbol{n}$-слойную структуру с границами раздела $\boldsymbol{x_3^k}$, $\boldsymbol{k = \overline{0, N}}$, $\boldsymbol{x_3^0 = 0}$; $\boldsymbol{k}$-ый слой находится в интервале $[\boldsymbol{x_3^{k-1}}, \boldsymbol{x_3^k}]$, последний $\boldsymbol{N+1}$ (подстилающий) слой есть $[\boldsymbol{x_3^N}, \infty)$, $(-\infty, \boldsymbol{0}]$ – воздух. Физические свойства каждого слоя характеризуются диэлектрической проницаемостью $\boldsymbol{\varepsilon}$, проводимостью $\boldsymbol{\sigma}$ и характеристиками, отвечающими за памяти среды, т.е. данные функции являются кусочно-постоянными функциями переменной $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{0 < x_3} < \infty$, и, например, $\boldsymbol{\varepsilon_k}$ – значение кусочно-постоянной функции $\boldsymbol{\varepsilon(x_3)}$ в -ом слое.

В параграфе 3.1 рассмотрена система интегро-дифференциальных уравнений Максвелла и сведена к уравнению для компоненты электрического поля E_2. Для решения прямой задачи применен метод послойного пересчёта.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений Максвелла

$$\nabla \times H = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)D(x,t) + \sigma E + j, \quad \nabla \times E = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)B(x,t),$$
$$(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+,$$

где D и B – индукции электромагнитного поля, а E и H – напряженность электромагнитного поля, j – плотность сторонних токов, ε – диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость, σ – проводимость среды.

$$D(x,t) = \varepsilon E + \int_0^t \varphi\,(x_3, t-\tau) E(x,\tau) d\tau,$$

где $\varphi(t)$ – скалярная функция времени, характеризующая память среды. Эта функция конечна при всех значениях своего аргумента и стремится к нулю, когда $t \to \infty$

$$B(x,t) = \mu H(x,t),$$

здесь $E = (E_1, E_2, E_3)^T$, $H = (H_1, H_2, H_3)^T$.

Предположим, что источником, возбуждающим электромагнитное поле, является шнуровой источник следующего вида:

$$j = j^0 \delta(x_1, x_3) F(t), \;\; j^0 = (0{,}1{,}0)^T.$$

Считаем, что в начальный момент времени среды находились в покое, т.е.

$$E|_{t<0} \equiv 0, \;\; H|_{t<0} \equiv 0.$$

В этом случае, уравнения Максвелла распадаются на две независимые подсистемы и после несложных преобразований получим уравнение для компоненты электрического поля E_2

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \int_0^t \varphi\,(x_3, t-\tau) \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2}(x_1, x_3, \tau) d\tau + \sigma E_2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 E_2}{\partial x_3^2}. \quad (28)$$

В силу непрерывности тангенцальных компонент электромагнитного поля имеем следующие условия склейки в точках разрыва среды:

$$[E_2]_{x_3^k} = 0, \;\; \left[\frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right]_{x_3^k} = 0. \quad (29)$$

Считаем, что в точке $x_3^0 = 0$ имеем следующие условия:

$$[E_2]_{x_3^0} = 0, \;\; \left[\frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right]_{x_3^0} = \delta(x_1) F'(t), \quad (30)$$

начальные условия:

$$E_2|_{t<0} \equiv 0. \quad (31)$$

Обратная задача**:** определить функцию $\varphi = \varphi(x_3, t)$, если относительно решения прямой задачи (28)-(31) известна дополнительная информация

$$E_2|_{x_3=0} = g(x_1, t). \quad (32)$$

Известно, что для широкого круга сред функция памяти может быть представлена следующей функцией

$$\varphi(x_3, t) = \varepsilon_0 A \mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

Очевидно, что для горизонтально-слоистой среды A и γ являются кусочно-постоянными функциями переменной x_3.

Получим постановку прямой задачи в частотной области. С этой целью сделаем преобразование Фурье по переменной x_1 и преобразование Лапласа по временной переменной t (28). Т.е., имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - r^2 u = 0, \;\; r^2 = \lambda^2 + \sigma p \mu_0 + \mu_0 \varepsilon_0 p^2 \left(\varepsilon_r + \frac{A_k}{\gamma_k + p}\right), \mathrm{Re} r > 0, \quad (33)$$

где u – образ Фурье функции E_2 по переменной x_1 и Лапаласа по t, λ и $p = \beta + i\omega$ – параметры преобразования Фурье и Лапласа, β – параметр затухания, ω – круговая частота, $\omega = 2\pi f$ и f – временная частота.

Условия склейки примут вид

$$[u]_{x_3^k} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]_{x_3^k} = 0, \tag{34}$$

$$[u]_{x_3^0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]_{x_3^0} = \mu p F(p). \tag{35}$$

К данным условиям необходимо добавить условие затухания на бесконечности

$$u \to 0 \ \ (x_3 \to \pm\infty). \tag{36}$$

Дополнительная информация (32) примет вид:

$$u|_{x_3=0} = g(\lambda, p). \tag{37}$$

Обратная задача (33)-(37) в частотной области по определению кусочно-постоянных функций A и γ может быть решена при помощи минимизации функционала невязки

$$J[A, \gamma] = \sum_{k=1}^{N_\omega} | u(\lambda, 0, p) - g(\lambda, p)|^2, \quad p = \beta + i\omega_k \tag{38}$$

где ω_k принадлежит некоторому ограниченному интервалу, N_ω – количество частот из этого интервала, λ – известная постоянная.

Для вычисления функционала невязки (38) необходимо уметь быстро решать прямую задачу (33)-(36) или, говоря более точно, находить значение $u(\lambda, 0, p)$. С этой целью воспользуемся методом послойного пересчёта.

Рассмотрим функцию $y(x_3)$, которая удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = y(x_3) u(x_3), \tag{39}$$

где u есть решение дифференциального уравнения (33). Нетрудно видеть, что функция y удовлетворяет уравнению Риккати

$$y^{'} + y^2 = r^2. \tag{40}$$

Благодаря условиям склейки (34) можно получить условия склейки

$$[y]_{x_3^k} = 0. \tag{41}$$

В каждом -ом слое решение уравнения (40) может быть получено в следующем виде:

$$y(x_3) = r_k \frac{(y^k + r_k) e^{2r_k(x_3 - x_3^k)} + (y^k - r_k)}{(y^k + r_k) e^{2r_k(x_3 - x_3^k)} - (y^k - r_k)},$$

здесь $y^k \equiv y(x_3^k - 0)$.

Из удовлетворения краевого условия (36) следует, что в подстилающем слое $[x_3^N, \infty)$ решение уравнения Риккати (40) имеет вид

$$y(x_3) = -r_{N+1},$$

а в воздухе

$$y(x_3) = r_0.$$

Благодаря условиям склейки (41) имеем $y(x_3^k+0)=y(x_3^k-0)\equiv y^k$.

Условия склейки (35) и равенство (39) позволяют получить следующие соотношения:

$$y(0+0)u(0+0)-y(0-0)u(0-0)=\mu pF(p),\;\; u(0+0)-u(0-0)=0.$$

Откуда следует

$$u(\lambda,0,p)=\frac{\mu pF(p)}{y^0-y(0-0)}.$$

Исходя из выше изложенного можем написать следующий алгоритм нахождения величины $u(\lambda,0,p)$:

- осуществляем послойный пересчет:

$$y^N=-r_{N+1},$$
$$y^{k-1}=r_k\frac{(y^k+r_k)e^{2r_k\left(x_3^{k-1}-x_3^k\right)}+(y^k-r_k)}{(y^k+r_k)e^{2r_k\left(x_3^{k-1}-x_3^k\right)}-(y^k-r_k)},\;\; k=\overline{N,1},$$

  в конце процедуры получаем значение $y^0\equiv y(0+0)$;
- вычисляем $y(0-0)=r_0$;
- вычисляем $u(\lambda,0,p)$:

$$u(\lambda,0,p)=\mu\frac{pF(p)}{y^0-r_0}.$$

В параграфе 3.2 использован метод сопряженных градиентов для минимизации функционала невязки и вычислен градиент функционала невязки.

Поскольку A и γ являются кусочно-постоянными функциями и память -ого слоя характеризуется постоянными значениями A_m и γ_m, тогда функционал невязки $J[A,\gamma]$ (38) можно рассматривать как функцию $2N$ аргументов: $J[\ldots,A_m,\ldots,\ldots,\gamma_m,\ldots]$. Тогда её градиент – это вектор

$$\nabla J[\ldots,A_m,\ldots,\ldots,\gamma_m,\ldots]=\left(\ldots,\frac{\partial J}{\partial A_m},\ldots,\ldots,\frac{\partial J}{\partial \gamma_m},\ldots\right)^T. \tag{42}$$

Рассмотрим следующие неравенства:

$$\Phi(\ldots,A_m,\ldots)\le\Phi(\ldots,A_m+h_A,\ldots)\;\text{ и }\;\Phi(\ldots,A_m,\ldots)\le\Phi(\ldots,A_m-h_A,\ldots), \tag{43}$$

$$\Phi(\ldots,\gamma_m,\ldots)\le\Phi\left(\ldots,\gamma_m+h_\gamma,\ldots\right)\;\text{ и }\;\Phi(\ldots,\gamma_m,\ldots)\le\Phi\left(\ldots,\gamma_m-h_\gamma,\ldots\right). \tag{44}$$

Для вычисления частных производных в (42) могут быть использована следующие выражения:

$$\frac{\partial J}{\partial A_m}=\begin{cases}0, & \text{если выполняются (43)},\\ \dfrac{J(\ldots,A_m+h_A,\ldots)-J(\ldots,A_m-h_A,\ldots)}{2h_A}, & \text{иначе},\end{cases}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_m}=\begin{cases}0, & \text{если выполняются (44)},\\ \dfrac{J\left(\ldots,\gamma_m+h_\gamma,\ldots\right)-J\left(\ldots,\gamma_m-h_\gamma,\ldots\right)}{2h_\gamma}, & \text{иначе}.\end{cases} \tag{45}$$

Будем считать, что зависимость поведения источника от времени определяется функцией

$$F(t) = A_0 e^{-a_0 t} \cos(\omega_0 t).$$

Здесь A_0 – амплитуда источника, параметр a_0 определяет скорость затухания, частота $\omega_0 = 2\pi f_0$ является несущей. В численных экспериментах ниже положим: $A_0 = 10^5$, $a_0 = 10^2$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 500$ МГц.

Отметим, если при решении прямой задачи частота ω близка к ω_0, то решение прямой задачи растет или убывает в значительных пределах (см. Рис. 1).

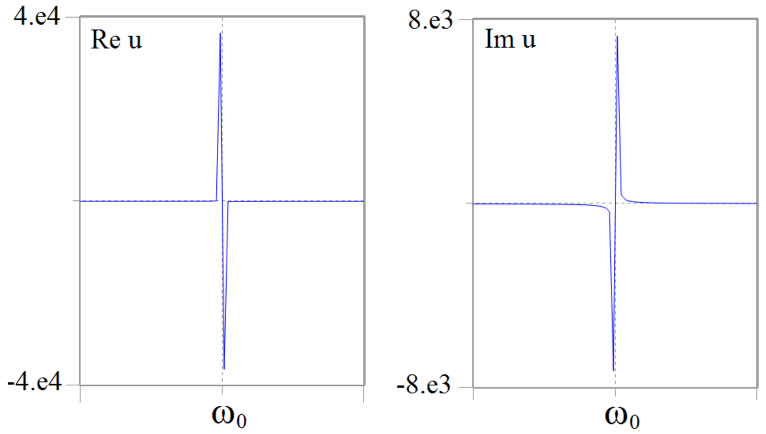


Рис. 1. Поведение величины $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}, \boldsymbol{p})$ при изменении параметра $\boldsymbol{\omega}$ в окрестности $\boldsymbol{\omega_0}$.

Рассмотрим следующую реалистичную модель среды (см. Таб. 1):

Таблица 1

	z_k, м	σ, См/м	ε_r	$A \cdot 10^4$, 1/с	$\gamma \cdot 10^{-8}$, 1/с
воздух	-	0.0	1.0	0.0	0.0
слой 1	0.3	0.0020	20.0	10.0	3.5
слой 2	0.7	0.0022	25.0	25.0	8.8
слой 3	1.0	0.0015	15.0	22.0	7.9
слой 4	1.3	0.0018	20.0	18.0	8.2
слой 5	-	0.0025	25.0	0.0	00

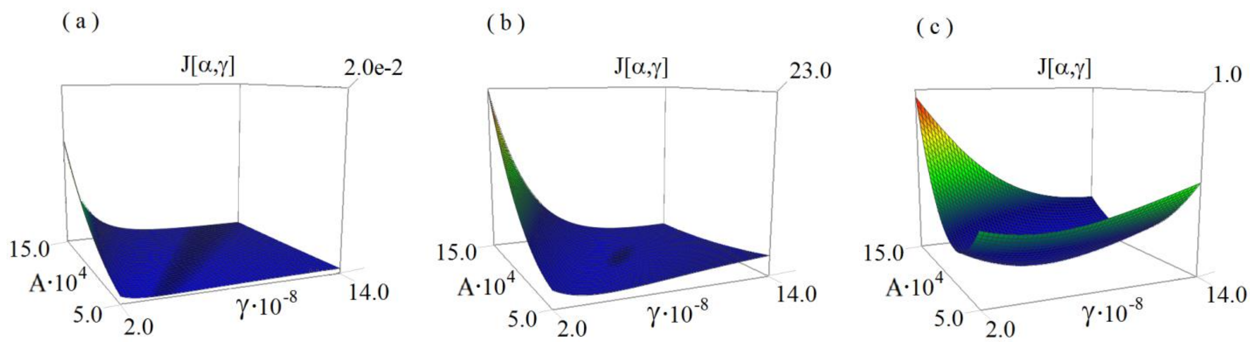


Рис. 2. Примеры поведения функционала невязки при использовании различных интервалов временных частот, a) $f \in [20,80]$ МГц, b) $f \in [200,400] \cup [600,800]$ МГц, c) $f \in [2,8]$ ГГц.

На Рис. 2 приведены примеры поведения функционала невязки, когда выбирались различные интервалы частот. Данный рисунок получен, когда варьировались величины A_1 и γ_1 в достаточно больших пределах, а остальные величины оставались неизменными (варьирование других пар величин $\{A_k, \gamma_k\}$ приводит к подобным результатам).

Результаты численного моделирования показывают, что наибольшие изменения функционала невязки происходят при использовании частот из интервала $[200{,}400] \cup [600{,}800]$ МГц, т.е. на этом интервале частот проявляется наибольшая зависимость комплексной диэлектрической проницаемости от частоты.

В параграфе 3.3 приведено численное решение обратной задачи. Для минимизации функционала невязки (39) используется метод сопряженных градиентов. Т.е., минимизационная последовательность организуется следующим образом:

$$G^{k+1} = G^k - \theta_k P_k, \quad G = \begin{bmatrix} A \\ \gamma \end{bmatrix},$$

где k – номер итерации, G^0 – начальное приближение для искомых функций, P_k – сопряженное направление и

$$P_0 = J'[G^0], \; P_k = J'[G^k] + \beta_k P_{k-1}, \; \beta_k = \frac{\| J'[G^k] \|^2}{\| J'[G^{k-1}] \|^2}, \; k = 1,2,\ldots,$$

параметр θ_k – шаг метода, являющийся решением задачи минимизации функции одной переменной

$$\theta_k = \arg \min_{\theta>0} J\,[G^k - \theta P_k].$$

Тестирование предложенного алгоритма осуществляется на симулированных данных, т.е. при помощи решения соответствующей прямой задачи вычисляются необходимые величины, после чего в значения функций, играющих роль дополнительной информации, добавляется случайная ошибка, например:

$$\tilde{g}(p) = g(p)\left(1 + \frac{Pr}{100}\xi\right),$$

здесь Pr – величина ошибки в процентах, ξ – комплексная случайная величина, равномерно распределённая на единичном круге.

Для численного решения обратной задачи были использованы следующие параметры:

- для построения функционала невязки: т.к. $f_0 = 500$ МГц, используем два интервала $f \in [200{,}400]$ и $[600{,}800]$ МГц, количество временных частот $N_{\omega,1} = 3000$ и $N_{\omega,2} = 3000$ соответственно с равным шагом; $\beta = 10^{-4}$;
- для вычисления градиента функционала невязки: $h_A = 10^{-7}$ и $h_\gamma = 10^{-7}$;
- шаг метода сопряженных градиентов θ_k вычислялся с точностью 10^{-8}.

В обратной задаче определялись параметры памяти среды A_k и α_k ($k = \overline{1,4}$), являющиеся параметрами горизонтально-слоистой среды.

Начальное приближение $A_k = 5 \cdot 10^{-4}$ 1/с и $\alpha_k = 10^8$ 1/с $(k = \overline{1,4})$. Результаты численных экспериментов представлены на Рис. 3.

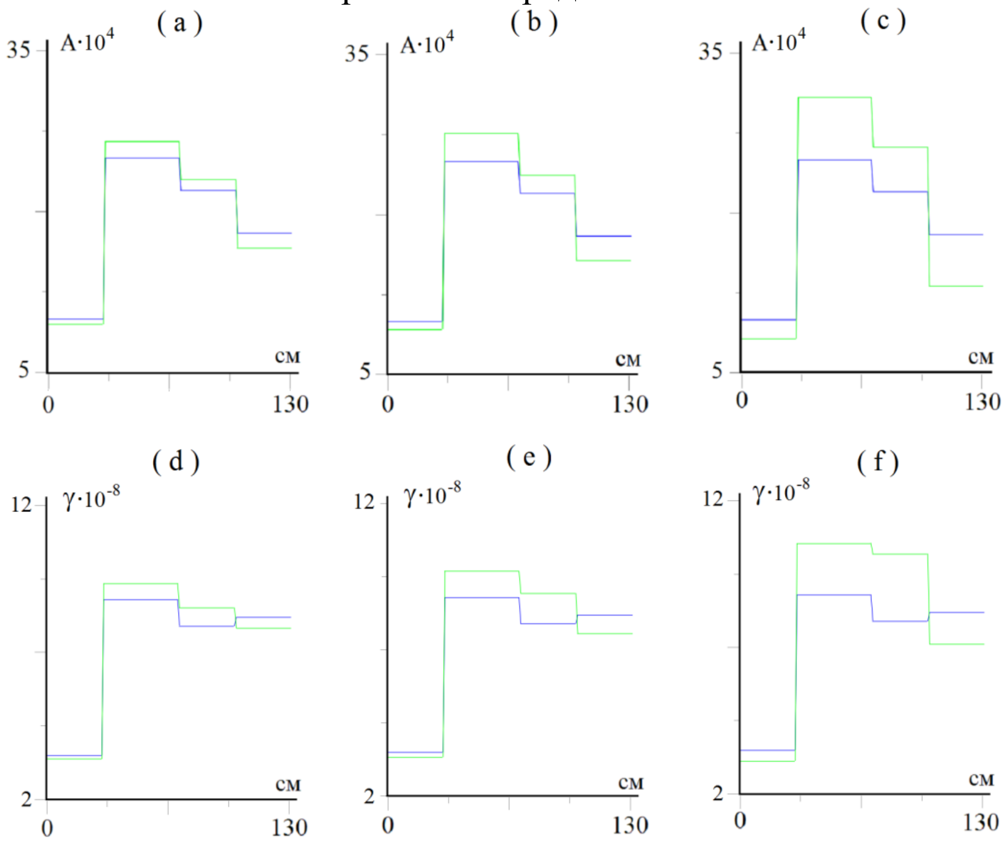


Рис. 3. Примеры восстановления параметров a)-c) $\boldsymbol{A}$, d)-f) $\boldsymbol{\gamma}$; ошибка в данных обратной задачи a), d) 3%, b), e) 5% и c), f) 10%. Точное значение дано синей линией, восстановленное – зелёной.

Анализ восстановленных параметров показывает, что при ошибке 3% в данных обратной задачи (37) максимальная относительная ошибка при восстановлении параметров A_k $(k = \overline{1,4})$ составляет 7%, γ_k $(k = \overline{1,4})$ – 8%. При ошибке 5% — 12% и 13%, при ошибке 10% — 26% и 27% соответственно. Видно, что несмотря на авражность функционала невязки, параметры γ_k востановлены чуть менее хуже чем параметры A_k.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы вопросы корректности двумерных динамических обратных задач определения ядра интегрального члена в интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. Получены методы, с помощью которых обратная задача для интегро-дифференциальных уравнений сводится к решению системы интегральных уравнений второго порядка Вольтеровского типа. Рассмотрены обратные задачи для широкого класса гиперболических интегро-дифференциальных уравнений с интегральным оператором в правой части типа свертки.

Представлен численный метод определения параметров функции памяти для горизонтально-слоистой среды.

- Получены дифференциальные свойства решения начально-краевой задачи гиперболического интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа свёртки с нулевым начальным условием и сосредоточенным источником возмущения на границе. Доказаны теоремы существования, единственности и условной устойчивости решения обратной задачи определения двумерного ядра по заданному в точке $x = 0$ решению прямой задачи.
- Исследована однозначная разрешимость прямой задачи, состоящей в определении решения начально-краевой задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения типа свёртки с трёхмерным свёрточным ядром. Доказаны теоремы существования, единственности и условной устойчивости решения обратной задачи, нахождения пространственной части ядра интегрального члена.
- Исследована задача Коши для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах. Изучены задачи определения диагональной матричной функции из системы уравнений вязкоупругости. Доказаны теоремы локальной однозначной разрешимости и установлена оценка условной устойчивости решения обратной задачи.
- Для горизонтально - слоистой среды построен численный метод по определению зависимости диэлектрической проницаемости от частоты из системы уравнений Максвелла с памятью. Численное моделирование позволило выбрать оптимальный интервал частот для построения функционала невязки. Представлены численные примеры, иллюстрирующие решения обратной задачи.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKY

BUKHARA STATE UNIVERSITY

DURDIEV UMIDJON DURDIMURATOVICH

INVESTIGATION THE PROBLEMS OF DETERMINING THE SPECIAL TWO-DIMENSIONAL KERNELS IN HYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.2.PhD/FM460.

Dissertation has been prepared at the department of Mathematics, Bukhara state university.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz/ and in the website «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific superviser:	**Karchevsky Andrey Leonidovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Russian)
Official opponents:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Urazboyev Gayrat Urazaliyevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Samarkand state university**

Defense will take place «10» July 2020 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy. (Address: Mirzo Ulugbek str. 81, Mirzo Ulugbek area, Tashkent city, 100170, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 262-75-44, fax: (+99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered №103) (Address: Mirzo Ulugbek str. 81, Mirzo Ulugber area, Tashkent city, 100170, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 262-75-44.)

Abstract of dissertation sent out on «11» July 2020 year
(Mailing report № 3 on «11» July 2020 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

U.A. Roziqov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Professor

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, PhD, senior researcher

A.A. A'zamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Academician

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The urgency and relevance of the dissertation topic. For the first time, the inverse problem was formulated at the beginning of the 20th century as the inverse kinematic problem of seismic, and today the theory of such problems is a rapidly developing area of modern mathematics. Since the end of the last century, inverse problems arose for finding the kernel in hyperbolic integro-differential equations of the convolution type with respect to the time variable for measuring the corresponding fields in accessible places. In the mathematical modeling of some processes in the natural sciences, the describing integro-differential equations of the convolution type meet the so-called memory systems, the behavior of which depends on the entire history of the process. With this in mind, the correct mathematical modeling and the study of the correctness of direct and inverse problems for integro-differential equations of electromagnetic and elastic wave propagation in media with memory, as well as the development of effective computational algorithms for such problems are of both theoretical and practical interest. Therefore, the studies in this thesis are very relevant.

The aim of the research work is to construct methods for solving the problems of determining the special two-dimensional kernels in hyperbolic integro-differential equations of convolution type, and to study the uniqueness, stability, and existence of the solution of these inverse problems.

The tasks of the research work. Studying unique solvability and obtaining stability estimates for the solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic integro-differential equation with two and three dimensional kernel of the Investigation of the inverse problem of finding the special kernels by the solution of the direct problem known at the point x = 0. Formulation and study of the Cauchy problem for a system of viscoelastic equations in homogeneous anisotropic media. Studying the problem of determining the diagonal matrix kernel from the system of viscoelastic equations. Obtaining theorems of existence, uniqueness, and stability estimates. The construction of a numerical method for determining the dependence of the dielectric constant of a layered medium on the time frequency in the system of equations of electrodynamics with memory.

The object of the research work is hyperbolic convolution-type integro-differential equations.

The scientific novelty of the research work is as follows:

The unique solvability of the direct problem, which consists in determining the solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic integro-differential equation of convolution type with two and three-dimensional convolution kernels, was investigated. The existence, uniqueness and conditional stability theorems of solving the inverse problems of finding the time and spatial variables depending kernel and the spatial part of the kernel of the integral term are proved.

The Cauchy problem for the system of viscoelastic equations in homogeneous anisotropic media is investigated. The problems of determining the diagonal matrix function from the system of viscoelastic equations are studied. The local unique solvability theorems are proved and the conditional stability estimate for the solution of the inverse problem is established.

For a horizontally layered medium, a numerical method was constructed to determine the dependence of the dielectric constant on frequency from the Maxwell system of equations with memory.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Дурдиев У.Д., Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты // Сибирские Электронные Математические Известия, 17 (2020), стр. 179-189. (3. Scopus IF: 0,35).
2. Durdiev U.D., A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Eurasian journal of mathematical and computer applications, 7:2 (2019), pp. 4–19. (3. Scopus IF: 0,42).
3. Durdiev U.D., Totieva Z.D., A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences - John Wiley & Sons, 42:18 (2019), pp. 7440–7451. (2. Journal IF:1,84).
4. Durdiev U.D., An Inverse Problem for the System of Viscoelasticity Equation in the Homogeneous Anisotropic Media // Journal of Applied and Industrial Mathematics - Springer, 13:4 (2019), pp. 1-8. (2. Journal IF: 0,58).
5. Дурдиев У.Д., Задача определения ядер из двумерной системы интегро-дифференциальных уравнений Максвелла // Научный Вестник Бухарского Государственного Университета. 70:2 (2018), стр. 21 – 27. (01.00.00; №3)
6. Дурдиев Д.К., Дурдиев У.Д., Устойчивость решения обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Максвелла в однородной анизотропной среде // Узб. Матем. Жур. №2 (2014), стр. 25 – 34. (01.00.00; №6)

II бўлим (Часть II; Part II)

7. Дурдиев У.Д., Устойчивость решения обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Максвелла в однородной анизотропной среде // «Математика, физика ва ахборот технологияларининг долзарб муаммолари» мавзусидаги Республика миқёсидаги онлайн илмий-амалий анжумани (Бухоро, 2020 йил 15 апрель), 192-193 б.
8. Durdiev U.D., Totieva Zh.D., A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XV Международной научной конференции (с. Цей, 15-20 июля 2019 г.), стр. 116-117.
9. Дурдиев У.Д., Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XV

Международной научной конференции (с. Цей, 15-20 июля 2019 г.), стр. 118-120.

10. Дурдиев У.Д., Тотиева Ж.Д. Численное решение обратной задачи определения ядра уравнения вязкоупругости // Современные методы в теории обратных задач и смежные вопросы (г. Теберда, 20-23 сентября 2017 г.), стр. 12-13.

11. Umidjan D. Durdiev, A problem for identification of a special 2d memory kernel in an integro – differential hyperbolic equation // “Академик Тошмуҳаммад Ниёзович Қори-Ниёзийнинг ҳаёти ва ижоди” мавзусидаги чет эл олимлари иштирокида илмий-амалий конференция (Тошкент, 7-8 сентябрь 2017 йил), 20-23 б.